Pro $x \in \mathbb{R}$ umíme odpovědět otázku, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje, diverguje či osciluje. Skutečně, protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ konverguje dle limitního d'Alembertova kritéria pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)} \frac{n}{|x|^n} < 1$, což je ekvivalentní požadavku $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} |x| < 1 \iff |x| < 1$, dostáváme, dle $\boxed{\text{Kritéria AK} \Rightarrow \text{K}}$, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje pro $x \in (-1,1)$ (dokonce absolutně).

Dále víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n}$ neexistuje nebo není nulová pro $x \in \mathbb{R}$ taková, že $|x| > 1$. (Pro $x > 1$, posloupnost $\left\{\frac{x^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje; pro $x < -1$, — " — $\left\{\frac{x^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje)

Tedy, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pro $x > 1$ diverguje a pro $x < -1$ nekonverguje (osciluje). Zbývají body $x = \pm 1$. Pro $x = 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (viz Příklad 5), zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (ale ne absolutně), viz Příklad 12.

Motivací pro další výklad bude otázka:
Pro jaká $z \in \mathbb{C}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje, diverguje, osciluje?

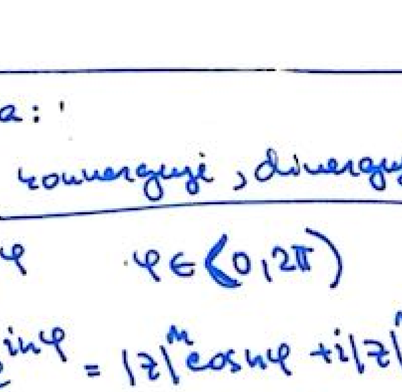
Protože pro $z \in \mathbb{C}$: $z = |z| e^{i\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

a $z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n \cos n\varphi + i |z|^n \sin n\varphi$

tak stejnými metodami jako pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 1$, zjistíme, že

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje (dokonce absolutně) pro $|z| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ diverguje nebo osciluje pro $|z| > 1$.

Zbývá vyšetřit $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ tzn. z ležící na jednotkové kružnici neboli z tvaru $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.



Přitom víme, že na jednotkové kružnici je bod $(z = 1)$, kdy řada diverguje a bod $(z = -1)$, kdy řada konverguje.

Zajímá nás tedy co se děje v ostatních bodech jednotkové kružnice.
Připomeňme si, že zkoumání konvergence řady $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}}$ je ekvivalentní zkoumání konv. řad $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}}$ a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}}$

Všimněme si, že tyto řady lze psát ve tvaru

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, kde $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = e^{in\varphi}$ či $\sin n\varphi$ nebo $\cos n\varphi$.

Řadami typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ se nyní budeme zabývat. Začneme jedním technickým tvrzením, které lze interpretovat jako diskrétní verzi integrace per-partes.

Lemma (Diskrétní verze integrace per-partes) Pro $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ platí:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \text{kde } B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i .$$

Dk) Protože $b_1 = B_1$ a $b_k = B_k - B_{k-1}$ pro $k \geq 2$, píšeme

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=2}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) + a_1 B_1$$

$$= a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 - a_3 B_2 + \dots + a_m B_m - a_m B_{m-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

Skutečnost, že sčítáme v Lemmatu od $k=1$, nehrála v důkazu žádnou roli; máme tedy také: pro $m > n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\boxed{(6) \quad \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \text{kde } B_k := \sum_{i=n+1}^{k} b_i}$$

$\boxed{\text{Věta 6.11}}$ (Abelovo a Dirichletovo kritérium)

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ monotónní. Buď $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Dále nechť:

$\boxed{\text{BUĎ}}$

(DIR) $a_n \to 0$ pro $n \to \infty$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezenou posloupnost částečných součtů,

NEBO

(ABEL) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje

Dk Chceme ukázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje B.-C. podmínku: K danému $\varepsilon > 0$ hledáme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall\, m \geq n \geq n_0$: $\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k < \varepsilon$.

