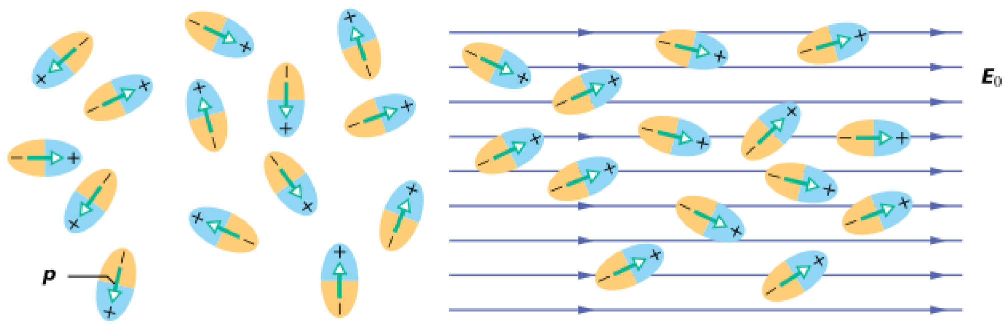
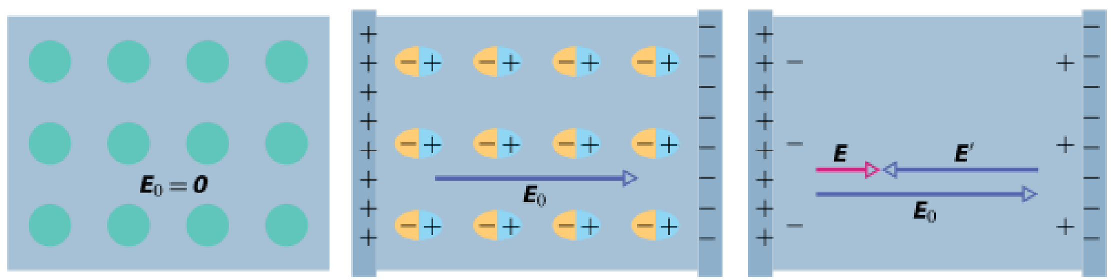
Dielektrika v elektrickém poli

- látka složená z permanentních dipólů



- látka složená z polarizovatelných částic

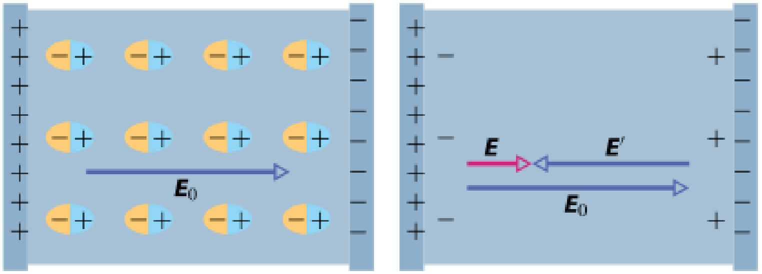


bez vnějšího pole

polarizace v důsledku vnějšího pole

celkové el.-stat. pole v dielekriku

Dielektrika v elektrickém poli



- Tyto dva obrázky platí pro oba (všechny) případy typů dielektrik.
- Polarizace zmenšuje elektrické pole v dielektriku vzhledem k poli ve vakuu.
- Míra polarizace dielektrika je dána jeho mikroskopickými vlastnostmi a termodynamickou rovnováhou.

Tabulka 26.1 **Některé vlastnosti dielektrik**[a]

MATERIÁL	ε_r	$\frac{E_{max}}{kV \cdot mm^{-1}}$
vzduch[b]	1,000 54	3
polystyren	2,6	24
papír	3,5	16
transformátorový olej	4,5	
pyrex (varné sklo)	4,7	14
slída	5,4	
porcelán	6,5	
křemík	12	
germanium	16	
ethanol	25	
voda (20 °C)	80,4	
voda (25 °C)	78,5	
titanová keramika	130	
titaničitan strontnatý	310	8

Pro vakuum je $\varepsilon_r = 1$.

