$\boxed{\S 6}$ ČÍSELNÉ ŘADY

Sčítání nekonečně mnoha čísel vzbuzovalo pozornost od starověku. Vzpomeňme si například na Zenonův paradox o Achilovi a želvě.

Nekonečně mnoho čísel si budeme popisovat posloupností, tedy zobrazením z množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny čísel reálných či komplexních. Buď tedy $\boxed{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ posloupnost}}$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Záměrem je vybudovat matematické základy pro nekonečné součty

(1) $\quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots + a_k + \dots\dots \dots$

Cílem bude nejen určit výsledek (1), ale také se naučit s těmito nekonečnými součty pracovat, aniž bychom znali přesný součet (1). Zápis (1) budeme zkráceně zapisovat

(1*) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

a budeme jej nazývat řadou (angl. series)

Definice Buď $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ daná posloupnost reálných či komplexních čísel. Pak

(2) $$\boxed{s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

nazveme n-tý částečný součet posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$,
a posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme posloupnost n-tých částečných součtů.

Na základě limitního chování $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ stanovíme chování řady (1*):

Definice Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je

- KONVERGENTNÍ, pokud existuje $\lim_{n\to\infty} s_n =: s \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$)
  tzn. vlastní limita
- DIVERGENTNÍ, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a je buď $\underbrace{+\infty, -\infty}_{\in \mathbb{R}^*}$ nebo $\infty \in \mathbb{C}^*$.
  tzn. nevlastní limita
- OSCILUJÍCÍ, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

$\boxed{\text{Definice}}$ (Součet řady). Pokud $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a je vlastní či nevlastní, pak s nazveme "součet řady (1*)" a píšeme $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

{Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ má tak dvojí význam: označuje jednak danou řadu, tak její součet (pokud existuje)}

Pozorování: Je-li $\boxed{a_n \in \mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$, pak $\boxed{a_n = \alpha_n + i\beta_n}$, kde $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Tedy
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{n} \beta_k .$$
Odsud pak snadno plyne:

- řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje $\Longleftrightarrow$ řady $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ konvergují
- platí $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$.

$\boxed{\text{Příklady}}$ ① Geometrická řada. Nechť $q \in \mathbb{C}$. Z identity
$$(1+q+\dots+q^n)(1-q) = 1-q^{n+1}$$
plyne pro $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$:
$$s_n = \begin{cases} n+1 & \text{je-li } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{je-li } q \neq 1 \end{cases}$$

Je-li $|q|<1$, pak $s_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje.
Pro ostatní q, geometrická řada buď diverguje nebo osciluje.

② Teleskopické řady jsou řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde a_k lze psát ve tvaru $\boxed{a_k = b_{k+1} - b_k}$. Pak platí
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_{n+1} - b_1$$
a pozorujeme, že platí (dokažte si sami):

- [Teleskopická řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) existuje.]

Speciálně vyšetříme, řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konverguje a jaký je její součet.

Řešení: Platí: $a_k := \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ a řada je tedy teleskopická s $b_k = -\frac{1}{k}$. Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = 1$. Tak $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1}$

$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{1}{12}, a_4 = \frac{1}{20}, \dots$

③ **Harmonická řada:** $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$ Harmonická řada <u>diverguje</u>

<u>Řešení</u> Pro $s_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ platí: $1 = s_1 < s_2 < \dots < s_n$.
Tedy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2^n}$$

Avšak

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$= (n+2)\frac{1}{2} \to \infty$$

Tedy: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$.

④ **Řada** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ <u>nekonverguje</u>, neboť posloupnost částečných součtů splňuje

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \text{ liché} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

Tedy $\limsup_{n\to\infty} s_n = 1 \neq 0 = \liminf_{n\to\infty} s_n$.

Připomeňte si charakterizaci konvergence posloupnosti pomocí B-C podmínky a pomocí limsup a liminf

Řada je zajímavá i z následujícího pohledu.

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ má částečné součty $1, 0, 1, 0, \dots$
- řada $(1-1) + (1-1) + \dots$ má —"— $0, 0, 0, 0, \dots$
- řada $1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots$ má —"— $1, 1, 1, 1, \dots$

Výsledek závisí na uzávorkování.