Definujeme-li $B_k := \sum_{i=n+1}^{k} b_i$, tak z předchozí lemmy a(6) dostáváme:

$$(\bullet) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leq |a_m| |B_m| + \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |B_k| \sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k|$$

Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní, tak $|a_{k+1} - a_k| = \begin{cases} a_{k+1} - a_k & \text{je-li } \{a_k\} \text{ rostoucí resp. neklesající}, \\ a_k - a_{k+1} & \text{je-li } \{a_k\} \text{ klesající resp. nerostoucí}. \end{cases}$

Tedy $\{|a_{k+1} - a_k|\}_{k=1}^{\infty}$ je teleskopická a platí:

$$\sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| = \pm [a_m - a_{n+1}]$$

Tedy odsud a z $(\bullet)$:

$$(\bullet\bullet) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leq 3 \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |a_k| \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |B_k|.$$

K výše danému $\varepsilon > 0$, za předpokladu (DIR), $\exists\, M > 0$ tak, že $\forall\, k \geq 1$ $|B_k| \leq M$, a také existuje n_0 tak, že $\forall\, m \geq n \geq n_0$: $\max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |a_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Tedy z $(\bullet\bullet)$: $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < \varepsilon$

Za předpokladu (ABEL), $\exists\, L > 0$ tak, že $\forall\, k \geq 1$ $|a_k| < L$ a k danému $\varepsilon > 0$ najdeme z B-C. podmínky pro konvergující řadu $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $m \geq n \geq n_0$: $|B_k| < \frac{\varepsilon}{3L}$.

Tedy opět z $(\bullet\bullet)$: $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < \varepsilon$. ∎

Příklady (13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ jevně konverguje, neboť dle předchozího Dirichletova kritéria posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a splňuje $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Zbývá ověřit, že posloupnost částečných součtů posloupnosti $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ s $b_k := e^{ik\varphi}$ je omezená. Avšak z Gaussova vzorce pro součet geometrické řady máme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}.$$

Tedy

$$|S_n|_{\mathbb{C}} \leq |e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}} \frac{|1 - e^{i(n+1)\varphi}|_{\mathbb{C}}}{|1 - e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{1 - \cos\varphi} =: M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

kde jsme využili $|1 - \cos\varphi - i\sin\varphi|_{\mathbb{C}}^2 = (1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \geq (1 - \cos\varphi)^2$.

Speciálně jsme také ukázali, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje pro $x \in (0, 2\pi)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$. $\boxtimes$

(14) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} k$ konverguje neboť:

- $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} := \{\operatorname{arctg} k\}_{k=1}^{\infty}$ je omezená a monotónní

a

- pro $b_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konverguje dle Leibnizova kritéria. $\boxtimes$

(15) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje, neboť $\sin^2 k = \frac{1 - \cos 2k}{2}$ a tedy

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{\cos 2k}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k} \right] \quad (✿)$$

protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}$ konverguje dle Dirichletova kritéria. OVĚŘTE.

Kdyby $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ konvergovala, tak z (✿) by plynulo, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konverguje, což je spor a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje.

6.3 Mohutnost (kardinalita) čísel. Přerovnání řad.

Buď $M \neq \emptyset$ množina prvků. Mohutnost množiny udává počet prvků množiny M. Ačkoliv jsme zvyklí porovnávat počty prvků v každodenním životě, i tento proces našeho myšlení vyžaduje jistou abstrakci a „ztotožnění". Cílem našeho povídání bude porovnat mohutnost nekonečných množin.

Definice Řekneme, že $\emptyset \neq M$ je konečná, pokud existuje $L \in \mathbb{N}$ a existuje $\varphi : N_L \xrightarrow{na} M$ prosté, kde $N_L := \{n \in \mathbb{N};\ n \leq L\}$.

Množina M je
- nekonečná, není-li konečná
- spočetně (nekonečná), jestliže existuje $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} M$ prosté. V tomto případě lze prvky M psát ve tvaru: $M = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$
- (spočetná) je-li konečná nebo spočetně nekonečná
- nespočetná, není-li spočetná.

Georg Cantor

D. Hilbert (1900): „Nikdo nás nevyžene z ráje, který pro nás připravil Cantor.

Příklad Uvažujme $\mathbb{N}_{sudé} = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$. Pak z množinového pohledu $\mathbb{N}_{sudé} \subsetneqq \mathbb{N}$. Z pohledu kardinality, tj. kolik prvků tyto množiny mají, jsou však $\mathbb{N}_{sudé}$ a $\mathbb{N}$ stejně velké neboť $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_{sudé}$ definované $\varphi(k) = 2k$ je prosté a na.

Věta 6.12 Platí:
(i) Jsou-li S a T spočetné, pak $S \cup T$ a $S \times T$ jsou spočetné.
(ii) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ jsou spočetné.
(iii) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m$ jsou nespočetné.

Dk **Ad(i)** Nechť $S = \{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $T = \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Definujme-li φ předpisem

$$\varphi(2n) = s_n \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$\varphi(2n-1) = t_n$$

pak $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} S \cup T$ prosté

Tedy $S \cup T$ je spočetně nekonečná.