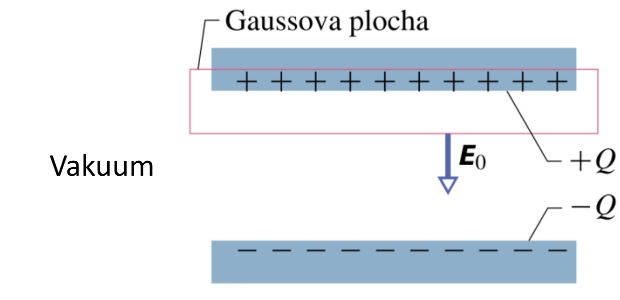
[a] měřeno při 20 °C, není-li uvedeno jinak
[b] za normálních podmínek

- Relativní permitivita ε_r: charakterizuje zvětšení kapacity deskového kondenzátoru v případě nahrazení vakua mezi deskami dielektrikem.

$$\varepsilon_r = \frac{U_0}{U} = \frac{C}{C_0}$$

- (Absolutní) permitivita: $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

Gaussův zákon v dielektriku



(a)

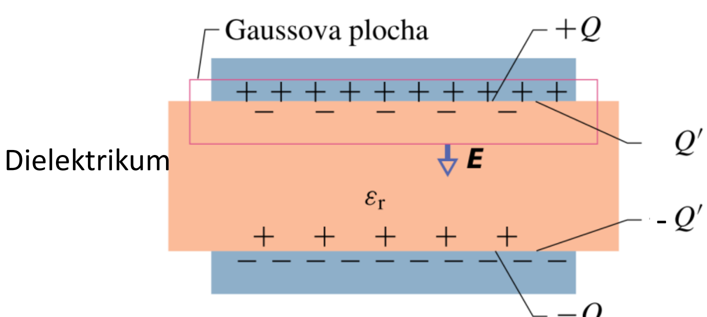
Q - volný náboj

$$\varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E_0}.\boldsymbol{dS} = Q \qquad E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

Q' - vázaný náboj

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} + \boldsymbol{E}'$$

$$\varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS} = Q + Q' \qquad E = \frac{Q + Q'}{\varepsilon_0 S}$$



$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S} \longrightarrow Q + Q' = \frac{Q}{\varepsilon_r}$$

Definice - **elektrická indukce** $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$

Gaussův zákon pro dielektrikum:

$$\boxed{\varepsilon_0 \oint_S \varepsilon_r \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS} = \oint_S \boldsymbol{D}.\boldsymbol{dS} = Q}$$

- Q - jen **volný** náboj, vázaný náboj je implicitně zahrnutý skrze ε_r.

Elektrostatické pole v dielektriku - souhrn vztahů

$Q_C = Q + Q'$ $\qquad$ Q_C, ρ_C celkový náboj $\qquad$ $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} + \boldsymbol{E}'$

$\rho_C = \rho + \rho'$

$$\boxed{\varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS} = Q + Q'} \qquad \boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho_C}{\varepsilon_0}}$$

Obecný Gaussův zákon

$$\boxed{\varepsilon_0 \oint_S \varepsilon_r \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dS} = \oint_S \boldsymbol{D}.\boldsymbol{dS} = Q} \qquad \boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho}$$

Gaussův zákon pro dielektrikum
explicitně jen volný náboj

$$Q' = \int_V \rho_v(\boldsymbol{r}')dV = -\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{P}\, dV = -\oint_S \boldsymbol{P}.\boldsymbol{dS}$$

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}}$$

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl} = 0} \qquad \boxed{\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0}$$

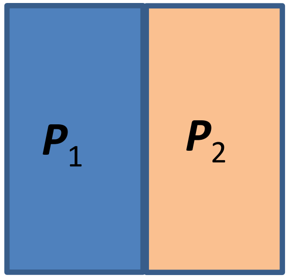
platí stále i v případě dielektrik !!!
el.-stat. pole je konzervativní = potenciálové