Poznámka (o uzávorkování) Je-li $1 \le m_1 < m_2 < \dots < \dots$ a definujeme-li $b_1 = a_1 + \dots + a_{m_1}$, $b_2 = a_{m_1+1} + \dots + a_{m_2}$, $b_3 = a_{m_2+1} + \dots + a_{m_3}$, ..., $b_k = a_{m_{k-1}+1} + \dots + a_{m_k}$, ...

pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nazveme uzávorkováním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Částečné součty $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tvoří podposloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, konverguje i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, a to ke stejnému součtu. Jak ukazuje předchozí příklad, pokud řada $\sum a_k$ nekonverguje, uzávorkování mohou dávat různé výsledky.

Poznámka
- Pro $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, symbol $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ znamená $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, kde $a_m := b_{m+p-1}$.
- Vynechání, přidání, záměna konečně prvků v posloupnosti, má vliv na součet řady, ale nikoliv na to zda řada konverguje/diverguje.

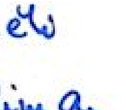
Následující věta je prvním kritériem, kterým bychom měli vždy otestovat danou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud totiž $\lim_{n\to\infty} a_n$ nebude existovat nebo bude nenulová, pak dle této věty řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.

Věta 6.1 (NUTNÁ PODMÍNKA KONVERGENCE ŘAD)

Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\boxed{\lim_{k\to+\infty} a_k = 0}$

Dk: Z předpokladu plyne, že $\lim_{k\to\infty} s_k = s \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) existuje.

Protože
$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0.$$



Příklad 5: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ nekonverguje, neboť

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\alpha_n}$ neexistuje $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha_n = 1 \neq -1 = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha_n \right)$. ▨

Pro počítání je důležitá i následující věta o aritmetice řad, která také implikuje, že prostory

- $\check{R} := \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} ;\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \}$
- $l_1 := \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} ;\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konverguje} \}$

jsou vektorové prostory.

$\boxed{\text{Věta 6.2}}$ (Aritmetika limit) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}^*$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \in \mathbb{R}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B$ kdykoliv pravá strana má smysl.

Dk: plyne z věty o aritmetice limit neboť

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k + \beta b_k \right) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \right\}$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} a_k + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} b_k = \alpha A + \beta B.$$ ▨

$\boxed{6.1}$ ŘADY S NEZÁPORNÝMI ČLENY

V celé této kapitolce budeme studovat řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ (tj. $a_n \geq 0$). Protože pak je vždy posloupnost částečných součtů neklesající, tak $\left[\lim_{n\to\infty} s_n \text{ vždy existuje} \right]$*) a tak buď řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje nebo diverguje (je-li součet $+\infty$).

Připomeňme si příklady řad s nezápornými členy, které jsme již vyšetřili:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pro $q \in \langle 0,1)$, speciálně $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

---

*) Také platí $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$.

Věta 6.3 (Srovnávací a podílové srovnávací kritérium)

Nechť platí jeden z předpokladů:

(3) $\boxed{0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}}$ (stačí $\forall k \geq k_0$)

(4) $a_k > 0,\ b_k > 0$ a $\boxed{\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq \dfrac{b_{k+1}}{b_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}}$ (opět stačí $k \geq k_0$)

Pak platí:

(i) Pokud $\sum_1^\infty a_k$ diverguje, tak $\sum_{k=1}^\infty b_k$ diverguje.

(ii) Pokud $\sum_1^\infty b_k$ konverguje, tak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konverguje.

Dk. **Předp. (3)** Protože $0 \leq \sum_{k=1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^m b_k$, je i $\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_1^m a_k \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^m b_k$.

Je-li v poslední nerovnosti pravá strana konečná, je i levá strana konečná a (ii) platí. Naopak, je-li levá strana $+\infty$, je i pravá strana $+\infty$, a (i) platí.

Předpokládejme nyní (4) Z (4) plyne:

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1 \leq \frac{b_k}{b_{k-1}} \frac{b_{k-1}}{b_{k-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} a_1 = \frac{a_1}{b_1} b_k$$

a použijeme již dokázaný výsledek pro $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ a $\{\frac{a_1}{b_1} b_k\}_{k=1}^\infty$. ▨

Příklady ⑥ Buď $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in (0,1)$. Pak

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} = \infty$ neboť pro $\alpha \in (0,1)$ je $n^\alpha \leq n \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

a víme z Příkladu ③, že $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

⑦ Pro $a_n = \frac{1}{n^2}$ naopak platí $\frac{1}{n \cdot n} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Protože

$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje dle Příkladu ②, tak $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje.

