AKADEMIE VĚD ČESKÉ REPUBLIKY

Recenzenti:
prof. RNDr. Lev Bukovský, DrSc.
prof. RNDr. Petr Hájek, DrSc.

Vydání této publikace podpořily
Akademie věd České republiky
firma Hewlett Packard, spol. s r. o.,
a Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
České republiky, MSM 11 00 00 00 1

TEORIE MNOŽIN

BOHUSLAV BALCAR
PETR ŠTĚPÁNEK

ACADEMIA

ISBN 80-200-0470-X (2. vyd.)

Marii a Olze

Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.

David Hilbert

Aktuální nekonečno neexistuje! Cantor a jeho následovníci na to zapomněli a dostali se do rozporů.

Henri Poincaré

Předmluva

Teorie množin má dnes v matematice své pevné místo. Získala je v prvním, dnes už klasickém období, které vyvrcholilo ve třicátých letech. Mnohem méně je známo, že zhruba od konce padesátých let začalo nové, stejně plodné období teorie množin. V této knize chceme představit teorii množin jako živou disciplínu, která úzce souvisí s dalšími obory současné matematiky. Kniha je určena studentům matematiky a odborníkům, kteří se zajímají o použití teorie množin ve svém oboru. Výklad se soustřeďuje na teorii množin s axiomem výběru, jejíž výsledky dnes nacházejí nejširší použití v matematice. Klasické výsledky jsou podány ze současného pohledu. Z velkého množství nových výsledků jsme vybírali tak, abychom předvedli hlavní typy metod, které se dnes používají v teorii množin. Kde to bylo možné, sledovali jsme vývoj až do současnosti.

Problematikou teorie množin se soustavně zabýval seminář, který v roce 1963 založil P. Vopěnka. Dvě desetiletí, která uplynula od vzniku semináře, byla jedním z podnětů napsání této knihy.

K jejímu obsahu se vyjadřovali naši spolupracovníci P. Simon, J. Pelant, M. Hušek, J. Nešetřil, J. Tůma a J. Fried, se kterými jsme často diskutovali o výběru materiálu a jeho podání. Jsme také zavázáni K. Čudovi, P. Kaláškovi, J. Mlčkovi, Z. Rencovi a P. Vojtášovi, jejichž připomínky přispěly ke zlepšení textu. Povzbuzením při psaní knihy byly pro nás zájem a podpora docenta P. Vopěnky a profesora J. Kurzweila. Za cenné rady vděčíme vědeckému redaktorovi a recenzentovi. Rádi bychom poděkovali paní J. Fraňkové za ochotu a trpělivost při přípravě rukopisu a paní E. Brunhoferové, která nakreslila obrázky. Za sestavení rejstříku děkujeme J. Mensdorffovi a P. Štěpánové.

Autoři

Praha, červen 1984

Předmluva ke druhému vydání

Předkládáme čtenáři opravené a doplněné vydání Teorie množin. Opravili jsme chyby, které se vloudily do prvního vydání, a doplnili jsme text o dva dodatky věnované novým výsledkům v nekonečné kombinatorice a kardinální aritmetice, které vznikly převážně v době od prvního vydání knihy. Doplnili jsme také citace na novější literaturu. Rádi bychom poděkovali doc. RNDr. Petru Simonovi, DrSc., za pomoc při přípravě druhého vydání.

Oba dodatky, stejně jako dodatek k seznamu literatury, byly vysázeny počítačovou sazbou programem TeX.

Autoři

Praha, prosinec 2000

Obsah

Romance matematické analýzy a teorie množin

S rozvojem novověké vědy začíná matematika studovat stále širší třídu objektů. Vedle tradičních pojmů aritmetiky a geometrie, jako jsou přirozená, racionální a reálná čísla, body, přímky, roviny a kuželosečky, začíná pracovat i s novými pojmy. Z nich zejména pojmy proměnná veličina, relace a funkce rozhodujícím způsobem ovlivnily její vývoj. Přitom se postupně rozšiřoval i samotný obsah těchto pojmů: vedle původně jednoduchých předpisů pro funkce, jako jsou $y = x^n$ nebo $y = \sin x$, kterým odpovídá názorné grafické zobrazení, byly později pod pojem funkce zahrnuty i předpisy dané mocninnými nebo trigonometrickými řadami, pro které vhodné znázornění nelze vůbec sestrojit — například funkce, které v žádném bodě nemají derivaci.

I když je mezi uvedenými příklady veliký rozdíl, jedno mají společné: funkce je dána jediným předpisem. Dalším krokem ke zobecnění pojmu funkce byla možnost definovat funkci po částech pomocí několika předpisů pro různé hodnoty proměnných. Jednoduchým příkladem takové definice je funkce signum, definovaná

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x > 0, \\ 0, & \text{je-li } x = 0, \\ -1, & \text{je-li } x < 0. \end{cases}$$

Tato funkce je příliš všední na to, abychom si uvědomili rozdíl, který je mezi původní definicí funkce jedním předpisem a definicí po částech. Lépe nám poslouží takzvaná Dirichletova funkce, která přiřazuje hodnotu jedna každému racionálnímu číslu a hodnotu nula každému iracionálnímu číslu, tedy

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \text{ racionální}, \\ 0, & \text{je-li } x \text{ iracionální}. \end{cases}$$

Je-li dáno nějaké reálné číslo x, vůbec nemusí být jasné, podle kterého předpisu máme určit hodnotu $d(x)$. Princip definice po částech je doveden do důsledku v soudobé definici zobrazení: Funkce f (zobrazení) je množina uspořádaných dvojic $\langle x, y \rangle$, která splňuje tuto podmínku jednoznačnosti: Ke každému x existuje nejvýše jedno y takové, že dvojice $\langle x, y \rangle$ je prvkem f. Každou uspořádanou dvojici, která je prvkem *f*, můžeme chápat jako předpis přiřazující funkční hodnotu jednomu argumentu.

Je nepochybné, že matematická analýza měla ve vývoji moderní matematiky velmi důležitou roli. Ale ještě v první polovině devatenáctého století se opírala o „názorné" geometrické představy o reálných číslech. Korektní teorie reálných čísel neexistovala. Přitom se studovaly stále složitější části reálné přímky (obory spojitosti, obory konvergence posloupností funkcí). Z hlediska pozdějšího vývoje zbývalo již jen „rozbít" reálnou přímku na univerzum reálných čísel a pracovat se soubory jeho prvků – s množinami reálných čísel. Takový krok by později zahrnul i vytvoření nové teorie reálných čísel, jejíž potřeba byla pociťována. Přibývalo těch, kteří se nechtěli smířit se skutečností, že tehdejší důkazy základních vět analýzy se odvolávají na geometrickou názornost.

První vážný pokus v tomto směru podnikl Bernard Bolzano (1781–1848), který zavedl pojem množiny a zevrubně prozkoumal vlastnosti nekonečných množin. Problém nekonečna jako „aktuální" a absolutní velikosti se objevil v raném stadiu katolické teologie a filozofie u Augustina a Tomáše Akvinského. Ve filozofii se problémem nekonečna zabývali Aristoteles, Lukrecius, Descartes, Spinoza, Leibnitz, Locke, Kant a další. Někteří byli ochotni přijmout nekonečno jako aktuální entitu, jiní je horlivě zamítali.

V matematice Bolzanovy doby se však nekonečno objevovalo jen ve své „potenciální" podobě. Byla to reakce na volné používání „nekonečně velkých" a „nekonečně malých" veličin, které v počátcích infinitezimálního počtu vedlo i k odvození některých nesprávných tvrzení. Skutečnost, že se nepodařilo formulovat korektní pravidla pro „nekonečně velké" a „nekonečně malé" veličiny, způsobila, že tato forma nekonečna byla z analýzy vyloučena. K. F. Gauss (1777–1855) píše v jednom z dopisů: „Nekonečno nelze v matematice použít jako něco definitivního, je to jen způsob vyjádření, který označuje jistou hranici, k níž se mohou některé veličiny libovolně blížit, pokud jiné veličiny rostou neomezeně."

Nekonečné množiny však nelze vtěsnat do takto vymezeného rámce, protože představují jinou, „aktuální" podobu nekonečna. Snad proto se Bolzano ve své knize Paradoxy nekonečna omezil jen na shrnutí výsledků o paradoxních vlastnostech nekonečných množin (některých si povšiml již Galileo Galilei (1564–1642)), aniž by vytvořil ucelenou teorii nekonečných množin. Bolzano psal svou knihu na samém sklonku života a kniha byla vydána až roku 1851, po Bolzanově smrti, jedním z jeho žáků. Výzkumy ze dvacátých let našeho století ukázaly, že vydavatel provedl o své újmě zásahy do Bolzanova rukopisu, aby odstranil jeho „nedostatky". Dnes nelze s určitostí říci, že se definitivní podoba shoduje s Bolzanovým záměrem. Nikdo z Bolzanových žáků na jeho výsledky nenavázal. Až v roce 1873 se podobnými problémy začal zabývat Georg Cantor (1845–1918).

Mezitím v šedesátých letech minulého století byla zásluhou K. Weierstrasse (1815–1897), G. Cantora a H. C. Méraye (1835–1911) vybudována aritmetická teorie iracionálních a reálných čísel. Nová teorie se již neopírala o názorné geometrické představy a k jejímu rozvinutí postačila všeobecně přijímaná potencionální forma nekonečna. Analýza však již byla blízko okamžiku, kdy bylo nutné pracovat s nekonečnými soubory reálných čísel.

Aktuální nekonečno zavedl do matematiky se vší důsledností G. Cantor, když v letech 1873–1897 publikoval sérii prací, ve kterých soustavně rozvinul matematické prostředky ke studiu nekonečných množin. Stal se zakladatelem nové matematické disciplíny – teorie množin. Cantor původně vyšel od problémů teorie reálných funkcí. Zabýval se reprezentací funkcí trigonometrickými řadami a problém jednoznačnosti takové reprezentace ho přivedl k otázce, zda má funkce konečný nebo nekonečný počet singulárních bodů. Zkoumal vzájemně jednoznačná zobrazení mezi množinami a v jedné z prvních prací si položil otázku, zda je možné vzájemně jednoznačně zobrazit množinu přirozených čísel na množinu reálných čísel. Ukázal, že takové zobrazení neexistuje. Nekonečné množiny se tedy rozpadají do dvou tříd, na spočetné a nespočetné, podle toho, zda existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny přirozených čísel na danou množinu či ne. Množina všech přirozených čísel je spočetná a množina všech reálných čísel je nespočetná. To je velmi zajímavý a nečekaný výsledek. Pozornost si zasluhuje i takzvaná diagonální metoda důkazu, která je v mnoha obměnách používána v teorii množin, v logice i jinde.

Diagonální metodou ukážeme, že hodnoty žádného zobrazení množiny přirozených čísel nemohou vyčerpat všechna reálná čísla. Stačí, když stejné tvrzení dokážeme pro interval $(0, 1)$ všech reálných čísel x, $0 < x < 1$. Využijeme fakt, že každé takové číslo lze jediným způsobem vyjádřit pomocí nekonečného desítkového rozvoje ve tvaru

$$0{,}c_0c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}\ldots,$$

kde pro každé přirozené číslo n je c_n některá z číslic $0, 1, 2, \ldots, 9$. Má-li nějaké číslo i konečný rozvoj – například $\frac{1}{2}$ lze vyjádřit jako 0,5 – uvažujeme odpovídající nekonečný rozvoj, pro $\frac{1}{2}$ je to 0,499 999 .... Je-li dáno nějaké zobrazení množiny všech přirozených čísel do intervalu $(0, 1)$, jehož hodnoty tvoří posloupnost

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, \tag{1}$$

pak desítkové rozvoje jejich členů lze vyjádřit následujícím způsobem:

$$\begin{array}{lcllllll} a_0 & = & 0{,}c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \ldots, \\ & & & \searrow & & & \\ a_1 & = & 0{,}c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots, \\ & & & & \searrow & & \\ a_2 & = & 0{,}c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \ldots, \\ & & & & & \searrow & \\ a_3 & = & 0{,}c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots, \\ & \vdots & & & & & \end{array} \tag{2}$$

Nyní sestrojíme reálné číslo z intervalu $(0, 1)$, které je různé od všech členů posloupnosti (1). Hledané číslo má nekonečný desítkový rozvoj tvaru

$$d = 0{,}d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots d_n d_{n+1} \ldots ,$$

jehož n-tá cifra d_n je dána předpisem

$$(3) \qquad d_n = \begin{cases} 1, & \text{je-li } c_{nn} \neq 1, \\ 2, & \text{je-li } c_{nn} = 1. \end{cases}$$

Číslo d je různé od každého a_n, protože desítkové rozvoje obou čísel se liší v n-té cifře. Podle (3) je $d_n \neq c_{nn}$. Ukázali jsme, že neexistuje zobrazení množiny přirozených čísel na interval $(0, 1)$, a tedy ani na množinu všech reálných čísel. Množina všech reálných čísel a interval $(0, 1)$ jsou nespočetné množiny. Úloha, jakou hrály diagonální prvky c_{nn} ve schématu (2) při definici čísla d, vysvětluje přívlastek „diagonální", kterým je tato metoda označována.

Cantor zkoumal vlastnosti nekonečných množin a význam své teorie doložil originálním příspěvkem k problému transcendentních čísel. Jde o reálná čísla, která nejsou řešením žádné rovnice

$$(4) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 ,$$

kde

$$(5) \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

jsou celá čísla a $a_0 \neq 0$. Reálná čísla, která jsou řešením nějaké rovnice tvaru (4), se nazývají algebraická. Ještě v polovině minulého století nebylo známo jediné transcendentní číslo. Teprve v roce 1851 popsal J. Liouville (1809–1882) konstrukci, jak transcendentní čísla sestrojit. Obtížnost důkazu vzbuzovala dojem, že transcendentní čísla jsou mezi reálnými čísly výjimkou. V roce 1874 Cantor ukázal, že transcendentních čísel je v jistém smyslu více než algebraických, aniž by nějaké další transcendentní číslo sestrojil. To vyvolalo velké překvapení.

Naznačme krátce hlavní body jeho důkazu. Každá rovnice (4) je jednoznačně určena konečnou posloupností celých čísel (5). Cantor ukázal, že množina všech konečných posloupností celých čísel je spočetná. Vzhledem k tomu, že každá rovnice (4) má jen konečně mnoho kořenů, lze ukázat, že všechna algebraická čísla tvoří jednu spočetnou množinu. Čtenář sám nahlédne, že nespočetnou množinu nelze rozložit na dvě spočetné nebo konečné množiny. Množina všech čísel, která nejsou algebraická, to jest množina všech transcendentních čísel, musí být nespočetná, protože množina všech reálných čísel je nespočetná. Neobvyklá metoda důkazu byla některými přijímána s rezervou a bylo i mnoho těch, kteří ji odmítali.

Další podrobné zkoumání vzájemně jednoznačných zobrazení vedlo k definici pojmu mohutnost množiny a kardinální číslo. Říkáme, že dvě množiny mají stejnou mohutnost, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení jedné množiny na druhou. Cantor definoval abstrakcí kardinální číslo jako vlastnost, která je společná všem prvkům nějaké třídy množin, z nichž každé dvě lze na sebe vzájemně jednoznačně zobrazit. Tuto vlastnost nazval mohutnost. Později ukázal, že ke každé nekonečné množině existuje množina větší mohutnosti. Tím došel k překvapivému výsledku, že škála nekonečných mohutností je nekonečná a není shora omezena. Vzhledem k tomu, že přirozená čísla vyjadřují počty prvků konečných množin, kardinální čísla lze chápat jako rozšíření přirozených čísel: kardinální čísla vyjadřují „počet prvků" – mohutnost – nekonečných i konečných množin. Jiným zobecněním přirozených čísel jsou ordinální čísla. Od vlastností, které má uspořádání přirozených čísel podle velikosti, dospěl Cantor k pojmu dobré uspořádání a abstrakcí zavedl ordinální čísla jako typy dobře uspořádaných množin. Podrobně také vyšetřoval vlastnosti množin reálných čísel.

Když vyjasnil vztah mezi mohutností množiny všech algebraických reálných čísel a množiny všech reálných čísel, položil si Cantor otázku, zda je možné vzájemně jednoznačně zobrazit rovinu na přímku, případně čtverec na úsečku. Při použití kartézských souřadnic jde vlastně o problém, zda je možné vzájemně jednoznačně zobrazit množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel na množinu všech reálných čísel, případně zda je možné vzájemně jednoznačně zobrazit množinu všech uspořádaných dvojic čísel z nějakého intervalu na množinu všech čísel z téhož intervalu. Vzájemně jednoznačná zobrazení budeme krátce nazývat prostá zobrazení.

O svém problému Cantor napsal R. Dedekindovi (1831–1916), který měl po ruce pohotovou odpověď: takové zobrazení neexistuje, protože „je zřejmé, že dvě nezávisle proměnné veličiny nelze převést na jedinou". V té době byl běžně přijímán předpoklad, že mezi geometrickými útvary různých dimenzí neexistuje vzájemně jednoznačné zobrazení. Tuto „samozřejmost" se Cantor snažil dokázat, ale bez úspěchu. Nakonec dokázal, že existuje prosté zobrazení čtverce na úsečku. Jeho první důkaz byl jednoduchý, ale neúplný.

Označme $\mathbb{I}$ interval $[0, 1]$ všech reálných čísel x, $0 \leq x \leq 1$ a $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ množinu všech uspořádaných dvojic čísel z intervalu $\mathbb{I}$. Již víme, že s výjimkou nuly má každé číslo z intervalu $\mathbb{I}$ jednoznačně určený nekonečný desetinný rozvoj. Jsou-li a, b dvě čísla z intervalu $\mathbb{I}$ a

$$\begin{aligned} a &= 0{,}a_1a_2a_3\dots, \\ b &= 0{,}b_1b_2b_3\dots \end{aligned} \tag{6}$$

jsou jejich nekonečné rozvoje, uspořádané dvojici $\langle a, b\rangle$ přiřadíme číslo c tvaru

$$c = 0{,}a_1b_1a_2b_2\dots a_nb_n\dots$$

Zřejmě $0 \leq c \leq 1$ a z čísla c lze určit obě čísla a, b. Definovali jsme prosté zobrazení čtverce $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ do intervalu $\mathbb{I}$. Teprve Dedekind si povšiml, že hodnoty zobrazení nevyčerpají celý interval $\mathbb{I}$. Uvažoval číslo c tvaru

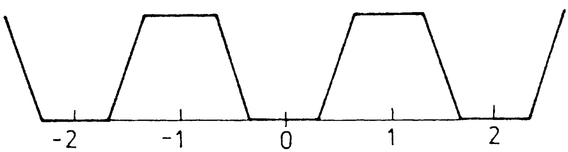
$$c = 0{,}a_17a_23a_30a_40\dots a_n0\dots,$$

které má na sudých místech za desetinnou tečkou od šestého místa počínaje samé nuly. Podle definice zobrazení by číslu c odpovídala dvojice $\langle a, b \rangle$, kde číslo

$$b = 0{,}730\,000\ldots$$

není v požadovaném tvaru. Přitom nekonečný desetinný rozvoj čísla b neodpovídá číslu c. Jinými slovy, c není přiřazeno žádné dvojici z $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Je zřejmé, že v intervalu $\mathbb{I}$ je takových čísel nekonečně mnoho. V odpovědi Dedekindovi Cantor sestrojil jiné – už ne tak jednoduché – prosté zobrazení čtverce $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ na $\mathbb{I}$. Použijeme-li Cantorovy a Bernsteinovy věty, která byla dokázána až o deset let později, dokážeme existenci prostého zobrazení $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ do $\mathbb{I}$ a není těžké sestrojit prosté zobrazení $\mathbb{I}$ do $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Podle citované věty pak existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ na $\mathbb{I}$. Dimenze tedy není invariantní vzhledem ke všem prostým zobrazením.

Cantor si uvědomil, že tento výsledek je vážnou výhradou proti tehdejšímu pojetí dimenze. V řadě dopisů mezi ním a Dedekindem postupně vykrystalizoval problém invariantnosti dimenze. Šlo o to dokázat, že dimenze je invariantní vzhledem k jistým spojitým zobrazením. Cantor publikoval své výsledky v roce 1878 a v krátké době se pokusilo několik matematiků invariantnost dimenze dokázat. Ukázalo se, že je to velmi obtížný problém. Do konce devadesátých let byly podány uspokojivé důkazy invariantnosti dimenzí vzhledem ke spojitým a prostým zobrazením jen pro dimenze menší než čtyři. Žádný důkaz však nedával vyhlídky na obecné řešení problému.



Obr 0 1

V roce 1890 ukázal Giuseppe Peano (1858–1932), že samotná spojitost zobrazení k invariantnosti dimenze nestačí. Sestrojil spojité zobrazení intervalu $\mathbb{I}$ na čtverec $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Místo původní Peanovy konstrukce popíšeme jinou, jednodušší. Jde o to sestrojit dvě spojité funkce $x(t)$, $y(t)$ na intervalu $\mathbb{I}$ tak, aby uspořádané dvojice $\langle x(t), y(t) \rangle$ pro $t \in \mathbb{I}$ vyplnily čtverec $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Nejprve definujeme pomocnou reálnou funkci f. Její hodnoty v intervalu $\mathbb{I}$ jsou dány předpisem

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq u \leq \frac{1}{3}, \\ 3u - 1 & \text{pro } \frac{1}{3} < u < \frac{2}{3}, \\ 1 & \text{pro } \frac{2}{3} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

a ostatní hodnoty $f(u)$ definujeme tak, aby f byla sudá periodická funkce s periodou 2. To znamená, že pro číslo u, $-1 \leq u \leq 0$ je $f(u)$ dáno vztahem $f(u) = f(-u)$ a ostatní hodnoty jsou dány periodicitou funkce. Grafem funkce f je lomená čára na obr. 0.1. Funkce f je spojitá a pro každé u platí $0 \leq f(u) \leq 1$.

Pro libovolné t z intervalu $\mathbb{I}$ definujeme

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(3^{2n}t),$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(3^{2n+1}t).$$

Není těžké dokázat, že $x(t)$, $y(t)$ jsou spojité funkce s hodnotami v $\mathbb{I}$. Jsou-li a, b libovolná čísla z $\mathbb{I}$ a (6) jsou jejich vyjádření ve dvojkové soustavě, dá se ukázat, že existuje číslo t v intervalu $\mathbb{I}$ takové, že

$$(7) \qquad \begin{aligned} a_n &= f(3^{2n}t), \\ b_n &= f(3^{2n+1}t) \end{aligned}$$

platí pro každé přirozené n. To znamená, že t je vzorem dvojice $\langle a, b \rangle$ a že popsané zobrazení spojitě zobrazuje interval $\mathbb{I}$ na čtverec $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Sestrojené zobrazení není prosté, dvěma různým dvojkovým rozvojům téhož čísla, například

$$0{,}100\ldots,$$
$$0{,}011\ldots,$$

odpovídají podle (7) dva různé vzory t a mohou existovat i další, protože k odvození vztahů (7) se používají jen intervaly, kde funkce f nabývá hodnot nula nebo jedna. Není těžké dokázat, že žádné spojité zobrazení intervalu $\mathbb{I}$ na čtverec $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ nemůže být prosté. Podobným způsobem lze sestrojit zobrazení reálné přímky $\mathbb{R}$ na rovinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Peanovo zobrazení odpovídá definici křivky, kterou několik let předtím vyslovil Camille Jordan (1838–1922), když studoval možnosti zobecnění známé Cauchyho věty o funkcích komplexní proměnné. Jordan tenkrát dokazoval jiné „samozřejmé“ tvrzení, že jednoduchá uzavřená křivka v rovině, tedy křivka podobná kružnici, rozděluje rovinu na dvě souvislé části, na vnější a vnitřní. Matematicky zcela přesný důkaz tohoto tvrzení, známého dnes jako Jordanova věta, byl podán až později. Po Peanově objevu se zdálo, že je setřen rozdíl mezi křivkou a plochou, plochou a tělesem. Kdo by považoval čtverec za křivku!

Řešení problému dimenze přinesla topologie, která se koncem století vydělila jako samostatná matematická disciplína z analýzy a geometrie. Její vývoj byl velmi významně ovlivňován množinovým přístupem, zejména teorií bodových množin – jak se tehdy říkalo studiu množin reálných čísel a množin bodů v obecných euklidovských a metrických prostorech. Některé pojmy množinové topologie, mezi nimi pojem uzavřená množina, řídká a perfektní množina, byly zavedeny Cantorem. Klasickým příkladem řídké a perfektní množiny reálných čísel je Cantorovo diskontinuum. Setkáme se s ním později ještě v jiných souvislostech. Topologie nabídla nové prostředky pro detailní studium funkcí a matematická analýza z nich dovedla pohotově těžit. Vývoj teorie reálných a komplexních funkcí se zrychlil v období po zveřejnění hlavních Cantorových prací. Jen o málo později se prosazuje množinový přístup i k některým základním otázkám geometrie. Do druhého vydání svého Kursu analysy v roce 1893 zařadil Jordan vedle nového důkazu své věty o uzavřených křivkách i samostatný oddíl o Cantorově teorii množin. Obecný důkaz invariantnosti dimenze podal L. E. J. Brouwer (1881–1966) až v roce 1910. Dnes je teorie dimenze součástí topologie stejně jako topologická teorie křivek.

Ačkoliv byly dokázány obecné věty o množinách, samotný pojem množina byl používán jen intuitivně nebo, v lepším případě, byl odvozován od filozofických pojmů třída nebo totalita. Svědčí o tom i toto Cantorovo vymezení: „Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých předmětů *m* našeho nazírání nebo myšlení (které nazýváme prvky) do jediného celku „*M*".

Pojem množiny je zde opsán pomocí slov „souhrn" a „celek", která sama nejsou o nic jasnější. Přesněji jsou popsány vlastnosti prvků množiny. Jsou navzájem „různé", to znamená, že žádný objekt nemůže být opakovaně prvkem téže množiny. Prvky množiny mají být „určité", to znamená, že má-li být dána nějaká množina, předpokládá to, aby pro každý objekt bylo možné určit, zda je či není jejím prvkem. V jednotlivých případech může být takové určení velmi obtížné, například o některých reálných číslech není dosud známo, zda jsou transcendentní či algebraická. Předpokládá se, že takové určení je možné alespoň v principu.

Je už jasné, že takové vymezení pojmu množiny není definice v pravém smyslu. Jde spíše o intuitivní vyjádření toho, co by množiny měly být. I tak se nový pojem stal východiskem k rozvinutí teorie množin a spolu s jejími účinnými metodami rychle pronikal do mnoha odvětví matematiky. Ještě před koncem století poukázal A. Hurwitz (1859–1919) v jedné z hlavních přednášek na I. mezinárodním matematickém kongresu v Curychu (1897) na význam teorie množin a z ní odvozených metod topologie pro teorii reálných a komplexních funkcí.

O tři roky později na II. mezinárodním matematickém kongresu v Paříži konstatuje H. Poincaré (1854–1912): „... v analýze zůstávají jen přirozená čísla a konečné nebo nekonečné soubory přirozených čísel ... Můžeme dnes říci, že již bylo dosaženo absolutní přesnosti". Tento optimistický názor předpokládal, že absolutní přesnosti bylo dosaženo i v teorii „nekonečných souborů přirozených čísel", tedy v teorii množin. Brzy se mělo ukázat, že takový předpoklad nebyl oprávněný.

V teorii množin se objevily rozpory – antinomie, pro které nebylo uspokojivé řešení. Nejprve jen v pokročilých partiích, týkajících se ordinálních a kardinálních čísel. Cantor a nezávisle C. Burali-Forti (1861–1931) ukázali, že „množina" všech ordinálních čísel je dobře uspořádaná. Typem jejího uspořádání by mělo být také ordinální číslo, ale větší než všechna ordinální čísla. Tento výsledek publikoval

Burali-Forti v roce 1897. O dva roky později narazil Cantor na jiný rozpor, týkající se mohutnosti „množiny“ všech množin. Ukázal, že pro libovolnou množinu m množina $\mathcal{P}(m)$ všech podmnožin množiny m má větší mohutnost než m. Uvažujeme-li množinu U všech mnnožin, potom množina $\mathcal{P}(U)$ by měla mít větší mohutnost než U!

Celá věc se zpočátku nebrala moc vážně. Svědčí o tom i použité terminologické odstíny. I když každý z uvedených výsledků je sporem v teorii množin, vžily se pro ně názvy paradox Burali-Fortiho a paradox Cantorův. Zřejmě se předpokládalo, že paradoxy budou odstraněny zpřesněním důkazů některých vět o ordinálních a kardinálních číslech.

Důvěrou v teorii množin otřásl až v roce 1902 Bertrand Russell (1872–1970), když nalezl spor v teorii množin pomocí jejich nejelementárnějších prostředků. Jádro sporu, který byl nazván Russellův paradox, je v následující úvaze: je-li soubor všech objektů, které mají určitou vlastnost, množina, uvažujme množinu všech množin, které nejsou obsaženy samy v sobě jako prvek. Pro větší názornost vyjádříme takovou množinu zápisem

$$x = \{y : y \notin y\},$$

kde výraz $y \notin y$ chápeme jako formální zápis výroku „množina y není prvkem množiny y“ a závorku $\{y : \ldots\}$ chápeme jako označení množiny všech y, které mají vlastnost „...“. Nyní se můžeme ptát, je-li množina x sama svým prvkem či ne. Rozebereme oba případy:

(a) Je-li x prvkem x (píšeme $x \in x$), potom x musí mít vlastnost, která definuje prvky množiny x. To znamená, že musí platit $x \notin x$. Tedy z $x \in x$ plyne $x \notin x$.

(b) Není-li x prvkem x, potom množina x má vlastnost $x \notin x$, která určuje prvky množiny x. To znamená, že musí platit $x \in x$. Tedy z $x \notin x$ plyne $x \in x$.

Rozborem obou případů jsme ukázali, že $x \in x$ platí, právě když $x \notin x$. Existence množiny x vyplývá z principů Cantorovy teorie množin, ale vede ke sporu.

Russellův paradox se dotkl základních principů, které byly jako intuitivně zřejmé začleněny do Cantorova pojmu množiny. Tento nečekaný zvrat vedl mnoho matematiků k přehodnocení názorů na teorii množin. Příkladem takového obrácení se stal i H. Poincaré, nepochybně jedna z vedoucích postav matematiky té doby. Sám nemálo přispěl k propagaci teorie množin a po Russellově objevu věnoval problematice základů matematiky dvě studie. K úsilí Russella, Zermela a dalších, směřujícímu k odstranění paradoxů, však přistupoval se skepsí a značnou dávkou ironie.

Brzo po Russellově antinomii bylo publikováno několik dalších. Všimněme si zejména jedné z nich, kterou publikoval J. Richard v roce 1905. Tak zvaný Richardův paradox je významný především úzkým vztahem k diagonální metodě. Spočívá v následující úvaze. Uvažujme všechna reálná čísla x, $0 < x < 1$, která lze jednoznačně definovat konečnou posloupností slov. Například „jedna polovina“, „třetí odmocnina ze dvou“ a podobně. V teorii množin se dá ukázat, že tato množina je spočetná, označme ji R. Její prvky lze seřadit do posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a ke každému a_n existuje jednoznačně určený nekonečný desetinný rozvoj (2). Nyní můžeme definovat číslo d touto posloupností slov: „d je reálné číslo mezi nulou a jednotkou, jehož n-tá cifra za desetinnou čárkou je rovna jedné, pokud n-tá cifra n-tého čísla z množiny R je různá od jednotky, v opačném případě je n-tá cifra desetinného rozvoje čísla d rovna dvěma“.

Stejným postupem, kterým jsme dokázali, že množina všech reálných čísel není spočetná, se můžeme přesvědčit, že číslo d není prvkem množiny R, přestože bylo definováno konečnou posloupností slov.

Řada matematiků právem chápala vzniklou situaci jako krizi nejenom teorie množin, ale i samotných principů, ze kterých vychází matematika. S velikým úsilím se věnovali kritickému zkoumání základních principů celé matematiky. Tento proud přinesl nový rozvoj logiky a radikálně změnil představy o základech matematiky. Pokud jde o samotnou teorii množin, G. Cantor nikdy nepřestal věřit, že se podaří udržet podstatný obsah teorie v jejím původním intuitivním pojetí. Poukázal na to, že při většině množinových úvah lze napřed určit rámcovou množinu tak, že celá úvaha se provádí jen s jejími prvky, a z prvků takové množiny nelze sestrojit spor podle žádné z antinomií. Intuitivní teorie množin není vhodná ke studiu základních principů matematiky, ale postačí pro většinu běžných aplikací v algebře a analýze. Používá se dodnes pod označením naivní teorie množin.

Některé z nových směrů revidovaly mnohem podstatněji nejenom teorii množin, ale i matematickou logiku. Radikální stanovisko zaujal zejména Brouwer, zakladatel směru, který se nazývá intuicionismus. Zcela vyloučil aktuální podobu nekonečna a v logice trval na přísně finitním a konstruktivním charakteru všech důkazů. Za těchto omezení ztrácejí smysl podstatné partie teorie množin i některé další části moderní matematiky. Pokus o revizi teorie množin, podniknutý Russellem a Whiteheadem, vyústil v nový axiomatický systém matematické logiky – tak zvanou teorii typů. Teorie množin, rozvinutá Russellem v rámci teorie typů, byla těžkopádná a příliš se nevžila. Pozdější pokusy o odstranění strnulosti teorie typů pocházejí od W. W. Quinea a jsou známy pod názvem New Foundations. Oba zmíněné směry – intuicionismus i teorie typů – provádějí souběžně revizi intuitivních principů teorie množin i revizi logiky. To ve své době nebylo nic překvapivého. Tak zvaná klasická logika v Aristotelovské tradici neměla k paradoxům co říci a moderní matematická logika se rozvíjela souběžně s teorií množin v pracech Gotloba Fregeho (1848–1925), Peana a dalších.

Axiomatická metoda budování teorie množin, kterou se budeme dále podrobněji zabývat, odstranila všechny známé paradoxy, aniž bylo třeba podstatně měnit matematickou logiku, jak byla založena Fregem a Peanem. Axiomatická metoda byla už ve starověku používána v geometrii. V minulém století prošla svou renesancí opět v geometrii a dnes je používána v mnoha odvětvích matematiky. Brzo po Russellově paradoxu publikoval E. Zermelo (1871–1956) axiomatický systém teorie množin, který klade jistá omezení na pojmy intuitivní teorie množin, a to taková, že právě nepřipouští spor podle žádné ze známých antinomií. Zermelova původní axiomatika byla později doplněna A. A. Fraenkelem (1891–1965) o tak zvané schéma axiomů nahrazení a Zermelo připojil ještě axiom fundovanosti. Ve znění z počátku třicátých let se tato axiomatika stala nejrozšířenější podobou teorie množin. Vžil se pro ni název Zermelova a Fraenkelova teorie množin (ZF). Ve dvacátých letech vzniká odlišná axiomatika, která vychází od pojmu zobrazení místo od pojmu množina. Navrhl ji A. A. Fraenkel a později ji doplnil a rozpracoval J. von Neumann (1903–1957). Na některé myšlenky navázal ve třicátých letech P. J. Bernays (1888–1977), který navrhl axiomatiku založenou na pojmu třída. Koncem třicátých let dal tomuto systému rámcovou podobu K. Gödel (1906–1978). Tím vznikl druhý typ axiomatiky, který se nazývá Gödelova a Bernaysova teorie množin (GB) nebo řidčeji von Neumannova, Bernaysova a Gödelova teorie množin. Oba systémy jsou odlišné ve způsobu, kterým řeší problém antinomií, ale pokud jde o jejich obsažnost – máme na mysli věty, které se dají dokázat o množinách – není mezi nimi rozdílu. Lze říci, že obě axiomatiky představují dvě formy téže teorie, které se liší jen v metamatematice. Na jejich základě lze rozvinout teorii množin, která je dost silná, aby se mohla stát základní teorií pro většinu matematických disciplín. Z dalších axiomatických teorií množin nelze opomenout ještě Morseovu a Kelleyovu axiomatiku, která je zesílením Gödelovy a Bernaysovy teorie množin. V této knize bude zevrubně vyložena teorie množin na základě Zermelovy a Fraenkelovy axiomatiky, která zachovává původní Cantorovu představu množiny jako souboru „předmětů" a dotváří ji (a současně omezuje) dvojím způsobem. Nejprve předpokládá, že všechny objekty této teorie jsou množiny. Jinými slovy, množiny jsou jediné „předměty", které mohou být prvkem množin. Navíc předpokládá, že univerzum množin vzniká postupně v jednotlivých krocích. V každém kroku je dána množina všech doposud sestrojených množin a nové množiny vznikají jako její části, tedy jako prvky její potence. Můžeme říci, že množinové univerzum vzniká iterováním operace potence. Jak uvidíme později ve druhé kapitole, tato iterace probíhá podle dobrého uspořádání třídy všech ordinálních čísel. Axiomy Zermelovy a Fraenkelovy teorie množin zachycují podstatné rysy takového univerza. Motivaci a hlubší zdůvodnění jednotlivých axiomů lze nalézt v práci J. R. Shoenfielda (1977).

Je však možné vytvořit i jiná „alternativní" univerza množin, která řeší vztah mezi konečnými a nekonečnými soubory zcela odlišným způsobem. Taková univerza nebudeme v této knize zkoumat pro jejich značně odlišnou strukturu a axiomatizaci. Soustavně se jimi zabývá kniha P. Vopěnky (1979).

Postavení teorie množin v matematice. Na několika příkladech z prvního období jsme ukázali, jak Cantorova teorie množin ovlivnila řešení závažných problémů analýzy, geometrie a teorie čísel. Nepřekvapí nás to, připomeneme-li si, že ke svým úvahám o množinách se původně Cantor dostal od problému reprezentace funkcí. Teorie množin rychle pronikla do analýzy, zvlášť výrazně do teorie míry a teorie funkcí, zásluhou R. Bairea (1874–1932), E. Borela (1871–1956), H. Lebesguea

(1875–1941) a F. Riesze (1880–1956). Významně ovlivnila nově vznikající topologii. Připomeňme alespoň F. Hausdorffa (1868–1942), R. M. Frécheta (1878–1973), N. N. Luzina (1883–1950), P. Urysohna (1898–1924) a P. S. Alexandrova (1896–1982). S využitím topologických metod v analýze je spojen vznik funkcionální analýzy.

Bez teorie množin si nelze představit ani rozvoj moderní algebry. Její počátky spojené s využíváním metod teorie množin najdeme v pracích R. Dedekinda a D. Hilberta (1862–1943) ještě v minulém století a první etapa rozvoje moderní algebry vrcholí ve dvacátých letech výsledky E. Noetherové (1882–1935), E. Artina (1898–1962), O. Schreiera (1901–1929) a dalších. Monografie B. L. van der Waerdena již důsledně vychází ze stanoviska, že algebra je studium operací na množinách. Poprvé vyšla v roce 1931 a do dnešních dnů byla publikována v mnoha překladech a nových vydáních. Ve stejném duchu pokračoval vývoj i ve třicátých letech, vedle operací s konečným počtem argumentů byly vyšetřovány i nekonečné operace na svazech a v dalších strukturách. Vzniká takzvaná univerzální algebra, jejíž základy položil G. Birkhoff. Téměř souběžně rozpracoval A. I. Malcev (1909–1967) teorii algebraických systémů, která zahrnuje univerzální algebru a má styčné body s teorií modelů, která se rozvíjí jako část matematické logiky pod vlivem A. Tarského (1901–1983) a jeho žáků.

Teorie množin se stala společným základem řady disciplín, které dnes tvoří podstatnou část matematiky. Tento fakt nelze přeceňovat. Pro většinu matematiků nejde o víc než o jazyk teorie množin a základní množinové konstrukce. Z hlubších výsledků teorie množin se nejčastěji používá transfinitní indukce a některé důsledky axiomu výběru známé jako principy maximality. To vše lze zajistit již v naivní teorii množin, která až do nedávné doby mohla postačit pro potřeby většiny matematiků – snad s výjimkou těch, kteří se specializovali v logice a teorii množin. Dnes je již zřejmé, že speciální problémy řady matematických oborů kladou teorii množin stejně jemné otázky jako výzkum samotné teorie množin.

Během desetiletí se v různých oborech matematiky nastřádalo množství problémů, které měly nějaký vztah k teorii množin a které po léta odolávaly úsilí matematiků. Připomeňme známý Suslinův problém (1920), který se týká charakteristických vlastností uspořádání reálné přímky, nebo kombinatorickou Kurepovu hypotézu (1938), která klade otázku, zda „úzké“ stromy mohou mít mnoho větví. Oba problémy podrobně rozebereme ve třetí kapitole. V teorii míry to byla Borelova domněnka o tom, že každá množina reálných čísel, která má absolutně míru nula, je spočetná. Zajímavý je i Blumbergův problém z teorie funkcí. Blumberg (1922) dokázal, že ke každé reálné funkci f definované na celé reálné přímce existuje hustá množina H reálných čísel taková, že f je spojité zobrazení množiny H do $\mathbb{R}$. Uvědomme si, že již zmíněná Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě reálné přímky, ale omezíme-li se na hustou množinu racionálních čísel, získáme přesto spojité zobrazení této množiny do reálné přímky. Blumbergův problém, zda totéž platí i pro každý kompaktní Hausdorffův prostor, byl negativně rozřešen teprve nedávno. Z algebry uveďme alespoň Whiteheadův problém z teorie komutativních grup. V teorii množin to byl známý problém hypotézy kontinua (CH), který vyslovil Cantor již v roce 1878. Jde o tvrzení:

(CH) Každou nekonečnou množinu reálných čísel lze vzájemně jednoznačně zobrazit buď na množinu všech přirozených čísel, nebo na množinu všech reálných čísel.

Cantor píše v dopise G. Mittag-Leflerovi (1846–1927), že doufá, že mu bude moci poslat důkaz hypotézy kontinua do čtrnácti dnů. Problém zůstal dlouho otevřený a D. Hilbert jej zařadil na první místo do seznamu svých třiadvaceti problémů, které přednesl na druhém mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v roce 1900. Pracovalo na něm mnoho matematiků. Ve své autobiografii píše P. S. Alexandrov, jak se z podnětu N. N. Luzina pokoušel hypotézu kontinua dokázat.

Vývoj teorie množin ani dalších disciplín nebyl zadržen tím, že se hypotézu kontinua nepodařilo dokázat. Ta spíše stimulovala k dalšímu zkoumání. Hypotézu kontinua můžeme chápat jako princip, který omezuje množiny reálných čísel. Má navíc vztah k některým z uvedených problémů. Plyne z ní například neplatnost Borelovy domněnky. Ve třicátých letech W. Sierpinski (1882–1969) zevrubnou analýzou ukázal, že hypotéza kontinua je ekvivalentní mnoha zajímavým tvrzením. Jedno takové tvrzení se týká zobrazení reálné přímky na rovinu. V roce 1980 navázal M. Morayne na Sierpinského výsledky a ukázal, že hypotéza kontinua je ekvivalentní následujícímu tvrzení.

Existují reálné funkce $x(t)$, $y(t)$ definované na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel takové, že uspořádané dvojice $\langle x(t), y(t)\rangle$, $t \in \mathbb{R}$ vyplní celou rovinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a v každém bodě t má alespoň jedna z funkcí $x(t)$, $y(t)$ vlastní derivaci.

Lze ukázat, že pokud funkce $x(t)$, $y(t)$ mají uvedené vlastnosti, žádná z nich není prostá na $\mathbb{R}$. Srovnejme toto tvrzení s tím, co bylo řečeno o Peanově křivce.

Co může říci axiomatická teorie množin například k problému kontinua? Nejprve si musí položit otázku, zda z jejích axiomů není možné dokázat cokoliv – to znamená, zda jsou její axiomy bezesporné. Ukázalo se, že to není jednoduchá otázka. Teorie množin byla koncipována jako „svět matematiky“, a proto její axiomy obsahují řadu silných existenčních tvrzení. Už to naznačuje, že důkaz bezespornosti může být obtížný. V práci z roku 1908, ve které zavedl axiomy teorie množin, E. Zermelo konstatoval, že umí dokázat jen to, že jeho axiomy vylučují každý ze známých paradoxů, ale že se mu nepodařilo nalézt obecný důkaz bezespornosti. Že to nebylo náhodou, ukazuje výsledek K. Gödela z roku 1931, ze kterého vyplývá, že důkaz bezespornosti axiomů teorie množin není možné provést v teorii množin. Vzhledem k tomu, že teorie množin zahrnuje většinu postupů užívaných v matematice, Gödelův výsledek nedává mnoho naděje pro důkaz bezespornosti teorie množin. Proto nás nesmí překvapit opatrná formulace jeho výsledku o hypotéze kontinua. K. Gödel ukázal v roce 1938, že jsou-li axiomy teorie množin bezesporné, pak přidáním hypotézy kontinua a axiomu výběru vznikne opět bezesporný systém axiomů. Říkáme také, že hypotéza kontinua (axiom výběru) je bezesporná vzhledem k axiomům teorie množin. Můžeme také říci, že pokud z axiomů teorie množin není možné odvodit cokoliv, potom z nich nelze dokázat negaci hypotézy kontinua.

Při důkazu tohoto tvrzení Gödel sestrojil třídu „konstruovatelných" množin uvnitř univerza všech množin. Ve třídě konstruovatelných množin platí všechny axiomy teorie množin a navíc hypotéza kontinua i axiom výběru. Rozborem Gödelova důkazu je možné vydělit nový princip – axiom konstruovatelnosti, který platí ve třídě všech konstruovatelných množin a implikuje hypotézu kontinua i axiom výběru. Gödelův výsledek ukazuje, že axiom konstruovatelnosti je bezesporný vzhledem k axiomům teorie množin. Přirozeně vznikla otázka, zda je axiom konstruovatelnosti dokazatelný z axiomů teorie množin.

Teprve v roce 1963 P. J. Cohen ukázal, že jsou-li axiomy teorie množin bezesporné, pak z nich nelze hypotézu kontinua (a přirozeně ani axiom konstruovatelnosti) dokázat ani s použitím axiomu výběru. Cohen ukázal, že jsou-li axiomy teorie množin bezesporné, pak přidáním negace hypotézy kontinua nebo negace axiomu výběru vznikne bezesporný systém axiomů. Říkáme, že hypotéza kontinua je nezávislá na axiomech teorie množin. Cohen dále ukázal, že axiom výběru je také nezávislý na axiomech teorie množin.

Gödelovy a Cohenovy výsledky ukazují, že problém hypotézy kontinua nelze rozhodnout na základě axiomů teorie množin. Jsou-li axiomy teorie množin bezesporné, hypotézu kontinua z nich nelze ani dokázat, ani vyvrátit. Je tu jistá analogie s problémem pátého Eukleidova postulátu o rovnoběžkách, který uzavřeli J. Bolyai (1802–1860) a N. I. Lobačevskij (1792–1856). Pátý postulát nelze z ostatních axiomů Eukleidovy geometrie ani dokázat, ani vyvrátit. Můžeme vytvořit různé geometrie, přidáme-li pátý postulát nebo jiný axiom, ze kterého plyne negace pátého postulátu. Podobně vytvoříme různá rozšíření teorie množin, přidáme-li k axiomům hypotézu kontinua nebo nějaký jiný axiom, který ji neguje, například Borelovu domněnku nebo Martinův axiom MA_{ω_1}, o kterém se zmíníme ve čtvrté kapitole.

Je velkou zásluhou Cohenovou, že k důkazu nezávislosti hypotézy kontinua vytvořil novou metodu, tak zvanou metodu forsingu (vynucení). Záhy se ukázalo, že tato metoda může být dále rozpracována a použita k důkazům bezespornosti mnoha dalších tvrzení. Tak lze ukázat, že kladné odpovědi ke všem problémům, o kterých jsme se zmínili, s výjimkou Blumbergova, jsou bezesporné. Metoda forsingu byla rozpracována nezávisle D. Scottem a R. Solovayem, R. Shoenfieldem a P. Vopěnkou do metody, která se dnes používá ke konstrukci Booleovských modelů a generických rozšíření modelů teorie množin, kterou popíšeme ve čtvrté kapitole.

Díky častému použití generických rozšíření modelů teorie množin je v současné době známo několik desítek principů, které postulují určité vlastnosti univerza množin a které jsou – podobně jako hypotéza kontinua – bezesporné vzhledem k axiomům teorie množin a také jsou na nich nezávislé. Říkáme také, že jsou nerozhodnutelné v teorii množin. Kterýkoli z nich je možno bezesporně přidat k axiomům teorie množin, a tím vytvořit novou silnější axiomatiku, které říkáme rozšíření teorie množin. Tuto skutečnost musíme brát v úvahu při řešení matematických problémů v teorii množin. Nedaří-li se nám dokázat ani vyvrátit nějaké tvrzení pomocí axiomů teorie množin, může to být i proto, že jde o tvrzení, které na základě axiomů nelze rozhodnout. Pak je vhodné problém zkoumat v nějakém rozšíření teorie množin. Dokážeme-li, že naše tvrzení je důsledkem nějakého principu, který je sám bezesporný vzhledem k axiomům teorie množin, tvrzení je také bezesporné vzhledem k axiomům. Je-li důsledkem takového principu negace našeho tvrzení, tvrzení nelze dokázat z axiomů teorie množin. V této knize bude podána řada podobných důkazů bezespornosti nebo nezávislosti a v odborné literatuře jsou dnes běžné i mimo teorii množin.

Bezespornost anebo nezávislost nějakého tvrzení je možno dokázat i tím, že sestrojíme vhodný model teorie množin. Konstrukce modelů teorie množin byla donedávna výlučnou záležitostí specialistů v teorii množin. V současné době se stále častěji používá i v dalších oborech matematiky.

Axiomatika teorie množin tak, jak se ustálila ve třicátých letech, nedává možnost rozhodnout o mnoha problémech. Patrně nikdo z těch, kdo ji vytvářeli, nepředpokládal, že navržená axiomatika bude úplná. Způsob, jakým Zermelo zdůvodňoval své axiomy, naznačuje, že si byl vědom toho, že jím započatá analýza principů ještě bude pokračovat. Výsledky posledních desetiletí vytvořily pestrou paletu možných rozšíření teorie množin. Studium různých množinových principů, které jsou nerozhodnutelné na základě axiomů teorie množin a jejich vzájemných vztahů, nepochybně přispěje k hlubšímu pochopení základních principů matematiky a může v budoucnu vést k vytvoření nových teorií, které by zaujaly místo teorie množin. Historický vývoj naznačuje, že strukturální bohatost v matematice se bude neustále prohlubovat a že každá nová teorie povede k otázce, co je za jejími hranicemi.

KAPITOLA I

Osm paragrafů této kapitoly je úvodem do teorie množin, který má tři odlišné části. První tři paragrafy se zabývají symbolickým jazykem a axiomy teorie množin. Jejich trochu puntičkářský charakter může při prvním čtení odrazovat. Pro začátek však stačí seznámit se s axiomy (§ 2) a k ostatnímu je možné se vrátit později. Výklad pokračuje tím, čím by měl vlastně začínat, základními operacemi s množinami, relacemi a zobrazeními (§ 4). V § 5 jsou podrobněji probírány vlastnosti relací uspořádání a relací ekvivalence. Mac Neillova věta o minimálním rozšíření je příkladem zajímavé algebraicky motivované konstrukce. Výklad o relacích uzavírá srovnávání mohutnosti množin pomocí zobrazení a důležitá věta Cantorova a Bernsteinova. Podrobněji se velikostí množin zabývá § 6. Začíná u konečných množin a přirozených čísel a uvádí základní fakta o spočetných a nespočetných množinách. Srovnává mohutnosti množin přirozených, celých, racionálních a reálných čísel. Paragrafy 4–6 shrnují úvodní partie teorie množin. Poslední dva paragrafy prohlubují předchozí výklad. Seznamují s axiomem výběru a jeho důsledky (§ 7) a poslední paragraf ukazuje, jak novější pojmy teorie množin nacházejí rozmanité užití v ostatních matematických oborech.

Každá kapitola je rozdělena do několika paragrafů a ty se dále dělí na číslované odstavce. Tímto způsobem členění jsme chtěli usnadnit vyhledání potřebných informací i těm, kdo nebudou knihu číst souvisle. V textu je zařazena řada příkladů. Některé z nich se týkají i jiných oborů matematiky, většinou topologie, a jejich pochopení může být vázáno na určité znalosti z daného oboru. Takové příklady je možno vynechat, k pochopení dalšího výkladu nejsou nutné.

Na pojmy a výsledky uvedené v téže kapitole odkazujeme číslem odstavce, tedy odkaz 5.2 se vztahuje ke druhému odstavci pátého paragrafu. Odkazy do jiné kapitoly vždy začínají číslem kapitoly, tedy I.2.12 je odkaz na odstavec 2.12 z první kapitoly. Rejstřík a seznam symbolů jsou připojeny na konci knihy.

§ 1 Jazyk teorie množin

Axiomatická metoda má dlouhou tradici zejména v geometrii. Množiny však představují jinou úroveň abstrakce než názorné pojmy elementární geometrie. Nechtěně to dokládají četné sémantické paradoxy o množinách, které ukazují, že je nezbytné co nejpřesněji vymezit jazyk teorie množin. Seznámíme se s jednoduchým symbolickým jazykem, který používá axiomatická teorie množin. Popíšeme syntax formulí, výrazů symbolického jazyka, které vyjadřují tvrzení a hypotézy o množinách. Všimneme si rozdílu mezi volnými a vázanými proměnnými i způsobů, jak se symbolický jazyk obohacuje.

1.1 Cantorova a axiomatická teorie množin. Axiomatizaci teorie vždy předchází neformální popis nějaké oblasti zkušenosti nebo představ, který zhruba vymezuje její předmět a používané metody. V našem případě je takovým popisem Cantorova teorie množin, se kterou jsme se seznámili již v úvodu této knihy. Chceme-li nějakou teorii axiomatizovat, nemusíme hned od počátku pracovat se všemi pojmy. Vybereme jen ty nejjednodušší, ze kterých lze všechny ostatní pojmy definovat. To budou základní pojmy axiomatické teorie. Všechna fakta, která o základních pojmech budeme předpokládat, vyjádříme jako základní tvrzení – axiomy. Tím je dán explicitní popis oboru, který studuje axiomatická teorie.

Srovnáme-li takový postup s Cantorovým pokusem vymezit pojem množiny, vidíme, že axiomatická teorie množin na stejnou otázku odpovídá nepřímo, výčtem vlastností univerza množin.

1.2 Jazyk a metajazyk. Axiomatická teorie se rozvíjí tím, že z axiomů odvozujeme další tvrzení – věty. Přitom obohacujeme její jazyk o nové, složitější pojmy. Při odvozování vět si nepočínáme libovolně, ale držíme se určitých pravidel, ať jsou dána naším matematickým citem, nebo mají svůj původ ve hlubších znalostech logiky. V tomto procesu má jazyk, kterým se vyjadřujeme (v našem případě čeština), dvojí úlohu. Vyjadřujeme v něm definice a věty teorie, v této funkci jej chápeme jako *jazyk teorie*. Stejným jazykem však mluvíme o definicích, o větách a o teorii jako celku: můžeme říci „tato definice je příliš dlouhá", „takové tvrzení nelze z axiomů dokázat" nebo „axiomy jsou nezávislé". V této funkci čeština vystupuje jako *metajazyk*.

Ve většině matematických disciplín se živý jazyk používá v obou funkcích, aniž by docházelo k nedorozuměním. Řada sémantických paradoxů založených na této dvojí funkci jazyka však ukazuje, že v teorii množin je nutné obě jazykové hladiny odlišovat. Připomeňme jen Richardův paradox citovaný v úvodu. Jeho jádrem je jistá množina R „všech reálných čísel z intervalu $(0, 1)$, která lze definovat konečným počtem slov". Povšimněme si, že definice množiny R spojuje obě hladiny jazyka: ta její část, která určuje prvky množiny R tím, že „jsou definovány konečným počtem slov", patří do metajazyka, protože mluví o definicích v jazyce teorie množin. Definici množiny R musíme odmítnout jako nekorektní, protože není vyjádřena v jazyce teorie množin.