Elektrostatické pole v dielektriku - nespojitost na rozhraní dvou dielektrik

$$(\boldsymbol{E_1} - \boldsymbol{E_2}).\boldsymbol{n} = \frac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_C = \sigma + \sigma'$$

$$(\varepsilon_0 \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{P_1}).\boldsymbol{n} - (\varepsilon_0 \boldsymbol{E_2} + \boldsymbol{P_2}).\boldsymbol{n} = \sigma$$



$$\boxed{(\boldsymbol{D_1} - \boldsymbol{D_2}).\boldsymbol{n} = \sigma} \qquad \boxed{\mathrm{Div}\boldsymbol{D} = \sigma}$$

$$\boxed{E_{1t} - E_{2t} = 0} \qquad \boxed{\mathrm{Rot}\boldsymbol{E} = 0}$$

neplatí podobný vztah pro $D_{1\mathrm{t}}$ a $D_{2\mathrm{t}}$

Materiálové vztahy pro elektrické pole v dielektriku

- Vztah mezi ***E***, ***D***, ***P*** - závisí na vlastnostech dielektrika, nelze definovat obecně.
- Extrémní situace:

  ideálně tvrdé dielekrikum: ***P(r)*** = konst. (nezávisí na ***E(r)***)

  ideálně měkké dielektrikum: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \chi_c \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

- χ_c - elektrická susceptibilita - bezrozměrné číslo
- ε_r - relativní permitivita, $\varepsilon_r = 1 + \chi_c$
- ε - permitivita

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

- je-li dielektrikum nehomogenní $\Rightarrow \varepsilon$ je tenzor

$$D_x = \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z$$
$$D_y = \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z$$
$$D_z = \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z$$

$$\boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{E}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Energie elektrostatického pole v dielektriku

- Využijeme dříve odvozeného vztahu pro energii el. pole v kondenzátoru.
- Pp. ideálně měkké izotropní dielektrikum
- Objemová hustota

$$w = \frac{\varepsilon}{2}E^2 = \frac{1}{2\varepsilon}D^2 = \frac{\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}}{2}$$

- Potenciální energie dielektrického tělesa, vloženého do el.-stat. pole: těleso o objemu *V* je nutné vnějším polem zpolarizovat

$$\delta w = -\boldsymbol{P}.\boldsymbol{\delta E_0} \qquad \delta W = -\int_V (\boldsymbol{P}.\boldsymbol{\delta E_0})dV$$

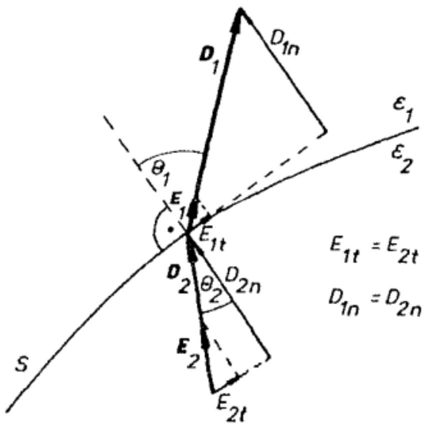
$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi_c\boldsymbol{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\boldsymbol{E_0}$$

$$w = -\int_0^{E_{0f}} \boldsymbol{P}.d\boldsymbol{E_0} = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\int_0^{E_{0f}} \boldsymbol{E_0}.d\boldsymbol{E_0} = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\boldsymbol{E_{0f}^2} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{P}.\boldsymbol{E_0}$$

$$W = -\frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{P}.\boldsymbol{E_0})dV$$

- $(\boldsymbol{P}.\boldsymbol{E_0}) > 0$ v měkkém dielektriku $\Rightarrow$ *W* záporná a klesá s růstem E_0
- Těleso bude vtahováno do oblasti silnějšího pole (cf. chování dipólu)

Elektrické pole na rozhraní dvou dielektrik



- Plocha S je rozhraním dielektrik ε_1, ε_2.
- Spojité tečné složky *E*.
- Nejsou volné náboje na S $\Rightarrow$ spojité normálové složky ***D.***