$\boxed{\text{Věta 6.4}}$ (Cauchyho odmocninové kritérium) Nechť $a_k \geq 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$.

Pokud

(i) existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ pro $\forall k \geq k_0$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

(ii) $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ pro všechna $k \geq k_0$, pak $\sum_{1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Z předpokladu plyne $0 \leq a_k \leq q^k$ a protože $q \in (0,1)$ tak $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje (geometrická řada). Dle Věty 6.3 tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje také.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Z předpokladu $\underset{(k \geq k_0)}{a_k \geq 1}$ a z Věty 6.1 máme tvrzení.

$\boxed{\text{Věta 6.5}}$ (d'Alembertovo podílové kritérium) Nechť $a_k > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$.

Pokud

(i) existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ pro $\forall k \geq k_0$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

(ii) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ pro všechna $k \geq k_0$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Podobně jako v důkazu Věty 6.3 píšeme:

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} a_{k_0} \leq \underbrace{q^{k-k_0} a_{k_0}}_{\text{člen geometrické řady}} \quad \text{pro } k \geq k_0$$

člen geometrické řady, $q \in (0,1)$.

a protože $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-k_0}$ konverguje, Věta 6.3 dává tvrzení.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Z předpokladu $a_{k+1} \geq a_k \geq \dots \geq a_{k_0} > 0$, $\forall k \geq k_0$. Tedy $\lim_{k \to \infty} a_k \neq 0$. Dle Věty 6.1, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$. $\blacksquare$

Předchozí kritéria mají i tzv. limitní varianty, která se někdy snadněji ověřují. Pozornost věnujte předpokladům, ostrým nerovnostem v jednotlivých podmínkách.

$\boxed{\text{Věta 6.6}}$ (Kritéria v limitním tvaru)

(α) <u>Limitní srovnávací kritérium</u>

Nechť $a_n, b_n > 0$ a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$ tj. vlastní a nenulová

Pak: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

(β) Nechť $a_n, b_n > 0$ a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Pak platí:

- Pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud $\sum a_n$ diverguje, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

(γ) <u>Limitní podílové kritérium</u>

Nechť $a_k > 0$. Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Je-li $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, pak $\sum a_k$ diverguje

(δ) <u>Limitní odmocninové kritérium</u>

Nechť $a_k \geq 0$. Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, pak $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, pak $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk $\boxed{\text{Ad }(\alpha)}$ Z existence limity $L := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, kde $0 < L < +\infty$ plyne

$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_0 \quad \boxed{\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L}$

což implikuje $b_n \leq \frac{2}{L} a_n \leq 4 b_n$ pro $\forall n \geq n_0$ a tvrzení plyne z V.6.3.

$\boxed{\text{Ad }(\beta)}$ Z existence limity plyne: $\exists M > 0: 0 \leq a_n \leq M b_n \;\; \forall n \geq n_0$.

Opět srovnávací kritérium, věta 6.3, dává tvrzení.

$\boxed{\text{Ad }(\gamma)}$ + $\boxed{\text{Ad }(\delta)}$ Z předpokladů se (snadno) ověří (PROVEĎTE!)

předpoklady vět 6.4 resp. 6.5, z kterých tvrzení plynou. ▨

$\boxed{\text{Příklady}}$ ① $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+2}\right)^{k^2}$ konverguje, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+2}\right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+2}\right)^k = \exp\Big(\lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{k}{k+2}\right)}{\frac{k}{k+2}-1}}_{\to 1} \frac{(-2k)}{k+2}\Big)$$

$$= e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1;\ (\delta) \text{ dává konvergenci.}$$

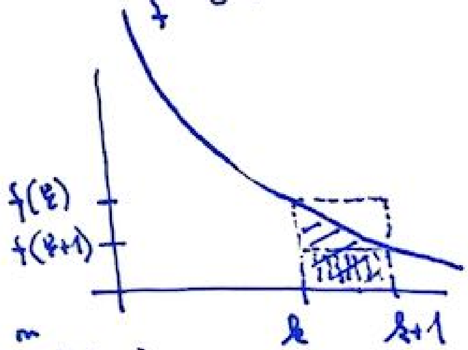
(9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ konverguje, neboť $\displaystyle\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{[(k+1)!]^2 \,(2k)!}{[2(k+1)]! \cdot [k!]^2} = \frac{(k+1)^2}{2(k+1)(2k+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{4} < 1$

a tvrzení plyne z Věty 6.6 (γ). ∎

Užitečným nástrojem k vyšetření konvergence/divergence řad je také následující integrální kritérium.