Nabízí se možnost vyloučit sémantické paradoxy tím, že v každé hladině použijeme jiného jazyka. Pro základní pojmy teorie množin zavedeme speciální symboly a tím vytvoříme základ formálního, symbolického jazyka, ve kterém budeme formulovat definice a věty. Živý jazyk ponecháme ve funkci metajazyka, to znamená, že jím budeme mluvit o větách teorie množin (tedy o slovech formálního jazyka), o dokazatelnosti vět (tedy o posloupnostech slov formálního jazyka) a o teorii množin jako celku. Těmito problémy, kterých jsme se zatím jenom dotkli a se kterými se setkáváme v každé axiomatické teorii, se soustavně zabývá matematická logika. Při výkladu logických pojmů se omezíme na minimum, které nám dovolí zavést formální jazyk teorie množin a korektně s ním pracovat. Čtenář, který zatím logiku nestudoval, může chápat formule – slova formálního jazyka – jako symbolický zápis výpovědí o množinách. Může se vžít do doby, kdy se moderní matematická logika a teorie množin rozvíjely souběžně. Dříve než popíšeme symboly formálního jazyka teorie množin, podívejme se, jaké pojmy a obraty jimi chceme vyjadřovat.

1.3 *Základní pojmy Zermelovy a Fraenkelovy teorie množin* jsou pojmy množina a náležení. Podobně jako v jiných oblastech matematiky budeme také používat pojem rovnost, který chápeme jako totožnost. Množiny jsou základní objekty teorie, náležení a rovnost vyjadřují základní vztahy mezi množinami. Říkáme „množina x je prvkem množiny y“ nebo krátce „x je prvkem y“ a „množina x se rovná množině y“ nebo krátce „x se rovná y“. To jsou dva základní typy výpovědí teorie množin.

Složitější výpovědi vznikají ze základních nebo z již vytvořených výpovědí dvojím způsobem: buď spojováním pomocí logických spojek, nebo kvantifikací, to znamená připojením obratů „pro všechna ...“ nebo „existuje ...“. Úlohu obecných jmen živého jazyka, jako jsou „množina“ nebo „číslo“, budou hrát symboly, které nazýváme proměnné.

Pomocí logických spojek můžeme vyjádřit například tato tvrzení:

„x není prvkem y“ (*negace*),
„x je prvkem y a x je prvkem z“ (*konjunkce*),
„x je prvkem y nebo x je prvkem z“ (*disjunkce*),
„je-li x prvkem y, potom x je prvkem z“ (*implikace*),
„x je prvkem y, právě když x se rovná z“ (*ekvivalence*).

Kvantifikováním vyjádříme tvrzení následujících tvarů:

„pro každé x platí ...“ (*obecná kvantifikace*),
„existuje x, pro které platí ...“ (*existenční kvantifikace*),

kde x je proměnná a „...“ je nějaké tvrzení teorie množin.

Předchozí rozbor ukazuje, že formální jazyk teorie množin by měl obsahovat proměnné pro množiny, symboly vyjadřující vztahy náležení a rovnosti mezi množinami, symboly pro logické spojky, symboly pro kvantifikátory a případně další pomocné symboly (závorky), které slouží k lepšímu členění výrazů. Formální jazyk teorie množin je speciálním případem symbolického jazyka, kterým se zabývá matematická logika. Ve shodě s terminologií logiky se symboly, které vyjadřují vztahy náležení a rovnosti, nazývají predikátové symboly. Protože oba určují vztah mezi dvěma množinami, říkáme, že jsou to binární predikátové symboly.

1.4 *Jazyk teorie množin* obsahuje následující symboly:

(i) *proměnné pro množiny*, kterých je neomezeně mnoho; značíme je zpravidla malými písmeny a podle potřeby je indexujeme, například x, y, z, $x_1, x_2, \ldots$ jsou symboly pro proměnné;

(ii) binární *predikátový symbol* $=$ *pro rovnost*;

(iii) binární *predikátový symbol* $\in$ *pro náležení*;

(iv) *symboly pro logické spojky* $\neg$ (negace), $\&$ (konjunkce), $\vee$ (disjunkce), $\rightarrow$ (implikace), $\leftrightarrow$ (ekvivalence);

(v) *symboly pro kvantifikátory* $\forall$ (obecný kvantifikátor) a $\exists$ (existenční kvantifikátor);

(vi) *pomocné symboly* (různé druhy závorek).

Ze všech symbolů jazyka teorie množin je pro tuto teorii typický jen symbol $\in$. Ostatní symboly, mezi nimi také predikátový symbol $=$, se používají v jazycích mnoha dalších teorií. Říkáme, že predikátový symbol $\in$ je speciálním symbolem jazyka teorie množin a že ostatní symboly tohoto jazyka jsou logické symboly.

Ze symbolů formálního jazyka můžeme tvořit výrazy stejným způsobem, jako se z abecedy tvoří slova českého jazyka. Tak jako živý jazyk má svou gramatiku a všechny posloupnosti písmen nejsou nositeli významu, lze dát syntaktická pravidla pro sestavování těch výrazů formálního jazyka, které mají přirozenou interpretaci a vyjadřují tvrzení o množinách. Takové výrazy budeme nazývat *formule*. Např. výraz $x \in y$ čteme „množina x je prvkem množiny y“, výraz $x = y$ čteme „množina x je rovna množině y“. Takové formule nazýváme atomické. Všechny ostatní formule se vytvářejí z atomických pomocí logických spojek a kvantifikací proměnných. Přesná pravidla, podle kterých se formule vytvářejí, jsou obsahem následující definice. Uvědomme si, že pojem formule – slova formálního jazyka – je definován v metajazyce.

1.5 Formule. (i) Jsou-li x, y proměnné pro množiny, výrazy

$$(x \in y), \quad (x = y)$$

jsou formule, které nazýváme atomické.

(ii) Jsou-li výrazy φ, ψ formule, potom výrazy $\neg\varphi$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou formule.

(iii) Je-li x proměnná pro množiny a φ je formule, potom výrazy $(\forall x)\,\varphi$, $(\exists x)\,\varphi$ jsou formule.

Každá formule vznikne konečným počtem užití pravidel (i)–(iii).

Uvedená (meta)definice popisuje skládání formulí z jednodušších výrazů, a tak dává možnost se přesvědčit o kterémkoli výrazu, zda je či není formule.

1.6 Příklady. (a) Výrazy xx, $\forall x))$ nebo $x \in \forall$ nejsou formule.

(b) O tom, že výraz

$$(1) \qquad (\exists x)((x \in y) \vee (y \in x))$$

je formule, se přesvědčíme tím, že se jej pokusíme vytvořit podle pravidel (i)–(iii). Náš postup zachycuje tato posloupnost:

(2) $(x \in y)$ je formule podle (i),

(3) $(y \in x)$ je formule podle (i),

(4) $((x \in y) \vee (y \in x))$ je formule podle (ii),

(5) výraz (1) je formule podle (iii).

Posloupnost formulí (2), (3), (4), (5) obsahuje všechny podformule formule (1).

1.7 Pravidla (i)–(iii) jednoznačně předepisují psaní závorek ve formulích. Přesto je v některých případech užitečné zjednodušit zápis formule vynecháním některých závorek, které nejsou nutné k oddělení různých částí formule. Atomické podformule mají sevřený tvar a ve většině případů u nich závorky vypouštíme. Píšeme kratčeji $x \in y$, $x = y$ místo $(x \in y)$, $(x = y)$. Rovněž se upouští od psaní párových závorek na začátku a na konci formule, které předepisuje pravidlo (ii). Místo formule (4) píšeme

$$x \in y \vee y \in x\,,$$

ale ve formuli

$$(\exists x)(x \in y \vee y \in x)$$

krajní závorky ponecháváme. Pokud to nebude na újmu srozumitelnosti formulí, budeme závorky používat volněji, než stanoví pravidla (i)–(iii). Negace atomických formulí budeme důsledně psát $x \notin y$ místo $\neg(x \in y)$ a $x \neq y$ místo $\neg(x = y)$. Formuli $x \notin y$ čteme „*x není prvkem y*" a formuli $x \neq y$ čteme „*x je různé od y*". Jsou-li φ a ψ formule, pak formuli $\neg\varphi$ čteme „*neplatí φ*" případně „non φ", dále konjunkci $\varphi \,\&\, \psi$ čteme „*platí φ a ψ*", disjunkci $\varphi \vee \psi$ čteme „*platí φ nebo ψ*", případně „φ vel ψ". Implikaci $\varphi \rightarrow \psi$ čteme „*jestliže φ, potom ψ*" nebo „*φ implikuje ψ*" a ekvivalenci $\varphi \leftrightarrow \psi$ čteme „*φ platí, právě když platí ψ*" nebo „*φ je ekvivalentní s ψ*". Formuli $(\forall x)\,\varphi$ čteme „*pro každé x (platí) φ*" a formuli $(\exists x)\,\varphi$ čteme „*existuje x takové, že (platí) φ*".

Z metamatematického hlediska chápeme formule jako speciální posloupnosti symbolů jazyka teorie množin. Každé místo, na kterém je určitý symbol zapsán, nazýváme výskytem tohoto symbolu. Například symbol x se vyskytuje na třetím, sedmém a patnáctém místě ve formuli (1). V daném případě jsou všechny výskyty proměnné x vázané. Abychom osvětlili rozdíl mezi volnými a vázanými výskyty proměnných, uvažujme dvě následující formule

$$(6) \qquad x \in y\,,$$

(7) $$(\exists x)(x \in y).$$

První z nich čteme „x je prvkem množiny y“ a je to tvrzení o vztahu množin x a y. Formule (7) vyjadřuje tvrzení jiného druhu. Čteme ji „existuje x, které je prvkem množiny y“ a totéž můžeme vyjádřit „množina y je neprázdná“. Je zřejmé, že symbol x má ve formulích (6) a (7) různou úlohu. Říkáme, že proměnná x je volná ve formuli (6) a vázaná ve formuli (7). Pojem volné a vázané proměnné zavádí následující (meta)-definice.

1.8 Volné a vázané proměnné.

(i) Říkáme, že *výskyt proměnné* na nějakém místě ve formuli φ *je vázaný*, je-li součástí nějaké podformule tvaru $(\forall x)\psi$ nebo $(\exists x)\psi$ formule φ. Není-li výskyt proměnné vázaný, říkáme, že je *volný*.

(ii) Říkáme, že *proměnná je vázaná* v nějaké formuli, má-li v ní vázaný výskyt. Říkáme, že *proměnná je volná* v nějaké formuli, má-li v ní volný výskyt.

1.9 Příklad. (a) Proměnná x je vázaná a proměnné y, z jsou volné ve formulích

$$\neg(\exists x)(x \in y \mathbin{\&} x \in z),$$
$$(\forall x)(x \in y \rightarrow x \in z),$$
$$(\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z.$$

(b) Ve formuli

(8) $$(x \in z) \mathbin{\&} (\exists x)(x \in y)$$

je proměnná x volná i vázaná současně, protože má volný výskyt na druhém místě a vázaný výskyt na devátém a dvanáctém místě. Proměnné y a z jsou volné. V praxi se vždy lze vyhnout tomu, aby jedna proměnná byla ve formuli současně volná i vázaná. Formule $(\exists u)(u \in y)$ je logicky ekvivalentní formuli $(\exists x)(x \in y)$ a formule

(9) $$(x \in z) \mathbin{\&} (\exists u)(u \in y)$$

je ekvivalentní formuli (8). Přitom žádná proměnná není současně volná i vázaná ve formuli (9). Při výkladu budeme používat jen formule, které mají tuto vlastnost.

(c) Uvažujme ještě formuli

$$(\forall x)(x = x),$$

která neobsahuje žádnou volnou proměnnou a vyjadřuje fakt, že rovnost je reflexivní. Srovnáme-li poslední formuli a formule (6), (7), můžeme říci, že formule, která obsahuje volné proměnné, vyjadřuje nějakou výpověď o hodnotách těchto proměnných. Například „x je prvkem y“ nebo „y je neprázdná množina“. Formule, které neobsahují volné proměnné, nazýváme uzavřené. Takové formule vyjadřují obecná tvrzení teorie množin. Pro uzavřenou formuli má smysl se ptát, zda platí či nikoliv, zatímco platnost formule s volnými proměnnými může záviset na volbě hodnot volných proměnných.

1.10 Úmluva.

V dalším textu budeme používat následující úmluvu: Je-li φ formule a jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proměnné, jejichž volné výskyty ve φ nás zajímají, píšeme $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ místo φ. Tento zápis neznamená, že každá z proměnných x_i musí mít volný výskyt ve formuli φ, ani že formule φ nemá žádné jiné volné proměnné. Umožňuje však přehledně vyjádřit, co se děje s volnými výskyty proměnných x_i v průběhu nějakého důkazu. Pracujeme-li s formulí

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \tag{10}$$

a u je nějaká proměnná, pak výraz $\varphi(x_1, \ldots, u, \ldots, x_n)$ bude označovat formuli, která vznikne z formule (10) následujícím způsobem: Každý volný výskyt proměnné x_i nahradíme proměnnou u a případné vázané výskyty proměnné u nahradíme jinou proměnnou, která se ve formuli (10) nevyskytuje.

Je-li například $\varphi(x)$ formule

$$(\exists u)(x \in u),$$

potom $\varphi(u)$ je formule

$$(\exists v)(u \in v).$$

1.11 Základní jazyk teorie množin a jeho rozšíření. Jazyk, který jsme právě zavedli, budeme nazývat *základní jazyk teorie množin.* Postupně jej budeme rozšiřovat o různé další speciální symboly, které budou označovat určité množiny (například symbol 0 bude označovat prázdnou množinu), o nové predikátové symboly (například $\subseteq$ bude označovat inkluzi) a o symboly pro množinové operace (například $\cap$ bude označovat průnik dvou množin). Všechny zaváděné symboly budeme definovat pomocí symbolů základního jazyka a případně pomocí symbolů dříve definovaných. Takový postup v matematice je běžný. Definované symboly jsou užitečné, s jejich pomocí vyjádříme složité pojmy a tvrzení formulemi únosné délky. Přitom každou formuli, která obsahuje nově definované symboly, lze ekvivalentně vyjádřit v základním jazyce, když každý definovaný symbol nahradíme jeho definicí.

Jiný způsob rozšíření jazyka bude souviset s rozšířením studovaného oboru o další typy objektů. Zatím předpokládáme, že všechny objekty, se kterými pracujeme v teorii množin, jsou množiny. Později se setkáme ještě se třídami. Jejich odlišný charakter vyjádříme pomocí vhodných nových symbolů, o které rozšíříme jazyk teorie množin.

1.12 Axiomy a odvozování vět. Podrobně jsme popsali jazyk a formule teorie množin. Další podstatnou součástí axiomatické teorie množin jsou axiomy. Seznámíme se s nimi v dalším oddílu této kapitoly. Nebudeme však rozvádět, jak se z axiomů formálně odvozují věty, ani nezavedeme pojem formálního důkazu jako posloupnosti formulí, která splňuje určité požadavky. Tato problematika patří do matematické logiky. Všechny důkazy, které budeme provádět, budou neformální, jako je většina důkazů, se kterými se čtenář dosud setkal.

§ 2 Axiomy teorie množin

Seznámíme se s axiomy Zermelovy a Fraenkelovy teorie množin. Je to nejrozšířenější axiomatika teorie množin a v literatuře se označuje zkratkou ZF. Axiomy teorie množin musí zaručit dostatečně bohaté univerzum množin jako možný svět matematiky. Současně musí z univerza vyloučit takové soubory množin, které vedly k paradoxům Cantorovy teorie množin. Proto se problémem existence množin zabývá většina axiomů.

Začneme stručným přehledem všech axiomů Zermelovy a Fraenkelovy teorie množin. Potom budeme podrobně rozebírat jednotlivé axiomy a budeme definovat množinové operace, které z nich vyplývají.

Axiom existence množin

$$(\exists x)(x = x)$$

(existuje alespoň jedna množina).

Axiom extenzionality

$$(\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y$$

(množiny, které mají tytéž prvky, se rovnají).

Schéma axiomů vydělení

Je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volně proměnnou z, potom formule

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x \in a \,\&\, \varphi(x)))$$

je axiom vydělení (z každé množiny lze vydělit množinu všech prvků, které splňují danou formuli).

Axiom dvojice

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

(libovolné dvě množiny určují dvouprvkovou množinu).

Axiom sumy

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\exists y)(x \in y \,\&\, y \in a))$$

(ke každé množině a je dána množina všech prvků, které náleží do nějakého prvku množiny a).

Axiom potence

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow x \subseteq a)$$

(ke každé množině je dána množina všech podmnožin).

Schéma axiomů nahrazení

Je-li $\psi(u, v)$ formule, která neobsahuje volně proměnné w, z, potom formule

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u, v) \,\&\, \psi(u, w)) \rightarrow v = w) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \leftrightarrow (\exists u)(u \in a \,\&\, \psi(u, v)))$$

je axiom nahrazení (definovatelné zobrazení zobrazuje množinu na množinu).

Axiom nekonečna

$$(\exists z)\ (0 \in z \,\&\, (\forall x)(x \in z \rightarrow x \cup \{x\} \in z))$$

(existuje nekonečná množina).

Axiom fundovanosti

$$(\forall a)(a \neq 0 \rightarrow (\exists x)(x \in a \,\&\, x \cap a = 0)).$$

Axiomy potence, nekonečna a fundovanosti používají definované symboly $\subseteq$ (inkluze), 0 (prázdná množina), $\cup$ (sjednocení), $\cap$ (průnik) a $\{x\}$ (jednoprvková množina), které nejsou v základním jazyce teorie množin. Použili jsme jich k jasnější formulaci zmíněných axiomů.

Pomocí predikátu $\in$ lze jednoduše definovat, kdy je nějaká množina podmnožinou jiné množiny. Schéma vydělení dovoluje definovat prázdnou množinu a operaci průniku. Operaci sjednocení lze zavést pomocí axiomu sumy a jednoprvkové množiny tvaru $\{x\}$ lze zavést pomocí axiomu dvojice. Nyní podrobně rozebereme všechny axiomy i definice použitých symbolů.

Volné vymezení množiny jako souboru určitých objektů, ze kterého vycházel Cantor, není spolehlivým základem teorie množin. Paradoxy ukázaly, že každý takový soubor nelze považovat za množinu. Soubor z Russelova paradoxu sestává ze všech množin x, pro které platí $x \notin x$. Jak uvidíme později, tento soubor obsahuje všechna ordinální čísla a za jistých předpokladů může obsahovat všechny množiny. Také paradoxy Burali-Fortiho a Cantora pracují s velkými soubory – se souborem všech ordinálních čísel a se souborem všech množin. Ve srovnání s tím axiomy teorie množin vytvářejí univerzum množin postupně a po malých krocích: postulují existenci některých množin a zaručují, že soubory, které z již daných množin vzniknou určitými operacemi, jsou opět množiny. Přitom nové množiny se podstatně neliší svou velikostí od množin použitých při konstrukci. Takový postup odpovídá „zásadně omezené velikosti množin“, kterou po zevrubné analýze paradoxů vyslovil Russell v roce 1906. A výsledek? Žádný ze známých paradoxů nelze v axiomatické teorii množin napodobit. Nic víc a nic méně.

2.0 Axiom existence množin

$$(\exists x)(x = x)$$

zaručuje, že univerzum množin není prázdné. Později uvidíme, že tento axiom je důsledkem axiomu nekonečna, který postuluje existenci alespoň jedné nekonečné množiny. Axiom existence množin je nezbytný v dílčích axiomatikách teorie množin, které neobsahují axiom nekonečna.

2.1 Axiom extenzionality

$$(\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y \tag{1}$$

popisuje souvislost mezi predikáty rovnosti a náležení: dvě množiny se rovnají, jestliže mají stejné prvky.

Připomeňme, že množiny jsou základní objekty naší teorie. Z toho plynou dvě věci: množiny mohou být prvky jiných množin a žádné jiné prvky množin nepřicházejí v úvahu. Proto je v axiomu extenzionality kvantifikována množinová proměnná: x a y se rovnají, jestliže mají za prvky stejné množiny.

Axiom extenzionality neurčuje všechny vlastnosti predikátu rovnosti. Máme na mysli přirozené požadavky, aby rovnost byla reflexivní, symetrická a tranzitivní a aby sobě rovné množiny měly stejné vlastnosti vzhledem k náležení, to znamená, aby sobě rovné množiny měly stejné prvky a aby byly prvkem ve stejných množinách. Jde o obecné vlastnosti predikátu rovnosti, které stanoví axiomy rovnosti v logice. Z nich plyne i obrácená implikace k (1) a následující tvrzení.

2.2 Lemma.

$$x = y \leftrightarrow (\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y).$$

2.3 Definice. Podmnožiny a inkluze. Říkáme, že množina x je *podmnožinou* nebo *částí množiny* y a píšeme $x \subseteq y$, je-li každý prvek množiny x také prvkem množiny y. Říkáme, že x je *vlastní podmnožinou* nebo *vlastní částí množiny* y a píšeme $x \subset y$, je-li $x \subseteq y$ a $x \neq y$. Nově definované symboly $\subseteq$ a $\subset$ nazýváme *inkluze*.

Rozšíříme-li základní jazyk teorie množin o predikáty inkluze, výrazy $x \subseteq y$, $x \subset y$ jsou nové typy atomických formulí. Je zřejmé, že atomickou formuli $x \subseteq y$ můžeme ekvivalentně vyjádřit formulí

$$(\forall u)(u \in x \rightarrow u \in y)$$

základního jazyka. Podobně $x \subset y$ vyjádříme jako konjunkci předchozí formule a $x \neq y$. Vyjádření pomocí inkluze je v obou případech kratší.

Následující lemma shrnuje základní vlastnosti inkluze.

2.4 Lemma.

(i) $x \subseteq x, \qquad \neg(x \subset x)$,

(ii) $(x \subseteq y \,\&\, y \subseteq z) \rightarrow x \subseteq z$,

$(x \subset y \,\&\, y \subseteq z) \rightarrow x \subset z$,

$(x \subseteq y \,\&\, y \subset z) \rightarrow x \subset z$,

(iii) $(x \subseteq y \,\&\, y \subseteq x) \leftrightarrow x = y$.

Důkaz. (i) je důsledkem rovnosti $x = x$. (ii) Je-li $u \in x$, potom z $x \subseteq y$ (i z $x \subset y$) dostáváme $u \in y$. Dále z $y \subseteq z$ (i z $y \subset z$) odvodíme $u \in z$. Tedy $x \subseteq z$. Je-li $x \subset y$, potom $x \neq y$ a podle axiomu extenzionality existuje $v \in y$, které není prvkem x. Přitom $v \in z$ a podle lemmatu 2.2 $x \neq z$. To znamená, že $x \subset z$. Podobně se dokáže $x \subset z$ v případě, že platí $y \subset z$. Tvrzení (iii) je důsledkem lemmatu 2.2.

2.5 Schéma axiomů vydělení. Je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volně proměnnou z, potom formule

(2) $$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x \in a \,\&\, \varphi(x)))$$

je axiom. Množina z je částí množiny a, z sestává ze všech množin $x \in a$, pro které platí $\varphi(x)$.

2.6 Proč schéma a ne axiom? Pro každou volbu formule φ je formule (2) jeden axiom teorie množin – axiom vydělení pro φ. To znamená, že 2.5 zastupuje nekonečně mnoho axiomů, které vzniknou tím, že φ proběhne všechny formule. Proto říkáme, že 2.5 je *schéma axiomů.*

Podle axiomu extenzionality je množina z ve formuli (2) jednoznačně určena. Budeme ji označovat výrazem

(3) $$\{x : x \in a \,\&\, \varphi(x)\}$$

nebo krátce

$$\{x \in a : \varphi(x)\}.$$

Uvědomme si, že formule φ může mít podle úmluvy z § 1 i další volné proměnné $x_1, \ldots, x_n$ různé od x. Množina (3) závisí na a a prostřednictvím formule φ i na proměnných $x_1, \ldots, x_n$, které chápeme jako parametry.

Speciálně, je-li $\varphi(x)$ formule $x \in b$, potom odpovídající axiom vydělení definuje množinu

$$\{x : x \in a \,\&\, x \in b\}.$$

Je-li $\varphi(x)$ formule $x \notin b$, stejným způsobem dostaneme množinu

$$\{x : x \in a \,\&\, x \notin b\}.$$

2.7 Definice. Průnik a rozdíl množin. *Průnikem množin* a, b nazýváme množinu $a \cap b$ definovanou vztahem

$$a \cap b = \{x : x \in a \mathbin{\&} x \in b\}.$$

Rozdílem množin a, b nazýváme množinu $a - b$, pro kterou platí

$$a - b = \{x : x \in a \mathbin{\&} x \notin b\}.$$

Nově definované symboly $\cap$ a $-$ označují binární operace (funkce), které dvojici množin přiřadí jejich průnik a rozdíl. Uvědomme si, že formuli $x \in a \cap b$ lze ekvivalentně vyjádřit formulí $x \in a \mathbin{\&} x \in b$ základního jazyka teorie množin. Podobně formuli $y = a \cap b$ lze ekvivalentně nahradit formulí

$$(\forall x)(x \in y \leftrightarrow (x \in a \mathbin{\&} x \in b)).$$

Dá se ukázat, že každou formuli obsahující definované symboly $\cap$ a $-$ lze ekvivalentně vyjádřit nějakou formulí základního jazyka teorie množin. Nicméně výrazy $a \cap b$, $a - b$ jsou užitečné zkratky.

Definice 2.7 ukazuje, že schéma axiomů vydělení dovoluje definovat nové množiny jako podmnožiny již daných množin. To odpovídá zásadě omezené velikosti množin. Schéma 2.5 však nelze dále zesílit tím, že (2) nahradíme formulí

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)). \tag{4}$$

V takovém případě bychom při volbě $\varphi(x)$ tvaru $x \notin x$ odvodili spor jako v Russelově paradoxu. Schéma formulí (4) můžeme chápat jako formální protějšek Cantorovy „definice“ množin, ale všechny formule tvaru (4) nemůžeme přijmout za axiomy.

Položme si nyní otázku, odkud se berou množiny a ze schématu vydělení. Tvrzení „existuje alespoň jedna množina“ je axiom. Ukážeme, že další množiny lze získat pomocí „konštruktivních“ axiomů teorie množin.

2.8 Prázdná množina. Víme-li, že existuje alespoň jedna množina, můžeme pomocí schématu vydělení sestrojit množinu, která nemá žádný prvek. Je-li a libovolná množina a $\varphi(x)$ je formule $x \neq x$, podle axiomu vydělení pro formuli φ je

$$\{x : x \in a \mathbin{\&} x \neq x\}$$

také množina. Právě definovaná množina nemá žádný prvek, protože rovnost je reflexivní. Budeme jí říkat *prázdná množina* a označíme ji symbolem 0. Množiny, které mají alespoň jeden prvek, nazveme neprázdné. Říkáme, že množiny a, b jsou disjunktní, jestliže $a \cap b = 0$.

2.9 Lemma.

(i) $\neg(\exists y)(y \in 0)$,

(ii) $(\forall x)(0 \subseteq x)$,

(iii) $x \subseteq 0 \leftrightarrow x = 0$.

2.10 Axiom dvojice.

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x = a \vee x = b)).$$

K libovolným dvěma množinám a, b existuje množina, která má právě prvky a a b. Podle axiomu extenzionality je taková množina jednoznačně určena prvky a, b.

2.11 Definice. Dvojice množin. Jsou-li a, b množiny, pak množinu, která sestává z prvků a, b, nazveme *neuspořádanou dvojicí množin a, b* a označíme ji výrazem $\{a, b\}$. Říkáme také, že $\{a, b\}$ je *dvouprvková množina s prvky a, b*. Místo $\{a, a\}$ píšeme krátce $\{a\}$ a říkáme, že $\{a\}$ je *jednoprvková množina určená prvkem a*.

2.12 Lemma.

(i) $\{x\} = \{y\} \leftrightarrow x = y$,

$\{x\} = \{x, y\} \leftrightarrow x = y$,

(ii) $\{x, y\} = \{u, v\} \leftrightarrow ((x = u \mathbin{\&} y = v) \vee (x = v \mathbin{\&} y = u))$.

Pomocí neuspořádané dvojice množin můžeme zavést pojem uspořádané dvojice.

2.13 Definice. *Uspořádaná dvojice množin a, b* je množina $\langle a, b\rangle$ definovaná vztahem

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Je to dvouprvková množina, jejíž prvek $\{a, b\}$ určuje, o které dvě množiny jde, a druhý prvek $\{a\}$ vyznačuje, která množina je první. Oprávněnost názvu „uspořádaná dvojice" je zřejmá z následujícího tvrzení:

2.14 Lemma.

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \leftrightarrow (x = u \mathbin{\&} y = v).$$

Důkaz. (a) Je-li $x = u$ a $y = v$, potom podle 2.12 také

$$\{x\} = \{u\}, \qquad \{x, y\} = \{u, v\}$$

a nakonec podle 2.13

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle.$$

(b) Předpokládejme, že platí $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$. Podle definice 2.13 to znamená

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}, \tag{5}$$

odkud pro $\{u\}$ dostáváme

$$\{x\} = \{u\} \vee \{u\} = \{x, y\}.$$

Podle lemmatu 2.12 v obou případech $x = u$. Pro $\{u, v\}$ z (5) plyne

$$\{u, v\} = \{x\} \vee \{u, v\} = \{x, y\},$$

odkud dostáváme

$$v = x \vee v = y$$

jako důsledek 2.12 a $u = x$.

Je-li $v = y$, je konjunkce $u = x \mathbin{\&} v = y$ dokázána. Je-li $v = x$, potom také $\{u, v\} = \{x\}$ a z (5) dostáváme dokonce $x = u = y = v$.

2.15 Definice. Uspořádaná k**-tice.** Jsou-li dány množiny $a_1, \ldots, a_n$, *uspořádanou* k*-tici množin* $a_1, \ldots, a_k$ pro $k < n$ definujeme tak, že pro $k = 1$ položíme

$$\langle a_1 \rangle = a_1$$

a je-li již definována uspořádaná k-tice $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, položíme

$$\langle a_1, \ldots, a_{k+1} \rangle = \langle \langle a_1, \ldots, a_k \rangle, a_{k+1} \rangle .$$

Uvědomme si, že případ $k = 2$ je shodný s definicí 2.13. Indukcí podle k se dokáže

2.16 Lemma.

$$\langle a_1, \ldots, a_k \rangle = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle \leftrightarrow (a_1 = b_1 \mathbin{\&} a_2 = b_2 \mathbin{\&} a_3 = b_3 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} a_k = b_k) .$$

2.17 Axiom sumy.

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\exists y)(x \in y \mathbin{\&} y \in a)) .$$

K libovolné množině a existuje množina z, která sestává z množin, které jsou prvkem nějakého prvku množiny a. Podle axiomu extenzionality je množina z jednoznačně určena volbou množiny a.

2.18 Definice. *Suma množiny* a je množina $\bigcup a$ definovaná vztahem

$$\bigcup a = \{x : (\exists y)(x \in y \mathbin{\&} y \in a)\} .$$

Je-li speciálně $a = \{b, c\}$, potom platí

(6) $$\bigcup \{b, c\} = \{x : x \in b \vee x \in c\} .$$

Plyne to z definice sumy a faktu

$$y \in \{b, c\} \leftrightarrow (y = b \vee y = c) .$$

2.19 Definice. *Sjednocení množin* b, c je množina $b \cup c$ definovaná vztahem

$$b \cup c = \{x : x \in b \vee x \in c\} .$$

Oprávněnost této definice plyne z axiomů sumy, dvojice a z (6).

2.20 Pomocí axiomu dvojice jsme definovali jednoprvkovou a dvouprvkovou množinu. Pomocí operace sjednocení můžeme definovat tříprvkovou množinu s prvky a, b, c vztahem

$$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}.$$

Postup můžeme opakovat. Jsou-li dány navzájem různé množiny $a_1, \ldots, a_n$ a je-li již pro nějaké k, $2 \leq k < n$ definována k-prvková množina $\{a_1, \ldots, a_k\}$, vztahem

$$\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{a_{k+1}\}$$

definujeme $(k + 1)$-prvkovou množinu, která sestává z množin $a_1, \ldots, a_{k+1}$.

2.21 Axiom potence.

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow x \subseteq a).$$

Podle axiomu extenzionality je množina z jednoznačně určena volbou množiny a, jejímiž prvky jsou právě všechny podmnožiny množiny a. Jsme oprávněni zavést následující definici:

2.22 Definice. Potence množiny. Množina $\mathscr{P}(a)$, která sestává ze všech podmnožin množiny a, tedy

$$\mathscr{P}(a) = \{x : x \subseteq a\},$$

se nazývá *potencí množiny a*.

2.23 Příklady. (a) Podle lemmatu 2.9 (iii) je

$$\mathscr{P}(0) = \{0\}.$$

Přitom 0 a $\{0\}$ jsou dvě různé množiny, protože $0 \in \{0\}$, ale $0 \notin 0$. Nyní je snadné ověřit $\mathscr{P}(\{0\}) = \{0, \{0\}\}$.

(b) Axiomy sumy a potence postulují existenci množin, pro které platí

$$x \subseteq a \rightarrow x \in \mathscr{P}(a), \tag{7}$$

$$x \in a \rightarrow x \subseteq \bigcup a. \tag{8}$$

Mezi oběma formulemi je jednoduchý duální vztah: zaměníme-li symboly $\in$ a $\subseteq$ a výrazy $\mathscr{P}(a)$, $\bigcup a$, jedna formule přejde na druhou a naopak. Přitom potenční množina $\mathscr{P}(a)$ je nejmenší množina, pro kterou platí (7). Je-li y taková množina, že každá podmnožina $x \subseteq a$ je jejím prvkem, z definice $\mathscr{P}(a)$ plyne $\mathscr{P}(a) \subseteq y$. Ve stejném smyslu je $\bigcup a$ nejmenší množina, pro kterou platí (8).

2.24 Schéma axiomů nahrazení. Je-li $\psi(u\ v)$ formule, která neobsahuje volně proměnné w, z, potom formule

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u,v) \mathbin{\&} \psi(u,w) \to v = w) \to \\ \to (\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \leftrightarrow (\exists u)(u \in a \mathbin{\&} \psi(u,v)))$$

je axiom teorie množin, který nazýváme *axiom nahrazení.*

Připomeňme, že formule $\psi(u, v)$ může mít i další volné proměnné kromě u, v a že $\psi(u, w)$ vznikne z $\psi(u, v)$ substitucí proměnné w za v. Schéma axiomů nahrazení zastupuje nekonečně mnoho formulí uvedeného tvaru, které vzniknou tím, že $\psi(u, v)$ proběhne všechny formule.

Předpoklad axiomu nahrazení požaduje, aby pro každé u formule $\psi(u, v)$ platila nejvýše pro jednu množinu v. Pokud taková množina v existuje, je formulí $\psi(u, v)$ jednoznačně přiřazena k množině u. Má-li formule ψ uvedenou vlastnost, druhá část axiomu zaručuje, že získáme opět množinu, nahradíme-li prvky $u \in a$ jim odpovídajícími množinami v.

Význam schématu axiomů nahrazení můžeme tedy shrnout tvrzením, že obrazem libovolné množiny při definovatelném zobrazení je opět množina.

Zmíníme se ještě o dvou zbývajících axiomech Zermelovy a Fraenkelovy teorie množin.

2.25 Axiom nekonečna.

$$(\exists z)(0 \in z \mathbin{\&} (\forall x)(x \in z \to x \cup \{x\} \in z)).$$

Později ukážeme, že všechna přirozená čísla, která sestrojíme v teorii množin, jsou prvky postulované množiny z. Zatím si povšimněme, že $x \cup \{x\} \neq x$, pokud $x \notin x$. Dá se ukázat, že vyjdeme-li od prázdné množiny, pro kterou platí $0 \notin 0$, můžeme naznačeným způsobem konstruovat postupně další a další množiny, které jsou všechny prvkem množiny z.

Axiom nekonečna postuluje existenci aktuálně nekonečné množiny, aniž by popsal operaci, kterou taková množina vznikne z již daných množin. Tím se axiom nekonečna liší od jiných axiomů pro existenci množin – například od axiomů sumy nebo dvojice – a překračuje princip omezené velikosti množin.

2.26 Axiom fundovanosti.

$$(\forall a)(a \neq 0 \to (\exists x)(x \in a \mathbin{\&} x \cap a = 0)).$$

Axiom fundovanosti, který se také nazývá axiomem regularity, je spíše globální charakteristikou množinového univerza. Vylučuje z něj některé typy množin, například každou množinu y, pro kterou by platilo $y \in y$. V takovém případě by žádný prvek neprázdné množiny $a = \{y\}$ nevyhovoval tvrzení axiomu fundovanosti, protože $y \cap \{y\} \neq 0$. Stejným způsobem lze ukázat, že axiom fundovanosti nepřipouští existenci konečných cyklů relace náležení, například $y_1 \in y_2 \in y_1$, $y_1 \in y_2 \in y_3 \in y_1$ atd. Později ukážeme, že axiom fundovanosti je ekvivalentní s tvrzením, že univerzum množin lze generovat z prázdné množiny iterováním operací potence a sumy.

2.27 Axiomatika Zermelovy a Fraenkelovy teorie množin. Původní Zermelova axiomatika teorie množin z roku 1908 sestávala z axiomů extenzionality, dvojice, sumy, potence, nekonečna, ze schématu axiomů vydělení a axiomu výběru, o kterém dosud nebyla řeč. Axiom výběru se dnes obvykle nepočítá mezi základní axiomy teorie množin. Proto mluví-li se dnes o *Zermelově teorii množin*, rozumí se tím teorie označovaná symbolem Z, která vznikne z původní Zermelovy axiomatiky, když axiom výběru nahradíme axiomem fundovanosti. *Zermelova a Fraenkelova teorie množin* je rozšířením teorie Z o schéma nahrazení. V literatuře se označuje zkratkou ZF.

Schéma axiomů nahrazení bylo vysloveno A. A. Frankelem až v roce 1922. Ukážeme, že každý axiom schématu vydělení je důsledkem některého axiomu nahrazení.

Je-li $\varphi(u)$ formule, která neobsahuje volně proměnnou z, zvolme další dvě proměnné v, w, které nejsou volné ve formuli φ, a utvořme formuli $\psi(u, v)$ tvaru

$$\varphi(u) \mathbin{\&} u = v\,.$$

Zřejmě platí

$$(9) \qquad (\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u, v) \mathbin{\&} \psi(u, w)) \rightarrow v = w)$$

a podle axiomu nahrazení pro formuli ψ k libovolné množině a existuje množina z tak, že pro každou množinu v platí

$$v \in z \rightarrow (\exists u)(u \in a \mathbin{\&} \psi(u, v))\,.$$

Vzhledem k tomu, jak byla sestrojena formule ψ, je pravá strana ekvivalence splněna, právě když $(v \in a \mathbin{\&} \varphi(v))$. Tím je dokázán axiom vydělení pro formuli φ.

Také axiom dvojice je důsledkem axiomu potence a schématu nahrazení. Víme již z odstavce 2.2, že druhá potence $\mathscr{P}(\mathscr{P}(0))$ prázdné množiny sestává právě ze dvou prvků 0 a $\{0\}$. Jsou-li a, b libovolné dvě proměnné pro množiny, sestrojme formuli $\psi(u, v)$

$$(u = 0 \mathbin{\&} v = a) \vee (u = \{0\} \mathbin{\&} v = b)\,,$$

kde u, v jsou dvě proměnné různé od a, b. Pro formuli $\varphi(u, v)$ zřejmě platí (9) a množina z, kterou množině $\mathscr{P}(\mathscr{P}(0))$ přiřadí axiom nahrazení pro formuli ψ, sestává právě ze dvou prvků a, b.

Zermelova a Fraenkelova axiomatika teorie množin je tedy určena jen axiomy extenzionality, fundovanosti, sumy, potence, nekonečna a schématem axiomů nahrazení. Ukázali jsme, že z těchto axiomů lze odvodit tvrzení axiomu dvojice a tvrzení každého axiomu ze schématu vydělení.

§ 3 Třídy

Nyní zavedeme třídy jako soubory množin, které mohou být definovány formulemi jazyka teorie množin. Takzvané třídové termy a třídové proměnné budou sloužit k označení jednotlivých tříd. Poukážeme na to, že soubory, které nazýváme třídy, vždy nemusí být prvky množinového univerza. Rozšíříme jazyk teorie množin tak, abychom mohli používat třídové termy ve formulích, a ukážeme, že každou formuli rozšířeného jazyka lze nahradit nějakou formulí, která neobsahuje třídové termy. Pro třídy zavedeme operace průniku, sjednocení a rozdílu a budeme definovat univerzální třídu jako třídu všech množin. Ukážeme, že univerzální třída není množina.

3.1 Třídy a formule. Každá formule $\varphi(x)$ přirozeným způsobem určuje soubor všech množin x, pro které platí $\varphi(x)$. Budeme jej označovat výrazem

(1) $$\{x : \varphi(x)\}.$$

Pokud formule φ obsahuje další volné proměnné různé od x, chápeme je jako parametry, na jejichž hodnotě definovaný soubor závisí.

Zatím jsme podobné označení používali jen ve speciálním případě, kdy formule φ byla tvaru $\psi(x) \mathbin{\&} x \in a$ pro nějakou formuli ψ. Podle schématu vydělení je v takovém případě definovaný soubor (1) množinou. Přesněji řečeno, v takovém případě existuje množina z, pro kterou platí

(2) $$(\forall x)\,(x \in z \leftrightarrow \varphi(x)),$$

a tento fakt jsme vyjádřili rovností

(3) $$z = \{x : \varphi(x)\}.$$

Nelze popřít, že popsaný způsob vytváření souborů je přirozený a názorný. Pokud respektujeme skutečnost, že v některých případech můžeme definovat soubory, které nepatří do univerza množin, není ani proti duchu teorie množin: každý soubor (1) shrnuje v jeden celek všechny množiny, pro které platí určitá formule. V některých případech je to jen celek pomyslný, který nepatří mezi objekty teorie množin, ale i tak může posloužit k jasnému vyjádření určitých myšlenek, tedy jako způsob vyjadřování.

3.2 Třídové termy. Je-li $\varphi(x)$ formule jazyka teorie množin, soubor všech množin x, pro které platí $\varphi(x)$, označíme výrazem (1). Říkáme, že (1) je *třídový term*, a soubor, který označuje, nazveme *třídou*, která je určena formulí $\varphi(x)$.

Říkáme, že třída (1) je množina, pokud formule (2) platí pro nějakou množinu z. V opačném případě říkáme, že (1) je *vlastní třída*.

3.3 Množiny a třídy. Uvědomme si, že každá množina je třídou ve smyslu definice 3.1. Pro libovolnou množinu y platí $y = \{x : x \in y\}$. Pojem třída je tedy širší než pojem množina. Třídové termy označují definovatelné soubory množin. Rozšíříme jazyk teorie množin o třídové termy a třídové proměnné a připustíme, aby se třídové termy a proměnné vyskytovaly ve formulích na těch místech, kde píšeme volné množinové proměnné. Třídové termy ani proměnné však nebudeme kvantifikovat, protože to by odpovídalo kvantifikaci formulí, která je v jazyce teorie množin nepřípustná.

Naznačené rozšíření jazyka teorie množin však neprovedeme důsledně: každý výraz s třídovými termy budeme chápat jako zápis určité formule původního jazyka teorie množin, která neobsahuje třídové termy.

3.4 Proměnné pro třídy. Každý třídový term označuje jednu určitou třídu a formule rozšířeného jazyka, která ho obsahuje, odpovídá určité formuli bez třídových termů. Jazyk teorie množin rozšířený o třídové termy dává možnost vyjádřit tvrzení o jednotlivých třídách, ale nedává možnost vyjádřit tvrzení, která platí pro všechny třídy.

Zavedeme proto *proměnné pro třídy*, které budeme značit velkými písmeny. Třídová proměnná zastupuje libovolný třídový term. Ve formulích se třídové proměnné používají na těch místech, kde píšeme volné množinové proměnné. Rozšíříme pojem formule tak, aby formule mohly obsahovat i třídové proměnné a třídové termy. Nebudou to již formule základního, ale rozšířeného jazyka teorie množin.

3.5 Formule s třídovými proměnnými a termy. Nechť $\varphi(x)$ a $\psi(y)$ jsou formule základního jazyka teorie množin, nechť x, y jsou množinové a X, Y třídové proměnné.

(i) Výrazy $x \in y$, $x = y$, $x \in X$, $x = X$, $X \in x$, $X \in Y$, $X = Y$, $Y \in X$ a výrazy, které z nich vzniknou, když třídové proměnné X, Y po řadě nahradíme třídovými termy (1) a

(4) $$\{y : \psi(y)\},$$

jsou *atomické formule rozšířeného jazyka teorie množin.*

(ii) Všechny ostatní formule rozšířeného jazyka vznikají z atomických formulí pomocí logických spojek a kvantifikováním množinových proměnných. Proměnné x, y uvnitř termů (1) a (4) považujeme za vázané (příslušným termem).

3.6 Úmluva. Každou formuli rozšířeného jazyka, která obsahuje jen třídové termy a žádné třídové proměnné, chápeme jako zkrácený zápis jisté formule základního jazyka teorie množin.

Pokud formule rozšířeného jazyka obsahuje třídové proměnné, chápeme ji jako schéma formulí rozšířeného jazyka, které vzniknou tím, že jednotlivým třídovým proměnným přiřazujeme libovolné třídové termy jako hodnoty. Po vyloučení třídových termů dostáváme schéma formulí základního jazyka teorie množin. Nyní podrobně popíšeme způsob eliminace třídových termů z formulí rozšířeného jazyka.

3.7 Eliminace třídových termů. Nechť x, y, z jsou množinové proměnné a X, Y jsou třídové proměnné. Nechť $\varphi(x)$ a $\psi(y)$ jsou formule základního jazyka teorie množin. Předpokládejme, že proměnná X zastupuje třídový term $\{x : \varphi(x)\}$ a proměnná Y zastupuje třídový term $\{y : \psi(y)\}$.

(i) Výraz $z \in X$ zastupuje formuli $z \in \{x : \varphi(x)\}$ rozšířeného jazyka, kterou čteme „*z je prvkem třídy všech množin x, pro které platí* $\varphi(x)$". Tuto formuli nahradíme formulí $\varphi(z)$ základního jazyka teorie množin. Připomeňme, že podle úmluvy 1.10 je $\varphi(z)$ formule, která vznikne z $\varphi(x)$ tím, že každý volný výskyt proměnné x nahradíme proměnnou z (a je-li třeba, změníme vázané výskyty proměnné z ve $\varphi(x)$).

(ii) Výraz $z = X$ zastupuje formuli $z = \{x : \varphi(x)\}$, kterou čteme „*množina z se rovná třídě* $\{x : \varphi(x)\}$" a kterou chápeme jako zkrácený zápis formule

$$(\forall u)\,(u \in z \leftrightarrow \varphi(u)),$$

kde u je proměnná, která se nevyskytuje ve formuli $\varphi(x)$.

(iii) Výraz $X \in Y$ zastupuje formuli $\{x : \varphi(x)\} \in \{y : \psi(y)\}$, kterou čteme „*třída* $\{x : \varphi(x)\}$ *je prvkem třídy* $\{y : \psi(y)\}$". Tuto formuli nahradíme formulí

$$(\exists u)\,(u = \{x : \varphi(x)\} \;\&\; u \in \{y : \psi(y)\}),$$

kterou podle (i) a (ii) můžeme nahradit formulí

$$(\exists u)\,[(\forall v)\,(v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \;\&\; \psi(u)]$$

základního jazyka, kde u, v jsou proměnné, které se nevyskytují ve $\varphi(x)$ ani $\psi(y)$.

Podobně výraz $X \in y$ můžeme nahradit formulí

$$(\exists u)\,[(\forall v)\,(v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \;\&\; u \in y]$$

základního jazyka.

(iv) Výraz $X = Y$ zastupuje formuli $\{x : \varphi(x)\} = \{y : \psi(y)\}$, kterou čteme „*třída* $\{x : \varphi(x)\}$ *se rovná třídě* $\{y : \psi(y)\}$" a kterou chápeme jako jiný zápis formule

$$(\forall u)\,(\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u))$$

základního jazyka, kde u je proměnná, která se nevyskytuje ve $\varphi(x)$ ani $\psi(y)$.

(v) Způsobem popsaným v (i)–(iv) lze vyloučit třídové termy z libovolné atomické formule rozšířeného jazyka. Vzhledem k tomu, že všechny formule rozšířeného jazyka vzniknou z atomických formulí pomocí logických spojek a kvantifikováním množinových proměnných, naznačeným způsobem lze vyloučit třídové termy z každé formule rozšířeného jazyka.

(vi) Obsahuje-li formule rozšířeného jazyka navíc nějaké třídové proměnné, odpovídající schéma formulí základního jazyka získáme tím, že za třídové proměnné postupně dosazujeme všechny třídové termy, které vyloučíme podle (i)–(v).

3.8 Příklad. Jsou-li $\varphi(y)$ a $\psi(z)$ formule bez třídových termů, potom výraz

$$x \in \{y : \varphi(y)\} \,\&\, x \notin \{z : \psi(z)\} \tag{5}$$

je formule rozšířeného jazyka. Podle 3.7 první člen konjunkce (5) chápeme jako formuli $\varphi(x)$ a druhý člen jako formuli $\neg\psi(x)$. Formuli (5) tedy odpovídá formule $\varphi(x) \,\&\, \neg\psi(x)$ jazyka teorie množin bez třídových termů.

Vraťme se ještě ke způsobu, kterým zavádíme třídy. Zatím jsme připouštěli jen možnost definovat třídu pomocí formule základního jazyka teorie množin. Náš příklad naznačuje, že to je zbytečné omezení. Výraz

$$\{x : x \in \{y : \varphi(y)\} \,\&\, x \notin \{z : \psi(z)\}\},$$

který obsahuje formuli (5) rozšířeného jazyka, je vlastně jiné označení pro třídu

$$\{x : \varphi(x) \,\&\, \neg\psi(x)\}.$$

Úmluva o interpretaci formulí rozšířeného jazyka pomocí formulí bez třídových termů ukazuje, že při definici tříd můžeme používat i formule rozšířeného jazyka. Získáme jen ty třídy, které lze definovat formulemi bez třídových termů.

3.9 Třídové operace. Pomocí třídových proměnných můžeme definovat *operace sjednocení, průniku a rozdílu pro libovolné dvě třídy.*

Jsou-li A, B třídy, definujeme

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x : x \in A \,\&\, x \in B\} && (\textit{průnik tříd } A, B),\\ A \cup B &= \{x : x \in A \vee x \in B\} && (\textit{sjednocení tříd } A, B),\\ A - B &= \{x : x \in A \,\&\, x \notin B\} && (\textit{rozdíl tříd } A, B). \end{aligned}$$

Je-li $A \cap B = 0$ říkáme, že třídy A, B jsou disjunktní.

Uvědomme si, že každá formule se třídovými proměnnými, kterou jsme použili k definici třídových operací, zastupuje schéma formulí základního jazyka.

Je-li speciálně $A = \{y : \varphi(y)\}$ a $B = \{z : \psi(z)\}$, potom $A \cap B = \{x : \varphi(x) \,\&\, \psi(x)\}$ podle úmluvy 3.7 o interpretaci formulí $x \in A$ a $x \in B$. Podobně pro operace sjednocení a rozdílu dostáváme

$$A \cup B = \{x : \varphi(x) \vee \psi(x)\}, \qquad A - B = \{x : \varphi(x) \,\&\, \neg\psi(x)\}.$$

3.10 Univerzální třída a doplněk třídy. Je-li $\varphi(y)$ formule $y = y$, potom třída $\{y : y = y\}$ sestává ze všech množin, protože pro každou množinu y platí $y = y$. Tuto třídu označujeme symbolem $\mathbf{V}$ a říkáme, že $\mathbf{V}$ je *univerzální třída*.

Doplňkem třídy A nazýváme třídu $-A = \mathbf{V} - A$, která sestává ze všech množin, které nejsou prvkem třídy A.

Také pojem inkluze lze přirozeným způsobem definovat i pro třídy.

3.11 Definice. Říkáme, že třída A je *částí* (*podtřídou*) *třídy B*, a píšeme $A \subseteq B$, jestliže každý prvek třídy A je prvkem třídy B. Říkáme, že A je *vlastní částí třídy B*, a píšeme $A \subset B$, je-li $A \subseteq B$ a $A \neq B$.

Je zřejmé, že každá třída je částí univerzální třídy a že i pro třídy můžeme dokázat všechna tvrzení lemmatu 2.4.

3.12 Definice. Suma, průnik a potence třídy. (i) *Sumu třídy A*, kterou označíme $\bigcup A$, definujeme vztahem

$$\bigcup A = \{x : (\exists a)(a \in A \;\&\; x \in a)\} ;$$

(ii) *průnik třídy A*, který označíme $\bigcap A$, definujeme vztahem

$$\bigcap A = \{x : (\forall a)(a \in A \rightarrow x \in a)\} ;$$

(iii) *potenci třídy A* definujeme vztahem

$$\mathscr{P}(A) = \{a : a \subseteq A\} .$$

3.13 Suma a potence třídy jsou zobecněním operací, které jsme definovali pro množiny. Uvědomme si, že prvkem potence třídy A může být jenom množina, která je částí A. Je-li A neprázdná třída a $a \in A$, potom $\bigcap A \subseteq a \subseteq \bigcup A$. Je-li naopak $A = 0$, potom pro každou množinu x a množinu a je formule $a \in 0 \rightarrow x \in a$ pravdivá, protože první člen implikace je nepravdivý. Z definice 3.12 potom plyne, že průnik prázdné množiny je univerzální třída. To je důvod, proč operaci průniku zavádíme až zde.

3.14 Lemma. *Univerzální třída* $\mathbf{V}$ *není množina.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{V}$ je množina, to znamená, že pro nějakou množinu v platí $v = \mathbf{V}$. Stejným způsobem jako v Russelově paradoxu odvodíme spor. Podle schématu vydělení existuje množina z, pro kterou platí

$$z = \{x : x \in v \;\&\; x \notin x\} ,$$

odkud plyne

$$z \in z \leftrightarrow z \notin z .$$

Univerzální třída $\mathbf{V}$ tedy není množina.

Naopak platí

3.15 Lemma. *Pro libovolnou třídu A a množinu a je $a \cap A$ množina.*
Důkaz. Je-li A třída definovaná formulí $\varphi(x)$, podle 3.7 lze sestrojit formuli $\psi(x)$ bez třídových termů tak, že

$$A = \{x: \psi(x)\}.$$

Potom

$$a \cap A = \{x: \psi(x) \,\&\, x \in a\}$$

je množina podle schématu axiomů vydělení.

3.16 Zermelova a Fraenkelova teorie množin zavádí třídy jenom jako pomocný prostředek. Třídy jsou definovány pomocí třídových termů, které lze z formulí nakonec vyloučit. Na rozdíl od toho jsou třídy v Gödelově a Bernaysově teorii množin zaváděny důsledně a od počátku jako jeden ze základních pojmů teorie. Množiny jsou definovány jako třídy, které jsou prvkem jiných tříd.

§ 4 Relace, zobrazení

Seznámíme se blíže se základními operacemi průniku, rozdílu a sjednocení a zavedeme operaci kartézského součinu, která je východiskem k důležitým pojmům relace a zobrazení. Víme již, že základní operace, které jsme definovali pro množiny v § 1, můžeme přirozeným způsobem rozšířit i na třídy. Vzhledem k tomu, že každá množina je také třídou, postačí, budeme-li zkoumat vlastnosti průniku, rozdílu a sjednocení tříd, odpovídající tvrzení pro množiny jsou speciálním případem vyslovených vět.

4.1 Lemma. *Pro libovolné třídy X, Y, Z platí:*

(i) $X = X \cap X = X \cup X$ (*idempotence*),

(ii) $X \cup Y = Y \cup X$,
$X \cap Y = Y \cap X$ (*komutativnost*),

(iii) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$,
$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ (*asociativnost*),

(iv) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ (*distributivnost*).