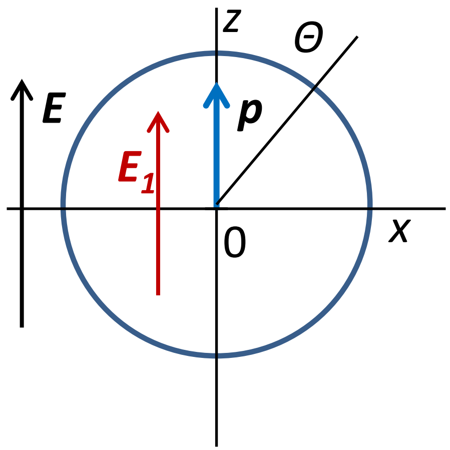
$$E_1 sin\theta_1 = E_2 sin\theta_2 \qquad \boldsymbol{D_1} = \varepsilon_1 \boldsymbol{E_1}$$

$$D_1 cos\theta_1 = D_2 cos\theta_2 \qquad \boldsymbol{D_2} = \varepsilon_2 \boldsymbol{E_2}$$

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

- cf. Snellův zákon dopadu a odrazu.

Dielektrická koule v homogenním elektrostatickém poli



- Nekonečné dielektrikum ε_2 s homogenním polem ***E***.
- Vložíme kouli o permitivitě ε_1.
- Koule se zpolarizuje s ***P*** = konst.. Pole uvnitř koule bude homogenní $\boldsymbol{E_1} = c_1\boldsymbol{E}$.
- Pole vně bude superpozicí homogenního pole a pole dipólu $\boldsymbol{p} = V\boldsymbol{P}$.

$$\boldsymbol{E_2} = \boldsymbol{E} + c_2\left(\frac{3ez\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{E}}{r^3}\right)$$

- konstanty c_1, určíme z hraničních podmínek: $\boxed{(\boldsymbol{D_1} - \boldsymbol{D_2}).\boldsymbol{n} = \sigma = 0}$

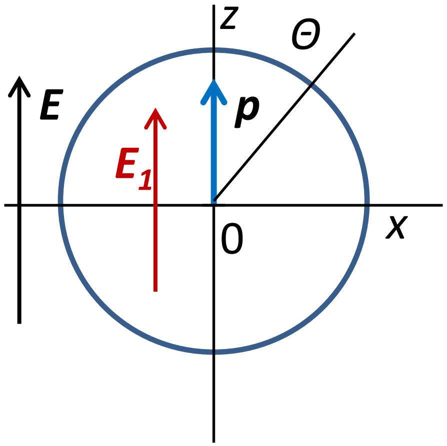
$$\boxed{E_{1t} - E_{2t} = 0}$$

$$c_1E_1sin\theta = Esin\theta - c_2\frac{Esin\theta}{R^3}$$

$$\varepsilon_2c_1E_1cos\theta = \varepsilon_1\left[Ecos\theta + c_2\left(\frac{3Ecos\theta}{R^3} - \frac{Ecos\theta}{R^3}\right)\right]$$

Pozn. : Indexy ε_2, ε_1 jsou opačně než v Sedlák-Štoll, zde 1 se týká koule, 2 okolí

Dielektrická koule v homogenním elektrostatickém poli



$$c_1 E sin\theta = E sin\theta - c_2 \frac{E sin\theta}{R^3}$$

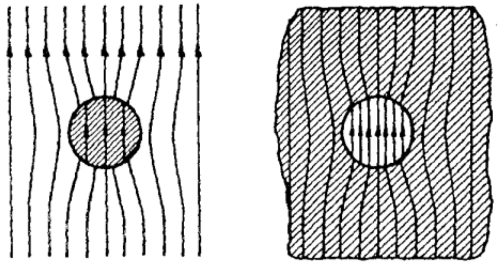
$$\varepsilon_1 c_1 E cos\theta = \varepsilon_2 \left[E cos\theta + c_2 \left(\frac{3E cos\theta}{R^3} - \frac{E cos\theta}{R^3} \right) \right]$$

$$c_1 = 1 - \frac{c_2}{R^3} \qquad c_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

$$\varepsilon_1 c_1 = \varepsilon_2 \left[1 + c_2 \frac{2}{R^3} \right] \qquad c_2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) R^3}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

- intenzita pole uvnitř koule:

$$\boldsymbol{E_1} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \boldsymbol{E}$$



- Pole v kouli je slabší vzhledem k E.
- Pole v dutině by bylo silnější vzhledem k E.