V případě $S \times T := \{(s_j, t_k);\ j = 1,2,\dots;\ k = 1,2,\dots\}$ si pomůžeme
$j \in \mathbb{N}$; $k \in \mathbb{N}$

obrázkem. Kartézský součin $S \times T$ lze zobrazit:

$$
\begin{array}{ccccc}
(s_1,t_1)^{1} \to & (s_1,t_2)^{2} & (s_1,t_3)^{4} & (s_1,t_4)^{7} & \dots \\
(s_2,t_1)^{3} & (s_2,t_2)^{5} & (s_2,t_3)^{8} & (s_2,t_4) & \dots \\
(s_3,t_1)^{6} & (s_3,t_2)^{9} & (s_3,t_3) & (s_3,t_4) & \dots \\
(s_4,t_1)^{10} & (s_4,t_2) & (s_4,t_3) & (s_4,t_4) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Zobrazení φ přiřadí $m \in \mathbb{N}$ prvek (s_j, t_k), který má u sebe (červený) kroužek m. Toto zobrazení je prosté a na.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ • $\mathbb{Z}$ mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$ neboť zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definované:
$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi(1) = 0 \\ \varphi(2k) = k \qquad k \in \mathbb{N} \\ \varphi(2k+1) = -k \end{array}}$$
je prosté a na.

• $\mathbb{Q}$ chápeme jako množinu $\left\{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N}\right\}$

(s tím, že $\frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \dots$ chápeme jako odlišné prvky)

pak $\mathbb{Q}$ lze ztotožnit s $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, což je dle předchozího spočetná množina.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ Chceme ukázat, že $\mathbb{R}$ je nespočetná.
Uvažujme nejdříve uzavřený interval $S := \langle 0, 1 \rangle$. S je buď spočetná (tzn. spočetně nekonečná) nebo nespočetná. Předpokládejme, že S je spočetná. Každý prvek z S lze reprezentovat ve tvaru desetinného rozvoje $0.d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$, kde $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

(vyloučíme čísla typu $0.d_1 \dots d_k \overline{9}$ (abychom se vyhnuli nejednoznačnosti)) s výjimkou $1 = 0.\overline{9}$)

Z předpokladu, že S je spočetná plyne, že prvky S lze uspořádat do posloupnosti: $\varphi(k) = x_k = 0.d_{k1} d_{k2} \dots d_{kn} \dots$

Máme tedy:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.\,d_{11}\,d_{12}\,d_{13}\,\dots\dots\,d_{1k}\,\dots\\
x_2 &= 0.\,d_{21}\,d_{22}\,d_{23}\,\dots\dots\,d_{2k}\,\dots\\
&\vdots\\
x_k &= 0.\,d_{k1}\,d_{k2}\,d_{k3}\,\dots\dots\,d_{kk}\,\dots\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad (T)
$$

Dle předpokladu (S spočetná) by každé číslo z S mělo být v seznamu (T). Zaměříme se, tak jako Cantor, na prvky na diagonále*), tj. d_{kk}, a vytvoříme číslo y tvaru

(*) $$y = 0.\,c_1 c_2 \dots c_k \dots ,$$

které patří do S, ale nebude prvkem tabulky (T). Tato tabulka však měla obsahovat všechny prvky S, kdyby S byla spočetná. Máme tedy spor a S musí být nespočetná. Nyní tedy ke konstrukci y tvaru (*) nepatřící do (T). Zvolme si 2 čísla z $\{1,2,\dots,8\}$, například 1 a 6. Definujme y tvaru (*) takto:

Je-li $d_{kk} = 1$, pak polož $c_k = 6$

Je-li $d_{kk} = 6$, pak polož $c_k = 1$.

Takto vytvořené y patří do S, ale neshoduje se s žádným prvkem z (T).

Tedy $\langle 0,1\rangle$ je nespočetná, a také $(0,1)$ je nespočetná.

[Protože $\operatorname{cotg} \pi x : (0,1) \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ prostě a $(0,1)$ je nespočetná, tak je $\mathbb{R}$ také nespočetná.

[Dle (i) je $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a také $\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{k\text{-krát}}$ nespočetná (se stejnou mohutností jako $\mathbb{R}$).

[Protože $\mathbb{C}$ je izomorfní s $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ má i $\mathbb{C}$ a také $\mathbb{C}^k = \mathbb{C}\times\dots\times\mathbb{C}$ stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$.

*) Metody tohoto typu se často nazývají Cantorova diagonalizace