Důkaz. Dokážeme první rovnost z (iv), ostatní ponecháváme jako cvičení.

$$\begin{aligned} x \in X \cap (Y \cup Z) &\leftrightarrow (x \in X \,\&\, (x \in Y \vee x \in Z)), \\ &\leftrightarrow (x \in X \,\&\, x \in Y) \vee (x \in X \,\&\, x \in Z), \\ &\leftrightarrow x \in ((X \cap Y) \cup (X \cap Z)). \end{aligned}$$

4.2 Lemma.

(i) $$X \cap Y \subseteq X \subseteq X \cup Y,$$
$$X \cap Y \subseteq Y \subseteq X \cup Y,$$

(ii) $$X \subseteq Y \leftrightarrow X \cup Y = Y,$$

(iii) $$X \subseteq Y \leftrightarrow X \cap Y = X,$$

(iv) $$X \subseteq Y \leftrightarrow \mathbf{V} - Y \subseteq \mathbf{V} - X.$$

Důkaz. (iv) Je-li $X \subseteq Y$ a $x \in \mathbf{V} - Y$, potom nutně $x \notin X$. Tedy $x \in \mathbf{V} - X$ a inkluze napravo platí. Je-li $\mathbf{V} - Y \subseteq \mathbf{V} - X$ a $x \in X$, potom $x \in Y$. Kdyby platilo $x \notin Y$, z předpokládané inkluze bychom odvodili $x \notin X$.

4.3 Lemma (de Morganova pravidla).

(i) $$X - (Y_1 \cup Y_2) = (X - Y_1) \cap (X - Y_2),$$

(ii) $$X - (Y_1 \cap Y_2) = (X - Y_1) \cup (X - Y_2).$$

Důkaz. (i) $$\begin{aligned} x \in X - (Y_1 \cup Y_2) &\leftrightarrow x \in X \;\&\; x \notin (Y_1 \cup Y_2),\\ &\leftrightarrow x \in X \;\&\; (x \notin Y_1 \;\&\; x \notin Y_2),\\ &\leftrightarrow (x \in X \;\&\; x \notin Y_1) \;\&\; (x \in X \;\&\; x \notin Y_2),\\ &\leftrightarrow x \in (X - Y_1) \cap (X - Y_2). \end{aligned}$$

(ii) se dokazuje podobně.

4.4 Lemma.

(i) $$(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z),$$

(ii) $$X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z).$$

Důkaz. (i) jako cvičení. (ii) je-li $x \in X - (Y - Z)$, znamená to, že $x \in X$ a $x \notin (Y - Z)$, z druhé formule tedy buď $x \notin Y$, nebo $x \in Z$. Proto $x \in (X - Y) \cup (X \cap Z)$. Obrácená implikace se dokáže obdobně.

4.5 Příklad. Rozdíl není asociativní operace. Jsou-li a, b, c tři různé množiny a položíme-li $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a\}$, $Z = \{b\}$, podle 4.4(i) a (ii) dostáváme $((X - Y) - Z) = \{c\}$ a $X - (Y - Z) = \{b, c\}$. Je zřejmé, že rozdíl není komutativní.

4.6 Připomeňme, že třídu $\mathbf{V} - X$ nazýváme doplněk třídy X a označujeme $-X$.

4.7 Lemma.

(i) $$X \cap (-X) = 0, \qquad X \cup (-X) = \mathbf{V},$$

(ii) $$-(-X) = X,$$

(iii) $$X \cap Y = 0 \leftrightarrow Y \subseteq -X.$$

Důkaz. (i) Uvědomme si, že třída $-X$ sestává ze všech množin, které nejsou prvkem X.

(ii) Podle 4.4(ii) je

$$-(-X) = \mathbf{V} - (\mathbf{V} - X) = \mathbf{V} \cap X = X .$$

(iii) Je-li $X \cap Y = 0$ a $x \in Y$, potom $x \in \mathbf{V} - X$. Opačná implikace je zřejmá.

Dále zavedeme kartézský součin dvou tříd jako třídu sestávající z jistých uspořádaných dvojic. Následující definice je názorná, i když trochu zneužívá zavedené značení.

4.8 Definice. *Kartézský součin tříd* A, B je třída

(1) $$A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A \mathbin{\&} b \in B\} ,$$

kde pravou část v rovnosti (1) chápeme jako zkrácený zápis třídového termu

$$\{x : (\exists a)(\exists b)(x = \langle a, b\rangle \mathbin{\&} a \in A \mathbin{\&} b \in B)\} .$$

Uvědomme si, že z definice samotné nevyplývá, že kartézský součin dvou množin je také množina. Dokážeme to později.

4.9 Z definice kartézského součinu je zřejmé, že pro libovolné třídy A, B platí

$$A \times B = 0 \leftrightarrow (A = 0 \vee B = 0) .$$

Je-li $A \times B \neq 0$, potom pro libovolné třídy C, D dostáváme

$$A \times B = C \times D \rightarrow (A = C \mathbin{\&} B = D) .$$

Snadno se ověří, že operace kartézského součinu je monotónní v obou proměnných, to znamená, že platí

(2) $$(A \subseteq A_1 \mathbin{\&} B \subseteq B_1) \rightarrow A \times B \subseteq A_1 \times B_1 .$$

4.10 Lemma.

(i)
$$A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2) ,$$
$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B) ,$$

(ii)
$$A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2) ,$$
$$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B) ,$$

(iii)
$$A \times (B_1 - B_2) = (A \times B_1) - (A \times B_2) ,$$
$$(A_1 - A_2) \times B = (A_1 \times B) - (A_2 \times B) .$$

Důkaz. Dokážeme první tvrzení z (iii). Ostatní přenecháváme za cvičení. Snadno se nahlédne, že uspořádaná dvojice $\langle a, b\rangle$ je prvkem levé (a také pravé) strany rovnosti, právě když platí $a \in A$, $b \in B_1$ a $b \notin B_2$.

4.11 Lemma. *Pro libovolné dvě množiny x, y je $x \times y$ také množina.*

Důkaz. Položíme-li $z = x \cup y$, pak podle (2) je $x \times y \subseteq z \times z$. Podle schématu vydělení stačí, dokážeme-li, že $z \times z$ je množina. Uvažujme libovolný prvek $\langle u, v\rangle \in z \times z$, to znamená, že $u, v \in z$. Potom

$$\{u\} \subseteq z, \qquad \{u, v\} \subseteq z,$$

a proto

$$\{u\} \in \mathscr{P}(z), \qquad \{u, v\} \in \mathscr{P}(z).$$

Opakováním této úvahy dostáváme

$$\{\{u\}, \{u, v\}\} = \langle u, v\rangle \subseteq \mathscr{P}(z),$$

odkud plyne $\langle u, v\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(z))$. Ukázali jsme, že

$$z \times z \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(z)),$$

a na pravé straně inkluze je množina podle axiomu potence. Proto $z \times z$ (a $x \times y$) je také množina.

4.12 Podle 4.11 je $x \times x$ množina všech uspořádaných dvojic prvků množiny x a $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ je třída vůbec všech uspořádaných dvojic. Připomeňme, že pomocí operace uspořádané dvojice jsme sestrojili i uspořádané trojice, čtveřice atd. Budeme-li stejným způsobem iterovat kartézský součin, můžeme sestrojit třídu všech uspořádaných n-tic pro každé konkrétní přirozené číslo n (například tři, čtyři, dvacet sedm, sto, ...).

4.13 Definice. Pro libovolnou třídu X definujeme

$$X^1 = X$$

a je-li již definována třída X^n, položme

$$X^{n+1} = X^n \times X.$$

Zřejmě X^n je třída všech uspořádaných n-tic prvků třídy X. Pro různé exponenty platí

$$\mathbf{V}^{n+1} \subseteq \mathbf{V}^n \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{V}^3 \subseteq \mathbf{V}^2 \subseteq \mathbf{V}^1 = \mathbf{V}. \tag{3}$$

Například uspořádanou čtveřici $\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$ můžeme chápat jako uspořádanou trojici $\langle v, x_3, x_4\rangle$, kde $v = \langle x_1, x_2\rangle$, nebo jako uspořádanou dvojici $\langle w, x_4\rangle$, kde $w = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$, nebo jako prvek univerzální třídy.

4.14 Predikáty a relace. Náš výklad dospěl k bodu, kdy můžeme přiblížit důležitý rys teorie množin, který přispěl k jejímu postavení v soudobé matematice: Nejrůznější vztahy mezi prvky ve studované množině, ať je to množina přirozených čísel, množina bodů a přímek v rovině, nebo nějaká jiná množina, například vztahy

„číslo x dělí y“, „z je nejmenší společný násobek čísel x a y“ nebo „přímky p a q jsou rovnoběžné“, můžeme vyjádřit množinou, která sestává ze všech uspořádaných n-tic prvků studované množiny, které jsou v uvažovaném vztahu.

Je výhodou teorie množin, že ke studiu vztahů, které obvykle popisujeme různými predikátovými symboly, není třeba zavádět další typy objektů. Plně vystačíme s množinami, případně třídami uspořádaných n-tic, kterým budeme říkat n-ární relace. Zvláštní postavení mezi relacemi zaujímají relace, které sestávají z uspořádaných dvojic. Říkáme jim binární relace. Jsou důležité jednak proto, že v základních vztazích (například ve vztahu náležení) jde velmi často o vztah mezi dvěma množinami, jednak proto, že binární relace slouží k výstavbě relací vyšší četnosti.

4.15 Definice. Relace. (i) Říkáme, že třída R je *relace*, je-li $R \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$. V takovém případě se často píše xRy místo $\langle x, y\rangle \in R$.

(ii) Je-li $R \subseteq \mathbf{V}^n$ pro nějaké $n \geq 2$, říkáme, že R je *n-ární relace*.

Jinými slovy, R je n-ární relace, jestliže každý její prvek je uspořádaná n-tice.

Snadno se nahlédne, že jsou-li R, S dvě n-ární relace, potom $R \cap S$, $R \cup S$ a $R - S$ jsou opět n-ární relace.

4.16 Příklad. *Relace náležení a identity.* Pro teorii množin jsou důležité následující dvě relace:

$$\mathbf{E} = \{\langle x, y\rangle : x \in y\},$$
$$\mathbf{Id} = \{\langle x, y\rangle : x = y\}.$$

První z nich popisuje predikát náležení a říká se jí *$\in$-relace*, druhá popisuje predikát rovnosti a říká se jí *identita*.

Následující definice je motivována pojmem relace, ale má smysl pro libovolnou třídu.

4.17 Definiční obor a obor hodnot relace. Třída

$$\mathrm{Dom}(X) = \{u : (\exists v)(\langle u, v\rangle \in X)\}$$

se nazývá *definiční obor* nebo *levý obor třídy* X. Třída

$$\mathrm{Rng}(X) = \{v : (\exists u)(\langle u, v\rangle \in X)\}$$

se nazývá *obor hodnot* nebo také *pravý obor třídy* X. Sjednocení levého a pravého oboru, tedy třída $\mathrm{Dom}(X) \cup \mathrm{Rng}(X)$, se nazývá *obor* třídy X.

4.18 Příklad. Pro libovolnou relaci X platí

$$X \subseteq \mathrm{Dom}(X) \times \mathrm{Rng}(X). \tag{4}$$

Nahradíme-li levou stranu průnikem $X \cap \mathbf{V}^2$, pak (4) platí pro každou třídu X.

Je-li X n-ární relace, potom $\mathrm{Dom}(X) \subseteq \mathbf{V}^{n-1}$. Snadno se ověří, že platí $\mathrm{Dom}(\mathbf{Id}) = \mathbf{V} = \mathrm{Rng}(\mathbf{Id})$, $\mathrm{Dom}(\mathbf{E}) = \mathbf{V}$ a $\mathrm{Rng}(\mathbf{E}) = \mathbf{V} - \{0\}$.

4.19 Definice. Obraz a zúžení. (i) Říkáme, že třída

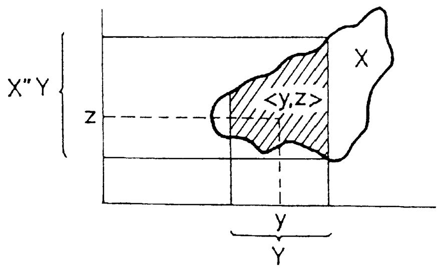
$$X''Y = \{z : (\exists y)(y \in Y \mathbin{\&} \langle y, z\rangle \in X)\}$$

je *obraz třídy Y daný třídou* X.

(ii) Třídu

$$X \mid Y = \{\langle y, z\rangle : y \in Y \mathbin{\&} \langle y, z\rangle \in X\}$$

nazýváme *zúžení třídy X na třídu Y.*



Obr. 4.1

4.20 Obraz $X''Y$ sestává ze všech množin z, které spolu s nějakým prvkem $y \in Y$ tvoří dvojici $\langle y, z\rangle \in X$. Třída $X \mid Y$ je částí X a sestává ze všech dvojic $\langle y, z\rangle \in X$, pro které platí $y \in Y$. Obě třídy jsou znázorněny na obr. 4.1. Třída $X \mid Y$ je vyšrafována.

Snadno se ověří, že pro libovolnou třídu X a množinu x platí $X \mid 0 = 0$, $\mathbf{Id}''x = x$ a $\mathbf{E}''\{x\} = \{y : x \in y\}$.

4.21 Lemma.

(i) $$Y \subseteq Z \rightarrow X \mid Y \subseteq X \mid Z\,,$$

(ii) $$Y \subseteq Z \rightarrow X''Y \subseteq X''Z\,.$$

Důkaz přenecháváme čtenáři.

Nyní ukážeme, že provedením kterékoli z operací definovaných v 4.17 a 4.19 získáme z množin opět množinu.

4.22 Lemma. *Je-li x množina, potom* $\mathrm{Dom}(x)$, $\mathrm{Rng}(x)$, $x \mid Y$ a $x''Y$, *kde Y je libovolná třída, jsou také množiny.*

Důkaz. Nejprve ukážeme

(5) $$\mathrm{Dom}(x) \subseteq \bigcup(\bigcup x)\,.$$

Nechť u je libovolný prvek $\mathrm{Dom}(x)$, to znamená, že pro nějaké v je $\langle u, v\rangle \in x$. Ale $\{u\} \in \langle u, v\rangle$, tedy $\{u\} \in \bigcup x$. Dále $u \in \{u\}$, takže $u \in \bigcup(\bigcup x)$ a (5) je dokázáno. Podobným způsobem se dokáže

(6) $$\mathrm{Rng}(x) \subseteq \bigcup(\bigcup x).$$

Podle axiomu sumy je na pravé straně inkluzí (5) a (6) množina, tedy $\mathrm{Dom}(x)$ a $\mathrm{Rng}(x)$ jsou také množiny. Uvědomíme-li si, že $x''Y \subseteq \mathrm{Rng}(x)$ a $x \mid Y \subseteq x$, je lemma dokázáno.

4.23 Lemma.

(i) $$X''(Y \cup Z) = X''Y \cup X''Z,$$

(ii) $$X''(Y \cap Z) \subseteq X''Y \cap X''Z,$$

(iii) $$X''Y - X''Z \subseteq X''(Y - Z).$$

Důkaz. (i) Je-li $v \in X''(Y \cup Z)$, potom pro nějaké u, které je prvkem Y nebo prvkem Z, platí $\langle u, v\rangle \in X$. Tedy v je prvkem $X''Y$ nebo $X''Z$. Stejným způsobem se dokáže obrácená inkluze.

(ii) Je-li $v \in X''(Y \cap Z)$, potom $\langle u, v\rangle \in X$ platí pro nějaké $u \in Y \cap Z$. Tedy v je prvkem $X''Y$ a $X''Z$.

(iii) Je-li $v \in X''Y - X''Z$, potom existuje $u \in Y$ tak, že $\langle u, v\rangle \in X$ a pro žádné $t \in Z$ neplatí $\langle t, v\rangle \in X$. To znamená, že $u \in Y - Z$ a $v \in X''(Y - Z)$.

4.24 Příklad. Obrácená inkluze v (ii) a (iii), a tedy ani rovnost, v obecném případě neplatí. Jsou-li Y a Z dvě neprázdné disjunktní třídy a $X = (Y \times \mathbf{V}) \cup (Z \times \mathbf{V})$, potom $X''(Y \cap Z)$ a $X''Y - X''Z$ jsou prázdné, ale $X''Y \cap X''Z$ a $X''(Y - Z)$ se rovnají univerzální třídě.

4.25 Definice. Inverze a skládání relací. Pro libovolné relace R, S definujeme

(i) $$R^{-1} = \{\langle u, v\rangle : \langle v, u\rangle \in R\},$$

(ii) $$R \circ S = \{\langle u, v\rangle : (\exists w)(\langle u, w\rangle \in R \;\&\; \langle w, v\rangle \in S)\}.$$

Říkáme, že R^{-1} je *relace inverzní k* R a že relace $R \circ S$ vznikla *složením relací* R *a* S.

4.26 Příklad. Z definice je zřejmé, že pro libovolné relace R, S platí

$$\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Rng}(R), \qquad \mathrm{Rng}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R),$$
$$R = (R^{-1})^{-1},$$

(7) $$\mathrm{Dom}(R \circ S) \subseteq \mathrm{Dom}(R),$$

(8) $$\mathrm{Rng}(R \circ S) \subseteq \mathrm{Rng}(S).$$

Je-li navíc $\mathrm{Rng}(R) \subseteq \mathrm{Dom}(S)$, potom v (7) platí rovnost, a je-li $\mathrm{Dom}(S) \subseteq \mathrm{Rng}(R)$, potom platí rovnost v (8).

Snadno se ověří, že pro libovolnou relaci R a množiny x, y platí

$$\mathbf{Id} \circ R = R \circ \mathbf{Id} = R$$

a

$$\langle x, y \rangle \in \mathbf{E} \circ \mathbf{E} \leftrightarrow x \in \bigcup y .$$

4.27 Lemma. *Pro libovolné relace R, S, T platí*

(i) $$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} ,$$

(ii) $$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T .$$

Důkaz. (i) Je-li $\langle u, v \rangle \in (R \circ S)^{-1}$, potom $\langle v, u \rangle \in R \circ S$ a pro nějaké w platí

$$\langle v, w \rangle \in R , \qquad \langle w, u \rangle \in S ,$$

to znamená, že také

$$\langle u, w \rangle \in S^{-1} , \qquad \langle w, v \rangle \in R^{-1} ,$$

odkud plyne $\langle u, v \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$. Stejným způsobem se dokáže opačná implikace.

(ii) Snadno se ověří, že dvojice $\langle u, v \rangle$ je prvkem levé (ale i pravé) strany rovnosti, právě když pro nějaké množiny r, s platí $\langle u, r \rangle \in R$, $\langle r, s \rangle \in S$ a $\langle s, v \rangle \in T$.

Relace, které splňují jistou podmínku jednoznačnosti, se nazývají zobrazení.

4.28 Definice. Zobrazení. (i) Říkáme, že relace F je *zobrazení* (*funkce*), jestliže pro libovolná u, v, w platí

(9) $$(\langle u, v \rangle \in F \;\&\; \langle u, w \rangle \in F) \rightarrow v = w .$$

To znamená, že k libovolnému $u \in \mathrm{Dom}(F)$ existuje právě jedna množina v, $\langle u, v \rangle \in F$. Říkáme, že v je hodnota přiřazená zobrazením F množině u, a píšeme $F(u) = v$.

Říkáme, že F je *zobrazením třídy X do třídy Y*, a píšeme $F: X \rightarrow Y$, jestliže $\mathrm{Dom}(F) = X$ a $\mathrm{Rng}(F) \subseteq Y$.

Říkáme, že F je *zobrazení třídy X na třídu Y*, je-li $\mathrm{Dom}(F) = X$ a $\mathrm{Rng}(F) = Y$.

(ii) Říkáme, že *zobrazení F je prosté* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže inverzní relace F^{-1} je také zobrazení.

Jinými slovy, F je prosté zobrazení, jestliže pro libovolné u, v, w platí

(10) $$(F(u) = w \;\&\; F(v) = w) \rightarrow u = v ,$$

to znamená, že každý prvek $w \in \mathrm{Rng}(F)$ má právě jeden vzor. V takovém případě je inverzní relace F^{-1} také prosté zobrazení.

4.29 Skládání zobrazení. Jsou-li F a G zobrazení taková, že $F: X \rightarrow Y$ a $G: Y \rightarrow Z$, potom složená relace $F \circ G$ je zobrazení X do Z. Jsou-li $\langle x, z \rangle$ a $\langle x, z' \rangle$ prvky relace $F \circ G$, potom pro nějaká $y, y' \in Y$ platí

$$\langle x, y\rangle \in F \;\&\; \langle y, z\rangle \in G$$

a

$$\langle x, y'\rangle \in F \;\&\; \langle y', z'\rangle \in G\,,$$

odkud dostáváme $y = F(x) = y'$ a nakonec $z = G(y) = z'$. Pro každé $x \in X$ tedy platí $(F \circ G)(x) = G(F(x))$ a $F \circ G$ je zobrazení X do Z.

Složené zobrazení budeme označovat GF místo $F \circ G$. Potom $(GF)(x) = G(F(x))$ a záměna pořadí F a G jako při výpočtu $(F \circ G)(x)$ není nutná. Navíc zdůrazníme, že jde o skládání zobrazení a ne jen relací.

4.30 Lemma. *Jsou-li $F: X \to Y$ a $G: Y \to Z$ prostá zobrazení, potom*

(i) *GF je prosté zobrazení X do Z a* $(GF)^{-1} = F^{-1}G^{-1}$,

(ii) *je-li navíc* $\mathrm{Rng}(F) = Y$, *potom* $F^{-1}F = \mathbf{Id} \mid X$ *a* $FF^{-1} = \mathbf{Id} \mid Y$.

Důkaz. (i) Relace F^{-1} a G^{-1} jsou zobrazení podle předpokladu. Tvrzení plyne z lemmatu 4.27. (ii) F^{-1} je prosté zobrazení Y na X a $F^{-1}(F(x)) = x$ pro každé $x \in X$. Podobně se ukáže, že $FF^{-1} = \mathbf{Id} \mid Y$.

Nyní ukážeme, že pro relace, které vznikly inverzí nějakého zobrazení, platí silnější verze lemmatu 4.23.

4.31 Lemma. *Pro libovolné třídy X, Y a zobrazení F platí*

(i) $$F^{-1}{}''(X \cap Y) = F^{-1}{}''X \cap F^{-1}{}''Y,$$

(ii) $$F^{-1}{}''(X - Y) = F^{-1}{}''X - F^{-1}{}''Y.$$

Důkaz. (i) Podle lemmatu 4.23(ii) je levá strana rovnosti částí třídy na pravé straně. Předpokládejme, že z je prvek třídy na pravé straně rovnosti. Potom existují množiny $x \in X$, $y \in Y$, pro které platí $\langle z, x\rangle \in F$ a $\langle z, y\rangle \in F$. Podle předpokladu je F zobrazení, tedy $x = y$ a $x \in X \cap Y$. Přitom $\langle x, z\rangle \in F^{-1}$, takže $z \in F^{-1}{}''(X \cap Y)$. Tím je opačná inkluze dokázána.

(ii) Podle lemmatu 4.23(iii) je pravá strana rovnosti částí třídy na levé straně. Dokážeme obrácenou inkluzi. Nechť z je libovolný prvek třídy $F^{-1}{}''(X - Y)$, to znamená, že pro nějaké $x \in X - Y$ je $\langle z, x\rangle \in F$. Zřejmě také $z \in F^{-1}{}''X$. Stačí, dokážeme-li, že z není prvkem $F^{-1}{}''Y$. Kdyby pro nějaké $y \in Y$ platilo $\langle z, y\rangle \in F$, potom by $x = y$, protože F je zobrazení. Ale to není možné, protože $x \in X - Y$ a $y \in Y$. Tedy $z \in F^{-1}{}''X - F^{-1}{}''Y$ a rovnost je dokázána.

4.32 Relativizace kvantifikátorů. V dalším výkladu budeme používat tuto úmluvu o zápisu formulí:

Je-li A symbol, který označuje nějakou třídu, a φ je formule rozšířeného jazyka teorie množin, výrazy

(11) $$(\exists x \in A)\,\varphi\,, \qquad (\forall x \in A)\,\varphi$$

chápeme jako zkrácený zápis formulí

$$(\exists x)(x \in A \;\&\; \varphi)\,, \qquad (\forall x)(x \in A \to \varphi)\,.$$

Říkáme, že *kvantifikátory* uvedené v (11) *jsou relativizovány do třídy A*.

4.33 Úmluva a značení. Pro obraz nebo vzor třídy X při zobrazení F se častěji používá označení $F[X]$ a $F^{-1}[X]$ místo $F'X$ a $F^{-1}{}''X$. Tedy

$$F[X] = \{y : (\exists x \in X)(y = F(x))\}$$

a

$$F^{-1}[X] = \{y : (\exists x \in X)(\langle y, x\rangle \in F)\}.$$

V dalším textu budeme dávat přednost použití hranatých závorek, ale z typografických důvodů si ponecháváme obě varianty.

Snadno se ověří, že pro libovolné $X \subseteq \mathrm{Dom}(F)$ a $Y \subseteq \mathrm{Rng}(F)$ platí

(12) $$X \subseteq F^{-1}[F[X]]$$

a

(13) $$F[F^{-1}[Y]] = Y.$$

Je-li F prosté zobrazení, potom i ve (12) platí rovnost.

4.34 Indukovaná zobrazení mezi potenčními množinami. Každé zobrazení f množiny X do množiny Y určuje dvě zobrazení mezi potenčními množinami $\mathscr{P}(X)$ a $\mathscr{P}(Y)$. První z nich, které označíme $f^{\rightarrow}$, zobrazuje $\mathscr{P}(X)$ do $\mathscr{P}(Y)$ a každé podmnožině $x \subseteq X$ přiřazuje její obraz

$$f^{\rightarrow}(x) = f[x]$$

při zobrazení f.

Druhé zobrazení $f^{\leftarrow}$ zobrazuje $\mathscr{P}(Y)$ do $\mathscr{P}(X)$ a každé podmnožině $y \subseteq Y$ přiřazuje její vzor

$$f^{\leftarrow}(y) = f^{-1}[y].$$

Podle lemmatu 4.21 pro libovolné $x_1, x_2 \subseteq \mathscr{P}(X)$ a $y_1, y_2 \in \mathscr{P}(Y)$ platí

$$x_1 \subseteq x_2 \rightarrow f^{\rightarrow}(x_1) \subseteq f^{\rightarrow}(x_2),$$
$$y_1 \subseteq y_2 \rightarrow f^{\leftarrow}(y_1) \subseteq f^{\leftarrow}(y_2).$$

Říkáme, že $f^{\rightarrow}$ a $f^{\leftarrow}$ jsou monotónní vzhledem k inkluzi. Podle 4.23(i) také platí

$$f^{\rightarrow}(x_1 \cup x_2) = f^{\rightarrow}(x_1) \cup f^{\rightarrow}(x_2)$$

a

$$f^{\leftarrow}(y_1 \cup y_2) = f^{\leftarrow}(y_1) \cup f^{\leftarrow}(y_2).$$

Říkáme, že obě indukovaná zobrazení zachovávají operaci sjednocení. Podle lemmatu 4.31 zobrazení $f^{\leftarrow}$ zachovává i operace průniku a rozdílu. To znamená, že platí

$$f^{\leftarrow}(y_1 \cap y_2) = f^{\leftarrow}(y_1) \cap f^{\leftarrow}(y_2)$$

a

$$f^{\leftarrow}(y_1 - y_2) = f^{\leftarrow}(y_1) - f^{\leftarrow}(y_2).$$

Zobrazení $f^{\leftarrow}$ zachovává průnik a rozdíl, právě když f je prosté zobrazení.

4.35 Lemma. *Nechť f je zobrazení množiny X do množiny Y a $f^{\rightarrow}$, $f^{\leftarrow}$ nechť jsou jím indukovaná zobrazení. Potom platí:*

(i) *Je-li f zobrazení X na Y, potom $f^{\rightarrow}$ je zobrazení $\mathcal{P}(X)$ na $\mathcal{P}(Y)$ a $f^{\rightarrow}f^{\leftarrow} = \mathbf{Id} \mid \mathcal{P}(Y)$.*

(ii) *Je-li f prosté zobrazení X na Y, potom $f^{\rightarrow}$ je prosté zobrazení $\mathcal{P}(X)$ na $\mathcal{P}(Y)$ a $(f^{\rightarrow})^{-1} = f^{\leftarrow}$. To znamená, že také $f^{\leftarrow}$ je prosté zobrazení $\mathcal{P}(Y)$ na $\mathcal{P}(X)$.*

(iii) *Je-li navíc g zobrazení množiny Y do množiny Z, potom pro složené zobrazení $gf: X \rightarrow Z$ platí*

$$(gf)^{\rightarrow} = g^{\rightarrow}f^{\rightarrow}, \qquad (gf)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow}g^{\leftarrow}.$$

Důkaz. (i) Je-li y libovolná podmnožina Y, položme $x = f^{\leftarrow}(y)$. Podle (13) je $f^{\rightarrow}(x) = y$.

(ii) Je-li f prosté zobrazení X na Y, potom $f^{\rightarrow}$ je podle (i) zobrazení $\mathcal{P}(X)$ na $\mathcal{P}(Y)$. Ukážeme, že je prosté. Nechť x_1, x_2 jsou dvě různé podmnožiny X takové, že $x_1 - x_2 \neq 0$. Potom $f^{\rightarrow}(x_1 - x_2) \neq 0$ a $f^{\rightarrow}(x_1) \neq f^{\rightarrow}(x_2)$, protože f zachovává rozdíl.

Pro libovolné $x \in \mathcal{P}(X)$ a $y \in \mathcal{P}(Y)$ podle (12) a (13) dostáváme

$$f^{\rightarrow}(x) = y \leftrightarrow x = f^{\leftarrow}(y),$$

to znamená, že

$$(f^{\rightarrow})^{-1} = f^{\leftarrow}.$$

(iii) Označíme-li $h = gf$, potom $h^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. Pro libovolné $x \in \mathcal{P}(X)$ a $y \in \mathcal{P}(Y)$ platí

$$h^{\rightarrow}(x) = g^{\rightarrow}(f^{\rightarrow}(x)), \qquad h^{\leftarrow}(y) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(y)),$$

tedy

$$h^{\rightarrow} = g^{\rightarrow}f^{\rightarrow}, \qquad h^{\leftarrow} = f^{\leftarrow}g^{\leftarrow}.$$

4.36 Definice. Třída všech zobrazení množiny do třídy. Je-li dána nějaká třída A a množina a, nechť ${}^{a}A$ označuje *třídu všech zobrazení množiny a do třídy A*, tedy

$${}^{a}A = \{f: f: a \rightarrow A\}.$$

Uvědomme si, že definice ztrácí smysl, nahradíme-li množinu a nějakou vlastní třídou B. Podle 4.22 je každé zobrazení F s definičním oborem B vlastní třídou a nemůže být prvkem žádné třídy. Snadno se ověří, že platí

$${}^{0}Y = \{0\},$$
$${}^{x}0 = 0, \qquad \text{je-li} \quad x \neq 0.$$

4.37 Lemma. (i) *Pro libovolné množiny x, y je ${}^{x}y$ také množina.*

(ii) *Je-li $x \neq 0$ a Y je vlastní třída, potom ${}^{x}Y$ je vlastní třída.*

Důkaz. (i) Každé zobrazení $f: x \to y$ je podmnožinou kartézského součinu $x \times y$. Třída ${}^x y$ je tedy částí množiny $\mathscr{P}(x \times y)$ a je množinou podle schématu vydělení.

(ii) Je-li $x \neq 0$, můžeme pro každé $y \in Y$ definovat konstantní zobrazení k_y, kde $k_y(u) = y$ platí pro každé $u \in x$. Pro různá y dostáváme různá zobrazení. Kdyby ${}^x Y$ byla množina, pak Y by byla také množina podle schématu axiomů nahrazení. Tedy ${}^x Y$ je vlastní třída.

4.38 Soubory a systémy množin. V některých úvahách, například chceme-li vystihnout opakování, přiřazujeme množinám indexy z nějaké třídy. Tím vlastně sestrojujeme zobrazení definované na třídě indexů. Takové zobrazení můžeme chápat jako *indexovaný soubor množin*.

Naproti tomu množinu sestávající z některých podmnožin nějaké množiny budeme nazývat *systém množin*. V tomto případě nejde o zobrazení, ale o množinu částí nějaké množiny, které říkáme systém množin místo množina podmnožin.

4.39 Označení. Je-li F zobrazení s definičním oborem J, výraz

$$\langle F_j : j \in J \rangle , \tag{14}$$

kde F_j označuje množinu $F(j)$ pro každé $j \in J$, je jiným označením pro zobrazení F. Říkáme také, že (14) je *soubor množin*, J je jeho *indexová třída* a její prvky nazýváme *indexy*. Říkáme, že množina x patří do souboru (14), jestliže pro nějaké $j \in J$ platí $x = F_j$, jinými slovy, je-li $x \in \mathrm{Rng}(F)$.

Operace sjednocení, průniku a kartézského součinu lze definovat i pro soubory množin.

4.40 Definice. Sjednocení a průnik souboru množin. (i) *Sjednocení souboru* (14) definujeme vztahem

$$\bigcup_{j \in J} F_j = \{x : (\exists j \in J)(x \in F_j)\} .$$

(ii) *Průnik souboru* (14) definujeme vztahem

$$\bigcap_{j \in J} F_j = \{x : (\forall j \in J)(x \in F_j)\} .$$

Je zřejmé, že

$$\bigcup_{j \in J} F_j = \bigcup \mathrm{Rng}(F) , \qquad \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcap \mathrm{Rng}(F) .$$

Sjednocení souboru množin je speciálním případem sumy třídy. Sjednocení $\bigcup_{j \in J} F_j$ je množina, právě když $\mathrm{Rng}(F)$ je množina, speciálně je-li indexová třída souboru množina. Je-li indexová třída souboru prázdná, potom $\mathrm{Rng}(F) = 0$ a podle 3.13 je průnik takového souboru univerzální třída. Je-li indexová třída J neprázdná, potom

$$\bigcap_{j \in J} F_j \subseteq F_j \subseteq \bigcup_{j \in J} F_j$$

platí pro každý index $j \in J$.

4.41 Lemma. *Pro libovolné soubory množin $\langle F_j : j \in J \rangle$ a $\langle G_k : k \in K \rangle$, libovolnou třídu A a množinu a platí*

(i)
$$A \cap \bigcup_{j \in J} F_j = \bigcup_{j \in J} (A \cap F_j),$$
$$a \cup \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcap_{j \in J} (a \cup F_j),$$

(ii)
$$\bigcup_{j \in J} F_j \cap \bigcup_{k \in K} G_k = \bigcup_{\langle j,k \rangle \in J \times K} (F_j \cap G_k),$$
$$\bigcap_{j \in J} F_j \cup \bigcap_{k \in K} G_k = \bigcap_{\langle j,k \rangle \in J \times K} (F_j \cup G_k),$$

(iii) (*de Morganova pravidla*)
$$a - \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcup_{j \in J} (a - F_j),$$

je-li $J \neq 0$, potom

$$a - \bigcup_{j \in J} F_j = \bigcap_{j \in J} (a - F_j).$$

Jsou-li obě třídy J, K neprázdné, platí

(iv)
$$A \cap \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcap_{j \in J} (A \cap F_j),$$
$$a \cup \bigcup_{j \in J} F_j = \bigcup_{j \in J} (a \cup F_j),$$

(v)
$$\bigcup_{j \in J} F_j \cup \bigcup_{k \in K} G_k = \bigcup_{\langle j,k \rangle \in J \times K} (F_j \cup G_k),$$
$$\bigcap_{j \in J} F_j \cap \bigcap_{k \in K} G_k = \bigcap_{\langle j,k \rangle \in J \times K} (F_j \cap G_k).$$

Důkaz. Dokážeme první tvrzení z (i) a (iii), ostatní důkazy přenecháváme jako cvičení.

(i)
$$\begin{aligned} x \in A \cap \bigcup_{j \in J} F_j &\leftrightarrow x \in A \mathbin{\&} (\exists j \in J)(x \in F_j), \\ &\leftrightarrow (\exists j \in J)(x \in A \mathbin{\&} x \in F_j), \\ &\leftrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} (A \cap F_j). \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x \in a - \bigcap_{j \in J} F_j &\leftrightarrow x \in a \mathbin{\&} \neg(\forall j \in J)(x \in F_j), \\ &\leftrightarrow (\exists j \in J)(x \in a \mathbin{\&} x \notin F_j), \\ &\leftrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} (a - F_j). \end{aligned}$$

4.42 Jak definovat kartézský součin souboru množin. Jsou-li X, Y nějaké množiny, uspořádanou dvojici $\langle x, y \rangle \in X \times Y$ můžeme chápat jako kód funkce f, která zobrazuje nějakou dvouprvkovou množinu $\{a, b\}$ do $X \cup Y$ a je dána předpisem $f(a) = x$, $f(b) = y$. Kartézský součin $X \times Y$ potom sestává ze všech kódů zobrazení g množiny $\{a, b\}$ do $X \cup Y$ takových, že $g(a) \in X$ a $g(b) \in Y$. Kartézský součin souboru množin definujeme jako množinu všech zobrazení indexové množiny souboru, která splňují určité podmínky.

4.43 Definice. Kartézský součin souboru množin. Nechť J je množina. *Kartézský součin souboru množin* $\langle F_j : j \in J \rangle$ definujeme vztahem

$$\bigtimes_{j \in J} F_j = \{f : f : J \to \bigcup F_j \;\&\; (\forall j \in J)(f(j) \in F_j)\}. \tag{15}$$

Tato definice má smysl jen pro soubory indexované množinou. Je zřejmé, že je-li některá z množin F_j prázdná, potom kartézský součin souboru je také prázdná množina.

4.44 Lemma. *Je-li J množina, potom $\bigtimes_{j \in J} F_j$ je také množina. Jestliže pro každé $j \in J$ platí $F_j = Y$, potom $\bigtimes_{j \in J} F_j = {}^J Y$.*

Důkaz. Je-li J množina, potom $F = \bigcup_{j \in J} F_j$ je také množina a kartézský součin (15) je podmnožinou množiny všech zobrazení z J do F.

§ 5 Vlastnosti relací, uspořádání a rozklady množin

Seznámíme se se základními vlastnostmi relací a podrobněji se budeme zabývat dvěma typy relací – relacemi uspořádání a relacemi ekvivalence. Zavedeme pojmy lineárního a dobrého uspořádání a ukážeme, že každou uspořádanou množinu lze vnořit do úplného svazu, tedy do uspořádané množiny, jejíž každá podmnožina má supremum a infimum. Ukážeme vztah mezi relacemi ekvivalence na nějaké množině a jejími rozklady. Ukážeme, že množina všech relací ekvivalence na libovolné množině tvoří úplný svaz.

Srovnávání velikosti, říkáme také mohutnosti, množin pomocí vzájemně jednoznačných zobrazení je v teorii množin velmi důležité. Tomu odpovídají dvě relace na univerzální třídě: relace „množina x má stejnou mohutnost jako množina y“ a relace „mohutnost x je menší nebo rovna mohutnosti množiny y“. Ukážeme, že první z nich je relace ekvivalence na celé univerzální třídě, a dokážeme důležitou větu Cantorovu–Bernsteinovu o vztahu obou relací.

Velká část zaváděných pojmů má smysl i pro třídy, uvádíme je ve třídové verzi. Stejně tak věty, které se dokazují stejným způsobem pro množiny i pro třídy, formulujeme ve třídovém tvaru. Věty, které se pro třídy musí dokazovat jinak než pro množiny, uvádíme v jednodušším množinovém tvaru.

5.1 Připomeňme, že třída $\mathrm{Dom}(R) \cup \mathrm{Rng}(R)$ se nazývá obor relace R. Základní vlastnosti relací budeme definovat vzhledem k nějaké třídě, protože daná relace může mít určitou vlastnost jenom na části svého oboru.

5.2 Definice. Elementární vlastnosti relací. Říkáme, že relace R je na třídě A

(i) *reflexivní*, jestliže pro libovolný prvek $x \in A$ platí $\langle x, x\rangle \in R$,

(ii) *antireflexivní*, jestliže pro žádné $x \in A$ neplatí $\langle x, x\rangle \in R$,

(iii) *symetrická*, jestliže pro libovolné $x, y \in A$ platí $\langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R$,

(iv) *slabě antisymetrická*, jestliže pro libovolné $x, y \in A$ platí $(\langle x, y\rangle \in R \,\&\, \langle y, x\rangle \in R) \rightarrow x = y$,

(v) *antisymetrická*, jestliže pro libovolné $x, y \in A$ platí $\langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \notin R$,

(vi) *trichotomická*, jestliže pro libovolné $x, y \in A$ platí $\langle x, y\rangle \in R \vee x = y \vee \langle y, x\rangle \in R$,

(vii) *tranzitivní*, jestliže pro libovolné $x, y, z \in A$ platí $(\langle x, y\rangle \in R \& \langle y, z\rangle \in R) \rightarrow$ $\rightarrow \langle x, z\rangle \in R$.

Říkáme, že relace R je reflexivní (symetrická atd.), je-li taková na svém oboru.

5.3 Definované vlastnosti relace se týkají jednotlivých prvků, ne však podmnožin, jejího oboru. Takové vlastnosti nazýváme *elementárními vlastnostmi* nebo *vlastnostmi prvního řádu*. To proto, že mohou být definovány v jazyce logiky prvního řádu, který má symbol označující relaci a který má proměnné jen pro prvky, ale nemá proměnné pro podmnožiny oboru relace.

Každá z vlastností (i)–(vii) se zachovává, přejdeme-li od třídy A k nějaké její části. Takovým vlastnostem se říká *dědičné*. Uvidíme, že všechny vlastnosti prvního řádu nejsou dědičné. Dá se však ukázat, že vlastnosti prvního řádu, které lze definovat formulemi bez kvantifikátorů, jsou dědičné.

Uvědomme si, že obor relace R a třída A nemusí být totožné. Je-li R reflexivní nebo trichotomická na A, potom A je částí oboru relace R. Je-li na druhé straně A^2 disjunktní s R, snadno se ověří, že R je antireflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní na A.

5.4 Definice. Relace uspořádání. (i) Říkáme, že relace R je *uspořádání na třídě* A, nebo že *A je uspořádána relací* R, je-li R reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní na A. Říkáme, že prvky $x, y \in A$ *jsou srovnatelné vzhledem k* R, je-li $\langle x, y\rangle \in R$ nebo $\langle y, x\rangle \in R$. Je-li $\langle x, y\rangle \in R$, píšeme $x \leq_R y$, a říkáme, že x je menší nebo rovno y vzhledem k R.

(ii) Říkáme, že uspořádání R na třídě A je *lineární*, je-li navíc relace R trichotomická na A.

(iii) Relaci R nazveme (*lineární*) *uspořádání*, je-li R (lineární) uspořádání na svém oboru.

5.5 Příklady. Náš výklad teorie množin je teprve na počátku. Zatím jsme nepopsali množinovou konstrukci žádné hlubší matematické struktury. Abychom nebyli omezeni jen na nejjednodušší příklady, které se opírají o několikaprvkové množiny, budeme používat i množinu ω všech přirozených čísel a množiny $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ všech racionálních a reálných čísel. Konstrukci těchto množin podrobně popíšeme později, v příkladech použijeme jenom základní vlastnosti číselných oborů, jejichž znalost můžeme u čtenáře předpokládat.

(a) Relace $R_1 = \mathbf{Id} \restriction \{1, 2, 3\} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ je uspořádání na množině $\{1, 2, 3\}$. Žádné dva různé prvky nejsou srovnatelné. Podobně pro libovolnou třídu A je relace $\mathbf{Id} \restriction A$ uspořádání na A, které nazýváme diskrétní.

(b) Relace $R_2 = R_1 \cup \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ je lineární uspořádání na množině $\{1, 2, 3\}$.

(c) Relace $R_3 = \{\langle x, y\rangle : x \subseteq y\}$ je uspořádání na univerzální třídě $\mathbf{V}$, ale není lineární. Například $\{0\}$ a $\{\{\{0\}\}\}$ jsou dva nesrovnatelné prvky vzhledem k R_3.

(d) Je-li ω množina všech přirozených čísel, potom relace $R_4 = \{\langle m, n\rangle : m, n \in$

$\in \omega \,\&\, m \leq n\}$ je lineární uspořádání na ω. Později uvidíme, že $R_4 = (\mathbf{E} \cap \omega^2) \cup \cup \{\langle n, n \rangle : n \in \omega\}$, kde $\mathbf{E}$ je relace náležení.

(e) Relace $R_5 = \{\langle m, n \rangle : m, n \in \omega \,\&\, m$ dělí $n\}$ je uspořádání na ω, které není lineární.

5.6 Ostrá a neostrá nerovnost. Všechny vlastnosti, které definují uspořádání i lineární uspořádání, jsou dědičné, proto i vlastnost být lineárním uspořádáním na nějaké třídě se přenáší na podtřídy.

Reflexivnost v definici uspořádání naznačuje, že jde o neostrou nerovnost. Vynecháme-li v relaci uspořádání R všechny prvky tvaru $\langle x, x \rangle$, získáme relaci R', která je antireflexivní a tranzitivní a která odpovídá ostré nerovnosti. Je-li $\langle x, y \rangle \in R'$, říkáme, že x je menší než y vzhledem k R a píšeme $x <_R y$. Říkáme, že R' je ostré uspořádání. Mezi oběma relacemi je jednoduchý vztah. Je-li A obor relace R, potom

$$R' = R - \mathbf{Id}\,, \qquad R = R' \cup (\mathbf{Id} \mid A),$$

speciálně pro relaci R_2 z příkladu 5.5 dostáváme

$$R'_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\} = R_2 - R_1\,.$$

Budeme používat obou typů uspořádání podle toho, které z nich bude výhodnější.

Další pojmy – majoranta, největší prvek, supremum – mluví o vztahu prvku a části uspořádané třídy. Budeme také definovat pojmy, které se týkají podtříd nebo podmnožin uspořádané třídy. Zde již nejde o vlastnosti prvního řádu.

Uvědomme si, že inverzní relace k uspořádání je také uspořádání. Proto každému pojmu, který se týká uspořádání, odpovídá duální pojem, který se definuje stejným způsobem, ale pomocí inverzní relace. Jinými slovy, duální pojem zavedeme tím, že v definici použijeme obrácené nerovnosti.

5.7 Definice. Největší a maximální prvek, supremum. Nechť $\leq$ je uspořádání na třídě A a nechť $X \subseteq A$. Říkáme, že $a \in A$ je

(i) *majoranta* nebo *horní mez* třídy X, jestliže pro každý prvek $x \in X$ je $x \leq a$,

(ii) *maximální prvek* třídy X, je-li $a \in X$ a pro žádné $x \in X$ není $a < x$,

(iii) *největší prvek* třídy X, je-li a majoranta X a $a \in X$.

(iv) *Minoranta* a *minimální prvek* třídy X se definují tak, že obrátíme nerovnosti v (i) a (ii). *Nejmenší prvek* třídy X je minoranta, která je prvkem X.

(v) Říkáme, že $a \in A$ je *supremum* třídy X, je-li a nejmenší prvek třídy všech majorant třídy X. Říkáme, že a je *infimum* třídy X, je-li to největší minoranta třídy X.

Uvědomme si, že je-li x nejmenším prvkem třídy X, potom x je také minimálním prvkem a infimem třídy X. Je-li $\leq$ lineární uspořádání na A, potom každá třída $X \subseteq A$ má nejvýše jeden minimální prvek a ten je také nejmenším prvkem třídy X. Duální tvrzení platí také pro největší a maximální prvek a supremum třídy X.

5.8 Označení. Ze slabé antisymetrie relace uspořádání vyplývá, že největší a nejmenší prvek třídy X – pokud existuje – je určen jednoznačně. Totéž platí pro supremum jako nejmenší prvek třídy všech majorant a pro infimum, které je největším prvkem třídy všech minorant. Můžeme zavést následující označení.

Je-li x největší (nejmenší) prvek třídy X při uspořádání R, píšeme $x = \max_R(X)$ ($x = \min_R(X)$). Je-li x supremum třídy X, píšeme $x = \sup_R(X)$, a je-li x infimum třídy X při uspořádání R, píšeme $x = \inf_R(X)$.

5.9 Uvědomme si, že supremum prázdné podmnožiny uspořádané třídy A existuje, právě když A má nejmenší prvek. V takovém případě je supremem prázdné podmnožiny nejmenší prvek třídy A. Podobně infimum prázdné podmnožiny třídy A existuje, právě když existuje největší prvek třídy A, ten je potom infimem prázdné podmnožiny.

5.10 Příklady. Definované pojmy budeme ilustrovat na relacích uspořádání z příkladu 5.5.

(a) Každý prvek množiny $\{1, 2, 3\}$ je maximální i minimální při uspořádání R_1. Diskrétně uspořádaná množina, která má alespoň dva prvky, nemá největší ani nejmenší prvek a nemá žádnou majorantu ani minorantu, tedy také nemá supremum ani infimum.

(b) Jednotka je nejmenším a trojka je největším prvkem množiny $\{1, 2, 3\}$ při uspořádání R_2.

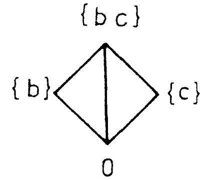
(c) Prázdná množina je nejmenším prvkem univerzální třídy V při uspořádání R_3 a žádný prvek není maximální, a tedy ani největší.

(d) Nula je nejmenším prvkem množiny ω při uspořádání R_4. Množina ω nemá největší ani maximální prvek. Jak uvidíme později, je ω (jako ordinální číslo) supremem množiny všech přirozených čísel ve třídě ordinálních čísel.

(e) Jednotka je nejmenším prvkem a nula je největším prvkem množiny ω při uspořádání R_5. Pro libovolná přirozená čísla n, m je jejich nejmenší společný násobek supremem množiny $\{n, m\}$ a největší společný dělitel je infimem téže množiny při uspořádání R_5. Uvežujeme-li množinu $\omega - \{0, 1\}$, jejími minimálními prvky jsou právě všechna prvočísla.

5.11 Příklad. Potence $\mathscr{P}(a)$ libovolné množiny a je uspořádána relací inkluze a platí:

(a) 0 je nejmenší a a je největší prvek $\mathscr{P}(a)$.



Obr. 5.1

(b) Pro libovolné $x, y \in \mathscr{P}(a)$ je $x \cup y$ supremem a $x \cap y$ infimem množiny $\{x, y\}$ vzhledem k inkluzi.

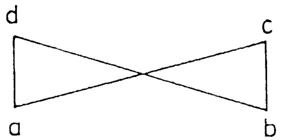
(c) Pro libovolnou množinu $u \subseteq \mathscr{P}(a)$ je $\bigcup u$ supremem a množina $a \cap (\bigcap u)$ je infimem množiny u vzhledem k inkluzi.

(d) Jsou-li b, c dva různé prvky množiny a, potom $\{b\}, \{c\}$ jsou dva nesrovnatelné prvky množiny $\mathscr{P}(a)$. Podle (b) je množina $\{b, c\}$ supremem a prázdná množina je infimem množiny $\{\{b\}, \{c\}\} \subseteq \mathscr{P}(a)$. Situaci vyjadřuje obrázek 5.1, kde spojnice mezi vrcholy vyjadřuje srovnatelnost.

5.12 Příklad. Nechť množina C má právě čtyři prvky, $C = \{a, b, c, d\}$, a nechť

$$R = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle\}.$$

Pak R je ostré uspořádání na C. Máme obrázek 5.2. Množina $\{a, b\}$ má dvě nesrovnatelné majoranty c, d, a nemá tedy supremum. Podobně množina $\{c, d\}$ má dvě nesrovnatelné minoranty a nemá infimum.



Obr. 5.2

5.13 Definice. Usměrněné množiny, filtry a ideály. Nechť množina A je uspořádána relací $\leq$ a nechť $X \subseteq A$. Říkáme, že:

(i) X je *shora* (*zdola*) *omezená* v A, jestliže existuje majoranta (minoranta) $a \in A$ množiny X.

(ii) X je *dolní množina* v A, jestliže s každým svým prvkem obsahuje i všechny menší prvky množiny A, to znamená, jestliže platí

$$y \leq x \in X \rightarrow y \in X$$

pro libovolné $x, y \in A$.

Říkáme, že X je *horní množina* v A, jestliže s každým svým prvkem obsahuje i všechny větší prvky množiny A, tedy jestliže platí

$$y \geq x \in X \rightarrow y \in X$$

pro libovolné $x, y \in A$.

(iii) X je *dolů* (*nahoru*) *usměrněná*, jestliže pro libovolné $x, y \in X$ existuje $z \in X$ takové, že $z \leq x$ a $z \leq y$ ($z \geq x$ a $z \geq y$).

(iv) X je *ideál* v A, je-li X nahoru usměrněná dolní množina. X je *filtr* v A, je-li X dolů usměrněná horní množina.

(v) A je *svaz*, jestliže A je neprázdná a k libovolným dvěma prvkům $x, y \in A$ existuje supremum a infimum množiny $\{x, y\}$ v množině A.

(vi) A je *úplný* svaz, jestliže v množině A existuje supremum a infimum pro každou podmnožinu $u \subseteq A$.

5.14 Příklady. (a) Množina všech prvočísel je zdola omezená a není shora omezená při uspořádání R_4, ale je zdola i shora omezená při uspořádání R_5 z příkladu 5.5.

(b) Množiny $\{16, 8, 4, 2, 1\}$, $\{27, 9, 3, 1\}$ a $\{27, 18, 9, 6, 3, 2, 1\}$ jsou příklady dolních množin čísel při uspořádání R_5 z příkladu 5.5.

(c) Nechť $<$ označuje obvyklou relaci (ostrého) lineárního uspořádání množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel (podle velikosti). Množinu $\{z: x < z < y\}$, kde x, y jsou reálná čísla a $x < y$, označujeme (x, y) a nazýváme ji otevřený interval. Čísla x, y jsou meze intervalu (x, y). Při uspořádání množiny $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ inkluzí je množina všech otevřených intervalů nahoru usměrněná. Je-li z nějaké reálné číslo, pak množina všech otevřených intervalů, jejichž prvkem je z, je dolů usměrněná vzhledem k inkluzi.

(d) Nechť množina A je uspořádána relací $\leq$ a $X \subseteq A$. Je-li X nahoru usměrněná množina, potom množina

$$I(X) = \{y: y \in A \mathbin{\&} (\exists x \in X)(y \leq x)\}$$

je ideál. Říkáme, že $I(X)$ je ideál generovaný množinou X a že X je bází ideálu $I(X)$.

Je-li X dolů usměrněná množina, potom množina

$$F(X) = \{y: y \in A \mathbin{\&} (\exists x \in X)(y \geq x)\}$$

je filtr generovaný množinou X. Říkáme, že X je bází filtru $F(X)$.

Je-li speciálně $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\leq$ je uspořádání inkluzí a X je množina všech otevřených intervalů, jejichž prvkem je pevné reálné číslo z, potom $F(X)$ je filtr všech okolí bodů z.

(e) Množina ω při uspořádání R_5 z příkladu 5.5 je svaz.

(f) Pro libovolnou množinu A je potence $\mathcal{P}(A)$ při uspořádání inkluzí úplným svazem. Uvědomme si, že úplný svaz musí mít největší a nejmenší prvek.

5.15 Zúplnění uspořádaných množin. Položme si otázku, zda je možné vložit libovolnou uspořádanou množinu do úplného svazu tak, aby se všechna suprema a infima, pokud existují v původní množině, shodovala s odpovídajícími supremy a infimy v úplném svazu. Ukážeme, že takové rozšíření lze sestrojit pro každou uspořádanou množinu.

Konstrukci takového zúplnění provedl poprvé R. Dedekind, který sestrojil množinu reálných čísel jako zúplnění lineárně uspořádané množiny racionálních čísel. Zúplnění libovolné uspořádané množiny popsal H. M. Mac Neille, který zobecnil původní Dedekindovu myšlenku.

Víme již, že potenční množina libovolné množiny spolu s uspořádáním inkluzí tvoří úplný svaz. Potenční množiny nebo jejich části jsou přirozenými kandidáty, mezi nimiž budeme hledat zúplnění uspořádaných množin.

5.16 Definice. Hlavní ideál. Nechť R je uspořádání na množině A. Pro libovolné $x \in A$ je množina $\{y : y \in A \ \& \ y \leq_R x\}$ dolní vzhledem k uspořádání R a je nahoru usměrněná, protože má největší prvek. Označíme ji $(\leftarrow, x]$ a říkáme, že je to *hlavní ideál* určený prvkem x. Říkáme, že ideál $X \subseteq A$ je hlavní, jestliže pro nějaké $x \in A$ platí $X = (\leftarrow, x]$.