Pozn. : Indexy ε_2, ε_1 jsou opačně než v Sedlák-Štoll, zde 1 se týká koule, 2 okolí

Dielektrická koule v homogenním elektrostatickém poli

- dielektrická koule ve **vakuu**: $\boldsymbol{E_1} = \dfrac{3}{\varepsilon_{r1} + 2}\boldsymbol{E}$ $\qquad$ $\boldsymbol{P} = 3\varepsilon_0 \dfrac{\varepsilon_{r1} - 2}{\varepsilon_{r1} + 2}\boldsymbol{E}$

- $\boldsymbol{E}_1$ lze získat i jako superpozici pole polarizované koule (s využitím dřívějšího vztahu) a vnějšího (původně homogenního) pole.

$$\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{E} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1)\boldsymbol{E_1}$$

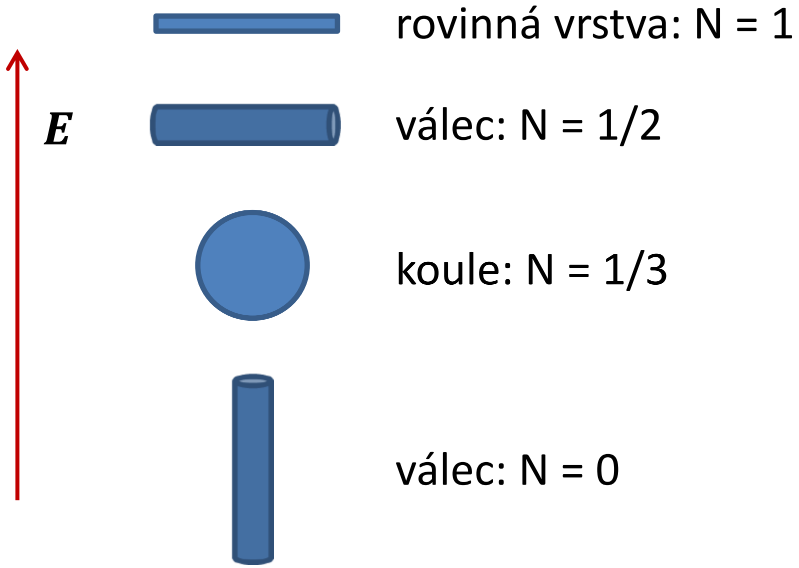
- Celý indukovaný dipólový moment koule: $\boldsymbol{p} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \boldsymbol{P} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \dfrac{\varepsilon_{r1} - 2}{\varepsilon_{r1} + 2}\boldsymbol{E}$

- pro $\varepsilon_{r1} \to \infty$: indukovaný moment vodivé koule
- homogenní pole uvnitř - obecná vlastnost těles tvaru elipsoidu včetně limitních případů

Dielektrická koule v homogenním elektrostatickém poli

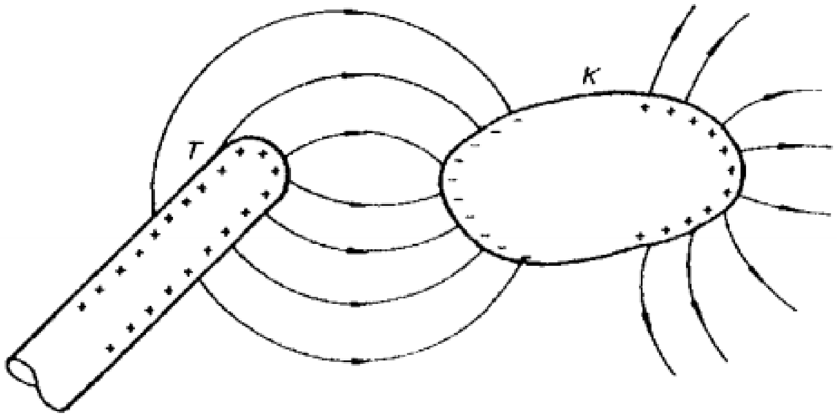
- homogenní pole uvnitř - obecná vlastnost těles tvaru elipsoidu včetně limitních případů jako „dlouhý“ válec či rovinná vrstva