$\boxed{\text{Věta 6.7}}$ (Integrální kritérium) Buď $k_0 \in \mathbb{N}$ a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kladná a nerostoucí na $[k_0, \infty)$. Pak

(I) $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konverguje $\underset{\text{PRÁVĚ KDYŽ}}{\iff}$ $\displaystyle\int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje



(Dk) Z monotónie (viz Obr. 1) plyne:

$$\left[\ \forall k \geq k_0: \quad f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)\ \right]$$

což implikuje

$$(**) \qquad \sum_{k=k_0}^{m} f(k) \geq \sum_{k=k_0}^{m} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_{k_0}^{m+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=k_0}^{m} f(k+1) \geq 0$$

Odtud dokážeme obě implikace v (I).

$\boxed{\Rightarrow}$ Je-li $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konvergentní, je pak posloupnost n-tých částečných součtů $\left\{\sum_{k=k_0}^{m} f(k)\right\}_{m=k+1}^{\infty}$ omezená, což implikuje:

fce $\boxed{n \longmapsto \int_{k_0}^{m+1} f(x)\,dx}$ je neklesající a omezená.

Tedy $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{k_0}^{m} f(x)\,dx =: \int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.
existuje

$\boxed{\Leftarrow}$ Naopak platí z (**):

$$\sum_{k=k_0}^{m} f(k) = f(k_0) + \sum_{k=k_0}^{m-1} f(k+1) \overset{(**)}{\leq} f(k_0) + \sum_{k=k_0}^{m-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k_0) + \int_{k_0}^{m} f(x)\,dx$$

Tedy, pokud konverguje $\int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$, pak ex. $\lim_{n\to\infty} \int_{k_0}^{m} f(x)\,dx$ vlastní.

Tak $\left\{\sum_{k=k_0}^{m} f(k)\right\}_{m=k_0+1}^{\infty}$ je omezená, monotónní; má tedy vlastní limitu. Tak $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konverguje. ∎

Příklady (10) Pro $\alpha>1$ je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergentní, neboť

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

(11) Rozhodněte, pro která $\beta>1$ je $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ konvergentní.

Řešení:

Zkoumejme $I := \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. Substitucí $y=\ln x$ $\left(\Rightarrow dy = \frac{dx}{x}\right)$

dostáváme

$I = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dy}{y^\beta}$, který konverguje právě když $\boxed{\beta>1}$

Tedy: (dle Věty 6.7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ konverguje pro $\beta>1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} = \infty$$

! Srovnej s harmonickou řadou a Příklady (3), (6) a (10).

Všimněte si, že limitní odmocninové a limitní podílové kritérium nedávají žádnou informaci o konvergenci řad (či jejich divergenci), pokud

(+) $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=1$ respektive $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1$.

Pokud nám vyjde některá z podmínek (+), tak musíme postupovat pomocí jemnějších kritérií (třeba integrálního).

Existuje spousta dalších kritérií. V odmocninovém či podílovém kritériu jsme (v důkazu) porovnávali "naši" řadu s geometrickou řadou. V Raabeho kritériu se daná řada porovná s řadou $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; v Gaussově kritériu se zase daná řada porovná s $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, atd.

Prvky konvergentní řady musí jít (pro $k\to\infty$) k nule, viz nutná podmínka Věta 6.1. O tom, zda řada konverguje, tedy rozhoduje jak rychle jdou a_k k nule. Víme, že $a_k=\frac{1}{k}$

nebo $a_k = \frac{1}{k \ln k}$ nestačí. Myšlenku rozpoznat, zda prvky řady jdou dostatečně rychle k nule, využívá Cauchyho kondenzační kritérium. Tato kritéria do základního kursu nebudeme uvádět, ale přidáme je pro nadšence formou dodatku. Příští týden se zaměříme na obecné řady čísel; opustíme tedy předpoklad, že $a_k \geq 0 \ \forall k \geq k_0$, který hrál v celé kapitole podstatnou roli.