Duálním pojmem k hlavnímu ideálu je *hlavní filtr*. Snadno se ověří, že množina

$$[x, \rightarrow) = \{y : y \in A \ \& \ y \ {}_R{\geq} \ x\}$$

je dolů usměrněná horní množina. Říkáme jí hlavní filtr určený prvkem x. Říkáme, že filtr $X \subseteq A$ je hlavní, jestliže pro nějaké $x \in A$ platí $X = [x, \rightarrow)$.

5.17 Lemma. *Nechť R je uspořádání na množině A. Pro libovolné $x, y \in A$ platí*

$$x \leq_R y \leftrightarrow (\leftarrow, x] \subseteq (\leftarrow, y] .$$

5.18 Definice. Izomorfismy a vnoření. Nechť F je zobrazení A_1 do A_2 a nechť R_1, R_2 jsou relace. Říkáme, že:

(i) *F zachovává relace R_1, R_2*, jestliže pro libovolné $x, y \in A_1$ platí

$$\langle x, y \rangle \in R_1 \rightarrow \langle F(x), F(y) \rangle \in R_2 .$$

(ii) F je *vnoření A_1* do A_2 vzhledem k R_1, R_2, je-li F prosté zobrazení a pro libovolné $x, y \in A_1$ platí

$$\langle x, y \rangle \in R_1 \leftrightarrow \langle F(x), F(y) \rangle \in R_2 .$$

(iii) *F zachovává suprema*, když pro libovolné $x \in A_1$ a $X \subseteq A_1$ platí

$$x = \sup_{R_1}(X) \rightarrow F(x) = \sup_{R_2}(F[X]) .$$

Obdobně se definuje zachovávání infima.

(iv) F je *izomorfismus* tříd A_1, A_2 vzhledem k R_1, R_2, jestliže F je vnoření A_1 do A_2 a $\mathrm{Rng}(F) = A_2$. Říkáme, že F je izomorfismem relací R_1, R_2, jestliže F je izomorfismem oborů relací R_1, R_2 (vzhledem k R_1, R_2). Říkáme, že třídy A_1, A_2 jsou izomorfní vzhledem k R_1, R_2, jestliže existuje nějaký izomorfismus obou tříd vzhledem k relacím R_1, R_2.

5.19 Snadno se ověří, že izomorfismus dvou uspořádaných množin zobrazuje dolní množinu na dolní množinu, ideál na ideál a filtr na filtr. Izomorfismus také zachovává suprema a infima. Stejná tvrzení však neplatí pro vnoření.

Je-li A množina uspořádaná relací R, definujme zobrazení $F: A \rightarrow \mathscr{P}(A)$ tak, že pro libovolné $a \in A$ položíme

$$F(a) = (\leftarrow, a] .$$

Podle lemmatu 5.17 je F vnoření A do $\mathscr{P}(A)$ vzhledem k relaci R a inkluzi. Označíme-li $D(A)$ množinu všech dolních množin v množině A, potom F je také vnoření A do $D(A)$ vzhledem k R a inkluzi. Ukážeme, že množina $D(A)$ je také úplný svaz při uspořádání inkluzí.

5.20 Lemma. *Nechť R je uspořádání na množině A, nechť $D(A)$ je množina všech dolních množin při uspořádání R.*

Pro libovolnou množinu $C \subseteq D(A)$ jsou množiny $\bigcup C$ a $A \cap (\bigcap C)$ opět dolní množiny. První z nich je supremum a druhá je infimum množiny C vzhledem k inkluzi $D(A)$ je úplný svaz vzhledem k inkluzi.

Důkaz. Protože $D(A) \subseteq \mathscr{P}(A)$, stačí dokázat, že suma i průnik C jsou dolní množiny, z vlastností sumy a průniku je zřejmé, že jde o supremum a infimum. Je-li $y \in \bigcup C$, potom y je prvkem nějakého $c \in C$. Je-li $x \in A$ a $x \leq_R y$, potom $x \in c$, protože c je dolní množina. Podle definice sumy je $c \subseteq \bigcup C$, takže $x \in \bigcup C$. Dokázali jsme, že suma množiny C je také dolní množina. Je-li C prázdná, potom $\bigcap C$ je univerzální třída, takže $(\bigcap C) \cap A = A$, a to je dolní množina. Je-li C neprázdná, snadno se ověří, že $\bigcap C$ je také dolní množina.

5.21 Je-li $\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel, $\leq$ je její obvyklé uspořádání podle velikosti a X je otevřený interval $(\leftarrow, 1)$ všech reálných čísel x, $x < 1$, potom $\sup X = 1$ a $F(1) = (\leftarrow, 1]$.

Na druhé straně pro supremum obrazu množiny X platí

$$\sup_{\subseteq} F[X] = \bigcup F[X] = (\leftarrow, 1) \neq F(1),$$

tedy zobrazení $F: \mathbb{R} \to D(\mathbb{R})$ nezachovává suprema. Při konstrukci zúplnění tuto obtíž odstraníme tím, že nepoužijeme všechny, ale jenom speciální dolní množiny.

5.22 Definice (Mac Neille). Nechť A je uspořádaná množina.

(i) Pro libovolnou podmnožinu $X \subseteq A$ položíme

$$X^{\triangle} = \{x : x \in A \mathbin{\&} x \text{ je majoranta } X\},$$

$$X^{\triangledown} = \{x : x \in A \mathbin{\&} x \text{ je minoranta } X\}.$$

Je zřejmé, že $X^{\triangle}$ je horní množina a $X^{\triangledown}$ je dolní množina vzhledem k uspořádání množiny A. Uvědomme si, že $X^{\triangle}$ je prázdná, pokud X není shora omezená, a $X^{\triangledown}$ je prázdná, pokud X není omezená zdola.

(ii) Říkáme, že podmnožina $X \subseteq A$ je *stabilní*, jestliže platí $X = (X^{\triangle})^{\triangledown}$.

5.23 Lemma. *Pro libovolné podmnožiny $X, Y \subseteq A$ a libovolný prvek $a \in A$ platí*

(i) *je-li $X \subseteq Y$, potom $Y^{\triangle} \subseteq X^{\triangle}$ a $Y^{\triangledown} \subseteq X^{\triangledown}$,*

(ii) $X \subseteq (X^{\triangle})^{\triangledown}$,

(iii) $(X^{\triangle})^{\triangledown}$ *je vzhledem k inkluzi nejmenší stabilní nadmnožina množiny X,*

(iv) *hlavní ideál $(\leftarrow, a]$ je stabilní množina.*

Důkaz. (i) Zřejmě každá majoranta (minoranta) množiny Y je také majorantou (minorantou) množiny X.

(ii) Libovolný prvek $x \in X$ je minorantou $X^{\triangle}$, tedy je prvkem $(X^{\triangle})^{\triangledown}$.

(iii) Označme $Z = (X^{\triangle})^{\triangledown}$ a ukážeme, že Z je stabilní množina. Podle (i) a (ii) je $Z^{\triangle} \subseteq X^{\triangle}$. Dokážeme i obrácenou inkluzi. Je-li $x \in X^{\triangle}$, pak x je majorantou množiny X, to znamená, že $x \geq z$ pro každé $z \in Z$, tedy také $x \in Z^{\triangle}$. Z rovnosti

$X^\Delta = Z^\Delta$ plyne $(X^\Delta)^\nabla = (Z^\Delta)^\nabla$. Je-li S stabilní a $X \subseteq S$, podle (i) je $S^\Delta \subseteq X^\Delta$ a $(X^\Delta)^\nabla \subseteq (S^\Delta)^\nabla = S$.

(iv) Důkaz je zřejmý.

5.24 Věta (Mac Neille). *Nechť A je množina uspořádaná relací R a F je zobrazení, které každému $a \in A$ přiřazuje hlavní ideál $(\leftarrow, a]$. Množina $S(A)$ všech (vzhledem k R) stabilních podmnožin množiny A je úplný svaz při uspořádání inkluzí.*

Zobrazení F je vnoření množiny A do $S(A)$ vzhledem k R a inkluzi, které zachovává suprema i infima.

Důkaz. F je podle lemmatu 5.23(iv) zobrazení A do $S(A)$ a podle lemmatu 5.17 je to vnoření vzhledem k R a inkluzi. Zbývá dokázat, že $S(A)$ je úplný svaz a že F zachovává suprema a infima.

Nechť $B \subseteq S(A)$ a $X = \bigcup B$. Z definice sumy a lemmatu 5.23(iii) vyplývá, že $(X^\Delta)^\nabla$ je supremum množiny B vzhledem k inkluzi. Je-li $B \neq 0$ a $Y = \bigcap B$, potom pro každé $S \in B$ platí $Y \subseteq S$ a také $(Y^\Delta)^\nabla \subseteq S$, protože S je stabilní. Tedy $(Y^\Delta)^\nabla = Y$ a Y je infimem množiny B vzhledem k inkluzi. Je-li B prázdná, snadno se dokáže, že A je infimem B. Ukázali jsme, že množina $S(A)$ je úplný svaz při uspořádání inkluzí a že množina $S(A)$ je uzavřena na průniky.

Ukážeme, že F zachovává suprema. Nechť $X \subseteq A$ a $x = \sup_R (X)$. Položíme-li $Y = \bigcup F[X]$, snadno se nahlédne, že $X^\Delta = Y^\Delta$. To znamená, že x je nejmenší prvek Y^Δ a že platí $(\leftarrow, x] = (Y^\Delta)^\nabla$, kde na pravé straně je supremum $F[X]$ vzhledem k inkluzi. Zobrazení F tedy zachovává suprema. Je-li $y = \inf_R (X)$, není těžké ukázat, že

$$F(y) = (\leftarrow, y] = \bigcap F[X],$$

odkud vyplývá, že vnoření F zachovává infima.

5.25 Konstrukce zúplnění uspořádaných množin ukazuje postup, který se s obměnami opakuje při řešení mnoha podobných úloh v matematice. Můžeme jej shrnout do dvou kroků: Je-li třeba, nahradíme výchozí množinu jinou množinou, která je s ní izomorfní, a tu potom doplníme o „chybějící“ prvky. Z důkazu Mac Neillovy věty je zřejmé, že množina $S(A)$ obsahuje jen takové prvky, které jsou nutné k doplnění množiny A do úplného svazu. V tomto smyslu je $S(A)$ minimální úplný svaz, do kterého lze vnořit uspořádanou množinu A. V našem případě jsme od původní množiny přešli k množině všech hlavních ideálů a tu jsme doplnili do úplného svazu všech stabilních množin. Úplné svazy všech podmnožin a všech dolních množin byly příliš velké — vnoření nezachovávalo suprema. Častokrát se původní množina ztotožňuje se svým izomorfním obrazem a považuje se také za podmnožinu zúplnění.

5.26 Dedekindovy řezy. Dedekindovsky úplná uspořádání. Stabilní podmnožiny lineárně uspořádaných množin lze charakterizovat jednoduchou podmínkou. Je-li A lineárně uspořádaná množina, snadno se ukáže, že libovolná podmnožina $X \subseteq A$ je stabilní, právě když X je dolní množina a $\sup(X)$ je prvkem množiny X, pokud supremum existuje.

Podmnožiny lineárně uspořádaných množin, které splňují tuto podmínku, se nazývají Dedekindovy řezy. Řez je přiléhavé označení pro dolní množiny v lineárně uspořádané množině. V Dedekindově konstrukci reálných čísel každému reálnému číslu odpovídá právě jeden Dedekindův řez na množině racionálních čísel.

Říkáme, že množina X lineárně uspořádaná relací $\leq$ je dedekindovsky úplné uspořádání na X, jestliže každá podmnožina $Y \subseteq X$ má supremum v množině X.

5.27 Definice. Dobré uspořádání. Říkáme, že uspořádání R na třídě A je dobré, jestliže každá neprázdná podmnožina $u \subseteq A$ má nejmenší prvek vzhledem k R. Říkáme, že A je dobře uspořádaná, je-li uspořádána nějakou relací dobrého uspořádání.

5.28 Dobré uspořádání není vlastnost prvního řádu, protože definice dobrého uspořádání mluví nejen o prvcích uspořádané třídy, ale i o jejích podmnožinách. Z definice je zřejmé, že je to vlastnost dědičná. Každá podtřída dobře uspořádané třídy je dobře uspořádaná. Libovolné dva prvky x, y dobře uspořádané třídy jsou srovnatelné, protože množina $\{x, y\}$ má nejmenší prvek. To také znamená, že každé dobré uspořádání je lineární.

Pojem dobrého uspořádání zachycuje některé vlastnosti uspořádané množiny přirozených čísel. Jak uvidíme později, tento pojem dovoluje definovat třídu ordinálních čísel, která je nadtřídou množiny přirozených čísel, tak, že operace součtu a součinu lze rozšířit z přirozených čísel na všechna ordinální čísla.

Zatím si povšimneme jiné zajímavé vlastnosti dobře uspořádaných množin. Řekli jsme, že množina ω všech přirozených čísel je dobře uspořádaná a její část – množina všech sudých čísel – je také dobře uspořádaná. Snadno se ověří, že zobrazení f definované předpisem $f(n) = 2n$ pro $n \in \omega$ je jediný izomorfismus množiny ω a množiny sudých čísel při daném uspořádání. Ukážeme, že k libovolným dvěma dobře uspořádaným množinám existuje právě jedno zobrazení, které je izomorfismem jedné z nich s nějakou dolní podmnožinou druhé množiny. To znamená, že všechny dobře uspořádané množiny jsou – až na izomorfismus – srovnatelné.

5.29 Definice. Nechť A je množina uspořádaná relací R a B je množina uspořádaná relací S. Říkáme, že zobrazení F je *počátkové vnoření* A do B, jestliže $A_1 = \mathrm{Dom}(F)$ je dolní podmnožina množiny A, $B_1 = \mathrm{Rng}(F)$ je dolní podmnožina v B a F je izomorfismus A_1 a B_1 vzhledem k R a S.

Jinými slovy, F je počátkové vnoření A do B, je-li to izomorfismus nějakých dolních podmnožin množin A a B.

5.30 Lemma. *Nechť F a G jsou počátková vnoření dobře uspořádané množiny A do dobře uspořádané množiny B. Potom $F \subseteq G$ nebo $G \subseteq F$.*

Důkaz. Nechť R je dobré uspořádání množiny A a S je dobré uspořádání B. Z linearity uspořádání R plyne, že libovolné dvě dolní podmnožiny množiny A jsou srovnatelné vzhledem k inkluzi, tedy buď $\mathrm{Dom}(F) \subseteq \mathrm{Dom}(G)$, nebo $\mathrm{Dom}(G) \subseteq \mathrm{Dom}(F)$.

Předpokládejme, že platí první inkluze, a ukážeme, že $F(x) = G(x)$ pro každé $x \in \in \mathrm{Dom}(F)$. V opačném případě nechť x je vzhledem k R nejmenší prvek takový, že $F(x) \neq G(x)$. To znamená, že pro každé $y <_R x$ platí $F(y) = G(y)$. Z linearity uspořádání S vyplývá, že $F(x)$ a $G(x)$ jsou srovnatelné. Nechť například $F(x) <_S G(x)$ a označme $b = F(x)$. Vzhledem k tomu, že G respektuje uspořádání, pro každé $z \in \mathrm{Dom}(G)$ takové, že $z\ _R\!\geq x$, platí $G(z)\ _S\!> b$. To znamená, že $b \notin \mathrm{Rng}(G)$ a obor hodnot zobrazení G není dolní množina v B – spor. V případě, že $\mathrm{Dom}(G) \subseteq \mathrm{Dom}(F)$, postupujeme obdobně.

5.31 Věta. *Nechť množina A je dobře uspořádaná relací R a množina B je dobře uspořádaná relací S. Potom existuje právě jedno zobrazení F takové, že F je izomorfismus množiny A a nějaké dolní množiny v B nebo F je izomorfismus B a nějaké dolní množiny v A.*

Důkaz. Nechť P je množina všech počátkových vnoření A do B. Položme $F = \bigcup P$. Snadno se ukáže, že F je zobrazení. Je-li $\langle x, y_1 \rangle \in F$ a $\langle x, y_2 \rangle \in F$, pak existují počátková vnoření F_1, F_2 taková, že $\langle x, y_1 \rangle \in F_1$ a $\langle x, y_2 \rangle \in F_2$. Podle lemmatu 5.30 je $F_1 \subseteq F_2$ nebo $F_2 \subseteq F_1$, odkud plyne $y_1 = y_2$. Ukážeme, že F je také počátkové vnoření A do B. Je-li $x_1 <_R x_2 \in \mathrm{Dom}(F)$, pak existuje $F' \in P$ takové, že $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(F')$, a protože F' je počátkové vnoření, dostáváme

$$F(x_1) = F'(x_1) <_S F'(x_2) = F(x_2).$$

Přitom $\mathrm{Dom}(F)$ je sjednocení dolních množin $\mathrm{Dom}(F')$, $F' \in P$ a je podle lemmatu 5.20 dolní množinou v A. Podobně se ukáže, že $\mathrm{Rng}(F)$ je dolní množina v B.

Ukážeme, že $\mathrm{Dom}(F) = A$ nebo $\mathrm{Rng}(F) = B$. V prvním případě je F hledaný izomorfismus množiny A a dolní podmnožiny B a ve druhém případě je F^{-1} izomorfismus B a nějaké dolní podmnožiny množiny A. Kdyby však byly obě množiny $A - \mathrm{Dom}(F)$ i $B - \mathrm{Rng}(F)$ neprázdné, vezměme jejich nejmenší prvky a, b. Snadno se ověří, že zobrazení F', které vznikne z F tím, že rozšíříme F do bodu a tak, že $F'(a) = b$, je také počátkové vnoření. Tedy $F' \in P$ a to je ve sporu s definicí zobrazení F. Jedna z obou množin musí být prázdná.

5.32 Relace ekvivalence jsou důležitým typem relací, kterými stojí za to zabývat se hned od počátku. Relace ekvivalence mají podobné vlastnosti jako rovnost a popisují vztah mezi prvky nějaké třídy, které můžeme považovat (i když jsou různé) z nějakého hlediska za rovnocenné – ekvivalentní.

5.33 Definice. Relace ekvivalence. Říkáme, že relace R je *ekvivalence* na třídě A, je-li R reflexivní, symetrická a tranzitivní na A. Říkáme, že prvky $x, y \in A$ jsou ekvivalentní vzhledem k R, je-li $\langle x, y \rangle \in R$. Je-li R ekvivalence na svém oboru, říkáme krátce, že R je relace ekvivalence.

5.34 Příklad. Rovnost je reflexivní, symetrická a tranzitivní, proto relace $\mathbf{Id} \mid A$ je ekvivalence na libovolné třídě A. Snadno se ověří, že relace $A \times A$ je také ekvivalence na A. Můžeme říci, že $\mathbf{Id} \mid A$ je nejmenší nebo nejjemnější a relace A^2 je největší nebo nejhrubší ekvivalence na A. Vzhledem k relaci $\mathbf{Id} \mid A$ je každý prvek třídy A ekvivalentní jen sám se sebou, vzhledem k A^2 jsou libovolné dva prvky třídy A ekvivalentní.

5.35 Definice. Třídy ekvivalence. Je-li R relace ekvivalence a u je prvek oboru relace R, třída $R''\{u\}$ sestává ze všech prvků oboru relace, které jsou ekvivalentní s u. Třída $R''\{u\}$ se častěji označuje jako $[u]_R$ a říká se jí *třída ekvivalence určená prvkem u*. Z reflexivity relace R je zřejmé, že $u \in [u]_R$.

5.36 Lemma. *Nechť relace $R \subseteq A \times A$ je ekvivalence na třídě A. Třídy ekvivalence $[a]_R$, $[b]_R$ libovolných dvou prvků $a, b \in A$ jsou buď disjunktní, nebo se rovnají.*
Důkaz. Stačí, dokážeme-li $[a]_R = [b]_R$, pokud obě třídy ekvivalence mají nějaký společný prvek. Nechť c je společným prvkem $[a]_R$ a $[b]_R$, potom $\langle a, c\rangle \in R$ a $\langle b, c\rangle \in R$. Ze symetrie R také $\langle c, b\rangle \in R$ a z tranzitivity dostáváme $\langle a, b\rangle \in R$. Je-li $x \in [a]_R$, to znamená, je-li $\langle a, x\rangle \in R$, ze symetrie a tranzitivity dostáváme $\langle b, x\rangle \in R$, tedy $x \in [b]_R$ a $[a]_R \subseteq [b]_R$. Stejným způsobem se dokáže i obrácená inkluze. Dokázali jsme, že třídy ekvivalence $[a]_R$, $[b]_R$ se rovnají, právě když a, b jsou ekvivalentní vzhledem k R.

Třída A je relací ekvivalence rozdělena na disjunktní podtřídy tvaru $[a]_R$. S takovým rozdělením se dobře pracuje, pokud žádná třída ekvivalence není vlastní třídou, speciálně, je-li A množina.

5.37 Definice. Rozklad množiny. (i) Říkáme, že množina P je *rozkladem množiny A*, jestliže $\bigcup P = A$, $0 \notin P$ a libovolné dva různé prvky $u, v \in P$ jsou disjunktní.

(ii) Je-li $R \subseteq A \times A$ relace ekvivalence na množině A, množinu

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}$$

nazýváme *faktorizací množiny A podle relace R* a zobrazení $F: A \longrightarrow A/R$, které každému $a \in A$ přiřadí $[a]_R$, nazýváme *kanonickým vnořením A do A/R*.

5.38 Věta. (i) *Je-li $R \subseteq A \times A$ relace ekvivalence na množině A, potom faktorizace A/R je rozkladem množiny A.*

(ii) *Je-li P rozkladem množiny A, pak existuje právě jedna relace R, která je ekvivalencí na množině A a $A/R = P$.*
Důkaz. (i) je důsledkem lemmatu 5.36.

(ii) Je-li P rozklad množiny A, definujme relaci R následovně:

$$R = \{\langle a, b\rangle : (\exists p \in P)(a \in p \,\&\, b \in p)\}.$$

Je zřejmé, že R je reflexivní a symetrická. Je-li $\langle a, b\rangle \in R$ a $\langle b, c\rangle \in R$, pak z disjunktnosti rozkladu P je zaručena existence $p \in P$ takového, že $a, b, c \in p$, tedy $\langle a, c\rangle \in R$ a R je tranzitivní. Z definice R je zřejmé, že $P = A/R$ a že R je jediná taková relace ekvivalence.

5.39 Definice. Zjemnění rozkladu. Říkáme, že rozklad P množiny A je *zjemněním rozkladu* Q a píšeme $P \ll Q$, jestliže ke každému $p \in P$ existuje $q \in Q$ takové, že $p \subseteq q$. Množinu všech rozkladů množiny A označíme $R(A)$.

5.40 Lemma. *Nechť $E(A) \subseteq \mathscr{P}(A \times A)$ je množina všech relací ekvivalence na množině A.*

(i) *Relace $\ll$ je uspořádání na množině $R(A)$.*

(ii) *Jsou-li R, S relace ekvivalence na A, potom*

$$R \subseteq S \leftrightarrow A/R \ll A/S,$$

to znamená, že zobrazení, které každé relaci ekvivalence R přiřadí rozklad A/R, je izomorfismus množin $E(A)$, $R(A)$ vzhledem k inkluzi a $\ll$.

Důkaz. (i) Přenecháváme jako cvičení. (ii) Uvědomme si, že jsou-li R, S relace ekvivalence, pak $R \subseteq S$ implikuje, že $[a]_R \subseteq [a]_S$ platí pro každé $a \in A$ a naopak.

5.41 Věta. (i) *Množina $E(A)$ všech relací ekvivalence na množině A je úplný svaz při uspořádání inkluzí.*

(ii) *Množina $R(A)$ všech rozkladů množiny A je úplný svaz při uspořádání $\ll$.*

Důkaz. (i) Nejprve ukážeme, že průnik libovolné množiny relací ekvivalence na A je relace ekvivalence na A. Nechť $E \subseteq E(A)$ a $Q = \bigcap E$, ukážeme například, že Q je reflexivní na množině A. Pro libovolný prvek $a \in A$ a libovolnou relaci $S \in E$ z reflexivity S vyplývá $\langle a, a\rangle \in S$. Tedy také $\langle a, a\rangle \in Q$ a Q je reflexivní. Podobným způsobem se ukáže, že Q je relace ekvivalence na A. Je zřejmé, že Q je infimem množiny E vzhledem k inkluzi. Je-li $D \subseteq E(A)$ libovolná množina relací ekvivalence, nechť

$$E = \{R: R \in E(A) \,\&\, (\forall S \in D)(S \subseteq R)\}.$$

Uvědomme si, že E je neprázdná množina, protože $A \times A \in E$. Položíme-li $Q = \bigcap E$, pak Q je relace ekvivalence. Zřejmě Q je nejmenší prvek množiny E vzhledem k inkluzi, a tedy Q je supremum množiny D. Tvrzení (ii) je důsledkem (i) a lemmatu 5.40(ii).

5.42 Srovnávání velikosti množin. Inkluze nabízí nejjednodušší způsob srovnávání velikosti: Je-li $x \subseteq y$, potom x má nejvýše tolik prvků jako množina y. Víme, že inkluze je relace uspořádání na univerzální třídě $\mathbf{V}$, ale není to lineární uspořádání. Mnoho párů množin je neporovnatelných. Tuto nevýhodu lze do značné míry (a s axiomem výběru úplně) vyloučit, využijeme-li prostá zobrazení.

Zavedeme dvě velmi důležité relace pro srovnávání velikosti množin a seznámíme se s jejich vlastnostmi.

5.43 Definice. Srovnávání mohutnosti. (i) Říkáme, že *množiny* x, y *mají stejnou mohutnost* a píšeme $x \approx y$, jestliže existuje prosté zobrazení množiny x na množinu y.

(ii) Říkáme, že množina x *má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny* y a píšeme $x \preccurlyeq y$, jestliže existuje prosté zobrazení množiny x do množiny y. Je-li $x \preccurlyeq y$ a neexistuje prosté zobrazení množiny x na množinu y, píšeme $x \prec y$ a říkáme, že množina x *má menší mohutnost než množina* y.

5.44 Je zřejmé, že je-li $x \subseteq y$, potom $x \preccurlyeq y$, protože identické zobrazení $\mathbf{Id} \mid x$ zobrazuje množinu x prostě do y. Relace $\preccurlyeq$ je tedy zobecněním pojmu inkluze. V § 7 ukážeme, že axiom výběru je ekvivalentní s tvrzením, že relace $\preccurlyeq$ je trichotomická. Na druhé straně, je-li $x \subset y$, potom $x \preccurlyeq y$, ale nemusí platit $x \prec y$.

5.45 Příklad. Uvažujme množinu ω všech přirozených čísel a množinu $\omega - \{0\}$ všech kladných přirozených čísel. Zobrazení f definované předpisem $f(n) = n + 1$ pro $n \in \omega$ je prosté a zobrazuje ω na $\omega - \{0\}$. Obě množiny tedy mají stejnou mohutnost, i když je jedna vlastní podmnožinou druhé.

5.46 Lemma.

(i) $x \approx x$,

(ii) $x \approx y \rightarrow y \approx x$,

(iii) $(x \approx y \,\&\, y \approx z) \rightarrow x \approx z$,

(iv) $x \preccurlyeq x$,

(v) $(x \preccurlyeq y \,\&\, y \preccurlyeq z) \rightarrow x \preccurlyeq z$.

Důkaz. Identické zobrazení $f = \mathbf{Id} \mid x$ zaručuje ekvivalenci (i) a subvalenci (iv). (ii) Je-li f prosté zobrazení x na y, potom f^{-1} je prosté zobrazení y na x. (iii) Je-li f prosté zobrazení x na y a g je prosté zobrazení y na z, potom gf je prosté zobrazení x na z podle 4.30(i). Podobně se dokáže (v).

5.47 Tvrzení (i)–(iii) lemmatu 5.46 ukazují, že relace $\approx$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Je to relace ekvivalence na univerzální třídě. Podle 5.36 určuje rozklad univerzální třídy na třídy ekvivalence takové, že libovolné dvě množiny z téže třídy ekvivalence lze na sebe vzájemně jednoznačně zobrazit a mezi množinami z různých tříd takové zobrazení neexistuje.

Relace $\preccurlyeq$ je reflexivní a tranzitivní podle tvrzení (iv) a (v). Není však slabě antisymetrická: pro kterékoli dvě různé jednoprvkové množiny $\{a\}$, $\{b\}$ platí $\{a\} \preccurlyeq \{b\}$ i $\{b\} \preccurlyeq \{a\}$, ale $\{a\} \neq \{b\}$. Na rozdíl od relace inkluze, kterou zobecňuje, relace $\preccurlyeq$ není uspořádání na univerzální třídě. Jak uvidíme později, je to lineární uspořádání na třídě kardinálních čísel.

Z definice ekvivalence je zřejmé, že pro libovolné dvě množiny platí

$$x \approx y \rightarrow (x \preccurlyeq y \ \& \ y \preccurlyeq x),$$

ukážeme, že platí i obrácená implikace.

5.48 Věta (Cantor, Bernstein).

$$(x \preccurlyeq y \ \& \ y \preccurlyeq x) \rightarrow x \approx y .$$

Je-li mohutnost množiny x menší nebo rovna mohutnosti množiny y a naopak, potom x a y mají stejnou mohutnost.

Důkaz. Nechť f je prosté zobrazení množiny x do y a g je prosté zobrazení množiny y do množiny x. Zobrazení f a g určují podle 4.34 dvě zobrazení mezi potencemi $\mathscr{P}(x)$ a $\mathscr{P}(y)$, která jsou monotónní vzhledem k inkluzi. S jejich pomocí budeme definovat zobrazení $H: \mathscr{P}(x) \longrightarrow \mathscr{P}(x)$ tak, že položíme

$$H(u) = x - g[y - f[u]] \qquad \text{pro každé} \quad u \subseteq x .$$

Snadno se ověří, že H je také monotónní vzhledem k inkluzi, to znamená, že pro libovolné $u \subseteq v \subseteq x$ platí $H(u) \subseteq H(v)$. Později ukážeme, že každé zobrazení $\mathscr{P}(x)$ do $\mathscr{P}(x)$, které je monotónní vzhledem k inkluzi, má pevný bod. To znamená, že existuje podmnožina $c \subseteq x$, pro kterou platí $H(c) = c$.

Předpokládejme na chvíli, že podmnožina $c \subseteq x$ je pevným bodem zobrazení H. Tedy

$$c = H(c) = x - g[y - f[c]],$$

odkud dostáváme

$$x - c = g[y - f[c]] .$$

Přitom g je prosté zobrazení množiny y do x a podle předchozí rovnosti je $x - c$ obrazem podmnožiny $y - f[c]$. Odtud plyne, že $g^{-1} \upharpoonright x - c$ je prosté zobrazení množiny $x - c$ na množinu $y - f[c]$. Položíme-li

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro} \quad a \in c , \\ g^{-1}(a) & \text{pro} \quad a \in x - c , \end{cases}$$

potom h je hledané prosté zobrazení množiny x na y.

Důkaz Cantorovy–Bernsteinovy věty bude úplný, dokážeme-li následující tvrzení.

5.49 Lemma. *Je-li H zobrazení $\mathscr{P}(x)$ do $\mathscr{P}(x)$, které je monotónní vzhledem k inkluzi, potom existuje množina $c \subseteq x$ taková, že $H(c) = c$.*

Důkaz. Uvažujme množinu

$$C = \{u \subseteq x : u \subseteq H(u)\}$$

a položme $c = \bigcup C$. Potom $c \subseteq x$ a pro každé $u \in C$ platí $u \subseteq c$. Z monotónnosti zobrazení H dostáváme

$$u \subseteq H(u) \subseteq H(c) \qquad \text{pro každé} \quad u \in C,$$

odkud plyne $c = \bigcup C \subseteq H(c)$. Znovu využijeme monotónnost zobrazení H a dostáváme $H(c) \subseteq H(H(c))$. To znamená, že $H(c)$ je také prvkem množiny C a z definice sumy dostáváme $H(c) \subseteq c$. Ukázali jsme, že $H(c) = c$ a c je pevným bodem zobrazení H.

5.50 Příklad. (a) Ukážeme, že množina ω všech přirozených čísel je ekvivalentní množině všech uspořádaných dvojic přirozených čísel. Snadno se sestrojí prosté zobrazení f množiny ω do $\omega \times \omega$: stačí položit $f(n) = \langle 0, n \rangle$ pro každé $n \in \omega$. Definujeme-li pro $m, n \in \omega$ zobrazení g vztahem $g(m, n) = 2^m . 3^n$, z jednoznačnosti prvočíselných rozkladů vyplývá, že g je prosté zobrazení $\omega \times \omega$ do ω. Podle věty Cantorovy–Bernsteinovy existuje prosté zobrazení množiny ω na $\omega \times \omega$. V tomto případě lze takové zobrazení jednoduše popsat. Definujeme-li zobrazení $h(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$, není obtížné ukázat, že h je prosté zobrazení $\omega \times \omega$ na ω.

(b) Označíme-li $[\omega]^2$ množinu všech dvojic přirozených čísel, to znamená množinu všech dvouprvkových podmnožin $\{m, n\} \subseteq \omega$, potom s malou změnou zobrazení f z odstavce (a) pomocí věty Cantorovy–Bernsteinovy dokážeme existenci prostého zobrazení h množiny ω na $[\omega]^2$. Čtenář se může pokusit sestrojit prosté zobrazení ω na $[\omega]^2$.

Nyní ukážeme několik tvrzení o ekvivalenci množin, která budeme později potřebovat.

5.51 Lemma.

(i) $x \times y \approx y \times x$,
$x \times (y \times z) \approx (x \times y) \times z$,

(ii) $(x \approx x_1 \;\&\; y \approx y_1) \rightarrow (x \times y) \approx (x_1 \times y_1)$,

(iii) $x \approx y \rightarrow \mathcal{P}(x) \approx \mathcal{P}(y)$,

(iv) $\mathcal{P}(x) \approx {}^{x}2$, *kde* $2 = \{0, \{0\}\}$.

Důkaz. Tvrzení (i) a (ii) dokáže čtenář sám. (iii) plyne z lemmatu 4.35, kde je dokázáno, že $\mathcal{P}(x)$ a $\mathcal{P}(y)$ jsou dokonce izomorfní vzhledem k uspořádání inkluzí a izomorfismus zachovává operace sjednocení, průniku a rozdílu. (iv) Označíme-li množinu $\{0\}$ symbolem 1, pro každou podmnožinu $y \in \mathcal{P}(x)$ můžeme definovat charakteristickou funkci $i_y \in {}^{x}2$ předpisem

$$i_y(t) = \begin{cases} 1, & \text{je-li} \quad t \in y, \\ 0, & \text{je-li} \quad t \in x - y. \end{cases}$$

Snadno se ukáže, že zobrazení, které každé množině $y \subseteq x$ přiřazuje její charakteristickou funkci i_y, je prosté a zobrazuje $\mathcal{P}(x)$ na ${}^{x}2$.

5.52 Lemma.

(i) $$0 \neq x \preccurlyeq y \rightarrow {}^{x}u \preccurlyeq {}^{y}u,$$

(ii) $$u \preccurlyeq v \rightarrow {}^{y}u \preccurlyeq {}^{y}v,$$

(iii) $${}^{(x\times y)}u \approx {}^{x}({}^{y}u) \approx {}^{y}({}^{x}u),$$

(iv) jsou-li x, y disjunktní množiny, potom
$${}^{(x\cup y)}u \approx {}^{x}u \times {}^{y}u.$$

Důkaz. (i) Je-li $u = 0$, pak na pravé straně implikace jsou jen prázdné množiny a tvrzení platí. Nechť $u \neq 0$ a $a \in u$. Každé funkci $f\colon x \rightarrow u$ přiřadíme vzájemně jednoznačně nějakou funkci $\bar{f}\colon y \rightarrow u$. Nechť g je prosté zobrazení x do y a $y_1 = \operatorname{Rng}(g)$, položíme-li

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(g^{-1}(t)), & \text{je-li } t \in y_1, \\ a, & \text{je-li } t \in y - y_1, \end{cases}$$

potom zobrazení F, kde $F(f) = \bar{f}$, je prosté a zobrazuje množinu ${}^{x}u$ do ${}^{y}u$. Snadno se nahlédne, že je-li $x = 0$, $y \neq 0$ a $u = 0$, subvalence na pravé straně (i) nemůže platit.

(ii) Je-li h prosté zobrazení u do v, každé funkci $f\colon y \rightarrow u$ přiřaďme zobrazení $\bar{f} = hf$.

(iii) Pro libovolné zobrazení $f\colon x \times y \rightarrow u$ a prvek $a \in x$ definujme zobrazení $f_a\colon y \rightarrow u$, kde

$$f_a(t) = f(a, t) \qquad \text{pro} \quad t \in y.$$

Potom relace $r = \{\langle f, \{\langle a, f_a\rangle : a \in x\}\rangle : f \in {}^{(x\times y)}u\}$ je prosté zobrazení množiny ${}^{(x\times y)}u$ do ${}^{x}({}^{y}u)$. Je-li $g \in {}^{x}({}^{y}u)$, potom

$$f = \{\langle a, b, c\rangle : a \in x \mathbin{\&} \langle b, c\rangle \in g(a)\}$$

je vzorem g při zobrazení r. Tedy r je prosté zobrazení ${}^{(x\times y)}u$ na ${}^{x}({}^{y}u)$. Podobně se dokáže i druhá část tvrzení (iii).

(iv) Je-li f libovolné zobrazení množiny x do množiny u a g je libovolné zobrazení y do u, z disjunktnosti množin x, y plyne, že $h = f \cup g$ je zobrazení množiny $x \cup y$ do u. Je-li naopak h zobrazení z množiny $x \cup y$ do u, potom h určuje jednoznačně dvojici zobrazení $\langle f, g\rangle$, kde $f = h \mid x$ a $g = h \mid y$.

5.53 Důsledek.

(i) $$(x \approx y \mathbin{\&} u \approx v) \rightarrow {}^{x}u \approx {}^{y}v.$$

(ii) $$(0 \neq x \preccurlyeq y \mathbin{\&} u \preccurlyeq v) \rightarrow {}^{x}u \preccurlyeq {}^{y}v.$$

Důkaz tvrzení (iii) lemmatu 5.52 ukazuje, že každou funkci dvou nebo více proměnných lze vyjádřit funkcemi jedné proměnné, pokud připustíme, aby hodnotami funkce byla opět zobrazení.

§ 6 Konečné množiny, přirozená čísla a spočetné množiny

Zavedeme pojem konečné množiny a indukcí pro konečné množiny dokážeme, že třída všech konečných množin je uzavřená na základní množinové operace. Budeme definovat množinu ω všech přirozených čísel, dokážeme princip indukce pro přirozená čísla a ukážeme, že uspořádání přirozených čísel podle velikosti charakterizuje množinu ω až na izomorfismus. Nekonečné množiny se dělí na spočetné a nespočetné. Množina ω je prototypem spočetných množin.

Ukážeme, že množiny $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ všech celých a racionálních čísel jsou spočetné a že i uspořádání množiny $\mathbb{Q}$ má své charakteristické vlastnosti. Dokážeme také, že množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je nespočetná a že z toho plyne existence transcendentních reálných čísel. Zamyslíme se také nad charakterem existenčních důkazů v teorii množin. Na závěr ukážeme, že škála mohutností nekonečných množin je shora neomezená.

6.1 Konečné množiny. Řekneme-li „konečná množina", máme na mysli množinu s konečným počtem prvků. Zatím umíme sestrojit množiny, které mají daný konečný počet prvků (jeden, dva, sedm, sto). Chybí nám souhrnný pojem, který by se vztahoval na všechny konečné množiny.

Jedna z cest k pojmu konečné množiny vede oklikou přes přirozená čísla. Pro potřeby výkladu raději užijeme definici A. Tarského, která definuje konečnost množiny přímo z vlastností její potence. Přirozená čísla budeme definovat až později.

6.2 Definice. Konečné množiny (Tarski). Říkáme, že *množina x je konečná*, a píšeme $\operatorname{Fin}(x)$, jestliže každá neprázdná podmnožina $y \subseteq \mathscr{P}(x)$ má maximální prvek vzhledem k inkluzi.

Snadno se ověří, že prázdná množina a každá jednoprvková množina jsou konečné, protože $\mathscr{P}(0) = \{0\}$ má jedinou neprázdnou podmnožinu $y = \{0\}$ a její prvek je maximální vzhledem k inkluzi. Podobně $\mathscr{P}(\{x\}) = \{0, \{x\}\}$ má tři neprázdné podmnožiny a v každé z nich najdeme maximální prvek.

Je-li dána libovolná množina x, zobrazení d, které každé podmnožině $u \subseteq x$ přiřazuje její doplněk $d(u) = x - u$, je prosté, zobrazuje $\mathscr{P}(x)$ na $\mathscr{P}(x)$ a je klesající vzhledem k uspořádání inkluzí. Odtud plyne, že množina x je konečná, právě když každá neprázdná podmnožina $y' \subseteq \mathscr{P}(x)$ má minimální prvek vzhledem k inkluzi. Je-li dána podmnožina $y' \subseteq \mathscr{P}(x)$, přejdeme k množině $y = d[y']$, která sestává z doplňků všech množin z y'. Je zřejmé, že u' je minimální prvek množiny y', právě když $d(u')$ je maximální prvek množiny y a naopak.

Bezprostředním důsledkem definice konečných množin je následující tvrzení.

6.3 Věta. (i) *Je-li a konečná uspořádaná množina, potom každá neprázdná podmnožina $b \subseteq a$ má alespoň jeden maximální prvek a alespoň jeden minimální prvek.*

(ii) *Každé lineární uspořádání na konečné množině je dobré uspořádání a libovolná dvě lineární uspořádání na téže konečné množině jsou izomorfní.*

Důkaz. (i) Nechť a je uspořádána relací $<$ a b je její neprázdná podmnožina. Ukážeme, že existuje maximální prvek množiny b. Každý prvek $x \in a$ spolu s relací uspořádání určuje dolní podmnožinu

$$(\leftarrow, x] = \{y : y \in a \,\&\, y \leq x\}.$$

Nechť u je množina, která sestává ze všech dolních množin $(\leftarrow, x]$ pro $x \in b$. Potom u je neprázdná podmnožina potence $\mathscr{P}(a)$, a protože a je konečná množina, existuje prvek $m \in b$ takový, že $(\leftarrow, m]$ je maximální prvek množiny u vzhledem k inkluzi. Podle lemmatu 5.17 je m maximální prvek množiny b vzhledem k uspořádání $<$.

Uvažujeme-li místo dolních množin horní množiny

$$[x, \rightarrow) = \{y : y \in a \,\&\, x \leq y\},$$

stejným postupem dokážeme existenci minimálního prvku množiny b. K důkazu tvrzení (ii) stačí, uvědomíme-li si, že v lineárně uspořádané množině je minimální prvek totéž co nejmenší prvek.

Jsou-li r, s dvě lineární uspořádání na konečné množině a, jsou to dobrá uspořádání. Podle věty 5.31 je dobře uspořádaná množina $\langle a, r\rangle$ izomorfní s nějakou dolní podmnožinou $b \subseteq a$ při uspořádání s nebo dobře uspořádaná množina $\langle a, s\rangle$ je izomorfní s nějakou dolní podmnožinou b při uspořádání r. V obou případech mají množiny a, b stejnou mohutnost. Stačí, dokážeme-li $a = b$. To plyne z následujícího lemmatu.

6.4 Lemma. *Je-li a konečná množina, potom a má větší mohutnost než libovolná vlastní podmnožina $b \subset a$.*

Důkaz. Každá podmnožina $b \subseteq a$ má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny a. Stačí, dokážeme-li, že žádná vlastní podmnožina $b \subset a$ nemá stejnou mohutnost jako množina a. Dokazujeme sporem.

Předpokládejme, že existuje vlastní podmnožina $b \subset a$ taková, že $b \approx a$. Nechť $y \subseteq \mathscr{P}(a)$ je množina, která sestává ze všech takových podmnožin, y je tedy neprázdná a má minimální prvek vzhledem k inkluzi, protože množina a je konečná. Nechť $c \in y$ je minimální prvek množiny y. Podle definice množiny y je c vlastní podmnožinou množiny a a má s ní stejnou mohutnost. Je-li f prosté zobrazení množiny a

na c a $d = f[c]$, potom množiny a, c, d mají stejnou mohutnost. Přitom d je vlastní podmnožinou c, protože f je prosté zobrazení a d neobsahuje obrazy prvků z neprázdné množiny $a - c$. To je ve sporu s předpokladem, že c je minimální prvek množiny y. Žádná vlastní podmnožina $b \subset a$ nemá stejnou mohutnost jako a.

Ukážeme, že konečnost se zachovává při přechodu k podmnožinám a při prostých zobrazeních.

6.5 Lemma.

(i) $$(\mathrm{Fin}(x) \,\&\, y \subseteq x) \rightarrow \mathrm{Fin}(y),$$

(ii) $$(\mathrm{Fin}(x) \,\&\, x \approx y) \rightarrow \mathrm{Fin}(y),$$

(iii) $$(\mathrm{Fin}(x) \,\&\, y \preccurlyeq x) \rightarrow \mathrm{Fin}(y).$$

Důkaz. (i) Je-li x konečná a $y \subseteq x$, potom $\mathscr{P}(y) \subseteq \mathscr{P}(x)$ a každá neprázdná podmnožina $w \subseteq \mathscr{P}(y)$ má maximální prvek vzhledem k inkluzi. (ii) Je-li f prosté zobrazení x na y, podle lemmatu 4.35(ii) jsou potence $\mathscr{P}(x)$ a $\mathscr{P}(y)$ izomorfní vzhledem k uspořádání inkluzí, tedy y je také konečná množina. (iii) plyne z (i) a (ii).

6.6 Lemma.

(i) $$(\mathrm{Fin}(x) \,\&\, \mathrm{Fin}(y)) \rightarrow \mathrm{Fin}(x \cup y),$$

(ii) $$\mathrm{Fin}(x) \rightarrow (\forall y)\, \mathrm{Fin}(x \cup \{y\}).$$

Důkaz. (i) Nechť w je neprázdná podmnožina $\mathscr{P}(x \cup y)$. Ukážeme, že existuje maximální prvek $v \in w$. Položme

$$w_1 = \{u : (\exists t \in w)(u = t \cap x)\},$$

potom w_1 je neprázdná podmnožina $\mathscr{P}(x)$. Nechť v_1 je maximální prvek w_1 vzhledem k inkluzi. Položme dále

$$w_2 = \{u : (\exists t \in w)(t \cap x = v_1 \,\&\, t \cap y = u)\},$$

potom w_2 je neprázdná podmnožina $\mathscr{P}(y)$. Je-li $v_2 \in w_2$ maximální vzhledem k inkluzi, potom $v = v_1 \cup v_2$ je hledaný maximální prvek množiny w. Tvrzení (ii) plyne z (i), protože každá jednoprvková množina je konečná.

6.7 Definice. *Třída všech konečných množin*

$$\mathrm{Fin} = \{x : \mathrm{Fin}(x)\}.$$

Podle lemmatu 6.6 je třída Fin uzavřena na sjednocení dvou množin. Uvědomme si, že podle 6.5(i) je také uzavřena na průnik a rozdíl. Tvrzení (ii) lemmatu 6.6 naznačuje důležitou vlastnost třídy Fin, kterou nazveme princip indukce.

6.8 Věta. Princip indukce pro konečné množiny. *Je-li X třída, pro kterou platí*

(i) $$0 \in X,$$

(ii) $$x \in X \rightarrow (\forall y)(x \cup \{y\} \in X),$$

potom $\mathrm{Fin} \subseteq X$.

Důkaz. Předpokládejme, že X je třída, která splňuje obě podmínky věty, ale Fin není její podtřídou. Je-li x nějaký prvek třídy $\mathrm{Fin} - X$, definujme

$$w = \{v : v \subseteq x \,\&\, v \in X\}.$$

Podle (i) je $0 \in w$ a w je neprázdná podmnožina $\mathscr{P}(x)$. Nechť v_0 je maximální prvek w vzhledem k inkluzi. Tedy $v_0 \subseteq x$, ale $v_0 \neq x$, protože $v_0 \in X$. To znamená, že existuje nějaký prvek $y \in x - v_0$. Položíme-li $v_1 = v_0 \cup \{y\}$, potom $v_1 \in w$ a v_0 není maximální vzhledem k inkluzi — spor. Tedy $\mathrm{Fin} \subseteq X$ a věta je dokázána.

6.9 Lemma. $\mathrm{Fin}(x) \to \mathrm{Fin}(\mathscr{P}(x))$.

Důkaz. Použijeme principu indukce. Ukážeme-li, že třída $X = \{x : \mathrm{Fin}(\mathscr{P}(x))\}$ splňuje podmínky (i) a (ii) věty 6.8, potom $\mathrm{Fin} \subseteq X$ a lemma bude dokázáno. Víme, že $\mathscr{P}(0) = \{0\}$, a to je konečná množina, tedy $0 \in X$. Je-li $x \in X$ a y je libovolná množina, chceme ukázat, že $x \cup \{y\} \in X$. V případě, že $y \in x$, není co dokazovat, protože $x \cup \{y\} = x$. Předpokládejme, že $y \notin x$, a rozdělme potenci $\mathscr{P}(x \cup \{y\})$ na dvě části $\mathscr{P}(x)$ a $z = \mathscr{P}(x \cup \{y\}) - \mathscr{P}(x)$. To znamená, že množina z sestává ze všech podmnožin $v \subseteq x \cup \{y\}$, pro které platí $y \in v$. Snadno se ověří, že $\mathscr{P}(x) \approx z$, stačí, položíme-li $f(u) = \{y\} \cup u$ pro každé $u \in \mathscr{P}(x)$, potom f je prosté zobrazení $\mathscr{P}(x)$ na z. Podle předpokladu je $\mathscr{P}(x)$ konečná množina, takže z je konečná podle 6.5(ii) a $\mathscr{P}(x \cup \{y\})$ je konečná podle 6.6(ii). Ukázali jsme, že X splňuje obě podmínky principu indukce a lemma je dokázáno.

6.10 Důsledek. $(\mathrm{Fin}(x) \,\&\, \mathrm{Fin}(y)) \to \mathrm{Fin}(x \times y)$.

Důkaz. Položme $z = x \cup y$. Podle 6.6(i) je z konečná množina a podle 6.5(i) stačí, ukážeme-li, že $z \times z$ je konečná množina. Z důkazu 4.11 plyne, že $z \times z \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(z))$ a $z \times z$ je konečná množina podle lemmatu 6.9 a lemmatu 6.5(i).

6.11 Lemma. *Je-li a konečná množina a každý její prvek je také konečná množina, potom $\bigcup a$ je konečná množina. Jinými slovy, sjednocení konečně mnoha konečných množin je konečná množina.*

Důkaz. Použijeme princip indukce. Nechť

$$X = \{x : x \subseteq \mathrm{Fin} \,\&\, \mathrm{Fin}(\bigcup x)\}.$$

Snadno se nahlédne, že $0 \in X$. Je-li $x \in X$ a y je libovolná konečná množina, potom

$$\bigcup(x \cup \{y\}) = y \cup \bigcup x$$

a na pravé straně rovnosti je sjednocení dvou konečných množin. Podle 6.6(i) je $x \cup \{y\}$ také prvkem třídy X a tím je lemma dokázáno.

Ukážeme, že každá konečná množina je srovnatelná se všemi množinami.

6.12 Lemma. $\mathrm{Fin}(x) \to (\forall y)(x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)$.

Důkaz. Indukcí pro konečné množiny. Položme

$$X = \{x : (\forall y)(x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)\}$$

a ukážeme, že třída X splňuje obě podmínky principu indukce. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny, proto $0 \in X$. Nechť $x \in X$, u je libovolná množina a $z = x \cup \{u\}$. Chceme ukázat, že $z \in X$. Můžeme předpokládat, že u není prvkem množiny x. V opačném případě je $z = x$ a není co dokazovat. Nechť y je libovolná množina. Podle předpokladu je $x \preccurlyeq y$ nebo $y \preccurlyeq x$. Je-li $y \preccurlyeq x$, pak existuje prosté zobrazení f množiny y do x a f je také prosté zobrazení y do z, tedy $y \preccurlyeq z$. Zbývá případ $x \prec y$ (protože $x \approx y$ je zahrnuto v $y \preccurlyeq x$). Je-li g prosté zobrazení množiny x do y, pak existuje nějaký prvek $v \in y - \mathrm{Rng}(g)$, protože x a y nejsou ekvivalentní množiny. Položíme-li

$$h = g \cup \{\langle u, v\rangle\},$$

pak h je prosté zobrazení množiny z do y, takže $z \preccurlyeq y$. Pro libovolnou množinu y jsme ukázali, že $z \preccurlyeq y$ nebo $y \preccurlyeq z$, tedy $z \in X$. Podle věty 6.8 je $\mathrm{Fin} \subseteq X$ a lemma je dokázáno.

6.13 Přirozená čísla, množina ω. Popíšeme nyní konstrukci množiny ω všech přirozených čísel. S touto množinou jsme se již setkali v příkladech, zatím aniž bychom ji definovali.

Náznak induktivního vytváření přirozených čísel najdeme v důkazu lemmatu 5.51. Sestrojili jsme množiny 0, 1, 2, které můžeme chápat jako přirozená čísla nula, jedna a dvě. Základem konstrukce je jednoduchá myšlenka J. von Neumanna, že přirozené číslo je množina všech menších přirozených čísel. To znamená, že nule odpovídá prázdná množina, jednotce odpovídá $\{0\}$ a dvojce odpovídá $\{0, \{0\}\}$. Povšimněme si, že platí

$$\begin{aligned} 0 &= 0\,, \\ 1 &= 0 \cup \{0\}\,, \\ 2 &= 1 \cup \{1\}\,. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že stejným způsobem můžeme sestrojit množiny

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cup \{2\}\,, \\ 4 &= 3 \cup \{3\}\,, \end{aligned}$$

které odpovídají trojce nebo čtyřce, a že můžeme dojít ke kterémukoli napřed danému přirozenému číslu. Přitom nula je prázdná množina, jednotka je jednoprvková, dvojka dvouprvková a trojka tříprvková množina atd.

Zatím jsme ponechali stranou otázku, zda je možné definovat množinu všech přirozených čísel. Budeme ji definovat jako nejmenší „induktivní" množinu.

6.14 Definice. Induktivní množiny. Říkáme, že w je induktivní množina, jestliže platí

(7) $$0 \in w \mathbin{\&} (\forall v \in w)(v \cup \{v\} \in w)\,.$$

Uvědomme si, že axiom nekonečna postuluje existenci alespoň jedné induktivní množiny. To znamená, že třída všech induktivních množin je neprázdná a podle 3.13 je průnik této třídy množina. Tím je oprávněna následující definice.

6.15 Definice. Přirozená čísla. *Množinu všech přirozených čísel* označíme ω a definujeme ji vztahem

$$\omega = \bigcap \{w : w \text{ je induktivní}\} . \tag{8}$$

Prvky množiny ω nazýváme *přirozená čísla.* Uvědomme si, že množina všech přirozených čísel je podmnožinou každé induktivní množiny.

6.16 Lemma. *ω je nejmenší induktivní množina.*

6.17 Označení. Na množině ω definujeme zobrazení s tak, že pro každé přirozené číslo n položíme

$$s(n) = n \cup \{n\} .$$

Z lemmatu 6.16 vyplývá, že s zobrazuje množinu ω do sebe. Říkáme, že přirozené číslo $s(n)$ je *následníkem čísla n.*

6.18 Věta. Princip indukce pro přirozená čísla. *Je-li X množina přirozených čísel, pro kterou platí*

(i) $$0 \in X ,$$

(ii) $$x \in X \rightarrow s(x) \in X ,$$

potom $\omega = X$.

Důkaz. Splňuje-li nějaká množina X obě podmínky věty, potom X je induktivní a $\omega \subseteq X$ plyne z lemmatu 6.16. Tím je věta dokázána.

Chceme-li dokázat, že nějaké tvrzení $\varphi(n)$ platí pro každé přirozené číslo n, podle předchozí věty stačí, dokážeme-li, že tvrzení platí pro nulu a že pro každé přirozené n lze z předpokladu $\varphi(n)$ dokázat $\varphi(s(n))$. Tento postup se nazývá důkaz indukcí.