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{E} - \frac{N}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{E}_{\mathbf{1}} = \frac{1}{1 + N(\varepsilon_{r1} - 1)}\boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r1} - 1}{1 + N(\varepsilon_{r1} - 1)}\boldsymbol{E}$$



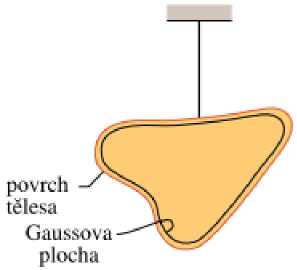
Vodič v elektrickém poli

- Náboje ve vodiči jsou volně pohyblivé.
- Při vložení vodiče do elektrostatického pole reagují náboje (jejich rozmístění) na toto pole.
- = elektrostatická indukce.



- Výsledné elektrostatické pole je dáno výsledným rozmístěním nábojů.
- V elektrostatice neřešíme kinetiku - průběh ustavování rovnováhy.

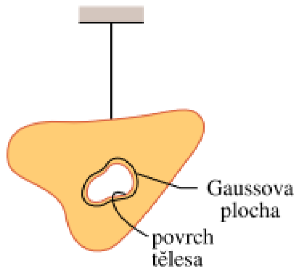
Nabitý izolovaný vodič



Měděné těleso nesoucí náboj Q je zavěšené na nevodivém vláknĕ. Gaussova plocha se nachází těsně pod povrchem tělesa.

- Uvnitř vodiče ***E***=0 -- jinak by na volné elektrony působila síla a vodičem by protékal proud $\Rightarrow$ ***E***=0 na Gaussově ploše $\Rightarrow$ z G.z. náboj uzavřený Gaussovou plochou *Q*=0.
- Potenciál v celém vodiči je konstantní.
- Náboje se ve vodiči rozmístí tak, aby svým polem kompenzovaly vnější elektrostatické pole.
- Při změně vnějšího pole dojde ke změně rozmístění volných nábojů.

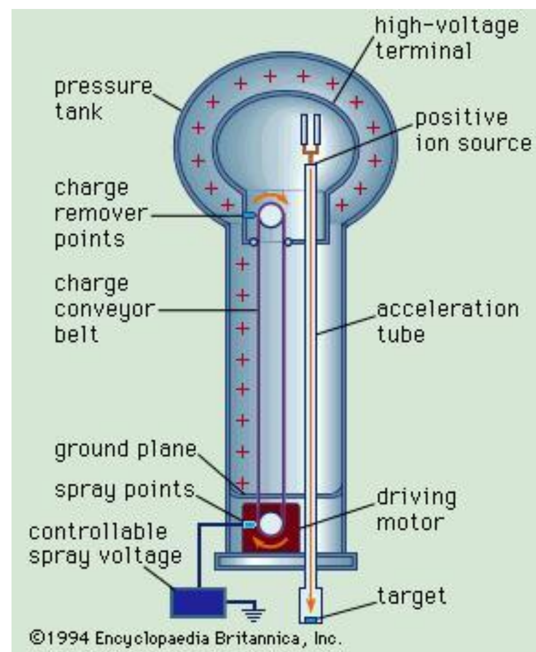
Nabitý izolovaný vodič s dutinou



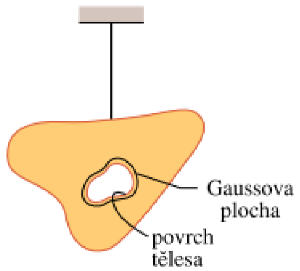
V tělese je nyní vytvořena dutina. Gaussova plocha se nachází v tělese a těsně obepíná dutinu.