$\boxed{\text{DODATEK (aneb ČTENÍ NAVÍC)}}$

$\boxed{\text{Věta D.1}}$ (Kondenzační kritérium) Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konverguje}$$

(Dk) plyne z následujících horních a dolních odhadů pro S_{2^m}, tj. částečných součtů posloupnosti $\{a_k\}$:

Horní odhad:

- $$a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \ldots + (a_{2^{n-1}} + \ldots + a_{2^n-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$$

Dolní odhad:

- $$a_1 + a_2 + (a_3+a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n}) \geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^{n-1} a_{2^n}$$

$\boxed{\text{Ad } \Rightarrow}$ Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, tak jsou omezené S_{2^n} nalevo dolního odhadu a jsou tak omezeny částečné součty řady $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Tedy tato řada konverguje.

$\boxed{\text{Ad } \Leftarrow}$ V tomto případě plyne tvrzení z horního odhadu. ▨

$\boxed{\text{APLIKACE D.1}}$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, konverguje $\overset{\text{V.D.1}}{\iff}$ $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}}$ konverguje.

Ale $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$ je geometrická řada s $q := 2^{1-\alpha} < 1 \iff \underline{\underline{\alpha > 1}}$.

• $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ (s $\beta > 0$) konverguje $\overset{\text{V.D.1}}{\iff} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\log 2^n)^\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^\beta n^\beta}$ konverguje

$\iff \boxed{\beta > 1}$

$\boxed{\text{Věta D.2}}$ (Raabeho kritérium – zjemnění podílového kritéria)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s $a_n > 0$ je dána. Pak platí:

(i) Jestliže pro $q > 1$ platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q$ pro $\forall n \geq n_0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

lze nahradit: $\boxed{\text{Jestliže } \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1}$ (, který implikuje)

(ii) Jestliže $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ pro všechna $n \geq n_0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

lze nahradit: $\left[\text{Jestliže } \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1\right]$

Dk $\boxed{\text{Ad(i)}}$ Z předpokladu plyne $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{q}{n}$. Protože $q > 1$, lze zvolit $\boxed{\alpha \in (1, q)}$ a pokusíme se porovnat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, o které víme, že konverguje. Označme $b_n := \frac{1}{n^\alpha}$.

Pak $$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n}(1+\xi)^{\alpha-1} < 1 + \frac{\alpha}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}$$

kde $\xi \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

Zde jsme využili Langrangeovu VOSH na funkci $F(x) = (1+x)^\alpha$:

$F(x) - F(0) = F'(\xi)(x - 0) \Rightarrow$ pro $x = \frac{1}{n}$ $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 = \alpha(1+\xi)^{\alpha-1}\frac{1}{n}}$

Protože $\lim_{n\to\infty} \alpha\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} = \alpha$ (OVĚŘTE SI SAMI) a zároveň $\underline{\alpha < q}$,

tak $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\underbrace{\alpha\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} < q}$ (pro všechna $n \geq n_0$)

Tedy: $$\boxed{\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{\alpha}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} < 1 + \frac{q}{n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}}$$ pro $\forall n \geq n_0$

$\Downarrow$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ a protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv., tak podílové srovnávací kritérium implikuje, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje také.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Z předpokladu plyne $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{b_n}{b_{n+1}}$ kde $b_n := \frac{1}{n}$.

Tedy $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, tak také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ▨

$\boxed{\text{APLIKACE D.2}}$ Mějme zadanou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tentokrát rekursivně (tzn. jako iterační proces): $\boxed{a_1 = 1}$ a $\left[a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n\right]$

Určete, zda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Řešení: Jako první možnost se nabízí limitní podílové kritérium.

Avšak
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1,$$
což je přesně ta situace, kdy Limitní podílové kritérium Věta 6.6 (γ) nic nedává. Raabeho kritérium je jemnější. Protože
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+2}{n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{2}{n} = 2,$$
tak dle Věty D.2 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ▨

Ještě jemnější/přesnější je následující Gaussovo kritérium, které v sobě mimo zahrnuje d'Alembertovo limitní podílové kritérium tak i Raabeho kritérium.