6.19 Lemma. *Pro libovolná dvě přirozená čísla m, n platí*

(i) $$n \in \omega \rightarrow n \subseteq \omega ,$$

(ii) $$m \in n \rightarrow m \subseteq n ,$$

(iii) $$n \notin n .$$

Důkaz indukcí. (i) Je zřejmé, že tvrzení (i) platí pro nulu, protože prázdná množina je podmnožinou každé množiny. Předpokládejme, že tvrzení (i) platí pro přirozené číslo n. To znamená, že $n \subseteq \omega$, odkud plyne $s(n) = n \cup \{n\} \subseteq \omega$. Podle věty 6.18 tvrzení (i) platí pro každé přirozené číslo n.

(ii) Postupujeme indukcí podle n. Nechť

$$X = \{n : n \in \omega \;\&\; (\forall m)(m \in n \rightarrow m \subseteq n)\} .$$

Snadno se nahlédne, že $0 \in X$. Nechť n je libovolný prvek množiny X. Ukážeme, že $s(n) \in X$. Nechť m je libovolný prvek z $s(n)$. To znamená, že $m \in n$ nebo $m = n$. V obou případech platí $m \subseteq n$ (v prvním případě to plyne z předpokladu $n \in X$). Uvědomme si, že $n \subseteq s(n)$, a dostáváme $s(n) \in X$. Tím je (ii) dokázáno.

(iii) Prázdná množina nemá žádný prvek, proto (iii) platí pro nulu. Předpokládejme, že n je přirozené číslo a $n \notin n$. Kdyby platilo $s(n) \in s(n)$, potom buď $s(n) \in n$, nebo $s(n) = n$. V obou případech dostáváme inkluzi $s(n) = n \cup \{n\} \subseteq n$ (v prvním případě užijeme (ii)), ze které odvodíme $n \in n$. To je ve sporu s předpokladem $n \notin n$. Proto $s(n) \notin s(n)$ a (iii) je dokázáno pro všechna přirozená čísla.

6.20 Věta. (i) *Každé přirozené číslo je konečná množina.*

(ii) *Množina x je konečná, právě když má stejnou mohutnost jako nějaké přirozené číslo.*

(iii) *Množina ω a každá induktivní množina je nekonečná.*

Důkaz. (i) Postupujeme indukcí. Prázdná množina je konečná, a proto tvrzení (i) platí pro nulu. Je-li číslo n konečná množina, potom jeho následník $s(n)$ je také konečná množina podle lemmatu 6.6(ii).

(ii) Má-li množina x stejnou mohutnost jako nějaké přirozené číslo, potom x je konečná množina podle (i) a lemmatu 6.5(ii). Indukcí pro konečné množiny dokážeme, že každá konečná množina má stejnou mohutnost jako nějaké přirozené číslo. Položme

$$X = \{x : (\exists n \in \omega)(x \approx n)\},$$

potom $0 \in X$. Je-li $x \approx n$, kde n je přirozené číslo, a y je libovolná množina, potom $x \cup \{y\}$ má stejnou mohutnost jako n nebo $s(n)$ podle toho, zda y je či není prvkem konečné množiny x. Podle věty 6.8 je každá konečná množina prvkem X a tvrzení (ii) je dokázáno.

(iii) Podle lemmatu 6.19(i) je $\omega \subseteq \mathscr{P}(\omega)$, ale žádný prvek $n \in \omega$ není maximální vzhled k inkluzi, protože $n \subset s(n)$ podle 6.19(iii). Víme, že ω je podmnožinou každé induktivní množiny, podle lemmatu 6.5(i) musí být každá induktivní množina nekonečná.

6.21 Tvrzení 6.20(iii) nahrazuje intuitivní zdůvodnění axiomu nekonečna, které jsme uvedli v § 2. Axiom nekonečna postuluje existenci alespoň jedné induktivní množiny a ta je nekonečná.

Dá se ukázat, že nahradíme-li axiom nekonečna jeho negací, pak vznikne teorie, v níž lze dokázat tvrzení „každá množina je konečná". Takovou teorii nazýváme *teorie konečných množin*.

6.22 Lemma. *Pro libovolná přirozená čísla m, n platí*

(i) $$m \in n \leftrightarrow m \subset n,$$

(ii) $$m \in n \vee m = n \vee m \ni n.$$

Důkaz. (i) Implikace zleva doprava je důsledkem 6.19(ii) a faktu $m \notin m$. Obrácenou implikaci dokážeme indukcí podle n. Je zřejmé, že tvrzení platí pro $n = 0$ a libovolné m. Předpokládejme, že (i) platí pro nějaké n a každé m. Nechť $m \subset s(n)$. Nejprve ukážeme, že $m \subseteq n$. Kdyby $n \in m$, pak z 6.19(ii) dostáváme $n \subseteq m$ a nakonec $s(n) \subseteq m$ – to je ve sporu s předpokladem, že m je vlastní podmnožinou $s(n)$. Tedy $n \notin m$ a $m \subseteq n$. Je-li $m \subset n$, pak $m \in n$ (a $m \in s(n)$) dostáváme z indukčního předpokladu. Je-li $m = n$, pak také $m \in s(n)$. Ukázali jsme, že obrácená implikace platí i pro $s(n)$, a tvrzení (i) je dokázáno pro všechna přirozená čísla.

(ii) Pro každé přirozené číslo n nechť $A(n)$ označuje množinu všech přirozených čísel m, pro která platí

(1) $$m \in n \vee m = n \vee m \ni n\,.$$

Stačí, dokážeme-li, že každá množina $A(n)$ je induktivní. Začneme s množinou $A(0)$. Z rovnosti $0 = 0$ dostáváme $0 \in A(0)$. Je-li $m \in A(0)$, potom buď $0 = m$, nebo $0 \in m$. V obou případech platí $0 \in s(m)$. Takže $s(m) \in A(0)$ a množina $A(0)$ je induktivní. To znamená, že každé přirozené číslo n je prvkem množiny $A(0)$. Protože čísla m, n vystupují v (1) symetricky, dostáváme hned, že nula je prvkem každé množiny $A(n)$. Nechť n je libovolné přirozené číslo a $m \in A(n)$. Ukážeme, že také $s(m) \in A(n)$. Podle indukčního předpokladu platí (1). Rozebereme jednotlivé případy. Je-li $m \in n$, potom podle (i) je $s(m) \subseteq n$, a to (opět podle (i)) znamená, že $s(m) \in n$ nebo $s(m) = n$. Je-li $m = n$ nebo $m \ni n$, potom $s(m) \ni n$. Ukázali jsme, že platí

$$s(m) \in n \vee s(m) = n \vee s(m) \ni n\,.$$

To znamená, že $s(m) \in A(n)$. Každá množina $A(n)$ je induktivní a tvrzení (ii) platí pro libovolná dvě přirozená čísla.

6.23 Věta. (i) *Množina všech přirozených čísel je dobře uspořádána relací* $\in$.

(ii) *Je-li A nekonečná množina, lineárně uspořádaná relací $<$ tak, že pro každé $a \in A$ je dolní množina $(\leftarrow, a]$ konečná, potom $<$ je dobré uspořádání množiny A a množina A je izomorfní s ω vzhledem k uspořádáním $<$ a $\in$.*

Důkaz. (i) Podle lemmatu 6.19(iii) je relace $\in$ antireflexivní na ω. Z tvrzení (ii) téhož lemmatu plyne, že $\in$ je na ω také tranzitivní: Jsou-li l, m, n přirozená čísla taková, že $l \in m$ a $m \in n$, potom $m \subseteq n$, a tedy $l \in n$. Podle 6.22(ii) je relace $\in$ trichotomická na ω. Relace $\in$ je tedy lineární uspořádání na množině všech přirozených čísel. Ukážeme, že je to dobré uspořádání. Nechť a je neprázdná množina přirozených čísel. Zvolme libovolně $n \in a$. Pokud n není nejmenší prvek množiny a vzhledem k uspořádání $\in$, pak $b = a \cap n$ je neprázdná konečná podmnožina množiny a. Podle věty 6.3(ii) existuje nejmenší prvek m množiny b. Snadno se ověří, že m je také nejmenší prvek množiny a.

(ii) Nejprve ukážeme, že $<$ je dobré uspořádání. Je-li a neprázdná podmnožina množiny A, zvolme libovolně nějaký prvek $n \in a$. Pokud n není nejmenší prvek množiny a, pak $b = a \cap (\leftarrow, n]$ je neprázdná podmnožina množiny a. Podle předpokladu je to konečná množina a podle věty 6.3(ii) existuje nejmenší prvek m množiny b. Snadno se ověří, že m je také nejmenší prvek množiny a.

Víme, že obě množiny A i ω jsou nekonečné a že jsou dobře uspořádané relacemi $<$ a $\in$. Podle věty 5.31 je buď množina A izomorfní s nějakou dolní (vzhledem k uspořádání $\in$) množinou $B \subseteq \omega$, nebo ω je izomorfní s nějakou (vzhledem k uspořádání $<$) dolní množinou $C \subseteq A$. Rozebereme podrobně první případ. Množina B není shora omezena žádným přirozeným číslem n, protože potom by platilo $B \subseteq n$ a A by byla konečná množina. To znamená, že každé přirozené číslo n je menší než nějaký prvek množiny B a $n \in B$, protože B je dolní množina. Ukázali jsme, že $B = \omega$ Stejným způsobem se ve druhém případě dokáže, že $C = A$. Množina A je tedy izomorfní s množinou ω.

6.24 Přirozená čísla v teorii množin. V teorii množin jsme popsali konstrukci množiny ω a ukázali jsme, že každé konkrétní přirozené číslo, například dvě, tři, sedmnáct, sto atd., má v množině svůj protějšek, který má právě tolik prvků. Dvojce odpovídá dvouprvková množina, trojce tříprvková atd. Množina ω je dobře uspořádaná relací $\in$ a snádno se nahlédne, že v tomto uspořádání za číslem n bezprostředně následuje číslo $s(n)$. Ukázali jsme, že pro prvky množiny ω platí princip indukce, který se považuje za pravdivé tvrzení o přirozených číslech. Později uvidíme, že na množině ω lze definovat operace součtu a součinu a s jejich pomocí lze zavést i další pojmy aritmetiky přirozených čísel (operaci mocnění, dělitelnost, prvočísla apod.) a dokázat o nich všechna tvrzení, která známe z elementární aritmetiky.

Z těchto důvodů můžeme považovat množinu ω za vyjádření pojmu přirozeného čísla prostředky teorie množin. Uvědomme si však (Richardův paradox!), že přirozená čísla, o kterých se mluví v metajazyce ve slovních spojeních jako „formule φ má méně než n symbolů", nejsou objekty teorie množin a nemůžeme je považovat za prvky množiny ω. Abychom zdůraznili tento rozdíl, říkáme, že prvky množiny ω jsou *přirozená čísla v teorii množin*.

Zamysleme se ještě nad skutečností, že v teorii množin můžeme množinu všech přirozených čísel definovat jedním krokem, a nad úlohou, jakou v tom hraje axiom nekonečna. Ten postuluje existenci alespoň jedné induktivní množiny a tím dovoluje definovat množinu ω „shora" jako průnik všech induktivních množin. Srovnejme to s vytvářením přirozených čísel „zdola" krok za krokem od nuly postupným přičítáním jednotky a uvědomíme si rozdíl mezi aktuální a potenciální formou nekonečna. Nekonečné množiny jsou aktuální formou nekonečna v teorii množin.

6.25 Spočetné množiny. Přirozená čísla jsou měřítkem velikosti konečných množin — ke každé konečné množině existuje přirozené číslo stejné mohutnosti. Množina všech přirozených čísel je nekonečná. Použijeme ji ke srovnávání velikostí nekonečných množin.

6.26 Definice. Spočetné a nespočetné množiny. (i) Říkáme, že *množina x je spočetná*, má-li stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel.

(ii) Říkáme, že *množina x je nejvýše spočetná*, je-li x konečná nebo spočetná množina. V opačném případě říkáme, že x je *nespočetná množina.*

Uvědomme si, že spočetné a nespočetné množiny jsou nekonečné a že každá množina, která má spočetnou nebo nespočetnou podmnožinu, je nekonečná podle 6.5(i).

6.27 Věta. (i) *Každá shora omezená podmnožina* $A \subseteq \omega$ *je konečná a každá shora neomezená podmnožina množiny* ω *je spočetná.*

(ii) *Každá podmnožina spočetné množiny je nejvýš spočetná.*

Důkaz. (i) Je-li A shora omezena přirozeným číslem n, potom $A \subseteq s(n)$ a A je konečná podle 6.20(i). Nechť A je neomezená množina přirozených čísel. Množina A nemůže být konečná, protože potom by podle věty 6.3 měla největší prvek. A je tedy nekonečná, je dobře uspořádaná a pod každým $a \in A$ je jenom konečně mnoho předchůdců. Podle věty 6.23 je množina A spočetná.

(ii) Nechť A je spočetná množina a f je prosté zobrazení množiny A na ω. Podle (i) je podmnožina $B \subseteq A$ konečná nebo spočetná podle toho, zda $f[B]$ je shora omezená nebo neomezená podmnožina množiny ω.

6.28 Příklady. Uvažujme množinu $\omega \times \omega$ a definujme na ní relaci $<$ následujícím způsobem:

$$\langle m_1, n_1 \rangle < \langle m_2, n_2 \rangle \leftrightarrow (m_1 \in m_2 \vee (m_1 = m_2 \,\&\, n_1 \in n_2)) .$$

Snadno se ověří, že $<$ je ostré lineární uspořádání na množině $\omega \times \omega$. Nazýváme ho *lexikografické uspořádání*, protože je obdobou způsobu, jakým se uspořádávají slova ve slovníku: Nejprve porovnáváme první složky uspořádaných dvojic a v případě rovnosti porovnáváme druhé složky.

a) Relace $<$ je lineární uspořádání na podmnožině $\omega \times 2 \subseteq \omega^2$ a počáteční úsek tohoto uspořádání vypadá takto:

$$\langle 0,0 \rangle < \langle 0,1 \rangle < \langle 1,0 \rangle < \langle 1,1 \rangle < \langle 2,0 \rangle < \langle 2,1 \rangle \ldots$$

Pro libovolné dvojice $\langle k, l \rangle$ a $\langle m, n \rangle$ z $\omega \times 2$ platí

$$\langle k, l \rangle < \langle m, n \rangle \rightarrow \langle k, l \rangle \in s(m) \times 2 .$$

To znamená, že každý prvek množiny $\omega \times 2$ má jenom konečný počet předchůdců v lexikografickém uspořádání. Množina $\omega \times 2$ je podle věty 6.23(ii) izomorfní s ω, tedy $\omega \times 2$ je spočetná množina. Stejným způsobem se dokáže, že pro každé přirozené číslo n je $\omega \times n$ také spočetná množina.

Na druhé straně lexikografické uspořádání množiny $\omega \times \omega$ není izomorfní s ω, protože prvek $\langle 1, 0 \rangle$ (a každý větší) má nekonečně mnoho předchůdců. Ukážeme, že malou úpravou lexikografického uspořádání dosáhneme toho, že $\omega \times \omega$ a ω budou izomorfní.

(b) *Maximo-lexikografické uspořádání.* Nechť $\max(m, n)$ označuje větší z přirozených čísel m, n. Na $\omega \times \omega$ definujme relaci $\lessdot$:

$$\langle m_1, n_1 \rangle \preccurlyeq \langle m_2, n_2 \rangle \leftrightarrow (\max(m_1, n_1) \in \max(m_2, n_2) \vee (\max(m_1, n_1) = \\ = \max(m_2, n_2) \,\&\, \langle m_1, n_1 \rangle < \langle m_2, n_2 \rangle)).$$

Je zřejmé, že $\langle 0, 0 \rangle$ je nejmenší prvek $\omega \times \omega$ při maximo-lexikografickém uspořádání $\preccurlyeq$ a že počáteční úsek uspořádání vypadá

$$\langle 0,0 \rangle \preccurlyeq \langle 0,1 \rangle \preccurlyeq \langle 1,0 \rangle \preccurlyeq \langle 1,1 \rangle \preccurlyeq \langle 0,2 \rangle \preccurlyeq \langle 1,2 \rangle \preccurlyeq \\ \preccurlyeq \langle 2,0 \rangle \preccurlyeq \langle 2,1 \rangle \preccurlyeq \langle 2,2 \rangle \preccurlyeq \langle 0,3 \rangle \preccurlyeq \ldots$$

Ponecháme čtenáři, aby rozborem jednotlivých případů ověřil, že $\preccurlyeq$ je lineární uspořádání na $\omega \times \omega$. Z definice uspořádání je zřejmé, že pro libovolné dvojice $\langle k, l \rangle$ a $\langle m, n \rangle$ platí

$$\langle k, l \rangle \preccurlyeq \langle m, n \rangle \rightarrow \langle k, l \rangle \in t \times t,$$

kde $t = s(\max(m, n))$. Každý prvek $\langle m, n \rangle$ má jenom konečně mnoho předchůdců vzhledem k uspořádání $\preccurlyeq$. Podle věty 6.23(ii) je $\omega \times \omega$ izomorfní s ω vzhledem k uspořádáním $\preccurlyeq$ a $\in$. Podali jsme nový důkaz, že $\omega \times \omega$ je spočetná množina.

(c) Nechť $[\omega]^{<\omega}$ označuje množinu všech konečných množin přirozených čísel. Jsou-li x, y dvě různé konečné množiny z $[\omega]^{<\omega}$, potom jejich *symetrický rozdíl*

$$x \triangle y = (x - y) \cup (y - x)$$

je neprázdná konečná množina. Podle věty 6.3 existuje její největší prvek vzhledem k uspořádání $\in$. Označme ho $\max(x \triangle y)$ a uvědomme si, že patří buď do x, nebo do y, ale není prvkem obou množin současně.

Pro konečné množiny x, y přirozených čísel definujeme relaci $\lhd$ předpisem

(2) $$x \lhd y \leftrightarrow (x \neq y \,\&\, \max(x \triangle y) \in y).$$

Z definice je zřejmé, že $\lhd$ je antireflexivní relace a že pro libovolné dvě konečné množiny x, y platí

$$x \lhd y \vee x = y \vee y \lhd x,$$

to znamená, že $\lhd$ je trichotomická na $[\omega]^{<\omega}$. Dokážeme, že $\lhd$ je tranzitivní relace. Nechť x, y, z jsou konečné množiny přirozených čísel takové, že $x \lhd y$ a $y \lhd z$. Označme $m_1 = \max(x \triangle y)$ a $m_2 = \max(y \triangle z)$. Z předpokladu $x \lhd y$ vyplývá, že $m_1 \in y - x$ a že pro každé přirozené číslo n platí

(3) $$m_1 \in n \rightarrow (n \in x \rightarrow n \in y),$$

protože m_1 je největší prvek symetrického rozdílu množin x, y.

Podobně z předpokladu $y \lhd z$ vyplývá, že $m_2 \in z - y$ a že

(4) $$m_2 \in n \rightarrow (n \in y \leftrightarrow n \in z)$$

platí pro každé přirozené číslo n. Přitom m_1, m_2 jsou různá čísla, protože m_1 je a m_2 není prvkem množiny y. Protože $\in$ je dobré uspořádání na množině ω, platí buď $m_1 \in m_2$, nebo $m_2 \in m_1$. Rozebereme oba případy.

Je-li $m_1 \in m_2$, víme, že $m_2 \in z$ a že je to největší prvek symetrického rozdílu $z \triangle y$. Podle (3) je m_2 také největší prvek množiny $z \triangle x$, tedy $x \lhd z$.

Je-li $m_2 \in m_1$, víme, že $m_1 \in y$ a že m_1 je největší prvek symetrického rozdílu $x \triangle y$. Podle (4) je $m_1 \in z$ a je to největší prvek $x \triangle z$, tedy opět $x \lhd z$.

Ukázali jsme, že $\lhd$ je lineární uspořádání na množině $[\omega]^{<\omega}$. Je zřejmé, že prázdná množina je nejmenší prvek při uspořádání $\lhd$. Je-li y neprázdná konečná množina přirozených čísel a n je její největší prvek, z definice (2) vyplývá, že pro libovolnou konečnou množinu x přirozených čísel platí

$$x \lhd y \rightarrow x \in \mathscr{P}(s(n)).$$

Podle 6.9 je na pravé straně implikace konečná množina. Každá konečná množina y přirozených čísel má jenom konečně mnoho předchůdců v uspořádání $\lhd$. Podle věty 6.23(ii) je $\lhd$ dobré uspořádání množiny $[\omega]^{<\omega}$ a je izomorfní s uspořádáním množiny ω. Množina $[\omega]^{<\omega}$ je tedy spočetná.

6.29 Věta. *Jsou-li A, B spočetné množiny, potom $A \cup B$ i $A \times B$ jsou spočetné množiny.*

Důkaz. Nechť f je prosté zobrazení množiny A na ω, g je prosté zobrazení B na ω. Položíme-li

$$h(x) = \begin{cases} \langle f(x), 0 \rangle, & \text{je-li } x \in A, \\ \langle g(x), 1 \rangle, & \text{je-li } x \in B - A, \end{cases}$$

pak h je prosté zobrazení množiny $A \cup B$ do spočetné množiny $\omega \times 2$. $A \cup B$ je tedy spočetná podle 6.27(ii).

Položíme-li pro libovolné $a \in A$ a $b \in B$

$$k(\langle a, b \rangle) = \langle f(a), g(b) \rangle,$$

potom k je prosté zobrazení množiny $A \times B$ na spočetnou množinu $\omega \times \omega$.

Indukcí se dokáže

6.30 Důsledek. *Je-li I neprázdná konečná množina a je-li každá množina A_i pro $i \in I$ spočetná, potom*

$$\bigcup_{i \in I} A_i, \qquad \bigtimes_{i \in I} A_i$$

jsou spočetné množiny.

6.31 Věta. *Je-li A spočetná množina, potom*

(i) *množina $[A]^{<\omega}$ všech konečných podmnožin množiny A je spočetná,*

(ii) *množina ${}^{<\omega}A$ všech konečných posloupností prvků množiny A je spočetná.*

Důkaz. (i) Nechť f je prosté zobrazení množiny A na ω. Položíme-li

$$f^{\rightarrow}(a) = f[a]$$

pro každou konečnou podmnožinu $a \subseteq A$, podobně jako v 4.35(ii) se dokáže, že $f^{\rightarrow}$ je prosté zobrazení množiny $[A]^{<\omega}$ na množinu $[\omega]^{<\omega}$, která je spočetná podle příkladu 6.28(c).

(ii) Konečné posloupnosti prvků množiny A jsou zobrazení nějakého přirozeného čísla do A. Tedy
$$^{<\omega}A = \bigcup_{n\in\omega} {}^{n}A .$$

Je zřejmé, že složíme-li kterékoli zobrazení $g \in {}^{<\omega}A$ se zobrazením f z (i), dostaneme konečnou posloupnost přirozených čísel. Popsané přiřazení je prosté a zobrazí množinu ${}^{<\omega}A$ na množinu všech konečných posloupností přirozených čísel. Proto stačí, ukážeme-li, že ${}^{<\omega}\omega$ je spočetná množina.

Uvědomme si, že každá konečná posloupnost přirozených čísel je vlastně konečná množina uspořádaných dvojic přirozených čísel. Dostáváme inkluzi
$$^{<\omega}\omega \subseteq [\omega \times \omega]^{<\omega}$$
a na pravé straně je spočetná množina podle (i) a příkladu 6.28(b). Přitom množina všech konečných posloupností přirozených čísel není konečná. Je tedy spočetná podle věty 6.27.

Následující věta ukazuje, že přijmeme-li existenci jedné nekonečné množiny jako axiom, potom je škála nekonečných množin shora neomezená.

6.32 Věta (Cantor). $x \prec \mathscr{P}(x)$

Důkaz. Ukážeme, že každá množina má menší mohutnost, než její potenční množina. Je zřejmé, že zobrazení, které každému prvku $t \in x$ přiřadí jednoprvkovou množinu $\{t\}$, je prosté a zobrazuje x do $\mathscr{P}(x)$. Proto $x \preccurlyeq \mathscr{P}(x)$. Ukážeme, že neplatí $x \approx \mathscr{P}(x)$. Předpokládejme na chvíli, že f je prosté zobrazení množiny x na $\mathscr{P}(x)$ a definujme množinu $y \subseteq x$ vztahem
$$y = \{t: t \in x \;\&\; t \notin f(t)\} .$$
Ukážeme, že množina y nemá vzor při zobrazení f. Kdyby platilo $f(v) = y$ pro nějaké $v \in x$, potom buď $v \in y$, nebo $v \notin y$. Oba případy však jsou ve sporu s definicí množiny y. Snadno se ověří, že z $v \in y$ vyplývá $v \notin y = f(v)$. Podobně z $v \notin y = f(v)$ zase plyne $v \in y$. To znamená, že f nezobrazuje x na $\mathscr{P}(x)$, a věta je dokázána.

6.33 Podrobnější rozbor ukazuje, že předchozí důkaz používá diagonální metodu. Je založen na této myšlence: Prosté zobrazení f množiny x na $\mathscr{P}(x)$ představuje množinu $\mathscr{P}(x)$ jako soubor množin indexovaný prvky množiny x. Podmnožinu $y \subseteq x$, ke které chybí index, lze sestrojit diagonalizací zobrazení f jako v důkaze 6.32.

6.34 Důsledek. *$\mathscr{P}(\omega)$ je nespočetná množina.*

6.35 Nekonečné množiny, rozklady, Dirichletův princip. Zatím umíme rozdělit množiny podle velikosti do tří typů na konečné, spočetné a nespočetné. Předchozí věty ukazují, že jde o tři — zatím velmi hrubé — stupně velikosti množin. Typ nekonečné množiny se nezmění, přičteme-li k ní nebo odečteme-li od ní konečnou množinu. Z vět 6.27 a 6.29 vyplývá, že přičtením nebo odečtením spočetné množiny získáme z nespočetné množiny opět nespočetnou množinu.

Nekonečnou množinu nelze rozložit na konečně mnoho konečných množin podle lemmatu 6.11. Jinými slovy, je-li nekonečná množina sjednocením konečně mnoha množin, potom jedna z nich musí být nekonečná. Tento názorný výsledek je znám jako Dirichletův princip pro nekonečné množiny a je hojně používán v důkazech v mnoha oborech matematiky.

Z důsledku 6.30 dostáváme o něco silnější výsledek pro nespočetné množiny. Je-li nespočetná množina sjednocením konečně mnoha množin, pak jedna z nich je nespočetná.

Každá nekonečná množina má podle lemmatu 6.12 konečné podmnožiny s libovolně velkým počtem prvků. Víme také, že množina, která obsahuje spočetnou podmnožinu, je nekonečná. Obrácené tvrzení, že každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu, lze dokázat až s pomocí axiomu výběru. Tímto axiomem se budeme zabývat v příštím oddílu. Zatím si podrobněji všimneme množin celých, racionálních a reálných čísel.

6.36 Věta. *Množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel a množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel jsou spočetné.*

Důkaz. Záporná čísla zobrazíme vzájemně jednoznačně do množiny přirozených čísel, když každému číslu přiřadíme jeho absolutní hodnotu. To znamená, že $\mathbb{Z}$ je sjednocením dvou spočetných množin a je to spočetná množina podle 6.29.

Připomeňme, že každému racionálnímu číslu lze jednoznačně přiřadit uspořádanou dvojici nesoudělných celých čísel. To znamená, že množina $\mathbb{Q}$ má stejnou mohutnost jako nějaká podmnožina součinu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Množina všech racionálních čísel je tedy spočetná podle 6.29 a 6.27.

6.37 Příklad. *Uspořádání množiny $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel podle velikosti.* Nechť $<$ je (ostré) lineární uspořádání množiny $\mathbb{Q}$ podle velikosti. Jsou-li p, r dvě racionální čísla taková, že $p < r$, potom jejich aritmetický průměr $q = (p + r)/2$ je také racionální číslo a platí $p < q < r$. Mezi dvěma různými racionálními čísly tedy leží nějaké další racionální číslo. Lineární uspořádání, které má tuto vlastnost, se nazývá husté uspořádání.

6.38 Definice. Husté uspořádání. Nechť $<$ je lineární uspořádání na množině A. Existuje-li pro libovolné dva prvky $a, b \in A$ takové, že $a < b$, nějaké $c \in A$, pro které platí $a < c < b$, říkáme, že $<$ je *husté uspořádání* na množině A nebo že množina A je hustě uspořádaná relací $<$.

Snadno se ověří, že mezi dvěma různými prvky hustě uspořádané množiny leží nekonečně mnoho prvků. Hustě uspořádaná množina, která má alespoň dva prvky, tedy musí být nekonečná. Kdyby mezi prvky $a < b$ lineárně uspořádané množiny A leželo jen konečně mnoho prvků množiny A, podle 6.3(ii) existuje nejmenší z nich. Označme jej m. Potom $a < m$ a mezi prvky a, m již neleží žádný prvek množiny A. To znamená, že A není hustě uspořádaná množina.

Pro množinu racionálních čísel $\mathbb{Q}$ odtud plyne, že mezi každými dvěma racionálními čísly leží spočetně mnoho racionálních čísel. Přitom spočetná podmnožina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel není sama hustě uspořádaná. Husté uspořádání tedy není dědičné vzhledem k podmnožinám.

6.39 Charakteristické vlastnosti uspořádání množiny $\mathbb{Q}$. Následující klasická věta ukazuje, že podobně jako množina ω je i množina $\mathbb{Q}$ určena svým uspořádáním až na izomorfismus. Navíc lze každou nejvýše spočetnou lineárně uspořádanou množinu izomorfně vnořit do $\mathbb{Q}$. Říkáme také, že $\mathbb{Q}$ je univerzální množinou pro třídu všech nejvýše spočetných lineárně uspořádaných množin.

6.40 Věta (Cantor). (i) *Ke každé nejvýše spočetné lineárně uspořádané množině existuje prosté izomorfní vnoření do množiny $\mathbb{Q}$ uspořádané podle velikosti.*

(ii) *Každá spočetná hustě uspořádaná množina, která nemá největší ani nejmenší prvek, je izomorfní s množinou $\mathbb{Q}$.*

Důkaz. (i) Nechť A je nejvýše spočetná množina lineárně uspořádaná relací $\prec$. Množina A je buď konečná, potom ji lze vzájemně jednoznačně zobrazit na nějaké přirozené číslo, nebo A je nekonečná a lze ji vzájemně jednoznačně zobrazit na ω. Nechť

$$\langle a_n : n \in \alpha \rangle \tag{5}$$

je prostá posloupnost sestávající ze všech prvků množiny A, kde α je nějaké přirozené číslo nebo ω. Nechť

$$\langle q_n : n \in \omega \rangle \tag{6}$$

je prostá posloupnost všech racionálních čísel.

Prosté zobrazení $f\colon A \to \mathbb{Q}$, které bude izomorfním vnořením, sestrojíme rekurzí podle $n \in \alpha$. Tato konstrukce je speciálním případem konstrukce transfinitní rekurzí podle věty II.2.3. Nejprve položíme $f(a_0) = q_0$ Nyní uvažujeme prvek a_1. Je-li $a_1 \prec a_0$, položíme $f(a_1) = q_k$, kde k je nejmenší přirozené číslo takové, že $q_k < q_0 = f(a_0)$. Je-li $a_0 \prec a_1$, položíme $f(a_1) = q_k$, kde k je nejmenší přirozené číslo takové, že $f(a_0) = q_0 < q_1$. Dostáváme tedy $a_0 \prec a_1 \leftrightarrow f(a_0) < f(a_1)$. Předpokládejme, že pro nějaké nenulové $n \in \alpha$ již máme sestrojeny všechny hodnoty $f(a_i)$ pro $i < n$ tak, aby platilo

$$a_i \prec a_j \leftrightarrow f(a_i) < f(a_j) \quad \text{pro libovolné} \quad i, j < n. \tag{7}$$

Uvažujme prvek a_n a množinu $A_n = \{a_i : i < n\}$. Prvek a_n rozděluje množinu A_n na dvě části

$$A_n^- = \{a_i : i < n \;\&\; a_i \prec a_n\},$$
$$A_n^+ = \{a_i : i < n \;\&\; a_n \prec a_i\}.$$

Mohou nastat tři případy: obě množiny jsou neprázdné nebo jedna z množin A_n^-, A_n^+ je prázdná. Jsou-li obě množiny neprázdné, jsou konečné a mají největší a nejmenší prvek. Nechť a^- je největší prvek A_n^- a a^+ je nejmenší prvek A_n^+. Potom $a^- \prec a_n \prec a^+$ a podle (7) je $f(a^-) < f(a^+)$. Položíme $f(a_n) = q_k$, kde k je nejmenší přirozené číslo takové, že $f(a^-) < q_k < f(a^+)$, potom $f(a_n) \neq f(a_i)$ pro každé $i < n$ a (7) platí pro všechna $i, j \leq n$. Je-li $A_n^- = 0$, je $A_n^+ \neq 0$ a položíme $f(a_n) = q_k$, kde k je nejmenší přirozené číslo takové, že $q_k < f(a^+)$.

Podobně, je-li $A_n^+ = 0$, položíme $f(a_n) = q_k$, kde k je nejmenší přirozené číslo takové, že $f(a^-) < q_k$. Ve všech případech takové k existuje, protože $\mathbb{Q}$ je hustě uspořádaná a nemá největší ani nejmenší prvek. Je zřejmé, že potom (7) platí pro všechna $i, j \leq n$. Nakonec sestrojíme prosté zobrazení f množiny A do $\mathbb{Q}$, které je podle (7) izomorfním vnořením.

(ii) Nechť $\langle A, \prec \rangle$ splňuje předpoklady tvrzení a nechť (5), kde $\alpha = \omega$, je prostá posloupnost všech prvků množiny A. Izomorfismus $f: A \to \mathbb{Q}$ konstruujeme rekurzí. Přitom musíme splnit dva požadavky: aby f bylo prosté vnoření A do $\mathbb{Q}$ a aby každé racionální číslo mělo svůj vzor v množině A. Tomu odpovídají dva odlišné kroky, které se v konstrukci budou pravidelně střídat. Nejprve položíme $f(a_0) = q_0$. V kroku $n > 0$ vycházíme z již sestrojeného úseku zobrazení f, který má n-prvkový definiční obor $A_n \subseteq A$ a n-prvkový obor hodnot $Q_n = f[A_n] \subseteq \mathbb{Q}$, takového, že

$$(8) \qquad a \prec b \leftrightarrow f(a) < f(b)$$

platí pro libovolné $a, b \in A_n$. K množinám A_n, Q_n přidáme po jednom prvku tak, aby (8) platilo pro všechna $a, b \in A_{n+1}$. Přitom rozlišujeme dva případy.

(a) Je-li n liché (krok tam), nechť j je nejmenší přirozené číslo takové, že $a_j \notin A_n$. Podobně jako v důkazu (i) prvek a_j rozdělí množinu A_n na dvě disjunktní části A_n^-, A_n^+, kde A_n^- sestává ze všech prvků množiny A_n, které jsou menší, a A_n^+ ze všech prvků, které jsou větší než a_j. Stejným způsobem jako v (i) najdeme racionální číslo q_k k množinám A_n^- a A_n^+ a položíme

$$f(a_j) = q_k, \qquad A_{n+1} = A_n \cup \{a_j\}, \qquad Q_{n+1} = f[A_{n+1}].$$

Je zřejmé, že (8) platí pro všechna $a, b \in A_{n+1}$.

(b) Je-li n sudé (krok zpět), nechť j je nejmenší přirozené číslo takové, že $q_j \notin Q_n$. Také prvek q_j rozdělí množinu Q_n na dvě disjunktní části Q_n^- a Q_n^+ sestávající z prvků, které jsou menší než q_j a větší než q_j. Dále postupujeme stejně jako v případě (a), jenom místo zobrazení f uvažujeme jeho inverzi f^{-1}. Protože množina A je hustě uspořádaná a nemá nejmenší ani největší prvek, najdeme $a_k \notin A_n$ takové, že když položíme

$$f(a_k) = q_j, \qquad A_{n+1} = A_n \cup \{a_k\}, \qquad Q_{n+1} = f[A_{n+1}],$$

potom (8) platí pro všechna $a, b \in A_{n+1}$. Nakonec sestrojíme celé zobrazení f, které je izomorfismem množin A a $\mathbb{Q}$. Z konstrukce je zřejmé, že f je prosté vnoření A do $\mathbb{Q}$. Zbývá ověřit, že $f[A] = \mathbb{Q}$. V opačném případě by nějaké racionální číslo q_k nemělo vzor v množině A. To však není možné, protože popsanou konstrukcí sestrojíme vzor čísla q_k nejpozději v kroku $2k$. Tím je tvrzení (ii) dokázáno. Použitý postup je klasickým příkladem metody „jdi a vrať se“, která se často používá k sestrojení izomorfismů nebo vnoření mezi matematickými strukturami.

6.41 Typ η. Ukázali jsme, že každá spočetná hustě uspořádaná množina, která nemá nejmenší ani největší prvek, je izomorfní s množinou $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel uspořádaných podle velikosti. Odtud plyne, že libovolné dvě takové množiny jsou izomorfní. O takových množinách říkáme, že jsou uspořádány podle typu η, nebo krátce, že mají *typ* η. Uvědomme si, že každý neprázdný otevřený interval v množině typu η je také typu η. Je tedy izomorfní s celou množinou. Této vlastnosti množin typu η se často používá.

Nyní si blíže všimneme množiny reálných čísel, kterou lze sestrojit zúplněním hustého uspořádání racionálních čísel metodou Dedekindových řezů, kterou jsme popsali v § 5. Konstrukce množiny reálných čísel a aritmetických operací je podrobně rozebrána například v knize Blažek a kol. (1983).

6.42 Věta. *Nechť $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel a $\mathbb{I}$ je uzavřený interval sestávající ze všech reálných čísel x, $0 \leq x \leq 1$. Potom*

$$\mathscr{P}(\omega) \approx \mathbb{I} \approx \mathbb{R},$$

to znamená, že $\mathbb{I}$ a $\mathbb{R}$ jsou nespočetné množiny.

Důkaz. Podle lemmatu 5.51(iv) je $\mathscr{P}(\omega)$ ekvivalentní s množinou ${}^{\omega}2$ všech nekonečných posloupností nul a jedniček. Přitom každé nenulové číslo a z intervalu $\mathbb{I}$ lze ve dvojkové soustavě zapsat jediným způsobem ve tvaru

$$a = 0,a_0a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots,$$

kde

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots \tag{9}$$

je posloupnost nul a jedniček, v níž se nekonečněkrát opakuje číslice jedna. Přiřadíme-li nule posloupnost ze samých nul, dostáváme prosté zobrazení intervalu $\mathbb{I}$ do ${}^{\omega}2$.

Přejdeme-li ke trojkové soustavě, můžeme sestrojit prosté zobrazení množiny ${}^{\omega}2$ do $\mathbb{I}$. Každé posloupnosti (9) z nul a jedniček přiřadíme reálné číslo

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \frac{1}{3^{(n+1)}}. \tag{10}$$

Z obecných vlastností p-adických rozvojů reálných čísel vyplývá, že dvě různé posloupnosti nul a jedniček určují dvě různá reálná čísla (10) z intervalu $\mathbb{I}$. Z Cantorovy–Bernsteinovy věty 5.48 dostáváme ekvivalenci $\mathscr{P}(\omega) \approx \mathbb{I}$.

Není těžké sestrojit prostou funkci, která zobrazí reálnou přímku do intervalu $\mathbb{I}$. Protože také $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, dostáváme

$$\mathbb{R} \preccurlyeq \mathbb{I} \preccurlyeq \mathbb{R}$$

a ekvivalence

$$\mathbb{R} \approx \mathscr{P}(\omega)$$

plyne opět z Cantorovy a Bernsteinovy věty.

6.43 Problém hypotézy kontinua. Podle topologické definice je kontinuum souvislý metrický kompaktní prostor, který má více než jeden bod. V užším smyslu se kontinuem rozumí takový podprostor euklidovského prostoru. Interval $\mathbb{I}$ je tedy velmi důležitý příklad kontinua. Dá se ukázat, že libovolná dvě kontinua (v užším smyslu) mají stejnou mohutnost. Předchozí věta ukazuje, že interval $\mathbb{I}$, reálná přímka a potence $\mathscr{P}(\omega)$ mají stejnou mohutnost – *mohutnost kontinua.*

V roce 1878 vyslovil Cantor domněnku, že každá nekonečná množina reálných čísel je buď spočetná, nebo má mohutnost kontinua. To znamená, že neexistuje nespočetná množina reálných čísel, kterou nelze zobrazit na $\mathbb{R}$.

Cantorova domněnka byla později nazvána *hypotézou kontinua.* Podle předchozí věty je hypotéza kontinua ekvivalentní s následujícím tvrzením:

$$\text{Neexistuje množina } x, \text{ pro kterou } \omega \prec x \prec \mathscr{P}(\omega).$$

Cantor a po něm mnoho jiných se po léta marně snažili hypotézu kontinua dokázat. O historii tohoto problému jsme se podrobněji zmínili v úvodní kapitole. Připomeňme jenom, že podle Gödelova známého výsledku je možné k axiomům teorie množin bezesporně přidat hypotézu kontinua. Cohen ukázal, že totéž platí i pro negaci hypotézy kontinua. To znamená, že problém hypotézy kontinua nelze rozhodnout na základě axiomů teorie množin.

6.44 Cantorovo diskotinuum. V důkazu věty 6.42 jsme každé posloupnosti nul a jedniček z ${}^{\omega}2$ přiřadili reálné číslo a tvaru (10). Nechť D je množina všech takových čísel. Sestává ze všech reálných čísel $a \in \mathbb{I}$, která lze ve trojkové soustavě zapsat jen pomocí číslic 0 a 2.

Množinu D můžeme popsat jako průnik množin J_n, $n \in \omega$, které vzniknou následujícím způsobem. Množina J_1 vznikne z intervalu $\mathbb{I}$ tím, že vyjmeme otevřený interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ sestávající ze všech reálných čísel x, $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$. Množina J_2 vznikne z J_1 odečtením otevřených intervalů $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ a $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ atd. Každá množina J_n sestává z 2^n nepřekrývajících se uzavřených intervalů. Množina J_{n+1} vznikne z J_n tím, že každý interval rozdělíme na tři stejně dlouhé intervaly a odečteme prostřední interval bez krajních bodů. Potom

$$D = \bigcap_{n \in \omega} J_n .$$

Mezi libovolné dva body množiny D lze vložit alespoň jeden otevřený interval, který je disjunktní s množinou D. Dá se ukázat, že při vhodné topologii na množině ${}^{\omega}2$ je prosté zobrazení této množiny na D popsané ve větě 6.42 spojité a že D je kompaktní totálně nesouvislý prostor. Proto se množině D říká *Cantorovo diskontinuum.* Tato množina má řadu zajímavých topologických vlastností a setkáme se s ní později v dalších souvislostech.

6.45 Algebraická a transcendentní čísla. Reálná čísla, která jsou kořenem nějaké rovnice

$$(11) \qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0\,, \qquad a_0 \neq 0$$

s celočíselnými koeficienty, se nazývají *reálná algebraická čísla.* Reálná čísla, která nejsou kořenem žádné takové rovnice, se nazývají *transcendentní.* Tyto pojmy souvisí s otázkou, zda je možné získat všechna reálná čísla z racionálních čísel, když použijeme odmocniny jako další operace. O problému existence transcendentních čísel jsme se zmínili již v úvodní kapitole. Nyní ukážeme, že množina všech algebraických čísel je spočetná.

Víme, že množina všech celých čísel je spočetná a že každá rovnice (11) je určena konečnou posloupností celých čísel

$$(12) \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\,.$$

Podle věty 6.31 lze všechny posloupnosti (12) vzájemně jednoznačně zobrazit do množiny ω. Podle známé věty z algebry má každá rovnice (11) nejvýše n různých reálných kořenů a ty jsou na reálné přímce uspořádány podle velikosti. Každý reálný kořen x rovnice (11) je jednoznačně určen uspořádanou dvojicí přirozených čísel $\langle k, l \rangle$, kde k je číslo přiřazené posloupnosti (12) a přirozené číslo l udává, že x je l-tý reálný kořen této rovnice podle velikosti. Je zřejmé, že jednomu algebraickému číslu x může odpovídat více různých uspořádaných dvojic $\langle k, l \rangle$, protože x může být kořenem různých rovnic. Přiřadíme-li algebraickému číslu x ze všech dvojic $\langle k, l \rangle$, které mu odpovídají, tu nejmenší vzhledem k maximo-lexikografickému uspořádání, definovali jsme prosté zobrazení množiny všech algebraických čísel do spočetné množiny $\omega \times \omega$.

Množina algebraických čísel je tedy spočetná. To znamená, že množina všech transcendentních čísel je nespočetná. Transcendentní čísla musí existovat.

6.46 Existenční důkazy v teorii množin. Zamysleme se nad předchozím důkazem. Existence transcendentních čísel byla dokázána tím, že jsme ukázali, že množina všech transcendentních čísel je neprázdná. Žádné transcendentní číslo jsme však nesestrojili. Říkáme, že jde o čistě *existenční důkaz v teorii množin.* Liouville byl první, kdo dokázal existenci transcendnentních čísel tím, že některá sestrojil. Říkáme, že takový *důkaz* je *konstruktivní.*

Srovnejme oba důkazy. Liouvillův konstruktivní důkaz dává návod, jak některá transcendentní čísla sestrojit. Cantorův čistě existenční důkaz ukazuje, že algebraických čísel je velmi málo. Množina všech algebraických čísel je spočetná, a má tedy Lebesgueovu míru nula. Každý z obou důkazů poskytuje nějakou informaci navíc. Moderní matematika proto používá konstruktivních i čistě existenčních důkazů.

Na závěr ještě citát z knihy M. Kace a S. M. Ulama, Matematika a logika: „Zavedení čistě existenčních důkazů, založených na teorii nekonečných množin, mělo zásadní vliv na vývoj matematiky. Byla to snad jediná vážná metodologická změna od dob starých Řeků a způsobila možná jediné vážné rozdělení matematiků na filosofickém základě".

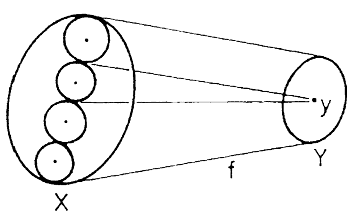
6.47 Cantorův paradox. Z Cantorovy věty 6.32 vyplývá, že ke každé množině x existuje množina y, $x \prec y$. Speciálně, je-li x nekonečná, potom y je také nekonečná. Důsledkem axiomu nekonečna je tedy shora neomezená škála nekonečných množin.

Tyto úvahy vedou ke sporu, předpokládáme-li existenci množiny všech množin. Kdyby v byla množina všech množin, potom pro každou množinu x platí $x \subseteq v$, odkud plyne $x \preccurlyeq v$. Zvolíme-li $x = \mathscr{P}(v)$, dostáváme spor s Cantorovou větou. Cantor si tohoto problému povšiml v roce 1895. Předpokládal, že se tento spor odstraní dalším vývojem teorie množin. Z dnešního hlediska dává uvedený paradox jiný důkaz faktu, že univerzální třída **V** není množinou.

§ 7 Axiom výběru a princip maximality

Velikost množin je porovnávána pomocí prostých zobrazení a zavedli jsme relaci $x \preccurlyeq y$, množina x má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny y. Libovolné dvě konečné množiny jsou porovnatelné, to znamená, že relace $\preccurlyeq$ je trichotomická na konečných množinách. Ukázalo se, že trichotomii relace $\preccurlyeq$ nelze dokázat obecně pro nekonečné množiny, aniž se přijme další axiom, který de facto postuluje tuto vlastnost. Axiom výběru je nejběžnější forma takového axiomu. V této části dokážeme ekvivalenci axiomu výběru s principem maximality a s principem dobrého uspořádání.

7.1 Při zrodu axiomu výběru jako samostatného principu stál omyl obsažený v následujícím tvrzení. Víme-li, že existuje zobrazení f množiny X na množinu Y, pak existuje prosté zobrazení g množiny Y do X. Situace je znázorněna na obr. 7.1. Zobrazení f určuje rozklad r množiny X sestávající ze vzorů prvků množiny Y neboli $r = \{f^{-1}(y): y \in Y\}$. Z množiny rozkladu $f^{-1}(y)$, jelikož je neprázdná, vybereme jeden prvek, a tak získáme pro každé $y \in Y$ právě jeden prvek $x \in X$, čímž je definováno prosté zobrazení g množiny Y do X. Je tato úvaha korektní? Existuje-li totiž požadované zobrazení g, pak $v = \mathrm{Rng}(g)$ je množina, která má s každou množinou rozkladu r společný právě jeden prvek. Můžeme říci, že v je výběrová množina pro rozklad r. Sestává-li r z konečně mnoha prvků, to znamená, je-li r konečná množina, existenci výběrové množiny pro r můžeme dokázat indukcí. Ale co když je rozklad nekonečný? V obecném případě nelze existenci výběrové množiny dokázat pomocí dosud uvedených axiomů.



Obr. 7.1

Vzhledem k tomu, že úvahy využívající existenci výběrových množin mají řadu zajímavých důsledků v dalších matematických disciplínách, byl již v počátcích rozvoje teorie množin formulován princip výběru jako jeden z nejdůležitějších a nejzajímavějších axiomů teorie množin.

7.2 Princip výběru. Pro každý rozklad r množiny X existuje *výběrová množina*, to znamená množina $v \subseteq X$, pro kterou platí

$$(\forall u \in r)(\exists x)(v \cap u = \{x\}).$$

Dnes obvyklejší formulace axiomu výběru používá selektorů na množinách.

7.3 Definice. Selektor na množině. Funkce f definovaná na množině X, pro kterou platí

$$(y \in X \;\&\; y \neq 0) \rightarrow f(y) \in y,$$

se nazývá *selektor na množině* X. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že selektor f je definován na množině $X - \{0\}$ a pro každé $y \in \mathrm{Dom}(f)$ platí $f(y) \in y$.

7.4 Axiom výběru (AC). Na každé množině existuje selektor.

7.5 Tento axiom říká, že na každé množině X existuje funkce, která vybírá po jednom prvku z každé neprázdné množiny $y \in X$. Přitom je důležité, že se tento výběr děje paralelně na všech prvcích dané množiny a je reprezentován funkcí, tedy objektem teorie množin. Axiom výběru nelze zaměňovat s tvrzením, že z každé neprázdné množiny lze vybrat jeden prvek.

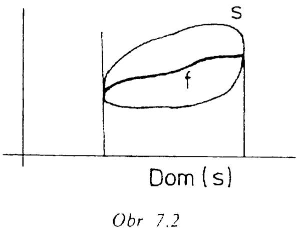
7.6 Lemma. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *axiom výběru,*

(ii) *princip výběru,*

(iii) *pro každou množinovou relaci s existuje funkce f taková, že $f \subseteq s$ a* $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(s)$,

(iv) *kartézský součin $\times\langle a_i : i \in x\rangle$ neprázdného souboru neprázdných množin je neprázdný.*



Obr 7.2

Tvrzení (iii) ilustruje obr. 7.2.

Důkaz. (i) → (ii). Nechť r je rozklad nějaké množiny. Budiž f selektor na množině r. Pak $v = \mathrm{Rng}(f)$ je výběrová množina pro r.

(ii)$\to$(iii). Je-li $s = 0$, pak $f = 0$ a není co dokazovat. Předpokládejme $s \neq 0$. Položíme-li

$$r = \{\{\langle i, x\rangle : \langle i, x\rangle \in s\} : i \in \mathrm{Dom}(s)\},$$

pak r je rozklad množiny s a výběrová množina f pro r je hledaná funkce.

(iii)$\to$(iv). Neprázdný soubor neprázdných množin $\langle a_i : i \in x\rangle$ určuje relaci $s = \{\langle i, y\rangle : i \in x \;\&\; y \in a_i\}$. Podle (iii) existuje funkce $f \subseteq s$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(s) = x$, a tedy f je prvkem uvažovaného kartézského součinu. Součin $\mathsf{X}\langle a_i : i \in x\rangle$ je proto neprázdný.

(iv)$\to$(i). Je-li x nějaká množina, musíme ukázat, že existuje selektor f na x. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \neq 0$ a $0 \notin x$. Identita na x určuje neprázdný soubor neprázdných množin $\langle y : y \in x\rangle$. Podle (iv) je kartézský součin $\mathsf{X}\langle y : y \in x\rangle$ neprázdný a každý jeho prvek je selektorem na množině x.

7.7 Příklady. (a) Nechť f je reálná funkce definovaná pro všechna reálná čísla. V matematické analýze se dokazuje, že spojitost funkce f v bodě je ekvivalentní konvergenci jistých posloupností.

Funkce f je spojitá v bodě a, právě když pro každou posloupnost $\langle a_n : n$ přirozené$\rangle$ reálných čísel platí

$$\lim a_n = a \to \lim f(a_n) = f(a).$$

Je-li f spojitá v bodě a, z definice spojitosti je lehké dokázat uvedenou implikaci pro každou posloupnost. V případě, že f není spojitá v bodě a, pak existuje okolí V čísla $f(a)$ takové, že v každém $1/n$-okolí čísla a existuje x_n, pro které $f(x_n) \notin V$. Položme

$$W_n = \left\{x : |x - a| < \frac{1}{n+1} \;\&\; f(x) \notin V\right\}.$$

Podle 7.6(iv) existuje posloupnost a_n taková, že $a_n \in W_n$ pro každé n. Tato posloupnost nutně konverguje k a, ale posloupnost $f(a_n)$ nemůže konvergovat k $f(a)$. Tím je ekvivalence dokázána.

Všimněme si, že v důkaze jsme použili axiom výběru. Nebyla to náhoda. Je známo, že bez určité formy axiomu výběru nelze tuto ekvivalenci dokázat.

(b) *Sjednocení spočetného souboru nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina.* Nechť $\langle B_j : j \in I\rangle$ je uvažovaný soubor. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $I = \omega$ a indexy souboru jsou přirozená čísla. Víme, že $\omega \times \omega$ je spočetná množina, a proto stačí, když ukážeme, že sjednocení S uvažovaného souboru lze prostě zobrazit do množiny $\omega \times \omega$. Nechť pro každé j je E_j množina všech prostých zobrazení množiny B_j do ω. Soubor $\langle E_j : j \in \omega\rangle$ sestává z neprázdných množin, protože B_j jsou nejvýše spočetné. Podle 7.6(iv) existuje výběrová posloupnost $\langle f_j : j \in \omega\rangle$, kde $f_j \in E_j$. Definujme $h : S \to \omega \times \omega$ předpisem $h(x) = \langle j, f_j(x)\rangle$, kde j je nejmenší index z ω takový, že $x \in B_j$. Zřejmě h je prosté zobrazení S do $\omega \times \omega$.

I zde jde o podstatné použití axiomu výběru: ze spočetně mnoha množin E_j musíme simultánně vybrat po jednom zobrazení f_j. Pokud nepřijmeme axiom výběru, je bezesporné předpokládat, že množina všech reálných čísel, která je nespočetná, je sjednocením spočetného souboru spočetných množin. To také znamená, že bez použití axiomu výběru nelze dokázat, že Lebesgueova míra na reálné přímce je spočetně aditivní.

7.8 Axiom výběru je ekvivalentní s řadou tvrzení. Uvedeme dvě, která jsou v matematice nejčastěji používána, princip maximality a princip dobrého uspořádání.

7.9 Definice. Řetězec. Nechť množina A je uspořádána relací $\leq$. Podmnožinu $B \subseteq A$ nazveme *řetězcem* v A, je-li B lineárně uspořádána relací $\leq$.

7.10 Princip maximality (PM). Nechť A je množina uspořádaná relací $\leq$ tak, že každý řetězec je shora omezený. Potom ke každému $a \in A$ existuje maximální prvek b množiny A takový, že $a \leq b$

Všimněme si, že prázdná množina je řetězcem v každé uspořádané množině, a tedy z podmínky na omezenost řetězců plyne, že A je neprázdná množina.