E =0 na Gaussově ploše $\Rightarrow$ z G.z. náboj uzavřený Gaussovou plochou Q=0.
Všechen přivedený náboj je tedy rozložen na vnějším povrchu vodiče.

Aplikace: Van den Graafův generátor:



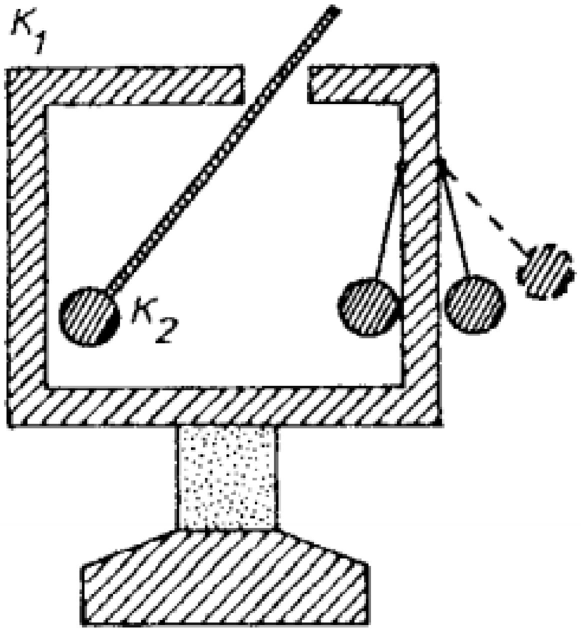
Nabitý izolovaný vodič s dutinou



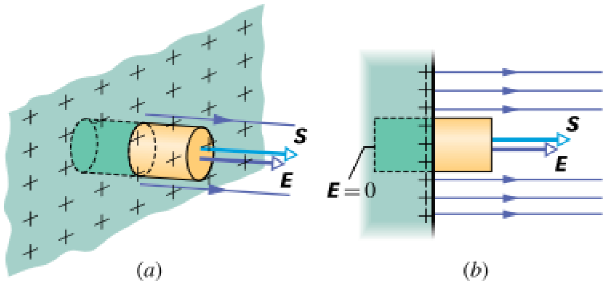
V tělese je nyní vytvořena dutina. Gaussova plocha se nachází v tělese a těsně obepíná dutinu.

E =0 na Gaussově ploše $\Rightarrow$ z G.z. náboj uzavřený Gaussovou plochou Q=0.
Všechen přivedený náboj je tedy rozložen na vnějším povrchu vodiče.

Aplikace: Faradayova klec:



Elektrické pole těsně nad povrchem vodiče



Na obecném povrchu je obecně v různých bodech různá hustota náboje $\boldsymbol{\sigma}$.
Gaussova plocha ve tvaru nízkéhoválečku, podstavy rovnoběžné s povrchem vodiče.

Podle G. z. (tok podstavou):

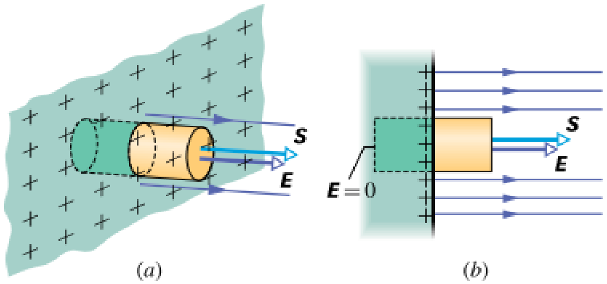
$$\varepsilon_0 E S = \sigma S,$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{(vodivý povrch).}$$

též: Coulombova věta

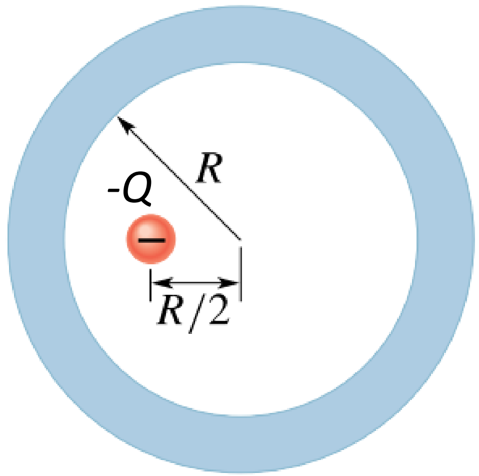
V blízkosti povrchu vodiče je elektrické pole dáno jen rozmístěním nábojů na v místě na povrchu.