GAUSSOVO KRITÉRIUM

$\boxed{\text{Věta D.3}}$ Nechť existují $p, q \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že
$$(*) \qquad \frac{a_n}{a_{n+1}} = p + \frac{q}{n} + \frac{t_n}{n^{1+\varepsilon}}, \text{ kde } \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je omezená posloupnost.}$$

Pak platí:

(i) Je-li $p > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

(ii) Je-li $p < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

(iii) Je-li $p = 1$ a $q > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje

(iv) Je-li $p = 1$ a $q \leq 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk $\boxed{\text{Ad (i) a (ii)}}$ Tvrzení plynou z limitního podílového kritéria, tj. Věta 6.6 (γ) neboť
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{p}.$$

$\boxed{\text{Ad (iii) a } \boxed{\text{(iv)} \wedge q < 1}}$ Tato tvrzení plynou z Raabeho kritéria, Věta D.2, neboť pro $p = 1$ plyne z $(*)$: $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$.

ZBÝVÁ DOKÁZAT TVRZENÍ PRO $p = q = 1$ v (iv).

Ad podpřípad (iv): $p=q=1$ Danou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (*) s $p=q=1$, tzn.

$$(**)\qquad \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{t_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

porovnáme s posloupností $b_n := \frac{1}{n\ln n}$, o které víme, že její řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ diverguje, viz Příklad 11. Pro $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$(***)\qquad \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)}{n}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{n+1}{n\ln n}\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

Taylorův polynom stupně 2 v bodě $x_0=0$ s Lagrangeovým tvarem zbytku pro $F(x)=\ln(1+x)$ dává:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\frac{1}{(1+\xi)^2} = \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^2}$$

kde $c_n = \frac{-1}{2}\frac{1}{(1+\xi)^2}$ a $\xi=\xi_n\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$

Navíc $|c_n| \leq \frac{1}{2}$.

Dosazením do (***) dostáváme

$$\frac{b_n}{b_n} = \frac{n+1}{n\ln n}\left[\ln n + \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^2}\right] = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n}+\frac{c_n}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{n^2\ln n}\left(1 + c_n + \frac{c_n}{n}\right).$$

Porovnáním získaného výsledku s (**) dostáváme:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad \text{pro } n \text{ dostatečně velké},$$

neboli $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}$ a dle Věty 6.3 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje. ▨

Aplikace D.3 Pro $a,b\in\mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+a)(k-1+a)\dots a}{k!\,k^b}$

Řešení: Pro $a_k := \frac{(k+a)(k-1+a)\dots a}{k!\,k^b}$ platí:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)}{(k+1+a)}\left(\frac{k+1}{k}\right)^b = \left(1-\frac{a}{k+1+a}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)^b$$

Taylorův rozvoje 2. stupně $F(x)=(1+x)^b$ a Taylorův rozvoj 1. stupně $G(x)=\frac{1}{1+x}$ v bodě $x_0=0$ s Lagrangeovým tvarem zbytku dává

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^b = 1 + \frac{b}{k} + \frac{b(b-1)}{2}(1+\xi_k)\frac{1}{k^2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{k+1+a} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1+\frac{1+a}{k}}\right) = \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{2(1+\tilde{\xi}_k)^2}\frac{1}{k}\right),$$

kde $\xi_k, \tilde{\xi}_k \in \left(0,\frac{1}{k}\right)$. Tedy

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 + \frac{b-a}{k} + \frac{t_k}{k^2},$$ kde $\{t_k\}$ je omezená. Zkoumaná řada tedy konverguje dle Gaussova kritéria $\Longleftrightarrow$ $\boxed{b-a>1}$ ▨

6.2 ALTERNUJÍCÍ A OBECNÉ ŘADY

Def. Nechť $\boxed{a_n \in \mathbb{C} \text{ nebo } \mathbb{R}.}$ Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně pokud $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje

Pozorování Úloha zjistit zda řada komplexních či reálných čísel konverguje absolutně nás přivádí do předchozí kapitoly 6.1. neboť $|a_n|_{\mathbb{C}} \geq 0$ i $|a_n|_{\mathbb{R}} \geq 0$.