Princip maximality byl nezávisle vysloven několika autory, F. Hausdorffem (1914), K. Kuratowskim (1922) a M. Zornem (1935). V literatuře bývá nejčastěji uváděn jako Zornovo lemma, protože Zorn zpopularizoval princip maximality tím, že ukázal jeho zajímavé důsledky v topologii a funkcionální analýze.

7.11 Princip minimality. Přechodem k inverznímu uspořádání dostáváme z principu maximality princip minimality. Má-li každý řetězec v uspořádané množině A dolní mez, pak ke každému $a \in A$ existuje minimální prvek b množiny A takový, že $b \leq a$.

7.12 Při užití principu maximality se nejčastěji setkáváme se situací, kdy uspořádaná množina $\langle A, \leq \rangle$ sestává z některých podmnožin dané množiny B, tedy $A \subseteq \mathscr{P}(B)$, a uspořádání $\leq$ na A souhlasí s relací inkluze, to znamená, že $x \leq y \rightarrow x \subseteq y$ platí pro libovolné prvky $x, y \in A$. V takovém případě k ověření předpokladů principu maximality, to znamená k ověření, že každý řetězec je shora omezený, stačí ukázat, že pro každý řetězec c v A platí $\bigcup c \in A$. Jinými slovy, stačí ověřit, že množina A je uzavřena na sjednocení řetězců.

7.13 Příklad. Předpokládejme platnost principu maximality. Pak v každé uspořádané množině $\langle A, \leq \rangle$ ke každému řetězci v existuje řetězce w takový, že $v \subseteq w \subseteq A$ a w je maximální vzhledem k inkluzi. Speciálně z principu maximality plyne existence maximálního (vzhledem k inkluzi) řetězce v každé uspořádané množině.

Je-li dána uspořádaná množina $\langle A, \leq \rangle$, nechť L je množina všech řetězců v A. Potom $L \subseteq \mathscr{P}(A)$ a L je uspořádaná inkluzí. Je-li $K \subseteq L$ množina lineárně uspořádaná inkluzí, snadno se ukáže, že $\bigcup K$ je také řetězec vzhledem k $\leq$ v množině A, tedy každý řetězec v L je shora omezený. Podle principu maximality potom k libovolnému řetězci $v \in L$ existuje řetězec $w \in L$, $v \subseteq w$, který je maximální vzhledem k inkluzi.

Ukážeme další použití principu maximality.

7.14 Trichotomie relace $\preccurlyeq$. Pro libovolné množiny A, B je buď $A \preccurlyeq B$, nebo $B \preccurlyeq A$.

Důkaz. Množina

$$D = \{f: f \text{ je prosté zobrazení, } \mathrm{Dom}(f) \subseteq A, \ \mathrm{Rng}(f) \subseteq B\}$$

uspořádaná inkluzí splňuje předpoklady principu maximality. Nechť g je nějaký maximální prvek v D. Kdyby obě množiny $A - \mathrm{Dom}(g)$ a $B - \mathrm{Rng}(g)$ byly neprázdné, mohli bychom zobrazení g prodloužit a to je spor s jeho maximalitou. Proto buď $\mathrm{Dom}(g) = A$, nebo $\mathrm{Rng}(g) = B$. V prvním případě zobrazení g zaručuje vztah $A \preccurlyeq B$, ve druhém případě zobrazení g^{-1} zaručuje $B \preccurlyeq A$.

7.15 Příklady. *Rozklady nekonečných množin.* (a) Pro každou nekonečnou množinu A platí $\omega \preccurlyeq A$. Jinými slovy, každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.

Je-li A spočetná množina, pak dokonce $\omega \approx A$. Předpokládejme, že množina A je nespočetná. Z trichotomie relace $\preccurlyeq$ víme, že platí $\omega \preccurlyeq A$ nebo $A \preccurlyeq \omega$. Jelikož A je nespočetná množina, druhá alternativa neplatí, tedy $\omega \preccurlyeq A$.

Nechť f je prosté zobrazení ω do A, pak $\mathrm{Rng}(f)$ je spočetná podmnožina množiny A.

(b) Pro nekonečnou množinu A je $A \approx A \times \{0, 1\}$. Tedy každou nekonečnou množinu lze rozložit na dvě nekonečné části.

Uvažujme množinu D všech vzájemně jednoznačných zobrazení podmnožin $B \subseteq A$ na $B \times \{0, 1\}$ uspořádanou inkluzí. Uspořádaná množina $\langle D, \subseteq \rangle$ splňuje předpoklady principu maximality. Nechť f je maximální prvek v D. Označme $B = \mathrm{Dom}(f)$. Ověříme, že množina $A - B$ je konečná. V opačném případě, podle předchozího příkladu, existuje spočetná množina $C \subseteq A - B$. Podle 6.28(a) je $\omega \approx \omega \times \{0, 1\}$, tedy existuje vzájemně jednoznačné zobrazení g množiny C na $C \times \{0, 1\}$. Jelikož $f \cup g \in D$, dostáváme spor s maximalitou zobrazení f, proto množina $A - B$ je konečná. Ukážeme, že $A \approx B$. Sjednocení dvou konečných množin je konečná množina a jelikož množina A je nekonečná, je nekonečná i množina B. Z příkladu (a) víme, že existuje spočetná množina $C \subseteq B$. Pro nějaké přirozené n je $A - B \approx n$ a jelikož $\omega - n \approx \omega$, je $(A - B) \cup C \approx C$. Tedy

$$A = (A - B) \cup C \cup (B - C) \approx C \cup (B - C) = B\,.$$

Podle předpokladu je $B \approx B \times \{0, 1\}$, proto také $A \approx A \times \{0, 1\}$. Je-li h vzájemně jednoznačné zobrazení A na $A \times \{0, 1\}$, pak množiny $A_1 = h^{-1}[A \times \{0\}]$, $A_2 = h^{-1}[A \times \{1\}]$ tvoří žádaný rozklad.

(c) Pro nekonečnou množinu A platí $A \times A \approx A$. Každou nekonečnou množinu lze rozložit na nekonečně mnoho nekonečných částí.

Uvažujme množinu D všech vzájemně jednoznačných zobrazení podmnožin B množiny A na $B \times B$ uspořádanou inkluzí. Podle (a) existuje spočetná množina $S \subseteq A$. Jelikož $\omega \approx \omega \times \omega$, existuje $g \in D$ s $\mathrm{Dom}(g) = S$. Nechť f je maximální prvek v D takový, že $g \subseteq f$. Množina $B = \mathrm{Dom}(f)$ je nekonečná, protože $S \subseteq B$. Podle 7.14 je $B \preccurlyeq A - B$ nebo $A - B \preccurlyeq B$. Ukážeme, že první případ nemůže platit. Kdyby $B \preccurlyeq A - B$, pak existuje $C \subseteq A - B$ takové, že $C \approx B$. Opakovaným použitím (b) můžeme množinu C rozložit na tři části C_1, C_2, C_3, všechny stejné mohutnosti, jako je mohutnost množiny C. Navíc $B \times C \approx C \times B \approx$ $\approx C \times C \approx C$. Množiny B a C jsou disjunktní, proto

$$(B \cup C) \times (B \cup C) =$$
$$= (B \times B) \cup (B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C) \approx B \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 =$$
$$= B \cup C .$$

Odtud plyne, že existuje zobrazení $h \in D$ s $\mathrm{Dom}(h) = B \cup C$, které rozšiřuje zobrazení f, a to je spor. Platí tedy $A - B \preccurlyeq B$. Rozložíme-li množinu B na dvě části B_1, B_2, stejné mohutnosti, jako je mohutnost množiny B, dostáváme $A =$ $= (A - B) \cup B \preccurlyeq B_1 \cup B_2 = B$. Přitom $B \subseteq A$, tedy z Cantorovy a Bernsteinovy věty plyne $A \approx B$, proto $A \approx A \times A$. Ukážeme, že existuje spočetný rozklad $\{A_n : n \in \omega\}$ množiny A takový, že pro každé n je $A_n \approx A$. Z předchozího víme, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f: A \times A \rightarrow A$, a podle (a) existuje prosté zobrazení $h: \omega \rightarrow A$. Položíme-li $A_n = f[\{h(n)\} \times A]$ pro $n > 0$ a $A_0 =$ $= A - \bigcup\{A_n : n > 0\}$, dostaneme žádaný rozklad.

(d) Pro nekonečnou množinu A platí

$$A \approx {}^{<\omega}A \approx [A]^{<\omega},$$

přitom ${}^{<\omega}A$ je množina všech konečných posloupností prvků množiny A a $[A]^{<\omega}$ je množina všech konečných podmnožin množiny A.

Nejprve ukážeme, že množiny $[A]^{<\omega}$ a ${}^{<\omega}A$ mají stejnou mohutnost. Podle (a) a (c) je $A \preccurlyeq \omega \times A \preccurlyeq A \times A \approx A$, tedy $\omega \times A \approx A$. Konečná posloupnost prvků z A je konečnou podmnožinou množiny $\omega \times A$, neboli ${}^{<\omega}A \subseteq [\omega \times A]^{<\omega}$. Proto ${}^{<\omega}A \preccurlyeq [A]^{<\omega}$. Na druhou stranu pro $y \in [A]^{<\omega}$ je množina $W_y =$ $= \{f : (\exists n \in \omega)(f : n \leftrightarrow y)\}$ neprázdná. Selektor na množině $\{W_y : y \in [A]^{<\omega}\}$ určuje $[A]^{<\omega} \preccurlyeq {}^{<\omega}A$. Dokázali jsme, že ${}^{<\omega}A \approx [A]^{<\omega}$.

Ukážeme indukcí, že pro každé $n \in \omega$ je ${}^{n}A \preccurlyeq A$. Pro $n = 0$ je ${}^{0}A = \{0\}$ a zřejmě ${}^{0}A \preccurlyeq A$. Předpokládejme, že pro n platí ${}^{n}A \preccurlyeq A$. Přiřadíme-li posloupnosti $g \in {}^{n+1}A$ dvojici $\langle g \mid n, g(n) \rangle$, dostáváme vzájemně jednoznačné zobrazení množiny ${}^{n+1}A$ na ${}^{n}A \times A$. Tedy ${}^{n+1}A \approx {}^{n}A \times A$. Z indukčního předpokladu plyne ${}^{n}A \times A \preccurlyeq A \times A$ a protože $A \times A \approx A$, platí ${}^{n+1}A \preccurlyeq A$. Vezměme rozklad $\{A_n : n \in \omega\}$ množiny A s $A_n \approx A$ z příkladu (c). Víme, že ${}^{n}A \preccurlyeq A$, a tedy pro každé n

platí ${}^{n}A \preccurlyeq A_n$. Vybereme-li prostá zobrazení $f_n: {}^{n}A \to A_n$, pak $f = \bigcup\{f_n : n \in \omega\}$ je prosté zobrazení z ${}^{<\omega}A$ do A, a protože triviálně platí $A \preccurlyeq {}^{<\omega}A$, je ${}^{<\omega}A \approx A$. Všimněme si, že jsme také dokázali

$$A \approx {}^{n}A \approx [A]^n$$

pro každé nenulové přirozené n.

7.16 Dnes se obvykle principy maximality a dobrého uspořádání ukazují z axiomu výběru pomocí transfinitní indukce. Takové důkazy jsou krátké a elegantní, ovšem opírají se o strukturu ordinálních čísel (viz kapitola II). Obě tvrzení lze dokázat i skromnějšími prostředky, které čtenář již zná z předchozích odstavců, ovšem důkazy jsou pracnější. Takový důkaz zde předvedeme. Máme za to, že ukáže několik typických obratů a dá i nahlédnout do historie teorie množin. Před tím však vyslovíme princip maximality v jiném tvaru.

Princip maximality (PMS). Nechť $\langle A, \leq \rangle$ je uspořádaná množina taková, že pro každý řetězec v A existuje supremum. Potom ke každému $a \in A$ existuje maximální prvek b množiny A takový, že $a \leq b$.

Snadno se nahlédne, že tato verze principu maximality je důsledkem principu PM. Existuje-li v množině A supremum každého řetězce, pak je každý řetězec omezený. Maximální prvek je potom zaručen principem maximality PM. Ukážeme také, že princip maximality (PM) je důsledkem principu PMS.

Nechť $\langle A, \leq \rangle$ je uspořádaná množina, v níž je každý řetězec shora omezený. Nechť L je množina všech řetězců v A. V příkladě 7.13 jsme ukázali, že L je uspořádána inkluzí a že pro libovolný řetězec (vzhledem k inkluzi) $K \subseteq L$ je $\bigcup K \in L$. Uvědomme si, že $\bigcup K$ je supremum řetězce K vzhledem k inkluzi. Množina L tedy splňuje předpoklady principu PMS. Tedy ke každému řetězci $v \in L$ existuje maximální (vzhledem k inkluzi) řetězec w, $v \subseteq w \subseteq A$.

Je-li dáno $a \in A$, nechť w je maximální řetězec takový, že $\{a\} \subseteq w$. Podle předpokladu existuje horní mez b řetězce w. Zřejmě $a \leq b$. Přitom z maximality řetězce w vyplývá, že b je největší prvek ve w a že b je maximální prvek množiny A.

Ukázali jsme, že obě verze principu maximality jsou ekvivalentní.

7.17 Věta (Hausdorff). *Z axiomu výběru plyne princip maximality.*

Důkaz. Ukážeme, že axiom výběru implikuje (PMS). Předpokládejme, že množina A je uspořádána relací $\leq$ a že každý řetězec v A má supremum. Předpokládejme, že pro nějaké $a \in A$ neexistuje maximální prvek $b \in A$, $b \geq a$. Omezíme se na množinu

$$X = [a, \rightarrow) = \{x \in A : a \leq x\}.$$

V množině X existuje supremum pro každý řetězec, ale neexistuje žádný maximální prvek. To znamená, že pro každé $x \in X$ je množina $(x, \rightarrow) = \{y \in X : y > x\}$ neprázdná. Nechť g je selektor na $\mathscr{P}(X)$, jeho existence je zaručena axiomem výběru. Definujme zobrazení $f: X \to X$ předpisem $f(x) = g(\{y \in X : y > x\})$. Pro každé $x \in X$ platí $x < f(x)$. Nechť S sestává ze všech množin $Z \subseteq X$, které splňují

(1) $a \in Z$,
(2) je-li $x \in Z$, pak $f(x) \in Z$,
(3) je-li U řetězec a $U \subseteq Z$, pak $\sup U \in Z$.

Zřejmě $X \in S$ a $S \neq 0$. Položme $M = \bigcap\{Z : Z \in S\}$. Snadno se nahlédne, že M splňuje podmínky (1), (2), (3), a proto M je nejmenší prvek v S vůči inkluzi. Jestliže ukážeme, že M je řetězcem, pak pro $b = \sup M$ platí $b \in M$ z podmínky (3), z podmínky (2) máme $f(b) \in M$, to znamená, že $f(b) \leq \sup M = b$, a dostáváme spor s vlastností funkce f. Tento spor končí důkaz věty.

Zbývající část, ryze technická, je věnována důkazu trichotomie pro prvky z M. Vyšetřujme množinu

$$T = \{x \in M : (\forall y \in M)(y < x \rightarrow f(y) \leq x)\}.$$

7.18 Lemma. *Jestliže* $x \in T$ *a* $y \in M$, *pak platí* $x \leq y$ *nebo* $y \leq x$.

Důkaz. Vezměme pevné $x \in T$ a uvažujme množinu

$$Z_x = \{y \in M : x \leq y \vee y \leq x\}.$$

Ověříme, že množina Z_x splňuje podmínky (1)–(3).

(1) Jelikož $a \in M$, a je nejmenším prvkem v X, je $a \leq x$, tedy $a \in Z_x$.

(2) Nechť $y \in Z_x$. Buď $x \leq y$, a potom $x < f(y)$, nebo $y < x$, a na základě definice množiny T platí $f(y) \leq x$. To znamená, že $f(y) \in Z_x$.

(3) Nechť $U \subseteq Z_x$ je řetězec. Jestliže pro nějaké $u \in U$ platí $x \leq u$, pak také $x \leq \sup U$. Je-li naopak $u < x$ pro každé $u \in U$, potom $\sup U \leq x$. Tedy $\sup U \in Z_x$. Ukázali jsme, že $Z_x \in S$ pro každé $x \in T$. Víme, že M je nejmenší množina systému S. Z inkluze $Z_x \subseteq M$ proto plyne, že $Z_x = M$ pro každé $x \in T$. Tím je lemma dokázáno.

7.19 Lemma. *Pro libovolné* $x \in T$ *a* $y \in M$ *platí*

$$x < y \rightarrow f(x) \leq y.$$

Důkaz. Nechť x je nějaký prvek z T. Uvažujme množinu

$$W_x = \{y \in M : x < y \rightarrow f(x) \leq y\}.$$

Ukážeme, že množina W_x má vlastnosti (1)–(3).

(1) $a \in W_x$, protože $a \leq x$.

(2) Nechť $y \in W_x$. Podle lemmatu 7.18 jsou prvky x, y srovnatelné, protože $x \in T$ a $y \in M$. Chceme ukázat, že $f(y) \in W_x$, to znamená, že platí

$$x < f(y) \rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Předpokládejme, že $x < f(y)$, to vylučuje případ $y < x$ vzhledem k definici množiny T. Rozebereme zbývající dvě možnosti. Je-li $x = y$, potom $f(x) = f(y)$. Je-li $x < y$, potom $f(x) \leq y$ plyne z definice W_x a $f(x) < f(y)$, protože $y < f(y)$. V obou případech dostáváme $f(x) \leq f(y)$, takže $f(y) \in W_x$.

(3) Nechť $U \subseteq W_x$ je řetězec. Víme, že každý prvek z M (tedy i z U) je srovnatelný s x. Předpokládejme, že $x < \sup U$, potom pro nějaké $u \in U$ musí platit $x < u$. Z definice W_x dostáváme $f(x) \leq u \leq \sup U$, to znamená, že $\sup U \in W_x$.

Ukázali jsme, že W_x má vlastnosti (1)–(3), a proto platí $M = W_x$ pro každé $x \in T$. Tím je lemma dokázáno.

7.20 Lemma. *$T = M$, tedy M je lineárně uspořádaná množina.*

Důkaz. Jelikož $T \subseteq M$, stačí ukázat, že $T \in S$.

(1) $a \in T$, protože $a \leq y$ pro každé $y \in M$.

(2) Nechť $x \in T$. Abychom ověřili $f(x) \in T$, zvolme $y \in M$ takové, že $y < f(x)$. Z lemmatu 7.18 víme, že x, y jsou srovnatelné, a z lemmatu 7.19 plyne, že nerovnost $x < y$ nemůže nastat, protože by z ní plynulo $f(x) \leq y$. Je-li $x = y$, pak $f(x) = f(y)$. Je-li $y < x$, pak $f(y) \leq x$, protože $x \in T$, a tedy $f(y) < f(x)$. V obou případech máme $f(y) \leq f(x)$, tedy $f(x) \in T$.

(3) Nechť U je řetězec $U \subseteq T$. Uvažujme $y \in M$, $y < \sup U$. Jelikož y je srovnatelné se všemi prvky z U, je $y < u$ pro nějaké $u \in U$. Odtud plyne $f(y) \leq u$, a tedy $f(y) \leq \sup U$, neboli $\sup U \in T$. Máme dokázánu rovnost $T = M$ a z lemmatu 7.18 plyne, že každé dva prvky z M jsou srovnatelné, proto M je řetězec, a to jsme potřebovali ověřit, aby důkaz věty 7.17 byl úplný.

7.21 Princip dobrého uspořádání (WO). Pro každou množinu A existuje relace R, která je dobrým uspořádáním na A. Stručněji, každou množinu lze dobře uspořádat. Princip dobrého uspořádání pochází od E. Zermela z roku 1904 a je znám jako Zermelova věta.

7.22 Věta (Zermelo). *Z axiomu výběru plyne princip dobrého uspořádání.*

Důkaz. Podle věty 7.17 stačí ukázat, že princip dobrého uspořádání plyne z principu maximality. Nechť A je daná množina. Uvažujme množinu

$$D = \{R : R \subseteq A^2 , \quad R \text{ je dobré uspořádání}\} .$$

Uvědomme si, že $D \neq 0$, protože 0 je také relace dobrého uspořádání a $0 \in D$. Pro $R_1, R_2 \in D$ položme $R_1 \lhd R_2$, jestliže R_2 je koncové rozšíření R_1, to znamená, že $R_1 \subseteq R_2$, a je-li b prvek oboru relace R_2, který nepatří do oboru relace R_1, potom $a <_{R_2} b$ platí pro každé a z oboru relace R_1. Je vidět, že $(D, \lhd)$ je uspořádaná množina, a potřebujeme ověřit podmínku omezenosti řetězců. Nechť $C \subseteq D$ je lineárně uspořádaná relací $\lhd$. Pokud $C = 0$, je $\bigcup C = 0$ a vskutku $0 \in D$. Pokud $C \neq 0$, je snadné nahlédnout, že $S = \bigcup C$ je lineární uspořádání. Ověříme, že S je dobré uspořádání. Nechť u je neprázdná podmnožina oboru relace S. Zvolme pevné $x \in u$, potom x je prvkem oboru některé relace $R \in C$. Nechť

$$v = \{y : y \in u \;\&\; y \leq_R x\} ,$$

nechť y_0 je nejmenší prvek množiny v vzhledem k R. Potom $y_0 \in u$ a ukážeme, že y_0 je nejmenší prvek množiny u vzhledem k relaci S. Kdyby existovalo $z \in u$,

$z <_S y_0$, pak $z <_Q y_0$ pro nějaké $Q \in C$, a jelikož $Q \lhd R$ nebo $R \lhd Q$, je také $z <_R y_0$, a to vede ke sporu s volbou y_0. Dokázali jsme, že S je dobré uspořádání, a tedy D je uzavřená na sjednocení řetězců. Podle principu maximality existuje maximální prvek R množiny D. Ukážeme, že R je dobré uspořádání na množině A. Nechť B je obor relace R. Kdyby $A - B$ byla neprázdná množina, nechť x je nějaký její prvek. Položíme-li

$$S = R \cup \{B \times \{x\}\},$$

potom $S \in D$ a S je koncové rozšíření relace R, a R není maximální. Tedy $B = A$ a R je dobré uspořádání na množině A. Ukázali jsme, že princip maximality a dobrého uspořádání jsou důsledky axiomu výběru. Oba principy jsou ekvivalentní axiomu výběru.

7.23 Věta. *Axiom výběru* (AC), *princip maximality* (PM), *princip dobrého uspořádání* (WO) *jsou ekvivalentní tvrzení.*

Důkaz. Implikace AC $\rightarrow$ PM je věta 7.17. Důkaz věty 7.22 je fakticky dukazem implikace PM $\rightarrow$ WO. Pro úplnost zbývá ukázat implikaci WO $\rightarrow$ AC. Nechť A je neprázdná, $0 \notin A$. Uvažujme $X = \bigcup A$. Podle WO nechť $\leq$ je dobré uspořádání množiny X. Každá $a \in A$ je neprázdná podmnožina množiny X, a má tudíž nejmenší prvek, který je relací $\leq$ jednoznačně určen. Položme

$$f = \{\langle a, x\rangle : a \in A \;\&\; x \in a \;\&\; \{x\} = \{y \in a : y \leq x\}\}.$$

Získali jsme tak selektor f na množině A.

7.24 Axiom výběru pro konečné množiny je dokazatelný: má-li množina A konečně mnoho prvků, pak na A existuje selektor. Na druhé straně tvrzení, že na libovolné množině A, jejíž všechny prvky jsou konečné množiny, existuje selektor, není bez axiomu výběru dokazatelný. A to ani v případě, když všechny prvky množiny A jsou dvouprvkové. Jsou-li všechny prvky množiny A jednoprvkové, existence selektoru je triviální.

Axiom výběru má specifický charakter. Základní axiomy teorie množin (viz § 2) jsou tvrzení o existenci určitých množin, ale každá množina, jejíž existence je axiomem postulována, je také definována nějakou formulí. Na rozdíl od toho axiom výběru postuluje existenci množin – selektorů – aniž by takový selektor definoval. Proto kolem axiomu výběru vznikla diskuse na několik desetiletí. Řada matematiků poukazovala na odlišný charakter axiomu výběru a tvrzením, která se jeho pomocí dají dokázat, přisuzovala jinou hodnotu než těm tvrzením, která se dají dokázat bez axiomu výběru. Podrobnější informaci o těchto otázkách čtenář nalezne v monografii Bar-Hillel, Fraenkel, Lévy (1973).

Teorie množin s axiomem výběru se považuje za jedno z možných rozšíření teorie množin. Zatímco pokračovala diskuse, axiom výběru zdomácněl v mnoha odvětvích matematiky, protože se podařilo s jeho pomocí dokázat řadu hlubokých tvrzení o základních pojmech topologie, funkcionální analýzy, teorie množin a algebry.

Uveďme například Baireovu větu, Hahnovu–Banachovu větu, Vitaliho větu o existenci neměřitelné množiny a známou větu o existenci algebraického uzávěru tělesa. Můžeme říci, že teorie množin s axiomem výběru, označená ZFC, je dnes nejpoužívanější a nejlépe prostudované rozšíření teorie množin, proto mu v této knize budeme věnovat nejvíce pozornosti.

V teorii množin lze vyslovit i jiné přirozené principy, které nejsou slučitelné s axiomem výběru. Nejznámější z nich je axiom determinovanosti, který postuluje existenci vyhrávající strategie v některých nekonečných hrách. Také axiom determinovanosti má řadu zajímavých důsledků, například, že všechny podmnožiny reálných čísel jsou lebesgueovsky měřitelné. Svým charakterem se axiom determinovanosti podobá axiomu výběru. Pro konečné množiny je dokazatelný a v obecném případě postuluje existenci množin, které nelze definovat.

V současné době je teorie množin s různými formami axiomu determinovanosti také podrobně studována. V Bukovského knize (1979) jsou uvedeny základní důsledky tohoto axiomu pro množiny reálných čísel.

§ 8 Filtry. Ultrafiltry. Princip kompaktnosti

Seznámíme se blíže s použitím axiomu výběru. Podrobněji se zabýváme filtry, ultrafiltry, ideály a prvoideály na množinách a dokážeme hlavní větu o ultrafiltrech. Zavedeme pojem limity posloupnosti přes filtr a pomocí ultrafiltrů dokážeme existenci konečně aditivní míry definované na všech podmnožinách přirozených čísel a invariantní vůči posunutí. Formulujeme princip kompaktnosti, který umožňuje přenášet vlastnosti z konečných systémů množin na nekonečné systémy, a ukážeme to na příkladě barevnosti grafů.

8.1 Matematické struktury (grupy, okruhy, grafy, topologické prostory) jsou zpravidla určeny nějakou nosnou množinou, na které jsou vyčleněny některé operace, relace, případně systémy podmnožin.

I když samotné prvky nosné množiny jsou opět množinami, jsou chápány z hlediska uvažované matematické struktury jako individua a nezajímá nás jejich vnitřní množinová struktura. Podstatná je pouze jejich rozlišitelnost.

8.2 Z hlediska teorie množin je základním typem struktura určená množinou X spolu se všemi jejími podmnožinami, to jest potence množiny X. Pro podmnožiny množiny X byly definovány binární operace průniku a sjednocení a operace doplňku do množiny X. Jsou-li $A, B \subseteq X$, víme, že množiny $A \cap B$, $A \cup B$ a $X - A$ patří do $\mathscr{P}(X)$. Množina $X - A$ se nazývá *komplementem množiny* A a budeme místo $X - A$ psát pouze $-A$, pokud bude z kontextu zřejmé, že nejde o doplněk do univerzální třídy.

8.3 Definice. Potenční algebra množin. Množinu $\mathscr{P}(X)$ spolu s binárními operacemi průniku a sjednocení a unární operací komplementu nazýváme *potenční algebrou množin nad množinou* X.

Je-li dána množina X, víme, že množina $\mathscr{P}(X)$ je uspořádaná inkluzí, a podle 5.14(f) tvoří spolu s inkluzí úplný svaz. Připomeňme, že pro $A, B \subseteq X$ jsou všechny následující vztahy ekvivalentní:

$$A \subseteq B, \qquad -B \subseteq -A,$$
$$A \cap B = A, \qquad A \cap -B = 0,$$
$$A \cup B = B, \qquad -A \cup B = X.$$

8.4 V odstavci 5.13 jsme zavedli pojem filtru a ideálu v obecném případě pro uspořádané množiny. Nyní se budeme těmito pojmy podrobněji zabývat ve speciálním případě potenční algebry množin. Podle citované definice je $F \subseteq \mathscr{P}(X)$ filtr, jestliže F je dolů usměrněná horní množina v $\langle \mathscr{P}(X), \subseteq \rangle$. To znamená, že jestliže pro libovolné $A, B \subseteq X$ je $A \in F$ a $A \subseteq B$, pak $B \in F$, protože F je horní množina. Navíc, je-li A i B prvkem F, pak z dolní usměrněnosti plyne existence $C \in F$, $C \subseteq A \cap B$, a tedy také $A \cap B \in F$.

Je zřejmé, že každá část množiny $\mathscr{P}(X)$, která s libovolnými dvěma množinami A, B má za prvek i jejich průnik (je uzavřená na průniky) a spolu s množinou A obsahuje také všechny množiny B takové, že $A \subseteq B \subseteq X$ (je uzavřená na nadmnožiny), je filtr podle definice 5.13.

Duálně, ideál $I \subseteq \mathscr{P}(X)$ je charakterizován uzavřeností na sjednocení dvou množin a uzavřeností na podmnožiny.

Potenční množina $\mathscr{P}(X)$ i prázdná množina jsou současně filtrem a ideálem. Jsou to nezajímavé případy, a proto je v následující definici vyloučíme. Budeme definovat pojem filtru a ideálu na množině, kterým se také říká *vlastní filtr* a *vlastní ideál*.

8.5 Definice. Filtr na množině. Nechť X je neprázdná množina.

(i) Říkáme, že neprázdný systém $\mathscr{F}$ sestávající z podmnožin X je *filtr na množině* X, jestliže pro libovolné $A, B \subseteq X$ platí

(1) $$0 \notin \mathscr{F},$$

(2) $$A, B \in \mathscr{F} \rightarrow A \cap B \in \mathscr{F},$$

(3) $$(A \in F \;\&\; A \subseteq B) \rightarrow B \in \mathscr{F}.$$

(ii) Filtr $\mathscr{F}$, ktery navíc splňuje podmínku

(4) $$A \in \mathscr{F} \vee X - A \in \mathscr{F}$$

pro každé $A \subseteq X$, se nazývá *ultrafiltrem na množině* X.

Pojem ideálu a prvoideálu na množině je duálním pojmem k pojmu filtru a ultrafiltru. To znamená, že definici ideálu získáme nahrazením symbolů $0, \cap, \subseteq$ v podmínkách (1)–(3) po řadě symboly $X, \cup, \supseteq$.

8.6 Definice. Ideál na množině. Nechť X je neprázdná množina.

(i) Říkáme, že neprázdná množina $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ je *ideál na množině* X, jestliže pro libovolné $A, B \subseteq X$ platí

$$X \notin \mathscr{I} .$$

$$A, B \in \mathscr{I} \rightarrow A \cup B \in \mathscr{I} ,$$

$$(A \in \mathscr{I} \;\&\; B \subseteq A) \rightarrow B \in \mathscr{I} .$$

(ii) Ideál $\mathscr{I}$ na X se nazývá *prvoideálem na množině* X, jestliže pro každé $A \subseteq X$ platí

$$A \in \mathscr{I} \vee X - A \in \mathscr{I} .$$

Pojem filtru a ultrafiltru na množině vyslovil F. Riesz již roku 1908. Po více než dvaceti letech tento pojem nezávisle zavedli A. Tarski, H. Cartan a M. H. Stone.

8.7 Všimněme si, že právě zavedené pojmy filtru a ideálu mají smysl pouze na neprázdných množinách. Nechť $\mathscr{F}$ je filtr na X. Pak existuje nějaké $A \in \mathscr{F}$, neboť $\mathscr{F}$ je neprázdný systém, a tedy z (3) plyne, že nosná množina X leží v $\mathscr{F}$. Podmínka (1) je ekvivalentní s požadavkem $\mathscr{F} \neq \mathscr{P}(X)$. Z podmínky (2) plyne indukcí, že pro každou neprázdnou konečnou podmnožinu K filtru $\mathscr{F}$ je $\bigcap K \in \mathscr{F}$; to znamená, že pro každé kladné přirozené n a $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ je také

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{F} .$$

Buď $A \subseteq X$. Pak množiny A a $X - A = -A$ nemohou současně ležet ve filtru $\mathscr{F}$, jinak by z (2) plynulo

$$0 = A \cap -A \in \mathscr{F} ,$$

a to je ve sporu s (1).

8.8 Je-li $\mathscr{F}$ ultrafiltr na X, z předchozího faktu a z (4) plyne, že právě jedna z množin A, $-A$ leží v $\mathscr{F}$. Ukážeme, že pro ultrafiltr $\mathscr{F}$ dále platí:

(5) je-li $A \cup B \in \mathscr{F}$, pak $A \in \mathscr{F}$ nebo $B \in \mathscr{F}$.

Předpokládejme, že $A \cup B \in \mathscr{F}$. Kdyby žádná z množin A, B neležela v ultrafiltru $\mathscr{F}$, pak podle (4) je $-A \in \mathscr{F}$ a $-B \in \mathscr{F}$, a tedy $-A \cap -B = -(A \cup B) \in \mathscr{F}$. To je spor, množina $A \cup B$ a její doplněk nemohou být současně prvkem $\mathscr{F}$.

Indukcí lze vlastnost (5) rozšířit pro konečné soubory; je-li pro kladné přirozené n

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{F} ,$$

pak alespoň jedna z množin A_i leží v ultrafiltru $\mathscr{F}$.

8.9 Duální ideál, duální filtr.

(i) Je-li $\mathscr{F}$ filtr na X, pak systém $\mathscr{F}^* = \{X - A : A \in \mathscr{F}\}$ je ideálem na X a nazývá se *duálním ideálem k filtru* $\mathscr{F}$.

(ii) Je-li $\mathscr{I}$ ideál na X, pak $\mathscr{I}^* = \{X - A : A \in \mathscr{I}\}$ je filtr a nazývá se *duálním filtrem k ideálu* $\mathscr{I}$.

Je zřejme, že $(\mathscr{F}^*)^* = \mathscr{F}$ a $(\mathscr{I}^*)^* = \mathscr{I}$. Filtr $\mathscr{F}$ na X je ultrafiltr, právě když $\mathscr{F}^*$ je prvoideál.

Právě zmíněná dualita mezi ideály a filtry umožňuje zabývat se jen jedním z těchto pojmů. Tvrzení a pojmy týkající se filtru (ideálu) se užitím de Morganových pravidel převádějí na duální ideál (duální filtr). Budeme preferovat ideál před filtrem nebo naopak, podle toho, co bude v dané situaci vhodnější.

8.10 Ideál na množině X slouží jako jeden z možných způsobů matematického vyjádření pojmu „malé" části nebo „malé" podmnožiny množiny X. Je-li $\mathscr{I}$ ideál na X, pak podmnožiny $Y \subseteq X$, které leží v $\mathscr{I}$, můžeme prohlásit za malé.

Jsou v podstatě dvě možnosti, jak definovat velké množiny. Za velké můžeme považovat ty množiny, které nepatří do $\mathscr{I}$, tedy množiny z $\mathscr{P}(X) - \mathscr{I}$, a pak máme všechny podmnožiny množiny X rozděleny na malé a velké. Nebo můžeme za velké považovat pouze množiny ležící v duálním filtru, to jest ty množiny, jejichž doplněk je malý. V tomto případě mohou existovat množiny, které nejsou ani malé, ani velké.

Pro prvoideál obě možnosti dělení na malé a velké podmnožiny splývají. Je-li $\mathscr{I}$ prvoideál, pak množina A neleží v $\mathscr{I}$, právě když A leží v duálním ultrafiltru, to znamená, že je velká.

Různé ideály vyjadřují různé pohledy na to, které části nosné množiny jsou považovány za malé. Uvažujeme-li reálnou přímku $\mathbb{R}$, pak z hlediska míry za malé množiny považujeme množiny Lebesgueovy míry nula, ty tvoří ideál. Z topologického hlediska jsou na $\mathbb{R}$ za malé považovány hubené množiny (viz IV.1.29), které také tvoří ideál.

8.11 Příklady. (a) *Hlavní filtr, triviální ultrafiltr.* Nechť $X \neq 0$. Je-li A neprázdná podmnožina X, pak

$$\{B \subseteq X : A \subseteq B\}$$

je filtr, který se nazývá *hlavní filtr* určený množinou A. Duálně, je-li $A \subseteq X$, $A \neq X$, pak

$$\{B : B \subseteq A\}$$

je *hlavní ideál* určený množinou A.

Je-li $\mathscr{F}$ hlavní filtr určený množinou A, pak duální ideál $\mathscr{F}^*$ je hlavní ideál určený doplňkem $-A$. Hlavní filtr $\mathscr{F}$ určený množinou A je ultrafiltr, právě když A je jednoprvková množina. Jsou-li x, y dva různé prvky z A, pak

$$A = (A - \{x\}) \cup \{x\} \in \mathscr{F},$$

ale žádná z množin $A - \{x\}$, $\{x\}$ není nadmnožinou množiny A. Podle 8.8 pak $\mathscr{F}$ není ultrafiltr.

Naopak hlavní filtr určený kteroukoli jednoprvkovou podmnožinou $\{x\} \subseteq X$ je ultrafiltrem. Je-li B libovolná podmnožina X, potom B nebo $-B$ je prvkem takového hlavního filtru podle toho, zda x je či není prvkem B.

Hlavní ultrafiltr je vždy určen jediným prvkem nosné množiny. Proto se hlavním ultrafiltrům říká triviální ultrafiltry.

Všimněme si, že na konečné množině je každý filtr hlavní; je-li $\mathscr{F}$ filtr na konečné množině, pak $\mathscr{F}$ je konečný systém množin, a proto $A = \bigcap \mathscr{F} \in \mathscr{F}$, to znamená, že $\mathscr{F}$ je hlavní filtr určený množinou A.

(b) *Filtr okolí bodu.* Uvažujme topologický prostor X. Čtenář, který není obeznámen s pojmem topologického prostoru, si může představit eukleidovský prostor nebo metrický prostor. Buď $A \subseteq X$. Říkáme, že množina $V \subseteq X$ je okolím množiny A, jestliže existuje otevřená množina U taková, že $A \subseteq U \subseteq V$.

Systém všech okolí neprázdné množiny A tvoří filtr a nazývá se filtrem okolí množiny A. Speciálně, je-li $x \in X$, pak filtr okolí jednoprvkové množiny $\{x\}$ se nazývá filtr okolí bodu x a označíme ho $\mathscr{F}_x$. Tedy filtr okolí bodu x sestává z nadmnožin otevřených okolí bodu x.

Nepožadujeme, aby okolí bodu nebo okolí množiny bylo samo otevřenou množinou, stačí, že otevřenou množinu obsahuje. Otevřená množina je okolím každého svého bodu. V příkladě 5.14(d) byl definován filtr okolí bodu na reálné přímce. Všimněme si, že souhlasí s obecnou definicí filtru okolí bodu v topologickém prostoru.

Připomeňme, že topologický prostor je Hausdorffův, jestliže ke každým dvěma různým bodům x, y existují disjunktní okolí $U \in \mathscr{F}_x$, $V \in \mathscr{F}_y$. V Hausdorffově topologickém prostoru je filtr okolí bodu x hlavním filtrem, právě když bod x je izolovaný (to znamená, že $\{x\}$ je otevřená množina). V tomto případě je filtr okolí bodu x triviálním ultrafiltrem na X určeným prvkem x.

(c) *Fréchetův filtr na ω.* Nechť $(X, \leq)$ je neprázdná lineárně uspořádaná množina bez největšího prvku. Systém všech shora omezených podmnožin množiny X tvoří ideál.

Víme, že množina přirozených čísel ω je uspořádaná relací $\in$. Shora omezené množiny v $(\omega, \in)$ jsou právě konečné množiny přirozených čísel. Ideál $\mathscr{I}_{\mathrm{F}}$ všech konečných podmnožin množiny ω se nazývá *Fréchetův ideál.* Duální filtr k $\mathscr{I}_{\mathrm{F}}$ se nazývá *Fréchetův filtr* $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$.

Z hlediska Fréchetova ideálu na ω jsou konečné množiny malé a množiny, které mají konečný doplněk, jsou velké. Množina všech sudých přirozených čísel není ani malá, ani velká z hlediska $\mathscr{I}_{\mathrm{F}}$.

Připomeňme obvyklou definici limity posloupnosti reálných čísel. Posloupnost $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ má limitu rovnu a, jestliže pro každé okolí V čísla a skoro všechny členy posloupností leží ve V; přesněji, množina $\{n : a_n \in V\}$ patří do Fréchetova filtru, je velká z hlediska ideálu $\mathscr{I}_{\mathrm{F}}$.

Na tomto místě čtenáře jistě napadne, jak formulovat obecnější pojem limity posloupnosti podle filtru. Budeme se tím zabývat až o několik odstavců dále.

(d) *Hustota množin přirozených čísel.* Pro libovolnou množinu A přirozených čísel a $n \in \omega$ nechť $A(n)$ je počet prvků množiny A, které patří do intrvalu $[0, n]$ všech přirozených čísel menších nebo rovných n. Uvědomme si, že interval $[0, n]$

má $n + 1$ prvků a že podíl $A(n)/(n + 1)$ udává četnost výskytu prvků množiny A v intervalu $[0, n]$. Horní hustota $d^*(A)$ množiny A je definována jako

$$d^*(A) = \limsup_{n \to \infty} A(n)/(n + 1).$$

Podobně dolní hustota množiny A je

$$d_*(A) = \liminf_{n \to \infty} A(n)/(n + 1).$$

Zřejmě každá podmnožina přirozených čísel má horní i dolní hustotu a platí nerovnost

$$0 \leq d_*(A) \leq d^*(A) \leq 1. \tag{6}$$

Existuje-li $\lim_{n \to \infty} A(n)/(n + 1)$, to znamená, že

$$d^*(A) = d_*(A) = d(A),$$

říkáme, že množina A má hustotu $d(A)$.

Existují množiny přirozených čísel, které nemají hustotu. Na druhé straně každá konečná množina má nulovou hustotu. Jsou-li $a, b \in \omega$ a b je kladné, pak množina

$$X = \{a + k \,.\, b : k \in \omega\},$$

tvořená členy nekonečné aritmetické posloupnosti, má hustotu rovnu $1/b$, neboť pro $n > a$ platí

$$\frac{n - a}{b} - 1 \leq X(n) \leq \frac{n - a}{b} + 1,$$

a tedy $\lim X(n)/n = 1/b$.

Jsou-li A, B disjunktní množiny přirozených čísel, pak pro sjednocení $C = A \cup B$ platí $C(n) = A(n) + B(n)$, a tedy

$$d^*(C) \leq d^*(A) + d^*(B). \tag{7}$$

Navíc, existují-li hustoty $d(A)$ a $d(B)$, pak existuje hustota $d(C)$ a platí

$$d(C) = d(A) + d(B).$$

Má-li množina A hustotu $d(A)$, pak i doplněk $-A$ má hustotu a platí

$$d(-A) = 1 - d(A).$$

Tedy speciálně pro kladné číslo p množina B všech čísel, která nejsou dělitelná číslem p, má hustotu

$$d(B) = 1 - 1/p.$$

Lze dokázat, že množina všech prvočísel má nulovou hustotu.

Nechť $\mathscr{D}$ je systém všech množin, které mají nulovou hustotu. Z (6) plyne, že

$A \in \mathscr{D}$, právě když $d^*(A) = 0$. Přitom pro $A \subseteq B$ je $A(n) \leq B(n)$, odkud plyne $d^*(A) \leq d^*(B)$. To znamená, že systém $\mathscr{D}$ je uzavřen na podmnožiny. Zřejmě $d(\omega) = 1$ a $\omega \notin \mathscr{D}$. Uzavřenost $\mathscr{D}$ na sjednocení plyne z (7). Ověřili jsme, že $\mathscr{D}$ je ideál. Do ideálu $\mathscr{D}$ patří kromě všech konečných množin i některé nekonečné množiny, $\mathscr{D}$ je obsažnější než Fréchetův ideál.

(e) *Van der Waerdenův ideál.* Setkáme se se systémy podmnožin přirozených čísel, pro které není snadné ověřit, že tvoří ideál. Uvedeme takový případ.

Říkáme, že množina $A \subseteq \omega$ obsahuje aritmetickou posloupnost délky n, jestliže existují čísla a a kladné d taková, že všechny členy konečné aritmetické posloupnosti

$$a + k \, . \, d \qquad \text{pro} \quad k < n$$

patří do množiny A.

Nechť $\mathscr{W}$ je systém sestávající ze všech podmnožin přirozených čísel, které neobsahují libovolně dlouhé konečné aritmetické posloupnosti.

Je zřejmé, že $\mathscr{I}_F \subseteq \mathscr{W}$ a $\{2^n : n \in \omega\}$ je příkladem nekonečné množiny, která neobsahuje žádnou aritmetickou posloupnost délky 3, patří tedy do $\mathscr{W}$. Je zřejmé, že systém $\mathscr{W}$ je uzavřený na podmnožiny a že ω nepatří do $\mathscr{W}$. To, že systém $\mathscr{W}$ je také uzavřen na sjednocení, vyplývá z následující verze známé van der Waerdenovy věty, jejíž důkaz lze nalézt v knize Graham, Rothschild a Spencer (1980).

Věta. (van der Waerden, 1927). *Obsahuje-li množina přirozených čísel $A = A_1 \cup A_2$ libovolně dlouhé konečné aritmetické posloupnosti, pak alespoň jedna z množin A_1, A_2 má tutéž vlastnost.*

Systém $\mathscr{W}$ je tedy ideál. V (d) jsme zavedli ideál $\mathscr{D}$ množin nulové hustoty. Existuje množina z $\mathscr{D}$, která nepatří do $\mathscr{W}$, je to například množina

$$\bigcup_{n \in \omega} [n^3, n^3 + n],$$

která je sjednocením nekonečně mnoha intervalů rostoucí délky.

Hluboký výsledek Z. Szemerediho z roku 1975 ukazuje, že $\mathscr{W} \subset \mathscr{D}$, to znamená, že každá množina přirozených čísel s kladnou horní hustotou obsahuje libovolně dlouhé konečné aritmetické posloupnosti. Víme, že množina všech prvočísel leží v $\mathscr{D}$. Zda množina všech prvočísel patří také do $\mathscr{W}$, je otevřený problém, který je považován za velmi obtížný, až beznadějný.

8.12 Označení. Víme, že algebra všech podmnožin libovolné množiny X je úplný svaz při uspořádání inkluzí. Infimum libovolného neprázdného systému $F \subseteq \mathscr{P}(X)$ vzhledem k inkluzi je rovno $\bigcap F$. Je-li F prázdný, infimum F je X. Bude-li z kontextu zřejmé, že se zabýváme podmnožinami určité množiny X, infimum prázdného systému množin budeme označovat průnikem stejně jako infimum neprázdného systému.

Dále se budeme zajímat o systémy množin, které určují filtr.

8.13 Definice. Báze filtru. Generátory filtru. Nechť $\mathscr{F}$ je filtr na X.

(i) Množina $B \subseteq \mathscr{F}$ se nazývá *báze filtru* $\mathscr{F}$, jestliže každá množina z filtru $\mathscr{F}$ je nadmnožinou nějaké množiny z B, to znamená, jestliže

$$(\forall Y \in \mathscr{F})(\exists Z \in B)(Z \subseteq Y).$$

(ii) Množina $S \subseteq \mathscr{F}$ se nazývá *množinou generátorů filtru* $\mathscr{F}$, jestliže systém všech průniků konečně mnoha množin z S tvoří bázi filtru $\mathscr{F}$, neboli

$$(\forall A \in \mathscr{F})(\exists S_0 \in [S]^{<\omega})(\bigcap S_0 \subseteq A).$$

Říkáme také, že S generuje filtr $\mathscr{F}$.

8.14 Definice. Centrovaný systém. Buď S nějaký systém podmnožin množiny X. Říkáme, že S je *centrovaný systém* na X, jestliže průnik každého konečného podsystému $S_0 \subseteq S$ je neprázdný.

Z úmluvy 8.12 plyne, že prázdný systém na X je centrovaný právě tehdy, když X je neprázdná množina. Je-li S neprázdný systém, pak centrovanost systému S požaduje, aby pro každé kladné přirozené n a $A_1, \ldots, A_n \in S$ platilo $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq$ $\neq 0$.

Každý filtr je svou bází a také je centrovaným systémem, který s každou množinou obsahuje i všechny nadmnožiny. Naopak, je-li $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ centrovaný systém, pak

$$\mathscr{F}(S) = \{Y \subseteq X : (\exists S_0 \in [S]^{<\omega})(\bigcap S_0 \subseteq Y)\}$$

je filtr na X a je to navíc vůči inkluzi nejmenší filtr na X obsahující systém S. Všimněme si, že množina všech průniků konečných podsystémů centrovaného systému S tvoří bázi filtru $\mathscr{F}(S)$, a tedy filtr $\mathscr{F}(S)$ je generován systémem S. Centrovaný systém S na množině X jednoznačně určuje filtr $\mathscr{F}(S)$, který je tímto systémem generovaný.

8.15 Příklady. (a) Nechť $(X, \leq)$ je nahoru usměrněná uspořádaná množina. Potom $S = \{[x, \rightarrow) : x \in X\}$ je centrovaný systém na X. Z usměrněnosti uspořádání plyne, že pro konečně mnoho $x_1, \ldots, x_n \in X$ existuje $y \in X$ takové, že $y \geq x_i$. To znamená, že $[y, \rightarrow) \subseteq [x_1, \rightarrow) \cap \ldots \cap [x_n, \rightarrow)$, a tedy S je bází filtru $\mathscr{F}(S)$, který je systémem S generován.

(b) Bázi filtru okolí bodu x v topologickém prostoru, jak byl definován v 8.11(b), tvoří všechny otevřené množiny prostoru obsahující bod x.

(c) Množiny reálných čísel Lebesgueovy míry nula a současně typu G_δ (to znamená průniky spočetně mnoha otevřených množin) tvoří bázi ideálu všech množin Lebesgueovy míry nula.

(d) Existuje soubor $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ množin přirozených čísel takový, že

(i) pruniky libovolných tří množin souboru jsou neprázdné,

(ii) pruniky alespoň čtyř množin souboru jsou prázdné.

Je zřejmé, že stačí sestrojit takový soubor na nějaké spočetné množině. Uvažujme množinu $X = [\omega]^3$ sestávající ze všech tříprvkových podmnožin přirozených čísel. Množina X je spočetná. Pro každé přirozené n položme

$$A_n = \{a \in X\,; n \in a\}.$$

Množina A_n sestává z těch tříprvkových množin, které mají číslo n jako svůj prvek. Ověříme, že soubor $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ podmnožin množiny X má vlastnosti (i) a (ii). Pro různá $i, j, k \in \omega$ průnik $A_i \cap A_j \cap A_k$ sestává z jediné tříprvkové množiny $\{i, j, k\}$, je tedy neprázdný. Uvažujeme-li čtyři množiny, například $A_0, \ldots, A_3$, pak $A_0 \cap \ldots \cap A_3 = 0$, protože žádná tříprvková množina neobsahuje čtyři různé prvky 0, 1, 2, 3.

Požadovali jsme, aby soubor s vlastnostmi (i) a (ii) byl nekonečný, a použitím Dirichletova principu snadno odvodíme, že všechny množiny souboru musí být nekonečné. Čtenář si zajisté uvědomil, že číslo tři nehraje důležitou roli a může být nahrazeno libovolným kladným přirozeným číslem.

8.16 Rozšiřování filtrů. Uvažujme pevnou neprázdnou množinu X a všechny filtry na X. Filtr $\mathscr{F}$ na X sestává z některých částí množiny X, tedy $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Obsahuje-li filtr $\mathscr{F}_1$ všechny části množiny X, které obsahuje filtr $\mathscr{F}_2$, to znamená, je-li $\mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{F}_1$, říkáme, že $\mathscr{F}_1$ *rozšiřuje* $\mathscr{F}_2$.

Množina všech filtrů na X je uspořádaná inkluzí. Podstatné je, že při tomto uspořádání jsou splněny podmínky principu maximality 7.10, neboť je-li S neprázdný systém filtrů lineárně uspořádaný inkluzí, pak i $\bigcup S$ je filtr.

Z principu maximality pak plyne existence maximálních filtrů a dokonce to, že každý filtr lze rozšířit do maximálního filtru.

Je zřejmé, že $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$, právě když pro duální ideály platí $\mathscr{F}_1^* \subseteq \mathscr{F}_2^*$. To znamená, že předchozí úvahy lze přenést i na ideály.

8.17 Lemma. *Filtr $\mathscr{F}$ je maximální, právě když $\mathscr{F}$ je ultrafiltr.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{F}$ je maximální filtr na X. Potřebujeme ukázat, že pro libovolnou $A \subseteq X$ je $A \in \mathscr{F}$ nebo $-A \in \mathscr{F}$. Předpokládejme, že pro nějaké A to neplatí. Pak $\mathscr{F} \cup \{A\}$ je centrovaný systém, neboť pro žádné $Y \in \mathscr{F}$ není $Y \subseteq -A$, a tedy $Y \cap A \neq 0$. Filtr $\mathscr{F}_1$ generovaný systémem $\mathscr{F} \cup \{A\}$ je vlastním rozšířením filtru $\mathscr{F}$ a dostáváme spor s maximalitou $\mathscr{F}$. Tedy $\mathscr{F}$ je ultrafiltrem na X. Naopak, nechť $\mathscr{F}$ je ultrafiltr na X. Kdyby existoval filtr $\mathscr{F}_1$ rozšiřující $\mathscr{F}$ a $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}_1$, pak pro $A \in \mathscr{F}_1 - \mathscr{F}$, které neleží v ultrafiltru $\mathscr{F}$, platí $-A \in \mathscr{F}$, a tedy A i $-A$ patří do $\mathscr{F}_1$, což není možné pro žádný filtr. Ukázali jsme, že ultrafiltr je maximální filtr vůči inkluzi.

Duální tvrzení pro ideály je nasnadě. Vidíme, že pojmy ultrafiltr a prvoideál na množině jsou synonyma pro maximální filtr a maximální ideál. Pomocí axiomu výběru, přesněji z principu maximality, jsme ukázali, že každý filtr lze rozšířit do maximálního filtru (ultrafiltru). Uvědomíme-li si, že každý centrovaný systém generuje nějaký filtr, následující tvrzení je dokázáno.

8.18 Základní věta o ultrafiltrech. *Každý centrovaný systém S na množině X lze rozšířit do nějakého ultrafiltru $\mathscr{F}$ na X.*

8.19 Označení. βX označuje množinu všech ultrafiltrů na X. Protože každý triviální ultrafiltr na množině X můžeme ztotožnit s nějakým prvkem $x \in X$, budeme množinu všech netriviálních ultrafiltrů na X značit $\beta X - X$.

8.20 Definice. Uniformní filtr. Říkáme, že filtr $\mathscr{F}$ na X je uniformní, jestliže každá množina z $\mathscr{F}$ má stejnou mohutnost jako nosná množina X. Množinu všech uniformních ultrafiltrů na X označíme $\mathscr{U}(X)$. Uvědomme si, že filtr na ω je uniformní, právě když sestává jen z nekonečných množin. Na ω splývají pojmy netriviální ultrafiltr a uniformní ultrafiltr.

8.21 Existence netriviálních ultrafiltrů. Na konečné množině jsou všechny ultrafiltry triviální. Základní věta o ultrafiltrech 8.18 zaručuje existenci nějakého ultrafiltru na ω, který rozšiřuje Fréchetův filtr $\mathscr{F}_F$. Uvědomíme-li si, že ultrafiltr na ω rozšiřuje Fréchetův filtr, právě když je netriviální, dokázali jsme, že množina $\beta\omega - \omega$ je neprázdná.

Podobně se dokáže, že každý uniformní filtr $\mathscr{G}$ na ω lze rozšířit do uniformního ultrafiltru, neboť $C = \mathscr{G} \cup \mathscr{F}_F$ je centrovaný systém na ω a každý filtr, který je nadmnožinou C, je uniformní.