Elektrické pole těsně nad povrchem vodiče

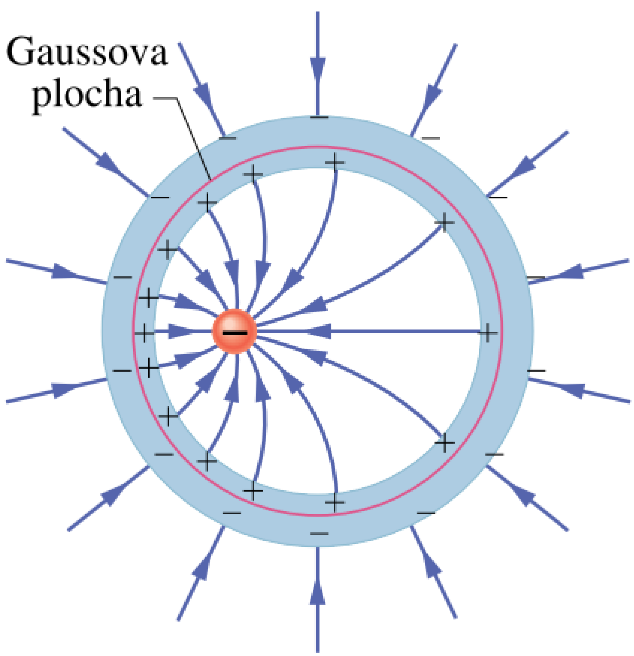


V případě nerovinného povrchu vodiče lze tento příklad považovat za aproximaci - volíme průměr válečku dostatečně malý, aby povrch bylo možné považovat za rovinný.
El.-stat. pole je vždy kolmé k povrchu $\Rightarrow$
v místě velkých nerovností povrchu - velká nehomogenita pole.
Siločáry u hran a ostrých výstupků se zhušťují - velké lokální pole = velký gradient potenciálu = velký rozdíl potenciálu mezi blízkými místy = vysoké napětí.

Kulová kovová vrstva, náboj v dutině



Jaké náboje budou indukovány na její vnitřní a vnější stěně, je-li vrstva elektricky neutrální?

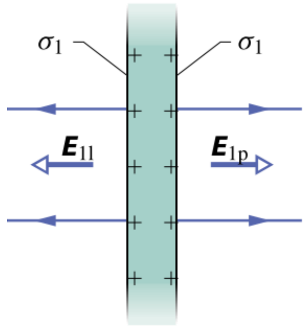


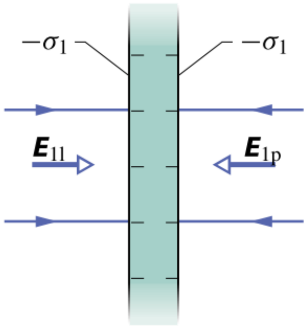
Na vnitřní stěně se indukuje náboj +*Q,*
Nerovnoměrné rozložení.

.

Na vnější stěně se indukuje náboj -*Q.*
Rovnoměrné rozložení!!!!

Tenké vodivé desky

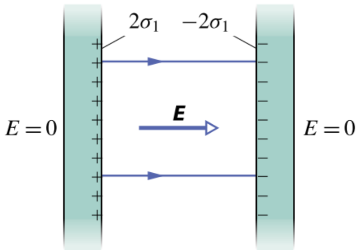




Řezy tenkými, nekonečnými vodivými deskami, na něž je přiveden kladný, resp. záporný náboj s plošnou hustotou σ_1.

$E_1 = \sigma_1/\varepsilon_0$

Roviny přisunuté k sobě:
Všechny volné náboje je přemístí na vnitřní povrchy



$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Homogenní pole ***E***.