Naším cílem je zkoumat, kdy řada $\sum a_k$ konverguje. ① Ukážeme, a to bude náš první dílčí cíl, že pokud řada konverguje absolutně, pak konverguje. Schématicky

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

Pak si ② ukážeme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje. Posloupnost $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$ je tak příkladem, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje (viz harmonická řada, Příklad ③). Přímočarým zobecněním vyšetřování konvergence řady $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ bude Leibnitzovo kritérium. ③ Jeho důkaz bude náš třetí dílčí cíl v této sekci.

Věta 6.8. (B.-C. podmínka pro řady) Platí:

(5) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \forall n, m \geq n_0,\ m \geq n: \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$

Dk Levá strana ekvivalence (5) je dle definice $\Leftrightarrow$ limita $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje a je vlastní $\Leftrightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)\ |s_n - s_m| < \varepsilon$, přičemž lze předpokládat bez újmy obecnosti, že $m \geq n$. Pak $|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|$. Tvrzení je dokázáno. ☒

$\boxed{\text{Věta 6.9}}$ (Absolutní konvergence $\Rightarrow$ Konvergence)

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje

Dk Z předpokladu a B-C podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ víme, že:

$$(\text{⊛}) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\left(\forall m \geq n \geq n_0 : \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon\right).$$

Protože $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{- nerovnost} \\ \text{pro konečný počet sčítanců}}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|$

tak, z (⊛) plyne B-C podmínka pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. ▨

$\boxed{\text{Definice}}$ Buď $a_n \geq 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ se nazývá alternující

$\boxed{\text{Příklad 12}}$ Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ je alternující. Ukážeme, že je konvergentní. Posloupnost $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy příkladem posloupnosti, která konverguje, ale nekonverguje absolutně (viz Příklad 3).

Dk, že $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje: Využijeme skutečnosti, že posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající. Pro liché a sudé členy posloupnosti n-tých částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$s_{2n+1} = 1 \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} - \dots \underbrace{- \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}}_{<0}$$

$$s_{2n} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}}_{>0}$$

Tedy $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí

Obě posloupnosti tedy mají limitu:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} =: L \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n} =: S$$

Navíc platí: $\boxed{L\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}}$, $\boxed{S\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}}$ a $\boxed{s_{2n+1}-s_{2n}=\frac{1}{2n+1}\to 0}$

Tedy $0=\lim_{n\to\infty}(s_{2n+1}-s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ neboť výraz vpravo má smysl.

Odsud $S=L\in\mathbb{R}$, a také $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ a $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ konverguje.

Výše uvedený důkaz konvergence alternující řady $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ lze zobecnit pro libovolnou posloupnost $\{(-1)^m a_m\}_{n=1}^{\infty}$ která splňuje podmínky:

(♕)
- $a_m \geq 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_m = 0$
- $\{a_n\}$ je nerostoucí: $n<m \Rightarrow a_n \geq a_m$.

To přesně říká následující Leibnizovo kritérium.

Věta 6.10 (Leibnizovo kritérium pro alternující řady).
Buď $\{a_m\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost kladných čísel. PLATÍ:

(6) $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}a_m$ konverguje $\iff \lim_{n\to\infty} a_m = 0$.

Neboli: Nutná podmínka konvergence řad, tj. podmínka $\lim_{n\to\infty} a_m = 0$, je pro nerostoucí nezáporné posloupnosti postačující pro konvergenci alternující řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}a_m$.

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Věty 6.1 (nutná podmínka konvergence řad)

$\boxed{\Leftarrow}$ Platí:

- $s_{2(n+1)} = s_{2n} + (-1)^{2n+2}a_{2n+1} + (-1)^{2n+3}a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1}-a_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n} \geq \dots \geq s_2 = -a_2+a_1 \geq 0$
- $s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + (-1)^{2n+3}a_{2n+2} + (-1)^{2n+4}a_{2n+3} = s_{2n+1} \underbrace{- a_{2n+2}+a_{2n+3}}_{\leq 0} \leq s_{2n+1} \leq \dots \leq s_1 = a_1$
- $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \geq s_{2n}$

Tedy:
- $\boxed{0 \leq s_n \leq s_{2n+1} \leq a_1}$ pro $\forall n\in\mathbb{N}$
- $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Obě jsou omezené.

Existují tedy vlastní limity: $S := \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ a $L := \lim s_{2n+1}$ a také $L \geq S$.

Navíc $L-S = \lim(s_{2n+1}-s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$. Tedy $L=S$ a tvrzení platí.