Obecněji, pro každou nekonečnou množinu X je $\mathscr{I} = [X]^{<\omega}$ ideál na X a každý ultrafiltr na X, který rozšiřuje duální filtr $\mathscr{I}^*$, je netriviální, tedy z 8.18 plyne $\beta X - X \neq 0$.

Ukázali jsme, že $\beta\omega - \omega = \mathscr{U}(\omega)$. Jsou-li dány nespočetná množina X, její spočetná podmnožina A a netriviální ultrafiltr $\mathscr{F}$ na A, je snadné ověřit, že

$$\mathscr{F}_1 = \{B \subseteq X : B \cap A \in \mathscr{F}\}$$

je netriviální ultrafiltr na X, který není uniformní, protože $A \in \mathscr{F}_1$ a množiny A a X mají různou mohutnost. Pro libovolnou nespočetnou množinu X tedy platí $\mathscr{U}(X) \subsetneqq \subsetneqq \beta X - X$.

Nyní víme, že existují netriviální ultrafiltry na libovolné nekonečné množině, ale žádný takový ultrafiltr jsme nepopsali.

Uvědomme si, že základní věta o ultrafiltrech je důsledkem principu maximality, který je ekvivalentní s axiomem výběru. Pokud nepřijmeme axiom výběru nebo alespoň základní větu o ultrafiltrech jako další axiom teorie množin, můžeme bezesporně předpokládat, že na každé množině existují jen triviální ultrafiltry.

Chceme čtenáře přesvědčit, že netriviální ultrafiltry mohou být užitečné v kombinatorice, topologii a v algebře. V dalším proto budeme předpokládat platnost základní věty o ultrafiltrech, která je speciálním případem principu maximality.

8.22 Limita posloupnosti podle filtru. Připomeňme, že posloupnost

$$\langle x_n : n \in \omega \rangle \tag{8}$$

bodů nějakého prostoru P je zobrazení $f: \omega \to P$, pro které $f(n) = x_n$. V příkladě 8.11(c) jsme připomněli vztah limity posloupnosti k Fréchetovu filtru. Je-li dán nějaký filtr $\mathscr{F}$ na ω, obvyklý pojem limity posloupnosti rozšíříme tím, že za velké množiny přirozených čísel budeme považovat množiny z filtru $\mathscr{F}$.

8.23 Definice. $\mathscr{F}$-limita posloupnosti. Nechť $\mathscr{F}$ je filtr na ω a P je topologický prostor. Říkáme, že bod $a \in P$ je *limitou posloupnosti* (8) *podle filtru* $\mathscr{F}$ nebo že *posloupnost* (8) *konverguje k* a *podle* $\mathscr{F}$, a píšeme

$$\mathscr{F}\text{-}\lim x_n = a\,, \tag{9}$$

jestliže pro každé okolí V bodu a skoro všechny členy posloupnosti leží ve V, to znamená, že

$$\{n : x_n \in V\} \in \mathscr{F}\,.$$

8.24 Obvyklý pojem limity posloupnosti odpovídá limitě podle Fréchetova filtru a v tomto případě budeme místo (9) psát

$$\lim x_n = a\,.$$

Pokud filtr $\mathscr{G}$ rozšiřuje filtr $\mathscr{F}$ a platí-li $\mathscr{F}\text{-}\lim x_n = a$, pak také $\mathscr{G}\text{-}\lim x_n = a$. Tento fakt plyne z definice 8.23. Speciálně, existuje-li obvyklá limita a $\lim x_n = a$, pak pro každý filtr $\mathscr{F}$ rozšiřující Fréchetův filtr je také $\mathscr{F}\text{-}\lim x_n = a$. Existují však $\mathscr{F}$-limity posloupností, které v obvyklém smyslu nekonvergují.

8.25 Příklady. (a) Posloupnost čísel $(-1)^n$ je jednoduchým příkladem posloupnosti, která nemá limitu. Avšak pro každý filtr $\mathscr{F}$, ve kterém leží množina všech sudých čísel, platí

$$\mathscr{F}\text{-}\lim (-1)^n = 1\,.$$

(b) Je-li $\mathscr{F}$ triviální ultrafiltr na ω určený přirozeným číslem k, pak pro každou posloupnost (8) je

$$\mathscr{F}\text{-}\lim x_n = x_k\,.$$

(c) *Hromadné body posloupnosti.* Nechť (8) je posloupnost bodů nějakého topologického prostoru. Je-li $\mathscr{G}$ uniformní filtr na ω a platí-li

$$\mathscr{G}\text{-}\lim x_n = a\,, \tag{10}$$

pak v každém okolí bodu a leží nekonečně mnoho členů posloupnosti x_n. To znamená, že a je hromadným bodem posloupnosti (8).

Na druhou stranu, je-li a hromadným bodem posloupnosti (8), pak existuje uniformní filtr $\mathscr{G}$ na ω, pro který platí (10). Stačí, vezmeme-li centrovaný systém S_a sestávající z množin

$$A_V = \{n : a_n \in V\}\,,$$

kde V je libovolné okolí bodu a. Protože a je hromadným bodem, A_V je nekonečná množina. Pro libovolná dvě okolí V, W bodu a je

$$A_{V \cap W} = A_V \cap A_W .$$

To znamená, že systém S_a je uzavřen na průniky. Filtr $\mathcal{G}$ generovaný systémem S_a je uniformní a platí (10).

8.26 Z vlastností filtrů plynou i další vlastnosti $\mathcal{F}$-limit dobře známé pro obvyklé limity posloupností reálných čísel.

Pokud topologický prostor P je Hausdorffův, pak posloupnost bodů prostoru P může mít nejvýše jednu limitu podle daného filtru. Kdyby pro nějaký filtr $\mathcal{F}$ platilo $\mathcal{F}\text{-}\lim x_n = a$, $\mathcal{F}\text{-}\lim x_n = b$ a $a \neq b$, pak pro disjunktní okolí U, V bodů a, b by množiny $\{n: x_n \in U\}$ a $\{m: x_m \in V\}$ z $\mathcal{F}$ byly disjunktní a to není možné.

Předpokládejme, že v topologickém prostoru P je definována spojitá binární operace, označme ji $\oplus$. Jestliže $\mathcal{F}\text{-}\lim x_n = a$ a $\mathcal{F}\text{-}\lim y_n = b$, pak $\mathcal{F}\text{-}\lim (x_n \oplus y_n) = a \oplus b$. Speciálně, operace sčítání a násobení reálných čísel jsou spojité, a proto pro každý filtr $\mathcal{F}$ na ω a libovolné posloupnosti x_n, y_n reálných čísel platí

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\text{-}\lim (x_n + y_n) = \mathcal{F}\text{-}\lim x_n + \mathcal{F}\text{-}\lim y_n , \\ &\mathcal{F}\text{-}\lim (x_n \cdot y_n) = (\mathcal{F}\text{-}\lim x_n) . (\mathcal{F}\text{-}\lim y_n) , \end{aligned} \tag{11}$$

pokud limity na pravých stranách existují.

Ultrafiltr je extrémním případem filtru a to se promítá i do existence $\mathcal{F}$-limit. V důkazu následujícího tvrzení použijeme Cantorův princip vložených intervalů, který říká, že libovolná posloupnost $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ do sebe zařazených uzavřených intervalů reálných čísel, jejichž délka konverguje k nule, má v průniku právě jeden bod.

8.27 Věta. *Každá posloupnost reálných čísel má jednoznačně určenou (vlastní nebo nevlastní) $\mathcal{F}$-limitu pro libovolný ultrafiltr $\mathcal{F}$ na ω.*

Speciálně, každá omezená posloupnost má vlastní $\mathcal{F}$-limitu pro libovolný ultrafiltr $\mathcal{F}$ na ω.

Důkaz. Nechť $f: \omega \to \mathbb{R}$ je posloupnost reálných čísel. Buď $\mathcal{F}$ ultrafiltr na ω. Budeme diskutovat tři vzájemně se vylučující případy.

(i) Existuje množina $A \in \mathcal{F}$, na které je funkce f konstantní. Nechť a je hodnota, kterou funkce f nabývá na množině A. Potom

$$\mathcal{F}\text{-}\lim_n f(n) = a .$$

Všimněme si, že do tohoto případu spadá triviální ultrafiltr.

(ii) *Funkce f není omezená na žádné množině z $\mathcal{F}$.* Pak buď $f^{-1}{}''[0, \rightarrow) \in \mathcal{F}$ a v tomto případě je

$$\mathcal{F}\text{-}\lim f(n) = +\infty ,$$

nebo $f^{-1}''(\leftarrow, 0] \in \mathscr{F}$ a v tomto případě je

$$\mathscr{F}\text{-}\lim f(n) = -\infty .$$

(iii) Nenastane žádný z případů (i) a (ii). Pak existuje uzavřený interval I_0 reálných čísel takový, že množina $A_0 = f^{-1}[I_0]$ leží v $\mathscr{F}$, tedy f je omezená na A_0 a přitom f není konstantní na žádné množině z $\mathscr{F}$.

Interval I_0 rozpůlíme a získáme dva uzavřené podintervaly J_1, J_2. Ověříme, že právě jedna z množin $A_1 = f^{-1}[J_1]$, $A_2 = f^{-1}[J_2]$ leží v ultrafiltru $\mathscr{F}$. Předně $A_1 \cup A_2 = A_0$ a $A_0 \in \mathscr{F}$, tedy z vlastnosti (5) ultrafiltrů plyne, že alespoň jedna z množin A_i náleží do $\mathscr{F}$. Kdyby obě množiny ležely v $\mathscr{F}$, pak f je konstantní na množině $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$, ale tento případ jsme vyloučili. Označíme I_1 ten z intervalů J_i, pro který platí $A_i \in \mathscr{F}$. Dále postupujeme indukcí; půlíme intervaly I_n a ultrafiltr určí, který z polovičních intervalů bude interval I_{n+1}. Získáme tak posloupnost do sebe zařazených uzavřených intervalů

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots ,$$

jejichž délka konverguje k nule. Podle Cantorova principu vložených intervalů existuje jediné číslo $a \in \bigcap \{I_n : n < \omega\}$.

Zbývá nahlédnout, že

$$\mathscr{F}\text{-}\lim f(n) = a .$$

Nechť V je okolí čísla a. Protože délka intervalů I_n konverguje k nule, existuje přirozené k, pro které platí $I_k \subseteq V$. Zřejmě

$$f^{-1}[I_k] \subseteq \{n : f(n) \in V\} , \qquad f^{-1}[I_k] \in \mathscr{F} ,$$

neboť tak byly intervaly I_n konstruovány. To znamená, že

$$\{n : f(n) \in V\} \in \mathscr{F} .$$

Jednoznačnost $\mathscr{F}$-limity plyne z toho, že uvažovaná topologie reálné přímky $\mathbb{R}$ je Hausdorffova.

Je-li posloupnost omezená, odpadá případ (ii) a posloupnost má vlastní $\mathscr{F}$-limitu.

8.28 Konečně aditivní míry na algebře $\mathscr{P}(\omega)$. Vraťme se k příkladu 8.11(d), kde byl zaveden ideál množin nulové hustoty a pojmy dolní a horní hustota pro $A \subseteq \omega$. V citovaném příkladě jsme uvažovali posloupnost relativních četností množiny $A \subseteq \omega$

$$\langle A(n)/(n+1) : n \in \omega \rangle , \tag{12}$$

kde $A(n)$ je počet prvků konečné množiny $A \cap [0, n]$.

Vezměme pevný ultrafiltr $\mathscr{F}$ na ω a podívejme se, co dostaneme, budeme-li uvažovat $\mathscr{F}$-limity posloupností (12).

Podle věty 8.27 pro každou množinu $A \subseteq \omega$ existuje jednoznačně určené číslo

$$\eta_{\mathscr{F}} A = \mathscr{F}\text{-}\lim_n A(n)/(n+1) \tag{13}$$

a zřejmě platí

$$\eta_{\mathscr{F}} 0 = 0\,, \qquad \eta_{\mathscr{F}} \omega = 1\,, \qquad 0 \leq \eta_{\mathscr{F}} A \leq 1\,.$$

Jsou-li množiny A, B disjunktní a $C = A \cup B$, potom

$$C(n) = A(n) + B(n)$$

a podle (11) je $\mathscr{F}$-limita součtu posloupností rovna součtu $\mathscr{F}$-limit, tedy

$$\eta_{\mathscr{F}} C = \eta_{\mathscr{F}} A + \eta_{\mathscr{F}} B\,.$$

Dále je zřejmé, že pro $A \subseteq B$ je $\eta A \leq \eta B$. Funkce $\eta_{\mathscr{F}} : \mathscr{P}(\omega) \to \mathbb{R}$ připomíná míru definovanou na $\mathscr{P}(\omega)$.

8.29 Definice. Míra na $\mathscr{P}(\omega)$. Říkáme, že funkce $\eta : \mathscr{P}(\omega) \to \mathbb{R}$ *je* (*konečně aditivní*) *míra na* $\mathscr{P}(\omega)$, jestliže platí

$$\eta 0 = 0\,, \qquad \eta\omega > 0\,, \tag{14}$$

$$A \subseteq B \to \eta A \leq \eta B\,, \tag{15}$$

$$A \cap B = 0 \to \eta(A \cup B) = \eta A + \eta B\,. \tag{16}$$

Říkáme, že A je *η-nulová množina*, jestliže $\eta A = 0$. Dvě míry se nazývají ekvivalentní, mají-li stejné nulové množiny. Míru η nazýváme *normovanou* nebo *pravděpodobnostní mírou*, jestliže platí $\eta\omega = 1$.

8.30 Všimněme si, že podle 8.29 míra přiřazuje každé podmnožině přirozených čísel nějaké nezáporné reálné číslo, neboť podle (15) a (14) je $\eta A \geq \eta 0 = 0$. Nevlastní hodnotu $+\infty$ jako míru nějaké množiny nepřipouštíme. Takovým mírám se říká konečné.

Indukcí podle n se z (16) dokáže

$$\eta(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \eta A_i\,, \tag{17}$$

pokud $A_1, \ldots, A_n$ jsou po dvou disjunktní množiny. Nepožadujeme však, aby míra byla σ-aditivní, to znamená, aby (17) platilo i pro každý spočetný disjunktní soubor množin. Proto mluvíme o konečně aditivní míře.

Každá konečná míra ν na $\mathscr{P}(\omega)$ je ekvivalentní s nějakou normovanou mírou η, stačí položit

$$\eta A = \frac{\nu A}{\nu\omega}\,.$$

Vidíme, že funkce $\eta_{\mathscr{F}}$ definovaná pro daný ultrafiltr $\mathscr{F}$ vztahem (13) je normovaná míra na $\mathscr{P}(\omega)$. Uvedeme další příklady měr.

8.31 Příklady. (a) *Dvouhodnotové míry.* Každá míra na $\mathscr{P}(\omega)$ nabývá alespoň dvou různých hodnot. Speciálně normovaná míra musí nabývat hodnoty 0 pro prázdnou množinu a hodnoty 1 pro celé ω. Nabývá-li míra jen dvou hodnot, 0 a 1, říkáme, že je dvouhodnotová.

Nechť η je dvouhodnotová míra. Potom systém

$$\mathscr{G} = \{A \subseteq \omega : \eta A = 1\}$$

je ultrafiltr na ω. Naopak, je-li $\mathscr{G}$ ultrafiltr na ω, pak charakteristická funkce množiny $\mathscr{G}$ definovaná na $\mathscr{P}(\omega)$ je dvouhodnotová míra. Existuje tedy vzájemně jednoznačná korespondence mezi ultrafiltry na ω a dvouhodnotovými mírami na $\mathscr{P}(\omega)$.

(b) *Váhové míry.* Nechť f je posloupnost nezáporných reálných čísel. Říkáme, že f je *váhová funkce na* ω, jestliže $\sum f(n)$ konverguje a $f(n) > 0$ alespoň pro jedno přirozené n. Je-li f váhová funkce a položíme-li

$$\eta A = \sum_{n \in A} f(n) \tag{18}$$

pro libovolnou množinu $A \subseteq \omega$, dostaneme míru na $\mathscr{P}(\omega)$. Říkáme, že η je váhová míra.

Můžeme si představit, že funkce f přiřazuje hmotnost každému prvku $n \in \omega$ a že míra množiny je součtem hmotností jejich prvků.

Z absolutní konvergence řady $\sum f(n)$ dále vyplývá, že míra definovaná podle (18) je σ-aditivní. Není obtížné nahlédnout, že σ-aditivní míry na $\mathscr{P}(\omega)$ jsou právě všechny váhové míry.

V podmínce (14) jsme požadovali, aby míra množiny ω byla kladná. Odtud plyne, že míra, pro kterou jsou všechny jednoprvkové, a tedy i konečné, množiny nulovými množinami, nemůže být σ-aditivní. To znamená, že dvouhodnotová míra je σ-aditivní, právě když množiny míry jedna tvoří triviální ultrafiltr.

(c) *Ideál nulových množin.* Je-li η míra na $\mathscr{P}(\omega)$, označíme $\mathscr{I}_\eta$ systém všech η-nulových množin; to znamená, že

$$\mathscr{I}_\eta = \{A \subseteq \omega : \eta A = 0\} .$$

Z aditivnosti míry η vyplývá, že $\mathscr{I}_\eta$ je ideál na ω. Speciálně pro dvouhodnotovou míru η je $\mathscr{I}_\eta$ prvoideál. Tedy každá míra na $\mathscr{P}(\omega)$ určuje nějaký ideál na ω. Můžeme se ptát, zda každý ideál na ω je určen nějakou mírou, to znamená, zda každý ideál sestává ze všech nulových množin nějaké míry na $\mathscr{P}(\omega)$. Není obtížné ukázat, že Fréchetův ideál a ideál množin nulové hustoty jsou příklady ideálů, které nejsou určeny žádnou mírou.

Připomeňme, že každý ideál rozděluje podmnožiny na malé a ne-malé. Míra umožňuje jemnější klasifikaci množin podle velikosti.

8.32 Míry rozšiřující hustotu. Ověříme další vlastnosti konečně aditivní míry $\eta_{\mathscr{F}}$ definované vztahem (13), které závisí na volbě ultrafiltru $\mathscr{F}$ na ω.

Je-li $\mathscr{F}$ triviální ultrafiltr určený číslem $k \in \omega$, potom $\eta_{\mathscr{F}}$ je váhová míra s vahou $f(n) = 1/(k + 1)$ pro $n \leq k$ a $f(n) = 0$ pro $n > k$.

Zajímavější je případ netriviálního ultrafiltru. Předpokládejme, že ultrafiltr $\mathscr{F}$ rozšiřuje Fréchetův filtr. Potom podle 8.24 platí

$$\eta_{\mathscr{F}} A = d(A)$$

pro každou množinu A, která má hustotu. Říkáme, že míra $\eta_{\mathscr{F}}$ rozšiřuje hustotu.

Nechť s je zobrazení, které každému přirozenému číslu přiřazuje následníka, to znamená

$$s(n) = n + 1 .$$

Je-li $A \subseteq \omega$, množina $B = s^{-1}[A]$ vznikne posunutím množiny A o jedničku doleva (s případným vynecháním -1, je-li $0 \in A$). Je zřejmé, že $B(n)/(n + 1)$ se liší od $A(n)/(n + 1)$ nejvýše o $1/(n + 1)$. Odtud pro limity relativních četností podle $\mathscr{F}$ plyne

$$\eta_{\mathscr{F}}(A) = \eta_{\mathscr{F}} s^{-1}[A] .$$

Říkáme, že míra $\eta_{\mathscr{F}}$ je invariantní vzhledem k posunutí.

Pro každé $A \subseteq \omega$ platí

$$d_*(A) \leq \eta_{\mathscr{F}} A \leq d^*(A) ,$$

neboť $\eta_{\mathscr{F}} A$ je podle 8.25(c) nějaký hromadný bod posloupnosti (11), zatímco $d_*(A)$ je nejmenší a $d^*(A)$ největší hromadný bod této posloupnosti. Je-li $d^*(A) > 0$, to znamená, nemá-li A nulovou hustotu, pak podle 8.25(c) existuje uniformní filtr $\mathscr{G}$ takový, že

$$\mathscr{G}\text{-lim } A(n)/(n + 1) = d^*(A) .$$

Tedy platí

$$\eta_{\mathscr{F}}(A) = d^*(A) > 0$$

pro každý uniformní ultrafiltr $\mathscr{F}$ rozšiřující $\mathscr{G}$.

Následující věta shrnuje, co jsme právě dokázali.

8.33 Věta. *Je-li $\mathscr{F}$ netriviální ultrafiltr na ω, pak $\eta_{\mathscr{F}}$ je konečně aditivní míra na $\mathscr{P}(\omega)$, která rozšiřuje hustotu a je invariantní vzhledem k posunutí. Navíc, pro každou množinu přirozených čísel A, která má nenulovou horní hustotu, existuje netriviální ultrafiltr $\mathscr{F}$ takový, že $\eta_{\mathscr{F}} A > 0$.*

Existence konečně aditivních měr s uvedenými vlastnostmi i níže uvedený příklad Banachovy limity se obvykle dokazují pomocí Hahnovy–Banachovy věty ve funkcionální analýze. Ukázali jsme, že ve speciálním případě lze tvrzení dokázat jednoduššími prostředky.

8.34 Banachova limita. Nechť l^∞ je lineární prostor všech omezených posloupností reálných čísel. Je-li $f \in l^\infty$ a s je zobrazení z 8.32, potom posloupnost fs, pro kterou platí $(fs)(n) = f(n+1)$, je také prvkem l^∞. Ukážeme, že existuje zobrazení LIM prostoru l^∞ do reálných čísel $\mathbb{R}$, které splňuje následující podmínky pro libovolná $f, g \in l^\infty$ a $c, d \in R$.

(i) $\mathrm{LIM}(c \cdot f + d \cdot g) = c \cdot \mathrm{LIM}\, f + d \cdot \mathrm{LIM}\, g$,

(ii) $\mathrm{LIM}\, f \geq 0$, jakmile $f(n) \geq 0$ pro každé n,

(iii) $\mathrm{LIM}\, f = \mathrm{LIM}(fs)$,

(iv) existuje-li obvyklá limita posloupnosti f, pak $\mathrm{LIM}\, f = \lim f$.

Podle (i)–(iv) je LIM lineární kladný funkcionál na prostoru l^∞, který je invariantní vůči posunutí a rozšiřuje obvyklou limitu posloupnosti. Takový funkcionál se nazývá Banachovou limitou.

Ke konstrukci Banachovy limity na l^∞ stačí vzít libovolný netriviální ultrafiltr $\mathcal{F}$ na ω a pro $f \in l^\infty$ definovat $\mathrm{LIM}\, f$ jako $\mathcal{F}$-limitu částečných aritmetických průměrů posloupnosti f, přesněji

$$\mathrm{LIM}\, f = \mathcal{F}\text{-}\lim_n \frac{f(0) + f(1) + \ldots + f(n)}{n+1}.$$

Tato definice má smysl, protože posloupnost částečných aritmetických průměrů libovolné $f \in l^\infty$ je také omezená a podle 8.27 má jednoznačně určenou vlastní $\mathcal{F}$-limitu.

Je zřejmé, že LIM je kladný funkcionál, a ze vztahů (11) vyplývá, že je lineární. Abychom dokázali, že LIM je invariantní vzhledem k posunutí, uvědomme si, že aritmetické průměry prvních n členů posloupnosti f a fs se liší o hodnotu $|f(0) - f(n+1)|/(n+1)$ a že tento rozdíl konverguje k nule, protože f je omezená posloupnost.

Vlastnost (iv) je důsledkem známého faktu z analýzy: konvergentní posloupnost konverguje ke své limitě i v průměru.

Z předchozího je zřejmé, že funkcionál LIM závisí na volbě ultrafiltru $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(\omega)$, ze kterého byl sestrojen. Všimněme si, že pro charakteristickou funkci χ_A kterékoli množiny $A \subseteq \omega$ platí

$$\mathrm{LIM}\, \chi_A = \eta_{\mathcal{F}} A,$$

kde $\eta_{\mathcal{F}}$ je míra na $\mathcal{P}(\omega)$ definovaná vztahem (13).

To znamená, že Banachova limita určená ultrafiltrem $\mathcal{F}$ je rozšířením konečně aditivní míry $\eta_{\mathcal{F}}$ z věty 8.33. Mezi Banachovou limitou a $\eta_{\mathcal{F}}$ je tedy podobný vztah jako mezi integrálem a mírou.

8.35 Budeme se dále zabývat principem kompaktnosti, který umožňuje přenášet některé vlastnosti konečných podsouborů na celý nekonečný soubor množin. Princip kompaktnosti byl formulován jako samostatné tvrzení na přelomu 40. a 50. let.

Nejprve zavedeme pomocné pojmy. Mějme soubor množin

$$A = \langle A_i \colon i \in I \rangle .$$

Uvažujme systém S, který sestává z částečných selektorů souboru A, to znamená z některých zobrazení f, jejichž definiční obor je částí indexové množiny I a pro každé $i \in \mathrm{Dom}(f)$ je $f(i) \in A_i$.

Říkáme, že *systém S pokrývá konečné podmnožiny I*, jestliže pro každou konečnou část u množiny I existuje $f \in S$ takové, že $u \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Zobrazení g nazýváme *filtrovaným prodloužením systému S*, jestliže g je definováno na celé množině I a konečné části zobrazení g jsou vymezeny systémem S, přesněji

$$(\forall u \in [I]^{<\omega})(\exists f \in S)(f \mid u = g \mid u) .$$

Je zřejmé, že filtrované prodloužení systému S, pokud existuje, je prvkem kartézského součinu $\bigtimes \langle A_i \colon i \in I \rangle$.

K důkazu principu kompaktnosti použijeme základní větu o ultrafiltrech 8.18.

8.36 Věta. Princip kompaktnosti. *Jsou-li všechny množiny A_i souboru $\langle A_i \colon i \in I \rangle$ konečné, pak každý systém částečných selektorů pokrývající konečné podmnožiny I má filtrované prodloužení.*

Důkaz. Nechť S je systém pokrývající konečné podmnožiny I. Zúžením všech zobrazení z S na konečné podmnožiny vytvoříme systém S_1, který také pokrývá konečné podmnožiny a sestává jen z konečných zobrazení. Filtrované prodloužení systému S je filtrovaným prodloužením systému S_1 a naopak. Proto můžeme předpokládat, že S sestává pouze z konečných zobrazení. Z pokrývací vlastnosti systému S plyne, že každá z množin A_i je neprázdná, a také, že $S \neq 0$.

Budeme definovat množinu X a na ni zavedeme centrovaný systém. Hledané zobrazení získáme z ultrafiltru, který tento centrovaný systém rozšiřuje.

Buď X množina všech konečných částečných selektorů, to znamená, že

$$X = \bigcup \{ \bigtimes_{i \in u} A_i \colon u \in [I]^{<\omega} \} .$$

Pro $i \in I$ položme

$$Y_i = \{ f \in S \colon i \in \mathrm{Dom}(f) \} .$$

Předpokládali jsme, že $S \subseteq X$, a tedy $Y_i \subseteq X$ pro každé $i \in I$. Ukážeme, že množiny Y_i tvoří centrovaný systém. Je-li u konečná neprázdná podmnožina I, pak z pokrývající vlastnosti systému S plyne existence $f \in S$ takového, že $u \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. To znamená, že $f \in \bigcap_{i \in u} Y_i$, a tedy systém je centrovaný.

Buď $\mathscr{G}$ nějaký ultrafiltr na X rozšiřující systém $\{ Y_i \colon i \in I \}$. Uvažujme nyní množinu A_i pro pevné $i \in I$. Pro $a \in A_i$ položme

$$Y_i(a) = \{ f \in Y_i \colon f(i) = a \} .$$

Pro různá $a, b \in A_i$ je zřejmě $Y_i(a) \cap Y_i(b) = 0$ a navíc

$$\bigcup \{ Y_i(a) : a \in A_i \} = Y_i .$$

Vidíme, že množina Y_i z ultrafiltru $\mathcal{G}$ je sjednocením konečně mnoha (A_i je konečné dle předpokladu) disjunktních množin. Tedy existuje právě jeden prvek $a \in A_i$ takový, že $Y_i(a) \in \mathcal{G}$. Můžeme nyní definovat zobrazení g vztahem

$$g(i) = a \leftrightarrow Y_i(a) \in \mathcal{G}$$

pro každé $i \in I$.

Zbývá ověřit, že g je filtrované prodloužení systému S. Uvažujme konečnou neprázdnou množinu $u \subseteq I$. Pro každé $i \in u$ je $Y_i(g(i)) \in \mathcal{G}$ a $Y_i(g(i)) \subseteq S$. Tedy průnik $\bigcap \{ Y_i(g(i)) : i \in u \}$ leží také v $\mathcal{G}$, a je proto neprázdný. Pro libovolné f z tohoto průniku platí $f \in S$, $u \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ a pro každé $i \in u$ je $g(i) = f(i)$. Tím je důkaz dokončen.

Uvědomme si, že princip kompaktnosti je netriviální tvrzení jen pro nekonečné soubory množin.

8.37 Sňatkový problém. Hallova věta. Každý muž se zná s jistými ženami a je možné, že více mužů se zná s touže ženou. Ptáme se, kdy je možné, aby se každý muž oženil s některou z žen, které zná, když mnohomužství je vyloučeno?

Formulace sňatkového problému v matematické řeči je nasnadě. Buď M konečná množina a nechť

$$\langle W_m : m \in M \rangle \tag{19}$$

je soubor konečných množin. Ptáme se, kdy existuje $f \in \bigtimes_{m \in M} W_m$, které je prostým zobrazením, neboli, kdy existuje prostý selektor na souboru (19), jehož definiční obor je celá množina M?

Překvapivě jednoduchou odpověď dává Hallova věta. Prostý selektor pro konečný soubor (19) konečných množin existuje právě tehdy, když

$$(\forall J \subseteq M)(|J| \leq |\bigcup_{m \in J} W_m|) .$$

Důkaz této věty čtenář nalezne v Nešetřilově knize Teorie grafů (1979).

Podmínka řešitelnosti sňatkového problému říká, že každá skupina mužů se musí znát dohromady s nejméně tolika ženami, kolik je mužů ve skupině. Je zřejmé, že je to podmínka nutná, netriviální část Hallovy věty ukazuje, že je to i podmínka postačující.

Princip kompaktnosti umožňuje přenést Hallovu větu na nekonečné soubory konečných množin. Ukážeme, že platí následující tvrzení.

Prostý selektor pro libovolný soubor konečných množin $\langle A_i : i \in I \rangle$ existuje právě tehdy, když existuje prostý selektor pro každý konečný podsoubor $\langle A_i : i \in J \rangle$, $J \in [I]^{<\omega}$.

Snadno se nahlédne, že zúžení $f|J$ prostého selektoru f pro $\langle A_i : i \in I\rangle$ na množinu $J \subseteq I$ je prostým selektorem pro $\langle A_i : i \in J\rangle$. Na druhou stranu, zobrazení f, které je filtrovaným prodloužením systému všech konečných částečných prostých selektorů, je hledaným prostým selektorem pro celý soubor.

Omezení v principu kompaktnosti na konečné množiny v souborech je podstatné. Uvažujme soubor $\langle \omega_r : r \in \mathbb{R}\rangle$, kde r probíhá všechna reálná čísla a každé ω_r je množina všech přirozených čísel. Je zřejmé, že pro každý konečný podsoubor existuje prostý selektor. Kdyby bylo možné použít principu kompaktnosti i v tomto případě, pak by existoval prostý selektor pro celý soubor, a to je prosté zobrazení nespočetné množiny $\mathbb{R}$ do spočetné množiny ω. Víme, že takové zobrazení neexistuje.

8.38 Obarvitelnost grafu. Na problému obarvitelnosti grafů ukážeme další použití principu kompaktnosti. Připomeňme nejprve základní pojmy.

8.39 Definice. Graf. (i) Graf $G = \langle V, H\rangle$ je určen množinou vrcholů V a množinou hran H; hrany jsou některé dvouprvkové podmnožiny množiny vrcholů, tedy $H \subseteq [V]^2$. Říkáme, že hrana $\{x, y\} \in H$ spojuje vrcholy x a y. Graf je konečný, jestliže má konečnou množinu vrcholů.

(ii) Graf $G_1 = \langle V_1, H_1\rangle$ se nazývá indukovaným podgrafem grafu G, jestliže

$$V_1 \subseteq V, \qquad H_1 = [V_1]^2 \cap H .$$

8.40 Příklady. (a) *Úplný graf.* Graf $K_V = \langle V, [V]^2\rangle$ se nazývá úplný, protože každé dva vrcholy jsou spojeny hranou.

(b) Kružnice délky n je graf $C_n = \langle V, H\rangle$, kde V je nějaká n-prvková množina $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ a množina H sestává z hrany $\{v_0, v_{n-1}\}$ a všech hran $\{v_i, v_{i+1}\}$ pro $i < n - 1$.

(c) Je-li $A \subseteq X$, každé zobrazení $h: A \to X$ určuje graf $G_h = \langle X, H\rangle$ s množinou hran

$$H = \{\{x, h(x)\} : x \in A \;\&\; x \neq h(x)\} .$$

Všimněme si, že pro zobrazení $f: X \to X$ množiny X do sebe je graf G_f totožný a grafem G_h, kde $h = f \mid (X - \{x: f(x) = x\})$, a že zobrazení h nemá pevné body.

8.41 Definice. Obarvení grafu. Buď k přirozené číslo. Zobrazení f, které přiřazuje každému vrcholu grafu $G = \langle V, H\rangle$ nějaké přirozené číslo menší než k tak, že $f(x) \neq f(y)$ pokud $\{x, y\} \in H$, se nazývá *k-obarvení grafu G* nebo *obarvení G pomocí k barev.*

Říkáme, že daný *graf je k-obarvitelný*, jestliže existuje nějaké jeho k-obarvení. Graf je *konečně obarvitelný*, je-li k-obarvitelný pro nějaké přirozené k.

Vzhledem k tomu, že definice k-obarvení nepožaduje, aby bylo použito všech k barev $0, 1, \ldots, k - 1$, každé k-obarvení je také l-obarvení pro $l > k$.

8.42 Definice. Je-li G konečně obarvitelný graf, pak nejmenší počet barev, kterými je obarvitelný, se nazývá *barevnost grafu* G.

8.43 Příklad. Snadno se nahlédne, že úplný graf K_n má barevnost n. Kružnice C_n sudé délky $n \geq 2$ má barevnost 2 a kružnice liché délky $n \geq 3$ má barevnost 3. V 8.46 ukážeme, že graf G_h z příkladu 8.40(c) má barevnost nejvýše 3.

Nekonečný úplný graf není konečně obarvitelný.

Všechny podgrafy k-obarvitelného grafu jsou opět k-obarvitelné: je-li f k-obarvení, pak zúžení f na nějakou podmnožinu vrcholů zůstane k-obarvením odpovídajícího podgrafu.

Následující věta spojuje konečnou obarvitelnost nekonečného grafu s obarvitelností konečných podgrafů.

8.44 Věta o barevnosti grafu (de Bruijn a Erdös, 1951). *Nechť k je přirozené číslo. Graf $G = (V, H)$ je k-obarvitelný, právě když každý jeho konečný podgraf je k-obarvitelný.*

Důkaz. Již jsme ukázali, že z k-obarvitelnosti grafu G plyne k-obarvitelnost každého podgrafu. Opačnou implikaci dokážeme použitím principu kompaktnosti. Nechť S je množina sestávající ze všech k-obarvení konečných indukovaných podgrafů grafu G. S je systém částečných selektorů souboru $\langle A_x : x \in V \rangle$, kde $A_x = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ pro každé x. Navíc S pokrývá konečné podmnožiny množiny V. Tedy z principu kompaktnosti existuje nějaké filtrované prodloužení g systému S. Pro takové g zřejmě platí

$$g: V \to k \quad \text{a} \quad g(x) \neq g(y), \quad \text{jakmile } \{x, y\} \in H,$$

tedy g je k-obarvení grafu G.

8.45 Poznámka. Když v roce 1976 K. Appel a W. Haken rozřešili slavný problém čtyř barev a ukázali, že každý konečný rovinný graf je 4-obarvitelný, podle věty 8.44 tím dokázali, že každý (i nekonečný) rovinný graf je 4-obarvitelný.

Následující tvrzení, které je důsledkem věty 8.44 o barevnosti grafu, nachází uplatnění v teorii ultrafiltrů.

8.46 Lemma o třech množinách. *Buď $Y \subseteq X$ a h zobrazení množiny Y do X, které nemá pevné body, to znamená, že pro každé $x \in Y$ je $h(x) \neq x$. Potom existuje rozklad množiny X na tři části $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$ takový, že pro každé $i \leq 2$ platí*

$$h[X_i] \cap X_i = 0. \tag{20}$$

Důkaz. Zobrazení $h: Y \to X$ určuje graf $G_h = (X, H)$ z příkladu 8.40(c), kde $H = \{\{x, h(x)\} : x \in Y\}$. Tvrzení bude dokázáno, ukážeme-li, že graf G_h je 3-obarvitelný. Je-li f nějaké 3-obarvení grafu G_h a X_i je množina všech vrcholů obarvených i-tou barvou, dostáváme (20). K tomu stačí ukázat podle 8.44, že každý konečný indukovaný podgraf grafu G_h je 3-obarvitelný. Dokážeme to indukcí podle mohutnosti konečných podmnožin množin X. Každý graf s nejvýše třemi vrcholy je 3-obarvitelný. Předpokládejme, že každý podgraf grafu G_h s n vrcholy je 3-obarvitelný, a dokazujeme, že i každý podgraf s $n + 1$ vrcholy je 3-obarvitelný. Buď $A \in [X]^{n-1}$ Uvažujme nejprve případ, kdy $h[A] \neq A$. Zvolme nějaké $x \in A - h[A]$ a položme $B = A - \{x\}$. Vrchol x je spojen hranou nejvýše s jedním vrcholem ležícím v B, a to $h(x)$. Podle indukčního předpokladu existuje nějaké 3-obarvení f definované na B. Každé takové obarvení f můžeme rozšířit na 3-obarvení definované na množině A, přiřadíme-li prvku x barvu $f(x) < 3$ různou od barvy $f(h(x))$.

Uvažujme zbývající případ, kdy $h[A] = A$. Množina A je konečná, a proto h zobrazuje množinu A vzájemně jednoznačně na A. Zvolme nějaké $x \in A$ a položme $B = A - \{x\}$. V tomto případě je x spojeno nejvýše se dvěma vrcholy ležícími v B, a to $h(x)$ a $h^{-1}(x)$. Opět můžeme libovolné 3-obarvení f definované na B rozšířit na A, zvolíme-li $f(x) < 3$ různé od $f(h(x))$ i od $f(h^{-1}(x))$.

Dokázali jsme, že každý podgraf s $n + 1$ vrcholy je 3-obarvitelný, a tedy i každý konečný podgraf má tuto vlastnost.

8.47 Obraz filtru. Nechť f je zobrazení množiny X do množiny Y a $f^{\to}$ je indukované zobrazení $\mathscr{P}(X)$ do $\mathscr{P}(Y)$ z 4.34.

Obraz neprázdné množiny je neprázdný a pro průniky platí inkluze

$$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B] .$$

Tedy pro libovolný filtr $\mathscr{F}$ na X je

$$f^{\to}[\mathscr{F}] = \{f[A]: A \in \mathscr{F}\}$$

centrovaný systém na Y.

Snadno se nahlédne, že systém

$$(21) \qquad \{C \subseteq Y: f^{-1}[C] \in \mathscr{F}\}$$

je filtr na Y a že $f^{\to}[\mathscr{F}]$ je jeho báze.

Uvědomme si, že samotný obraz $f^{\to}[\mathscr{F}]$ filtru $\mathscr{F}$ nemusí být filtrem na Y.

Je-li $\mathscr{F}$ ultrafiltr na X, pak $f^{\to}[\mathscr{F}]$ je báze ultrafiltru na Y, protože pro libovolné $A \subseteq Y$ množiny $f^{-1}[A]$, $f^{-1}[Y - A]$ tvoří rozklad množiny X a jedna z nich patří do ultrafiltru $\mathscr{F}$. To znamená, že systém (21) je ultrafiltr na Y.

8.48 Zobrazení βf. Předchozí úvaha ukazuje, že pro každé zobrazení $f: X \longrightarrow Y$ můžeme definovat zobrazení $\beta f: \beta X \longrightarrow \beta Y$ vztahem

$$\beta f(\mathscr{U}) = \{A \subseteq Y: f^{-1}[A] \in \mathscr{U}\} .$$

Všimněme si, že triviálnímu ultrafiltru $\mathscr{U}$ nad bodem $x \in X$ při zobrazení βf odpovídá triviální ultrafiltr nad bodem $f(x)$. Může se stát, že $\beta f(\mathscr{U})$ je triviální ultrafiltr, i když ultrafiltr $\mathscr{U}$ je netriviální, například, je-li f konstantní zobrazení.

8.49 Pevné body zobrazení βf. Nechť f je zobrazení množiny X do sebe. Potom

$\beta f: \beta X \to \beta X$ a *ultrafiltr* $\mathcal{U}$ *je pevným bodem zobrazení* βf, jestliže $\beta f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Uvědomme si, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$\beta f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}, \tag{22}$$
$$A \in \mathcal{U} \to f[A] \in \mathcal{U}.$$

Je-li zobrazení f identické na nějaké neprázdné množině $B \subseteq X$, pak každý ultrafiltr $\mathcal{U} \in \beta X$, který obsahuje B, je pevným bodem zobrazení βf. K důkazu použijeme druhou podmínku z (22). Je-li A libovolná množina z $\mathcal{U}$, potom $A \cap B \in \mathcal{U}$ a $f[A \cap B] = A \cap B \subseteq f[A]$, odtud plyne $f[A] \in \mathcal{U}$. Podle (22) je $\mathcal{U}$ pevným bodem zobrazení βf.

Ukážeme, že předchozí podmínka charakterizuje všechny pevné body zobrazení βf.

8.50 Věta. *Nechť f je zobrazení množiny X do sebe. Ultrafiltr $\mathcal{U} \in \beta X$ je pevným bodem zobrazení βf, právě když f je identita na nějaké množině z $\mathcal{U}$, tedy když*

$$\{x \in X : f(x) = x\} \in \mathcal{U}.$$

Důkaz. Jednu implikaci jsme již dokázali v předchozím odstavci. K důkazu opačné implikace použijeme lemma 8.46 o třech množinách. Označme $B = \{x \in X : f(x) = x\}$. Pokud $B \in \mathcal{U}$, jsme hotovi. Předpokládejme, že $B \notin \mathcal{U}$, to znamená, že mnozina $Y = X - B \in \mathcal{U}$. Nechť $h = f \mid Y$. Podle 8.46 existuje rozklad množiny X na tři části X_0, X_1, X_2 takový, že $h[X_i] \cap X_i = 0$ pro $i \leq 2$. Přitom právě jedna z množin X_i leží v $\mathcal{U}$, protože $X \in \mathcal{U}$. Je-li $X_i \in \mathcal{U}$, potom také $A = X_i \cap Y \in \mathcal{U}$, ale $f[A]$ neleží v $\mathcal{U}$, protože je disjunktní s X_i. Ukázali jsme, že pro ultrafiltr $\mathcal{U}$ není splněna druhá podmínka z (22), to znamená, že $\mathcal{U}$ není pevným bodem zobrazení βf. Tím je věta dokázána.

8.51 Právě dokázané tvrzení budeme ilustrovat na příkladě dvouhodnotové míry na $\mathcal{P}(\omega)$ a transformace zachovávající míru.

Podle věty 8.33 víme, že na $\mathcal{P}(\omega)$ existuje míra η a existuje zobrazení $f: \omega \to \omega$, které zachovává míru η, to znamená, že platí

$$\eta f^{-1}[A] = \eta A$$

pro každou (měřitelnou) množinu $A \subseteq \omega$ a navíc f není nikde identické.

Uvažujme speciálně dvouhodnotovou míru ν na $\mathcal{P}(\omega)$ a ptejme se, jaká zobrazení f tuto míru zachovávají. Míře ν odpovídá ultrafiltr $\mathcal{U}$ na ω sestávající právě z množin míry 1. Jestliže zobrazení f zachovává míru ν, pak pro každé $A \in \mathcal{U}$ je

$$\nu f^{-1}[A] = \nu A = 1,$$

a tedy $f^{-1}[A] \in \mathcal{U}$, neboli $\mathcal{U}$ je pevným bodem zobrazení βf. Podle věty 8.50 to znamená, že zobrazení f je identické skoro všude ve smyslu míry ν.

Ukázali jsme, že zobrazení zachovává dvouhodnotovou míru, právě když je skoro všude identické.

KAPITOLA II

Ordinální čísla rozšiřují množinu přirozených čísel za hranice konečných množin. Platí pro ně princip (transfinitní) indukce a mají svou aritmetiku. Klíčem k zavedení ordinálních čísel je pojem dobrého uspořádání, který je odvozen z uspořádání množiny přirozených čísel. Ordinální čísla jsou typy všech dobře uspořádaných množin, zatímco přirozená čísla jsou typy dobrých uspořádání konečných množin. Ordinálním číslům jsou věnovány §§ 1–3. Při prvním čtení stačí seznámit se s § 1, s první částí § 3, kde je zaveden ordinální součet a součin, a s částí § 2 až po větu o rekurzi.

Kardinální čísla tvoří část třídy ordinálních čísel. Jsou to mohutnosti dobře uspořádaných množin. Platí-li axiom výběru, kardinální čísla jsou mohutnosti všech množin. Také kardinální čísla mají svou aritmetiku, která se liší od aritmetiky ordinálních čísel. Operace kardinální aritmetiky odpovídají množinovým operacím a dovolují určit mohutnosti množin, které vzniknou množinovými konstrukcemi. Ve srovnání s operacemi kardinálního součtu a součinu, které jsou velmi jednoduché, je operace mocnění dosti složitá a její průběh není jednoznačně určen systémem axiomů ZFC. Základní fakta o kardinálních číslech obsahuje § 4, § 5 je věnován mocninám kardinálních čísel a důsledkům, které pro mocniny kardinálních čísel plynou ze zobecněné hypotézy kontinua (GCH) a z hypotézy singulárních kardinálů (SCH). Šestý paragraf je věnován kumulativní hierarchii univerza množin, která je matematickým vyjádřením představy množinového univerza, ze které vychází Zermelova a Fraenkelova axiomatika. Poslední paragraf je věnován hierarchii třídy konstruovatelných množin. Na vztahu obou hierarchií závisí globální vlastnosti množinového univerza. Při prvním čtení je možné §§ 6 a 7 vynechat.

§ 1 Ordinální čísla

Ukážeme, že pomocí dvou základních vlastností přirozených čísel lze definovat širší třídu čísel, která nazveme ordinální. Vedle přirozených čísel, která splývají s konečnými ordinálními čísly, v této třídě najdeme i nekonečná (transfinitní) ordinální čísla. Třída všech ordinálních čísel je dobře uspořádaná relací $\in$ a platí pro ni princip indukce, který je zobecněním principu indukce pro přirozená čísla. Ukážeme, že jsou ordinální čísla dvou typů· izolovaná a limitní, a podrobně rozebereme vlastnosti dobrého uspořádání třídy všech ordinálních čísel. Na závěr ukážeme, že dobrá uspořádání, která jsme definovali pro dvojice přirozených čísel, a uspořádání konečných množin přirozených čísel se přenášejí i na ordinální čísla.

1.1 Definice. Tranzitivní třídy a množiny. Říkáme, že třída X je *tranzitivní*, jestliže každý prvek $x \in X$ je podmnožinou X, to znamená, když platí

$$x \in X \rightarrow x \subseteq X\,.$$

1.2 Z definice 1.1 je zřejmé, že třída X je tranzitivní, právě když pro libovolné x, y platí

(1) $$y \in x \in X \rightarrow y \in X\,.$$

Poslední implikaci nelze zaměňovat s tvrzením, že relace $\in$ je tranzitivní na X. Z (1) je zřejmé, že X je tranzitivní, právě když $\bigcup X \subseteq X$.

Univerzální třída a prázdná množina jsou tranzitivní. Podle lemmatu 6.19 z první kapitoly je množina všech přirozených čísel tranzitivní a každé přirozené číslo je také tranzitivní množina.

1.3 Lemma. (i) *Jsou-li X a Y tranzitivní třídy, potom $X \cap Y$ a $X \cup Y$ jsou tranzitivní.*

(ii) *Je-li každý prvek třídy X tranzitivní množina, potom $\bigcap X$ a $\bigcup X$ jsou tranzitivní.*

(iii) *Je-li X tranzitivní třída, potom relace náležení je tranzitivní na X, právě když každé $x \in X$ je tranzitivní množina.*

Důkaz. (i) plyne přímo z definice 1.1.

(ii) Ukážeme, že $\bigcap X$ je tranzitivní. Nechť pro množiny y, z platí $y \in z \in \bigcap X$, to znamená, že pro každé $x \in X$ platí $z \in x$ a $y \in x$, protože x je tranzitivní. Tedy $y \in \bigcap X$ a $\bigcap X$ je tranzitivní. Podobně se dokáže, že $\bigcup X$ je tranzitivní.

(iii) Jsou-li x, y, z libovolné množiny takové, že $z \in y \in x \in X$, potom také $y, z \in X$, protože X je tranzitivní.

Je-li každé $x \in X$ tranzitivní množina, dostáváme, že $z \in x$ a relace náležení je tranzitivní na X. Je-li naopak relace $\in$ tranzitivní na X, pak je každý prvek $x \in X$ tranzitivní.

1.4 Definice. Ordinální čísla. Říkáme, že množina x je *ordinální číslo* nebo krátce *ordinál*, jestliže x je tranzitivní a relace náležení je dobré (ostré) uspořádání množiny x.

Třídu všech ordinálních čísel označíme On, tedy

$$On = \{x \colon x \text{ je ordinální číslo}\}\,.$$

Připomeňme, že relace $\in$ je ostré uspořádání na x, jestliže je antireflexivní a tranzitivní na x. Je to dobré uspořádání, jestliže každá neprázdná podmnožina $a \subseteq x$ má nejmenší prvek.

1.5 Z definice ordinálního čísla je zřejmé, že prázdná množina je ordinální číslo. Z věty 6.19 a 6.23 z první kapitoly vyplývá, že každé přirozené číslo je ordinální číslo a že množina ω všech přirozených čísel je také ordinální číslo. Víme, že ω je nekonečná množina a že přirozená čísla jsou konečné množiny. Později uvidíme, že ordinální číslo ω je supremem množiny všech přirozených čísel ve třídě On. To znamená, že přirozená čísla jsou právě konečné ordinály a že ω je nejmenší nekonečné (transfinitní) ordinální číslo.

Nyní ukážeme, že třída On má podobné vlastnosti jako kterékoli ordinální číslo: je tranzitivní a je dobře uspořádána relací $\in$. Ukážeme také, že On není množina a že je to jediná vlastní třída s takovými vlastnostmi.

1.6 Lemma. *On je tranzitivní třída.*
Důkaz. Ukážeme, že každý prvek y ordinálního čísla x je také ordinál. Relace náležení je tranzitivní na ordinálu x a podle 1.3(iii) je každý prvek $y \in x$ tranzitivní množina. Z tranzitivnosti x také plyne $y \subseteq x$ a y je dobře uspořádána relací $\in$. Tedy y je ordinál a On je tranzitivní třída.

1.7 Lemma. *Jsou-li x, y ordinály, potom platí*
(i) $x \notin x$,
(ii) $x \cap y$ *je ordinál,*
(iii) $x \in y \leftrightarrow x \subset y$.
Důkaz. (i) (sporem). Kdyby platilo $x \in x$, potom relace náležení není antireflexivní na x a nemůže být ostrým uspořádáním na x.

(ii) $x \cap y$ je tranzitivní množina podle 1.3(i) a je dobře uspořádána relací $\in$, protože je podmnožinou ordinálu x (i ordinálu y).

(iii) Je-li $x \in y$, z tranzitivnosti y dostáváme $x \subseteq y$ a z (i) plyne $x \neq y$. Je-li naopak $x \subset y$, potom $y - x$ je neprázdná množina. Nechť z je její nejmenší prvek vzhledem k uspořádání $\in$. Ukážeme, že $x = z$, a tvrzení (iii) bude dokázáno.

Nejprve ukážeme, že $x \subseteq z$. Je-li $u \in x$, potom také $u \in y$ a pro u, z z linearity uspořádání $\in$ na y dostáváme

$$u \in z \vee u = z \vee z \in u .$$

Vzhledem k volbě z v disjunkci nemůže nastat druhý a třetí případ: rovnost $u = z$ vede k $u \notin x$ a $z \in u$ spolu s tranzitivností x dává $z \in x$. Ukázali jsme, že $u \in z$, to znamená, že $x \subseteq z$.

Je-li $u \in z$, potom z tranzitivnosti y plyne $u \in y$. Kdyby $u \notin x$, dostali bychom spor s minimalitou z v množině $y - x$. Tedy také $z \subseteq x$.

1.8 Věta. *Relace náležení je dobré ostré uspořádání třídy On.*
Důkaz. Podle 1.7(i) je relace $\in$ antireflexivní na On. Podle 1.6 je třída On tranzitivní a každý její prvek je ordinál, tedy tranzitivní množina. Podle lemmatu 1.3(iii) je relace náležení tranzitivní na On. Ukázali jsme zatím, že $\in$ je ostré uspořádání na On.

Zbytek důkazu rozdělíme do dvou kroků. Ukážeme, že:

(i) Relace náležení je trichotomická na On, to znamená, že je lineárním uspořádáním.

(ii) Každá neprázdná množina ordinálních čísel má minimální prvek vzhledem k uspořádání $\in$.

Tím bude dokázáno, že $\in$ je dobré uspořádání na On, protože v lineárně uspořádané množině je minimální prvek nejmenší.

(i) Jsou-li x, y libovolné dva ordinály, podle 1.7(ii) je $x \cap y$ také ordinál. Uvažujme inkluze

$$x \cap y \subseteq x, \qquad x \cap y \subseteq y.$$

Je vyloučeno, aby v obou platila ostrá inkluze. Potom bychom dostali $x \cap y \in x \cap y$ a to je ve sporu s tvrzením (i) lemmatu 1.7. Zbývají tři možnosti.

V případě, že v obou inkluzích platí rovnost, dostáváme $x = y$. Platí-li rovnost jen v první z nich, podle 1.7(iii) dostáváme $x \in y$, a platí-li rovnost jen ve druhé inkluzi, dostáváme $y \in x$. Relace $\in$ je trichotomická na On.

(ii) Nechť a je neprázdná množina ordinálních čísel a nechť $\alpha \in a$. Pokud α není minimální prvek množiny a vzhledem k uspořádání $\in$, položme $b = a \cap \alpha$ a b je neprázdná podmnožina ordinálu α. Nechť β je nejmenší prvek b vzhledem k $\in$. Ukážeme, že β je minimální prvek množiny a vzhledem k $\in$. Kdyby pro nějaké $\gamma \in a$ platilo $\gamma \in \beta$, z předpokladu $\beta \in \alpha$ dostáváme $\gamma \in \alpha$, protože α je tranzitivní. To by znamenalo, že $\gamma \in a \cap \alpha = b$ a že β není nejmenší prvek množiny b. Ukázali jsme, že β je minimální prvek množiny a vzhledem k $\in$. Stejným způsobem se dokáže, že každá neprázdná podtřída $A \subseteq On$ má nejmenší prvek.

Následující tvrzení je obdobou paradoxu Burali-Fortiho, který v roce 1897 ukázal, že všechna ordinální čísla nemohou tvořit množinu.

1.9 Důsledek. *Třída On není množinou.*

Důkaz. Podle 1.6 je On tranzitivní a podle 1.8 je dobře uspořádána relací náležení. Kdyby třída On byla množinou, pak by byla ordinálním číslem a platilo by $On \in On$. To je ve sporu s lemmatem 1.7(i).

1.10 Důsledek. *Je-li X tranzitivní vlastní třída dobře uspořádaná relací náležení, potom $X = On$.*

Důkaz. Nechť X splňuje předpoklady tvrzení. Je zřejmé, že každý prvek $x \in X$ je ordinál, tedy $X \subseteq On$. Kdyby platila jen ostrá inkluze a x bylo ordinální číslo, které není prvkem třídy X, z tranzitivnosti X a z věty 1.8 dostáváme $X \subseteq x$. To vede ke sporu s předpokladem, že X je vlastní třída, tedy $X = On$.

1.11 Označení. Třída všech ordinálních čísel spolu s dobrým uspořádáním relací náležení a dalšími operacemi je velmi důležitou strukturou v teorii množin. V dalším textu budeme ordinální čísla označovat zpravidla malými písmeny řecké abecedy α, β, γ, α_1, α_2, ..., α_n, ... a relaci dobrého uspořádání na On budeme označovat $<$ místo $\in$. Budeme psát $\alpha < \beta$ místo $\alpha \in \beta$ a budeme psát $\alpha \leq \beta$ místo $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$. Výraz $\alpha < \beta$ čteme „(*ordinální číslo*) α *je menší než* (*ordinální číslo*) β" a podobně výraz $\alpha \leq \beta$ čteme „α *je menší nebo rovno* β".

1.12 Lemma. (i) *Množina $x \subseteq On$ je ordinálním číslem, právě když x je tranzitivní množina.*

(ii) *Je-li A neprázdná třída ordinálních čísel, potom $\bigcap A$ je nejmenší prvek třídy A vzhledem k uspořádání $<$.*

(iii) *Je-li a množina ordinálních čísel, potom $\bigcup a$ je také ordinální číslo a je to supremum množiny a vzhledem k uspořádání $<$.*

Důkaz. (i) Podle věty 1.8 je každá množina ordinálů dobře uspořádána relací náležení. Je tedy ordinálním číslem, právě když je tranzitivní.

(ii) Je-li A neprázdná podtřída On, podle důkazu věty 1.8 existuje nejmenší prvek $\alpha \in A$ vzhledem k uspořádání $<$. Uvědomme si, že z tranzitivnosti ordinálů pro libovolné $\beta \in A$ dostáváme $\alpha \subseteq \beta$. To znamená, že $\alpha = \bigcap A$.

(iii) Nechť $a \subseteq On$. Podle 1.3(ii) je $\bigcup a$ tranzitivní množina a je to ordinální číslo podle (i). Je-li $\alpha \in a$, potom $\alpha \subseteq \bigcup a = \beta$, tedy $\alpha \leq \beta$ podle 1.7(iii) a 1.11. Je-li $\gamma < \beta$, to znamená, je-li $\gamma \in \bigcup a$, pak existuje $\alpha \in a$ tak, že $\gamma \in \alpha$, tedy $\gamma < \alpha$. Ukázali jsme, že $\bigcup a$ je nejmenší majorantou množiny a.

1.13 Důsledek. *Ordinál ω je supremem množiny všech přirozených čísel ve třídě On. To znamená, že ω je nejmenší nekonečné ordinální číslo. Konečné ordinály jsou právě přirozená čísla.*

Důkaz. Podle 6.19(i) z první kapitoly je $\sup \omega = \bigcup \omega = \omega$. Je-li α nekonečné ordinální číslo, pak nutně $\omega \leq \alpha$ a naopak.

1.14 Lemma. *Je-li α ordinální číslo, pak $\alpha \cup \{\alpha\}$ je nejmenší ordinál větší než α. Říkáme, že $\alpha \cup \{\alpha\}$ je následníkem α a že α je předchůdcem $\alpha \cup \{\alpha\}$ v uspořádání $<$.*

Důkaz. Pro každé α je $\alpha \cup \{\alpha\}$ tranzitivní množina ordinálů a je to ordinální číslo podle 1.12(i). Je-li $\beta < \alpha \cup \{\alpha\}$, pak $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$, tedy buď $\beta \in \alpha$, nebo $\beta = \alpha$. To znamená, že $\beta \leq \alpha$ a mezi α a $\alpha \cup \{\alpha\}$ není žádné ordinální číslo.

1.15 Definice. Izolovaná a limitní ordinální čísla.

(i) Říkáme, že ordinální číslo α je *izolované*, jestliže $\alpha = 0$ nebo α má předchůdce, to znamená, jestliže existuje ordinál β takový, že $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.

(ii) Říkáme, že ordinální číslo α je *limitní*, je-li nenulové a nemá-li předchůdce.

1.16 Je zřejmé, že každé přirozené číslo je izolované a že ω je limitní ordinální číslo. Ordinální číslo $\omega \cup \{\omega\}$ je izolované, ale není to přirozené číslo.

Třída všech ordinálních čísel se rozpadá na dvě disjunktní části: na izolovaná a limitní ordinální čísla. Mezi izolovanými čísly zaujímá nula jako nejmenší ordinál zvláštní místo, protože nemá předchůdce.

1.17 Topologie určená uspořádáním třídy On. Na třídě On můžeme zavést intervaly stejným způsobem jako na reálné přímce. Jsou-li α, β libovolná ordinální čísla a $\alpha < \beta$, říkáme, že množiny

$$(\alpha, \beta) = \{\gamma \in On : \alpha < \gamma < \beta\},$$
$$(\leftarrow, \alpha) = \{\gamma \in On : \gamma < \alpha\}$$

jsou otevřené intervaly na On. Uvědomme si, že intervaly (α, β) a $(\leftarrow, \alpha)$ mohou být i prázdné, jestliže v prvním případě $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ nebo $\alpha = 0$ ve druhém případě.

Říkáme, že množina $o \subseteq On$ je okolím ordinálu α, je-li α prvkem nějakého otevřeného intervalu, který je podmnožinou o. Otevřený interval je tedy okolím všech svých prvků.

Je-li $\alpha = 0$ nebo $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, potom jednoprvková množina $\{\alpha\}$ je také okolím ordinálu α, protože $\{0\} = (\leftarrow, 1)$ a $\{\alpha\} = (\beta, \alpha \cup \{\alpha\})$. V topologii se body, které mají jednoprvkové okolí, nazývají izolované. Ve shodě s tím jsme taková ordinální čísla nazvali izolovaná. Je-li λ limitní ordinál, snadno se nahlédne, že v každém jeho okolí je nekonečně mnoho ordinálních čísel menších než λ. Přitom λ je největším prvkem okolí $(\alpha, \lambda \cup \{\lambda\})$.

1.18 Ordinální čísla jako typy dobře uspořádaných množin. Jsou-li dvě množinové relace izomorfní, podstatně se neliší, i když popisují vztahy mezi prvky ze dvou různých množin. Říkáme také, že izomorfní relace jsou „stejného typu". Je zřejmé, že vztah „býti izomorfní" („býti stejného typu") určuje relaci ekvivalence na třídě všech relací. Snadno se nahlédne, že ke každé množinové relaci existuje vlastní třída relací, které jsou s ní izomorfní. To znamená, že třídy takové ekvivalence jsou vlastní.

Tím se dostáváme k otázce, zda je možné přiřadit každé relaci nějakou množinu — její typ — tak, aby dvěma izomorfním relacím byl vždy přiřazen stejný typ. V takovém případě typ reprezentuje celou třídu navzájem izomorfních relací. Ideální je taková reprezentace, která dovoluje z daného typu t sestrojit alespoň jednu relaci typu t. Potom můžeme celou třídu relací typu t nahradit jedinou relací a vyšetřovat jen takové reprezentující relace.

Ukážeme, že ordinální čísla mohou posloužit jako typy pro relace dobrých uspořádání.

1.19 Věta. *Je-li R dobré uspořádání množiny A, pak existuje právě jedno ordinální číslo α a jednoznačně určený izomorfismus α a A vzhledem k $<$ a R.*

Důkaz. Pro každý ordinál α podle věty I.5.31 existuje jednoznačně určený izomorfismus (vzhledem k $<$ a R), který zobrazuje A na nějakou dolní podmnožinu α nebo α na nějakou dolní podmnožinu A. Přitom je-li $\alpha < \beta$ a i je izomorfismus, který zobrazuje ordinál β na dolní podmnožinu A, potom $i | \alpha$ je izomorfní zobrazení α na dolní podmnožinu A a podle věty I.5.31 žádný jiný takový izomorfismus neexistuje. Víme, že On je vlastní třída, není tedy možné, aby každý ordinál β byl izomorfní s nějakou dolní podmnožinou A. Nechť β je ordinál takový, že A je izomorfní s nějakou dolní podmnožinou $a \subseteq \beta$. Přitom dolní znamená totéž co tranzitivní, protože jde o uspořádání relací $\in$. Podle lemmatu 1.12 je tranzitivní množina a hledaný ordinál α. Podle věty I.5.31 je to jediný ordinál izomorfní s A.

1.20 Důsledek. *Dva různé ordinály nejsou izomorfní.*

1.21 Věta 1.19 ukazuje souvislost von Neumannovy definice (1923), která je dnes všeobecně používanou definicí ordinálu s původním Cantorovým pojetím z roku 1895, který definoval ordinální čísla abstrakcí jako typy dobře uspořádaných množin.

Nyní ukážeme, že lexikografické a maximo-lexikografické uspořádání se přímo přenášejí z přirozených čísel na ordinální čísla jako dobrá uspořádání třídy $On \times On$.

1.22 Definice. Lexikografické a maximo-lexikografické uspořádání.

(i) Na třídě On^2 definujeme *lexikografické uspořádání* $<_{\mathrm{Le}}$ tak, že pro libovolné ordinály $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ položíme

$$\langle\alpha_1, \beta_1\rangle <_{\mathrm{Le}} \langle\alpha_2, \beta_2\rangle \leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2 \vee (\alpha_1 = \alpha_2 \,\&\, \beta_1 < \beta_2)\,.$$

(ii) *Maximo-lexikografické uspořádání* $<_{\mathrm{MLe}}$ na On^2

$$\begin{aligned}&\langle\alpha_1, \beta_1\rangle <_{\mathrm{MLe}} \langle\alpha_2, \beta_2\rangle \leftrightarrow\\ &\leftrightarrow \mathrm{Max}\,\{\alpha_1, \alpha_2\} < \mathrm{Max}\,\{\alpha_2, \beta_2\} \vee\\ &\vee (\mathrm{Max}\,\{\alpha_1, \beta_1\} = \mathrm{Max}\,\{\alpha_2, \beta_2\} \,\&\\ &\& \,\langle\alpha_1, \beta_1\rangle <_{\mathrm{Le}} \langle\alpha_2, \beta_2\rangle)\,.\end{aligned}$$

1.23 Věta. (i) *Lexikografické uspořádání je dobré ostré uspořádání na On^2.*

(ii) *Maximo-lexikografické uspořádání je dobré ostré uspořádání na On^2. Navíc každá dvojice $\langle\alpha, \beta\rangle$ má jenom množinu předchůdců. Maximo-lexikografické uspořádání je tedy úzká relace.*

Důkaz. Obě uspořádání jsou rozšířením uspořádání, která jsme zavedli na $\omega \times \omega$ v příkladu I.6.28.

(i) Snadno se nahlédne, že lexikografické uspořádání je antireflexivní a tranzitivní relace. Ukážeme, že je to dobré uspořádání. Nechť u je libovolná neprázdná podmnožina On^2. Potom $\mathrm{Dom}(u)$ je neprázdná množina ordinálních čísel, nechť α je její nejmenší prvek. Položíme-li $v = \{\beta : \langle\alpha, \beta\rangle \in u\}$, potom v je také neprázdná množina ordinálních čísel. Snadno se ověří, že $\langle\alpha, \beta\rangle$, kde β je nejmenší ordinál z v, je nejmenší prvek množiny u vzhledem k lexikografickému uspořádání. V lexikografickém uspořádání dvojici $\langle 1, 0\rangle$ předcházejí všechny dvojice $\langle 0, \alpha\rangle$, $\alpha \in On$. Lexikografické uspořádání tedy není úzká relace.

(ii) Také maximo-lexikografické uspořádání je antireflexivní a tranzitivní relace.

Podobným způsobem jako v (i) se dokáže, že je dobré. Ukážeme, že je úzké. Nechť $\langle \alpha, \beta \rangle$ je libovolná uspořádaná dvojice ordinálů a nechť γ je větší z ordinálů α, β. Je-li $\langle \xi, \eta \rangle <_{\mathrm{MLe}} \langle \alpha, \beta \rangle$, potom $\xi, \eta \leq \gamma$. To znamená, že každá dvojice, která přechází $\langle \alpha, \beta \rangle$, je prvkem množiny $(\gamma \cup \{\gamma\})^2$.

1.24 Definice. Nechť $[On]^{<\omega}$ označuje třídu všech konečných podmnožin On, tedy

$$[On]^{<\omega} = \{x : x \subseteq On \,\&\, \mathrm{Fin}(x)\} .$$

Pro libovolné dvě konečné množiny ordinálů x, y definujeme

$$x \lhd y \leftrightarrow (x \neq y \,\&\, \max((x - y) \cup (y - x)) \in y),$$

jinými slovy x přechází y, jestliže symetrický rozdíl množin x, y je neprázdný a jeho největší prvek náleží do množiny y.

1.25 Věta. *Relace $\lhd$ je úzké dobré ostré uspořádání na $[On]^{<\omega}$.*

Důkaz. V I.6.28 jsme ukázali, že $\lhd$ je lineární uspořádání. Je-li x konečná množina ordinálů a ξ je její největší prvek, potom každá množina $y \lhd x$ je podmnožinou ordinálu ξ. To znamená, že $\lhd$ je úzká relace. Ukážeme, že je to dobré uspořádání. Ke každé množině $u \subseteq [On]^{<\omega}$ existuje ordinál α takový, že $u \subseteq [\alpha]^{<\omega}$. Předpokládejme, že $\lhd$ není dobré uspořádání. Nechť α je nejmenší ordinál takový, že existuje neprázdná množina $u \subseteq [\alpha]^{<\omega}$, která nemá nejmenší prvek vzhledem k $\lhd$. Nechť β je nejmenší prvek množiny $\{\max(x) : x \in u\}$ a v je množina všech $x \in u$, pro které $\max(x) = \beta$. Z definice uspořádání je zřejmé, žě v je dolní podmnožina množiny u, proto v také nemá nejmenší prvek vzhledem k $\lhd$. Přitom $v \subseteq [\beta \cup \{\beta\}]^{<\omega}$, to znamená, že $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Nechť w vznikne z v tím, že z každého $x \in v$ vynecháme největší prvek β. Potom $w \subseteq [\beta]^{<\omega}$, a protože $\beta < \alpha$, existuje nejmenší prvek y množiny w vzhledem k $\lhd$. Položíme-li $x = y \cup \{\beta\}$, pak x je nejmenší prvek množiny v (i množiny u) vzhledem k $\lhd$ — spor. Relace $\lhd$ je tedy dobré uspořádání na $[On]^{<\omega}$.

1.26 Transfinitní indukce. Na závěr vyslovíme princip transfinitní indukce, který je zobecněním principu indukce na množině všech přirozených čísel.

1.27 Věta. *Nechť A je třída ordinálních čísel taková, že pro každý ordinál α platí*

$$\alpha \subseteq A \rightarrow \alpha \in A ,$$

potom $A = On$.

Důkaz. Uvědomme si, že předpoklad $\alpha \subseteq A$ je ekvivalentní s tvrzením, že každý ordinál $\beta < \alpha$ je prvkem třídy A. Kdyby $On - A \neq 0$, pro nejmenší ordinál α z této třídy platí $\alpha \subseteq A$, ale $\alpha \notin A$. To je ve sporu s předpokládanou vlastností třídy A.

Následující verze principu transfinitní indukce popisuje indukční kroky pro izolovaná čísla a limitní čísla každý zvlášť.

1.28 Věta. *Nechť A je třída ordinálních čísel taková, že*

(i) $0 \in A$

a pro každý ordinál α platí

(ii) $\alpha \in A \to \alpha \cup \{\alpha\} \in A$,

(iii) $\alpha \subseteq A \to \alpha \in A$, je-li α limitní.

Potom $A = On$.

1.29 Důkazy transfinitní indukcí. Chceme-li dokázat, že nějaká formule $\varphi(\alpha)$ platí pro každé ordinální číslo, uvažujeme třídu

$$A = \{\alpha \in On : \varphi(\alpha)\}.$$

Podle předchozí věty stačí ověřit, že A splňuje podmínku věty 1.27 nebo 1.28. Potom $A = On$ a $\varphi(\alpha)$ platí pro každý ordinál α.

Srovnáme-li větu 1.28 s principem indukce pro přirozená čísla (věta I.6.18), uvidíme, že transfinitní indukce má navíc podmínku (iii), která dovoluje indukční krok i pro ω a další limitní ordinály. Přívlastek „transfinitní" má zdůraznit, že indukce pokračuje i za konečné ordinály. Princip transfinitní indukce budeme často používat v následujících dvou paragrafech a na mnoha dalších místech.

§ 2 Konstrukce transfinitní rekurzí

Seznámíme se s metodou konstrukce transfinitní rekurzí, která je jedním ze silných prostředků teorie množin. Dokážeme tři nejčastěji používané verze věty o transfinitní rekurzi a s jejich pomocí podáme jednoduchý důkaz principu dobrého uspořádání z axiomu výběru, který jsme jiným způsobem dokázali v I.7.22.

Ukážeme také, že každá vlastní třída, která je dobře uspořádána úzkou relací, je izomorfní s On. Na závěr si všimneme úlohy parametru, které se mohou vyskytnout při konstrukci rekurzí.

2.1 V mnoha případech se hodnoty nějakého zobrazení konstruují krok za krokem opakováním stejné operace. Připomeňme známé rekurentní vztahy

$$
\begin{aligned}
n + 0 &= n\,, \\
n + s(m) &= s(n + m)\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kterými se definuje součet přirozených čísel m, n pomocí zobrazení s, které každému číslu n přiřazuje následující přirozené číslo. Podobně jsme sestrojili zobrazení, které danou lineárně uspořádanou množinu vnořuje do množiny všech racionálních čísel.

Z rovností (1) se snadno odvodí vztahy

$$
\begin{gathered}
0 + 0 = 0\,, \\
0 + 1 = 1 + 0 = 1\,, \\
0 + 2 = 1 + 1 = 2 + 0 = 2\,, \\
\dots
\end{gathered}
$$

ale z toho ještě neplyne, že jsme definovali zobrazení „+" množiny $\omega \times \omega$ do ω. To vyplývá až z věty o definici rekurzí, která je důsledkem principu indukce. Dokážeme obecnější tvrzení, které se vztahuje na všechna ordinální čísla.

Věta o transfinitní rekurzi zaručuje existenci zobrazení F, které je definováno pro každé ordinální číslo α tak, že hodnota $F(\alpha)$ závisí na úseku $F \mid \alpha$, tedy na hodnotách funkce F pro ordinální čísla menší než α. Podle § 4 kapitoly I však takové zobrazení nemůže být množinou.

2.2 Třídová zobrazení. Připomeňme, že každá třída zastupuje nějaký třídový term, je tedy určena nějakou formulí. Speciálně každá třída $G \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ je uvedena nějakou formulí $\varphi(x, y)$, tedy rovností

$$G = \{\langle x, y\rangle : \varphi(x, y)\}.$$

G je třídové zobrazení, jestliže splňuje podmínku jednoznačnosti, to znamená, že pro libovolné x, y, z lze dokázat

$$(\varphi(x, y) \,\&\, \varphi(x, z)) \rightarrow y = z.$$

Potom definujeme

$$G(x) = y \leftrightarrow \varphi(x, y).$$

Definovat třídové zobrazení znamená dát formuli $\varphi(x, y)$ s uvedenou vlastností. Následující tvrzení je tedy schéma vět, které pro každou formuli $\varphi(x, y)$ definující nějaké zobrazení G zaručuje existenci třídového zobrazení F s uvedenými vlastnostmi. Důkaz tvrzení je návodem, jak z formule φ sestrojit formuli $\psi(x, y)$, která zobrazení F definuje.

2.3 Věta o transfinitní rekurzi. *Nechť G je (třídové) zobrazení, které každé množině x přiřazuje množinu $G(x)$. Potom existuje právě jedno zobrazení F, které každému ordinálu α přiřazuje množinu*

$$F(\alpha) = G(F \mid \alpha). \tag{2}$$

Důkaz. Nechť je dáno zobrazení G. Chceme definovat zobrazení $F : On \rightarrow V$, pro které platí (2). Předpokládejme na chvíli, že již takové zobrazení F bylo sestrojeno. Je-li $\beta \in On$ a $f = F \mid \beta$, potom

$$\begin{aligned} &\operatorname{Dom}(f) = \beta, \\ &f(\alpha) = G(f \mid \alpha) \text{ platí pro každé } \alpha < \beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Takové zobrazení f můžeme chápat jako aproximaci třídového zobrazení F. Je zřejmé, že zobrazení F (jehož existenci zatím jenom předpokládáme) je sjednocením třídy všech aproximací. Zbytek důkazu se rozpadá na dvě části, nejprve ukážeme, že zobrazení F s uvedenými vlastnostmi existuje, a potom ukážeme, že takové zobrazení je právě jedno.

V předchozí úvaze je obsažen návod, jak sestrojit zobrazení F. Definujeme třídu A všech zobrazení f takových, že pro nějaký ordinál β platí (3). Snadno se nahlédne, že pro každé $f \in A$ a $\beta \in \operatorname{Dom}(f)$ je také $f \mid \beta \in A$. Dále platí

(a) pro libovolné $f, f' \in A$ a $\alpha \in \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(f')$ je $f(\alpha) = f'(\alpha)$,

(b) každé $\beta \in On$ je definičním oborem nějakého $f \in A$.

Obě podmínky dokážeme později, nyní s jejich pomocí sestrojíme zobrazení F. Položíme-li $F = \bigcup A$, potom $F \subseteq On \times V$ a z (a) vyplývá, že F je zobrazení. Z podmínky (b) dostáváme $\operatorname{Dom}(F) = On$. Ukážeme, že pro F platí (2). Nechť α je libovolný ordinál. Zvolme nějaké $f \in A$ takové, že $\alpha \in \operatorname{Dom}(f)$. Potom z (a) dostáváme

$$f(\alpha) = F(\alpha), \qquad f \mid \alpha = F \mid \alpha .$$

Navíc

$$f(\alpha) = G(f \mid \alpha),$$

protože f splňuje podmínku (3). Srovnáním posledních tří rovností dostáváme (2). F je tedy hledané zobrazení.

Nyní dokážeme (a): Jsou-li f, f' libovolná zobrazení z A, potom $\mathrm{Dom}(f) \cap \cap \mathrm{Dom}(f')$ je ordinální číslo. Označme je δ. Indukcí dokážeme, že $f(\alpha) = f'(\alpha)$ platí pro každé $\alpha < \delta$. Předpokládejme, že $f(\beta) = f'(\beta)$ platí pro každé $\beta < \alpha$, to znamená, že $f \mid \alpha = f' \mid \alpha$. Z podmínky (3), která platí pro f i f', dostáváme rovnost

$$f(\alpha) = G(f \mid \alpha) = G(f' \mid \alpha) = f'(\alpha)$$

a podmínka (a) je dokázána. Předpokládejme, že (b) neplatí, to znamená, že existuje ordinál β, který není definičním oborem žádného $f \in A$. Nechť β je nejmenši takové číslo. Potom

$$\beta = \{\mathrm{Dom}(g) : g \in A\}$$

a podle již dokázané podmínky (a) je $f = \bigcup A$ zobrazení s definičním oborem β. Stejným způsobem, jako jsme dokázali, že pro F platí (2), dokážeme, že pro f platí (3). To znamená, že $f \in A$, a dostáváme spor s volbou ordinálu β. Tím je dokázána podmínka (b) i existence F.

Kdyby F' bylo jiné zobrazení, pro které platí tvrzení věty, transfinitní indukcí se dokáže, že $F(\alpha) = F'(\alpha)$ pro každý ordinál α. Postup je stejný jako při důkazu (a). Existuje tedy nejvýše jedno zobrazení s uvedenými vlastnostmi.

2.4 Věta o transfinitní rekurzi má více ekvivalentních podob, které se využívají při různých typech konstrukcí. Dokážeme dvě další verze, které mohou čtenáře inspirovat, aby si dokázal další, které se mu budou lépe hodit.

2.5 Věta. *Nechť G_1 je zobrazení definované na univerzální třídě. Pak existuje právě jedno zobrazení $F : On \to \mathbf{V}$ takové, že*

$$F(\alpha) = G_1(F[\alpha])$$

pro každý ordinál α.

Důkaz. Je-li dáno zobrazení G_1, položme $G(x) = G_1(\mathrm{Rng}(x))$ pro každou množinu x. Podle věty 2.3 existuje právě jedna funkce $F : On \to \mathbf{V}$ taková, že

$$F(\alpha) = G(F \mid \alpha) = G_1(F[\alpha])$$

pro každé $\alpha \in On$.

2.6 Věta. *Je-li dána množina a a zobrazení G_1, G_2 definovaná pro každou množinu, pak existuje právě jedno zobrazení $F : On \to \mathbf{V}$ takové, že platí*

$$\begin{aligned} F(0) &= a\,, \\ F(\alpha) &= G_1F(\beta)\,, && \textit{je-li } \alpha \textit{ následníkem ordinálu } \beta, \\ F(\alpha) &= G_2(F[\alpha])\,, && \textit{je-li } \alpha \textit{ limitní ordinál.} \end{aligned}$$

Důkaz. Jsou-li dána zobrazení G_1, G_2 a množina a, pro libovolné x položme

$$G(x) = \begin{cases} G_1(x(\beta))\,, & \text{je-li } x \text{ zobrazení, } \beta \text{ ordinál a } \mathrm{Dom}(x) = \beta \cup \{\beta\}, \\ G_2(\mathrm{Rng}(x))\,, & \text{je-li } \mathrm{Dom}(x) \text{ limitní ordinál,} \\ a & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Podle věty 2.3 existuje právě jedno zobrazení F s definičním oborem On takové, že pro každý ordinál α platí

$$F(\alpha) = G(F \mid \alpha)\,.$$

Snadno se nahlédne, že F je hledaná funkce. Pro $\alpha = 0$ dostáváme

$$F(0) = G(F \mid 0) = G(0) = a\,,$$

pro $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$

$$F(\alpha) = G(F \mid \alpha) = G_1(F(\beta))$$

a pro limitní

$$F(\alpha) = G(F \mid \alpha) = G_2(F[\alpha])\,.$$

2.7 Při definici rekurzí se někdy požaduje, aby hodnota $F(\alpha)$ nezávisela jen na úseku $F \mid \alpha$, ale i na ordinálu α. Jinými slovy, je dáno zobrazení $G_0\colon On \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a konstruuje se zobrazení $F\colon On \to \mathbf{V}$ takové, že

$$F(\alpha) = G_0(\alpha, F \mid \alpha)$$

platí pro každý ordinál α. I tento případ je zahrnut ve větě 2.3. Uvědomme si, že $\alpha = \mathrm{Dom}(F \mid \alpha)$. Je-li dáno zobrazení G_0, můžeme definovat zobrazení G vztahem $G(x) = G_0(\mathrm{Dom}(x), x)$. Je-li F zobrazení z věty 2.3, pro každý ordinál α dostáváme

$$F(\alpha) = G(F \mid \alpha) = G_0(\alpha, F \mid \alpha)\,.$$

Transfinitní rekurzí lze z axiomu výběru (AC) jednoduše dokázat princip dobrého uspořádání (WO).

2.8 Věta (AC). *Každou množinu lze dobře uspořádat.*

Důkaz. Nechť A je libovolná množina. Můžeme předpokládat, že je neprázdná, jinak není co dokazovat. Stačí, když sestrojíme prosté zobrazení f nějakého ordinálu α na A, které na množinu A přenese dobré uspořádání ordinálu α.

Hledáme ordinál α a prosté zobrazení f. Myšlenka důkazu je velmi jednoduchá. Nechť g je selektor na $\mathscr{P}(A)$, který vybírá z každé neprázdné podmnožiny $a \subseteq A$ prvek $g(a) \in a$. Zobrazení f konstruujeme tak, že nule přiřadíme prvek, který selektor vybírá z množiny A. Jsou-li již sestrojeny hodnoty $f(\gamma)$ pro každé γ menší než nějaký ordinál β a množina $A - f[\beta]$ je neprázdná, $f(\beta)$ bude prvek, který z ní selektor vybere.

Existenci zobrazení f zaručuje věta o transfinitní rekurzi. Operaci G definujme vztahem $G(x) = g(A - x)$ pro každé x. Podle věty 2.5 existuje právě jedno zobrazení F takové, že pro každý ordinál α je $F(\alpha) = G(F[\alpha])$. Je-li α nejmenší ordinál takový, že $A - F[\alpha] = 0$ a $f = F \mid \alpha$, z definice G a vlastnosti F se snadno ukáže, že f je prosté zobrazení α na A.

2.9 Je zřejmé, že v případech, kdy rekurzí podle věty 2.5 konstruujeme zobrazení nějakého zatím neurčeného ordinálu do dané množiny A, stačí, aby operace G byla definována na množině $\mathscr{P}(A)$. Použijeme-li větu 2.3, stačí, aby operace G byla definována na $\mathscr{P}(\alpha \times A)$ pro dosti velký ordinál α.

2.10 Úzká dobrá uspořádání a ***On*****.** Říkáme, že R je úzká relace, jestliže $\{y: \langle y, x\rangle \in R\}$ je množina pro každé x. Víme, že On je vlastní třída, která je dobře uspořádaná úzkou relací. Ukážeme, že každá vlastní třída, která je dobře uspořádaná úzkou relací, je izomorfní s On.

Snadno se nahlédne, že je-li R úzká relace dobrého uspořádání na třídě A, potom každá neprázdná podtřída $B \subseteq A$ má nejmenší prvek: libovolný prvek $b \in B$ je buď nejmenším prvkem třídy B, nebo $u = \{a: a \in B \;\&\; \langle a, b\rangle \in R\}$ je neprázdná podmnožina třídy A. Nejmenší prvek množiny u existuje (R je dobré uspořádání) a je i nejmenším prvkem třídy B.

2.11 Věta. *Je-li R úzké dobré uspořádání na vlastní třídě A, pak existuje právě jedno izomorfní zobrazení F třídy On na A.*

Důkaz. Izomorfismus F sestrojíme transfinitní rekurzí. Pro libovolné x nechť $G(x)$ je nejmenší prvek třídy $A - x$ vzhledem k R. Uvědomme si, že $A - x \neq 0$ pro každé x, protože A je vlastní třída. Podle věty 2.5 existuje právě jedno zobrazení $F: On \to V$ takové, že pro každý ordinál α je $F(\alpha) = G(F[\alpha])$. Přitom pro libovolný ordinál α je $A - F[\alpha] \neq 0$, proto F je prosté zobrazení On do A. Snadno se ověří, že pro libovolné α, β platí

$$\alpha < \beta \leftrightarrow F(\alpha) <_R F(\beta).$$

F je tedy izomorfní zobrazení On na nějakou dolní podtřídu třídy A. Kdyby existoval nějaký prvek $a \in A$, který není hodnotou zobrazení F, pak a má vlastní třídu předchůdců a R není úzké uspořádání. Proto F je izomorfní zobrazení On na A.

2.12 Jiný důkaz věty 2.11 lze získat úpravou důkazu věty I.5.31 bez použití rekurze.

2.13 Příklad. Maximo-lexikografické uspořádání je podle věty 1.23 úzké dobré uspořádání na On^2. Podle věty 2.11 existuje právě jeden izomorfismus J třídy On^2 a On vzhledem k maximo-lexikografickému uspořádání a $<$. V příkladě I.6.28 jsme ukázali, že J zobrazuje $\omega \times \omega$ na ω. Později uvidíme, že podobná rovnost platí i pro další limitní ordinály, speciálně pro všechna nekonečná kardinální čísla.

Podle věty 1.25 je relace $\lhd$ úzké dobré uspořádání na třídě $[On]^{<\omega}$ všech konečných podmnožin třídy On. Existuje tedy izomorfní zobrazení K třídy $[On]^{<\omega}$ na On. Z I.6.28 víme, že K zobrazuje $[\omega]^{<\omega}$ na ω. Později uvidíme, že totéž platí i pro všechna nekonečná kardinální čísla.

2.14 Parametry transfinitní rekurze. Podle úmluv z §§ 2 a 3 kapitoly I může mít formule φ, která definuje zobrazení G, i další volné proměnné pro množiny a pro třídy, které chápeme jako parametry. Například v důkazu 2.11 vystupují třídy A, R jako parametry v definici zobrazení G. Rozebereme případ, kdy φ má kromě volných proměnných x, y ještě jednu volnou množinovou proměnnou z a jednu volnou proměnnou C pro třídy. Je-li dána třída C, potom

$$G = \{\langle x, y\rangle : \varphi(x, y, z, C)\} \tag{4}$$

je zobrazení a hodnoty $G(x)$ závisí i na parametrech z a C. Je-li F zobrazení sestrojené transfinitní rekurzí z operace G, jeho hodnoty $F(\alpha)$ také závisí na parametrech z, C. Můžeme to zdůraznit tím, že sestrojené zobrazení označíme $F_{z,C}$.

Vraťme se ke vztahům (1), které definují součet $n + m$ rekurzí podle proměnné m. Proměnná n v nich vystupuje jen jako parametr konstrukce. Je-li dáno přirozené číslo n, podle věty 2.6, kde $a = n$, $G_1(x) = x \cup \{x\}$ a G_2 je definováno libovolně, sestrojíme zobrazení F_n takové, že pro každé přirozené číslo m platí

$$F_n(m) = n + m\,.$$

Položíme-li $F'(n, m) = F_n(m)$ pro každé $n, m < \omega$, parametr n zobrazení F_n se stal proměnnou zobrazení F'.

Ukážeme, že takový postup je korektní, že množinové parametry zobrazení definovaného transfinitní rekurzí lze zahrnout mezi proměnné nějaké jiné operace. Předpokládejme, že je dána třída C a že pro každou množinu z je třída G ze vztahu (4) zobrazením $\mathbf{V}$ do $\mathbf{V}$. Definujeme-li

$$G' = \{\langle x, z, y\rangle : \varphi(x, y, z, C)\}\,,$$

potom G' je zobrazení $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ do $\mathbf{V}$. Dále postupujeme jako v důkazu věty 2.3. Definujeme A jako třídu všech zobrazení f s definičním oborem $\beta \times \{z\}$ pro nějaký ordinál β a množinu z takových, že pro každé $\alpha < \beta$ platí

$$f(\alpha, z) = G'(f \upharpoonright (\alpha \times \{z\}))\,.$$

Stejným způsobem jako v důkazu věty 2.3 dokážeme existenci zobrazení $F' : On \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ takového, že pro každý ordinál α a množinu z platí

$$F'(\alpha, z) = G'(F' \upharpoonright (\alpha \times \{z\}))\,.$$

Uvědomme si, že hodnota $F'(\alpha, z)$ závisí jen na hodnotách $F'(\gamma, z)$ pro $\gamma < \alpha$, ale nezávisí na hodnotách $F'(\gamma, z')$ pro $z' \neq z$!

Snadno se nahlédne, že tuto konstrukci lze dále zobecnit tak, aby hodnota $F'(\alpha, z)$ závisela na hodnotách $F'(\gamma, z')$, $\gamma < \alpha$ pro všechna z' z nějaké množiny. Nemůžeme však konstruovat zobrazení F' tak, aby hodnota $F'(\alpha, z)$ závisela na hodnotách $F'(\gamma, z')$, $\gamma < \alpha$ pro vlastní třídu parametrů z'.

§ 3 Ordinální aritmetika

Zavedeme aritmetické operace na ordinálních číslech a seznámíme se s jejich vlastnostmi. Dokážeme větu o jednoznačném vyjádření ordinálních čísel podle mocnin ordinálu ω a ukážeme, že podobné vyjádření lze sestrojit pro kterýkoli základ $\eta > 1$. Aritmetické operace na množině ω splňují všechny axiomy Peanovy aritmetiky, to znamená, že v teorii množin lze dokázat všechny věty o přirozených číslech, které jsou dokazatelné v Peanově aritmetice. Na závěr dokážeme Goodsteinovu větu o přirozených číslech. Tato věta teorie množin (s axiomem nekonečna) je příkladem tvrzení, které není dokazatelné v Peanově aritmetice ani v teorii konečných množin, i když ho lze v obou teoriích vyslovit.

3.1 Definice. Ordinální funkce. Říkáme, že zobrazení F je *ordinální funkce*, jestliže jeho definičním oborem je nějaký ordinál nebo On a $\mathrm{Rng}(F) \subseteq On$.

Říkáme, že ordinální funkce F je *rostoucí* (*neklesající*), jestliže pro libovolné $\beta \in \mathrm{Dom}(F)$ a $\alpha < \beta$ platí $F(\alpha) < F(\beta)$ $(F(\alpha) \leq F(\beta))$.

Připomeňme, že dobré uspořádání připouští jenom konečné klesající posloupnosti. Proto pojmy klesající a nerostoucí ordinální funkce ani nezavádíme.

3.2 Věta. (i) *Je-li F rostoucí ordinální funkce, potom $\alpha \leq F(\alpha)$ pro každé $\alpha \in \mathrm{Dom}(F)$.*

(ii) *Je-li A dobře uspořádaná množina a $B \subseteq A$, pro ordinální typy α, β množin A, B* platí $\beta \leq \alpha$.

Důkaz sporem. (i) Nechť α je nejmenší ordinál takový, že $F(\alpha) < \alpha$. To znamená, že pro každé $\beta < \alpha$ platí $F(\beta) \geq \beta$. Položíme-li $\beta = F(\alpha)$, dostáváme $F(\beta) \geq \beta = F(\alpha)$, a to je ve sporu s předpokladem, že F je rostoucí funkce.

(ii) Nechť j je izomorfní zobrazení množiny A na ordinál α a k je izomorfismus B a β. Kdyby $\beta > \alpha$, potom $f = j \circ k^{-1}$ je rostoucí ordinální funkce na β a pro α dostáváme $f(\alpha) < \alpha$. To je ve sporu s (i).

3.3 Spojitost a limity. Připomeňme, že dobré uspořádání určuje na On intervalovou topologii. Libovolná množina ordinálních čísel je otevřená, právě když je sjednocením nějakého systému otevřených intervalů. Izolovaná ordinální čísla jsou právě všechny izolované body a je-li λ limitní ordinál, množiny $\{\alpha : \mu < \alpha \leq \lambda\}$ pro $\mu < \lambda$ tvoří bázi okolí bodu λ. Množina $X \subseteq On$ je uzavřená, právě když supremum každé její podmnožiny je prvkem X. Obvyklé pojmy spojitosti a limity zobrazení, které se definují pomocí okolí, se přenášejí i na ordinální funkce. V izolovaných bodech nejsou tyto pojmy zajímavé, můžeme se omezit jen na limitní ordinály. Snadno se ukáže, že neklesající ordinální funkce F má v každém limitním ordinálu $\lambda \in \mathrm{Dom}(F)$ limitu, která je supremem předchozích hodnot $F(\alpha)$, $\alpha < \lambda$.

3.4 Definice. Normální funkce. Říkáme, že ordinální funkce F je *normální*, je-li rostoucí a spojitá. To znamená, že pro každý limitní ordinál $\lambda \in \mathrm{Dom}(F)$ platí

$$F(\lambda) = \sup\{F(\alpha) : \alpha < \lambda\}.$$

3.5 Příklad. Identické zobrazení je nejjednodušším příkladem normální funkce na On. Naproti tomu funkce S, která každému ordinálu α přiřazuje jeho následníka $\alpha \cup \{\alpha\}$, je rostoucí, ale není spojitá.

Uvědomme si, že pro normální funkci F a limitní $\lambda \in \mathrm{Dom}(F)$ je $F(\lambda)$ limitní ordinál.

3.6 Lemma. *Je-li F normální funkce, potom pro každý ordinál β, $F(0) \leq \beta < \sup \mathrm{Rng}(F)$, existuje největší ordinál α, pro který platí $F(\alpha) \leq \beta$.*

Důkaz. Ze spojitosti F plyne, že vzor uzavřeného intervalu $[0, \beta]$ je uzavřená množina, má tedy maximální prvek α. Protože F je rostoucí, α je největší ordinál, pro který platí $F(\alpha) \leq \beta$.

Z příkladu 3.5 je zřejmé, že tvrzení lemmatu neplatí, jestliže neostrou nerovnost nahradíme ostrou nerovností.

3.7 Lemma. *Jsou-li F, G normální funkce na On, potom $F \circ G$ je také normální funkce.*

3.8 Definice. Pevné body. Říkáme, že ordinál ξ je *pevným bodem* ordinální funkce F, jestliže $F(\xi) = \xi$.

3.9 Věta o pevných bodech normální funkce. *Nechť F je normální funkce definovaná na On.*

(i) *Ke každému ordinálu α existuje $\beta \geq \alpha$, které je pevným bodem funkce F. Třída všech pevných bodů normální funkce F je tedy neomezená.*

Navíc, definujeme-li posloupnost ordinálů $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ tak, že $\alpha_0 = \alpha$ a pro každé přirozené n je $\alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$, potom supremum této posloupnosti je nejmenší ze všech pevných bodů $\xi \geq \alpha$ funkce F.

(ii) *Třída všech pevných bodů funkce F je uzavřená. To znamená, že supremum každé množiny pevných bodů je také pevným bodem funkce F.*

Důkaz. (i) Je-li dáno α, nechť β je supremem odpovídající posloupnosti. Potom

$$F(\beta) = \sup\{F(\alpha_n) : n < \omega\} = \sup\{\alpha_{n+1} : n < \omega\} = \beta,$$

kde první rovnost plyne z normality, druhá a třetí plynou z definice α_{n+1} a 3.2. Je-li $\alpha < \beta$ a ξ je ordinál takový, že $\alpha \leq \xi < \beta$, potom pro nějaké n platí $\alpha_n \leq \xi < \alpha_{n+1}$. Z monotónnosti F dostáváme $\xi < \alpha_{n+1} = F(\alpha_n) \leq F(\xi)$. To znamená, že ξ není pevným bodem funkce F. (ii) Je-li x nějaká množina pevných bodů funkce F a β je její supremum, podobným způsobem jako v (i) dokážeme $F(\beta) = \beta$.

3.10 Důsledek. Je-li F normální funkce na On, podle 2.11 existuje izomorfní zobrazení J třídy On na třídu $K(F)$ všech pevných bodů funkce F. Navíc je J normální funkce, protože $K(F)$ je uzavřená třída.

3.11 Připomeňme, že lexikografické uspořádání je dobré uspořádání třídy $On \times On$. To znamená, že každé množině $a \subseteq On^2$ je jednoznačně přiřazeno ordinální číslo, které je typem jejího dobrého uspořádání. Tento fakt použijeme při definici součtu a součinu ordinálních čísel.

3.12 Definice. Ordinální součet a součin. Nechť α, β jsou ordinální čísla.

(i) Ordinální číslo, které je typem množiny $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ při lexikografickém uspořádání, označíme $\alpha + \beta$ a nazveme ho *součtem ordinálů* α a β.

(ii) Ordinální číslo, které je typem množiny $\beta \times \alpha$ při lexikografickém uspořádání, označíme $\alpha . \beta$ a nazveme ho *součinem ordinálů* α a β.

3.13 Množiny $a = \{0\} \times \alpha$ a $b = \{1\} \times \beta$ z definice ordinálního součtu jsou disjunktní a při lexikografickém uspořádání jsou izomorfní po řadě s ordinály α a β. Součet $\alpha + \beta$ je tedy typem sjednocení dvou disjunktních množin a, b, které jsou izomorfní po řadě s α, β, a každý prvek množiny a předchází každý prvek množiny b. Takovým způsobem lze definovat součet libovolných uspořádání (ne jenom dobrých).

Snadno se nahlédne, že $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Přičtením jednotky dostáváme následující ordinální číslo. V dalším budeme psát $\alpha + 1$ místo $\alpha \cup \{\alpha\}$.

Podobně je $\alpha . \beta$ typem dobře uspořádané množiny, která je sjednocením disjunktních množin uspořádaných podle typu α, které jsou položeny za sebou podle typu β. Uvědomme si, že $\alpha . \beta$ je typem množiny $\beta \times \alpha$ při lexikografickém uspořádání. V kartézském součinu α a β vystupují v obráceném pořadí! Tato zvláštnost vznikla historickým vývojem. Asymetrii v definici (ne ve vlastnostech) ordinálního součinu lze odstranit použitím zpětného lexikografického uspořádání, které porovnává nejprve druhé členy a potom teprve první členy uspořádaných dvojic. Ordinál $\alpha . \beta$ je potom typem množiny $\alpha \times \beta$ při zpětném lexikografickém uspořádání.

3.14 Jednoduché vlastnosti součtu a součinu. Pro libovolné ordinály α, β, γ platí

$$\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha,$$
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

a pro součin

$$\alpha \,.\, 0 = 0 = 0 \,.\, \alpha\,,$$
$$\alpha \,.\, 1 = \alpha = 1 \,.\, \alpha\,,$$
$$\alpha \,.\, 2 = \alpha + \alpha\,,$$
$$\alpha \,.\, (\beta \,.\, \gamma) = (\alpha \,.\, \beta) \,.\, \gamma\,.$$

Ordinální součet a součin jsou asociativní operace. Užijeme-li charakterizaci uspořádání ω z I.§ 6, snadno nahlédneme, že

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1\,,$$
$$2 \,.\, \omega = \omega \neq \omega \,.\, 2\,.$$

Ordinální součet a součin nejsou komutativní operace.

3.15 Lemma. Monotónnost sčítání. *Pro libovolné ordinály* α, β, γ *platí*

(i) $$\alpha < \beta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta\,,$$
(ii) $$\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma\,.$$

Důkaz. (i) Z $\alpha < \beta$ a definice součtu vyplývá, že $\gamma + \alpha$ je typem vlastní dolní podmnožiny ordinálu $\gamma + \beta$.

(ii) Je-li $\alpha \leq \beta$, potom množina uspořádaných dvojic, která definuje $\alpha + \gamma$, je podmnožinou množiny odpovídající součtu $\beta + \gamma$. Tvrzení plyne z 3.2.

3.16 Lemma. Monotónnost součinu. *Pro libovolné ordinály* α, β, γ *platí*

(i) *je-li* $\gamma > 0$, *potom*

$$\alpha < \beta \rightarrow (\gamma \,.\, \alpha < \gamma \,.\, \beta)\,,$$

(ii) $$\alpha \leq \beta \rightarrow (\alpha \,.\, \gamma \leq \beta \,.\, \gamma)\,.$$

Důkaz. (i) Je-li $\alpha < \beta$ a $\gamma > 0$, potom $\alpha \times \gamma$ je vlastní dolní podmnožinou $\beta \times \gamma$ při lexikografickém uspořádání. (ii) Je-li $\alpha \leq \beta$, potom $\gamma \times \alpha \subseteq \gamma \times \beta$ a tvrzení plyne z 3.2.

Poznamenejme, že tvrzení (ii) v předcházejících dvou lemmatech neplatí obecně pro ostrou nerovnost, protože $1 < 2$, a přesto

$$1 + \omega = 2 + \omega = \omega\,,$$
$$1 \,.\, \omega = 2 \,.\, \omega = \omega\,.$$

3.17 Distributivnost. Není těžké ověřit, že pro libovolné ordinály α, β, γ platí

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \,.\, \beta + \alpha \,.\, \gamma\,,$$

to znamená, že ordinální součin je zleva distributivní. Naproti tomu je podle 3.14

$$(1 + 1) \,.\, \omega \neq \omega + \omega\,.$$

Ordinální součin tedy není distributivní zprava.

3.18 Lemma. *Je-li $\alpha \leq \beta$, pak existuje právě jeden ordinál ϱ takový, že $\alpha + \varrho = \beta$.*
Důkaz. Je-li $\alpha \leq \beta$, potom α je dolní podmnožinou β a její doplněk $\beta - \alpha$ je horní podmnožinou β. Je-li ϱ ordinální typ $\beta - \alpha$, dostáváme $\alpha + \varrho = \beta$. Jednoznačnost vyplývá z 3.15(i).

3.19 Příklad. Rovnice $\xi + \beta = \omega$ je řešitelná, právě když $\beta = 0$ nebo $\beta = \omega$. V prvním případě je $\xi = \omega$ jediným řešením a ve druhém případě je řešením každé $\xi < \omega$.

3.20 Lemma. *Pro libovolný ordinál α v množině všech řešení $\langle \xi, \eta \rangle$ rovnice*

$$\xi + \eta = \alpha$$

najdeme jen konečně mnoho různých hodnot η.
Důkaz sporem. Předpokládejme, že pro nějaké α v množině všech řešení dané rovnice existuje nekonečně mnoho různých hodnot η. Nechť $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$, $i < \omega$ je posloupnost řešení taková, že pro každé přirozené i platí $\eta_i < \eta_{i+1}$. Z monotónnosti sčítání dostáváme $\xi_1 < \xi_0$ a indukcí podle i dokážeme $\xi_{i+1} < \xi_i$ pro každé $i < \omega$. To znamená, že množina ordinálů $\{\xi_i : i < \omega\}$ nemá nejmenší prvek – spor.

3.21 Lemma. *Je-li $\beta > 0$, pro každý ordinál α existují jednoznačně určené ordinály $\delta \leq \alpha$ a $\varrho < \beta$ takové, že*

$$\alpha = \beta . \delta + \varrho .$$

Důkaz. Podle 3.16(ii) je $\alpha \leq \beta . \alpha$. V případě, že $\alpha = \beta . \alpha$, zvolíme $\delta = \alpha$ a $\varrho = 0$. Z monotónnosti součtu a součinu a z levé distributivity se snadno ukáže, že je to jediné řešení splňující podmínky lemmatu. Je-li $\alpha < \beta . \alpha$ a j je izomorfismus lexikograficky uspořádané množiny $\alpha \times \beta$ a ordinálu $\beta . \alpha$, pak existuje právě jedna dvojice $\langle \delta, \varrho \rangle \in \alpha \times \beta$ taková, že $j(\langle \delta, \varrho \rangle) = \alpha$. Nutně $\delta < \alpha$ a $\varrho < \beta$ a snadno se ověří, že

$$\alpha = \beta . \delta + \varrho .$$

3.22 Věta. (i) *Pro každý ordinál α je ordinální funkce $F(\xi) = \alpha + \xi$ normální.*
(ii) *Pro každé $\alpha > 0$ je ordinální funkce $F(\xi) = \alpha . \xi$ normální.*
Důkaz. (i) Z monotónnosti součtu vyplývá, že F je rostoucí funkce, a není těžké ověřit, že je spojitá.
(ii) Je-li $\alpha > 0$, F je rostoucí podle 3.16(i). Nechť λ je limitní ordinál, ukážeme, že $\alpha . \lambda$ je supremem všech hodnot $F(\xi)$, $\xi < \lambda$. Je-li $\sigma < \alpha . \lambda$, podle předchozího lemmatu existují ordinály δ a $\varrho < \alpha$ takové, že $\sigma = \alpha . \delta + \varrho$. Z monotónnosti operací dostáváme $\delta < \lambda$ a také $\delta + 1 < \lambda$, protože λ je limitní. Potom

$$\sigma = \alpha . \delta + \varrho < \alpha . \delta + \alpha = F(\delta + 1) .$$

To znamená, že $F(\lambda) = \alpha . \lambda$ je nejmenší majorantou množiny $\{F(\xi) : \xi < \lambda\}$.

3.23 Definice. Mocniny ordinálů. Pro libovolné α definujeme *mocninu* α^β rekurzí podle β

(i) $\alpha^0 = 1$,

(ii) $\alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta . \alpha$,

(iii) $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : 0 < \gamma < \beta\}$, je-li β limitní ordinál.

3.24 Jednoduché vlastnosti mocnin. Pro libovolné ordinály α, β platí

(i) $0^0 = 1$ a $0^\beta = 0$, pokud $\beta > 0$,

(ii) $1^\beta = 1$,

(iii) $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha . \alpha$, $\alpha^3 = (\alpha . \alpha) . \alpha$.

3.25 Lemma. *Pro libovolné α, β, γ platí*

(i) $\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$,

(ii) $(1 < \alpha \;\&\; \beta < \gamma) \rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$,

(iii) *pro každé $\alpha > 1$ je α^ξ normální funkce proměnné ξ.*

Důkaz. (i) Indukcí podle γ. Je-li $\gamma = 0$, potom $\alpha^\gamma = \beta^\gamma = 1$. Je-li $\alpha \leq \beta$, $\gamma = \delta + 1$ a $\alpha^\delta \leq \beta^\delta$, z monotónnosti součinu dostáváme $\alpha^\gamma = \alpha^\delta . \alpha \leq \beta^\delta . \beta = \beta^\gamma$. Je-li γ limitní a pro každé $\delta < \gamma$ již platí $\alpha^\delta \leq \beta^\delta$, potom také $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

(ii) Předpokládejme, že $\alpha > 1$. Indukcí podle δ se pro každé $\delta > 0$ dokáže $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+\delta}$. Je-li $\beta < \gamma$, podle 3.18 existuje $\delta > 0$ takové, že $\gamma = \beta + \delta$.

(iii) Je-li $\alpha > 1$, podle (ii) je α^ξ rostoucí funkce proměnné ξ. Z definice mocniny je zřejmé, že je spojitá.

3.26 Lemma. *Pro libovolné α, β, γ platí*

(i) $\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^\beta . \alpha^\gamma$,

(ii) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$,

Důkaz. (i) Pro $\alpha \leq 1$ tvrzení plyne z 3.24. Je-li $\alpha > 1$, dokazujeme indukcí podle γ. Je-li $\gamma = 0$, není co dokazovat. Je-li $\gamma = \delta + 1$, potom $\beta + \gamma = (\beta + \delta) + 1$ a tvrzení plyne z indukčního předpokladu. Zbývá případ, kdy γ je limitní ordinál a tvrzení platí pro každé $\delta < \gamma$. Potom

$$\begin{aligned}\alpha^\beta . \alpha^\gamma &= \alpha^\beta . \{\sup \alpha^\delta ; 0 < \delta < \gamma\}, \\ &= \sup\{\alpha^\beta . \alpha^\delta ; 0 < \delta < \gamma\}, \\ &= \sup\{\alpha^{\beta+\delta} ; 0 < \delta < \gamma\}, \\ &= \sup\{\alpha^\varepsilon ; 0 < \varepsilon < \beta + \gamma\} = \alpha^{\beta+\gamma}.\end{aligned}$$

Druhá a čtvrtá rovnost plynou z toho, že součin a součet jsou normální funkce vzhledem ke druhému argumentu, a třetí rovnost je indukční předpoklad.

(ii) Platí, je-li jeden z ordinálů β, γ roven nule nebo $\alpha \leq 1$. Předpokládejme, že $\alpha > 1$ a že β, γ jsou různé od nuly. Dokazujeme indukcí podle γ. Je-li $\gamma = \delta + 1$, tvrzení plyne z (i) a z indukčního předpokladu. Zbývá případ, že γ je limitní ordinál. Potom $\beta . \gamma$ je také limitní ordinál a

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^\gamma &= \sup \{(\alpha^\beta)^\delta;\ 0 < \delta < \gamma\}\,,\\ &= \sup \{\alpha^{\beta.\delta};\ 0 < \delta < \gamma\}\,.\\ &= \sup \{\alpha^\varepsilon;\ 0 < \varepsilon < \beta . \gamma\} = \alpha^{\beta . \gamma}\,.\end{aligned}$$

Druhá rovnost plyne z indukčního předpokladu a třetí rovnost plyne z toho, že součin je normální funkcí druhého činitele.

3.27 Věta. *Jsou-li m, n přirozená čísla, potom $m + n$, $m . n$ a m^n jsou také přirozená čísla. Navíc*

$$m + n = n + m\,, \qquad m . n = n . m\,.$$

Součet a součin přirozených čísel jsou komutativní operace, a protože ordinální součin je distributivní zleva, součin přirozených čísel je distributivní.

Důkaz. Z definice součtu a součinu je zřejmé, že $m + n$ a $m . n$ jsou konečná ordinální čísla. Indukcí podle n dokážeme, že i m^n je přirozené číslo. Dokážeme, že součin přirozených čísel komutuje. Snadno se sestrojí prosté zobrazení konečné množiny $m \times n$ na množinu $n \times m$. Prosté zobrazení přenáší lexikografické uspořádání množiny $m \times n$ na nějaké lineární uspořádání množiny $n \times m$. Podle 1.6.3 jsou na konečné množině všechna lineární uspořádání izomorfní. To znamená, že $m . n = n . m$. Podobným způsobem se dokáže, že součet přirozených čísel také komutuje.

3.28 Zúžením ordinálních operací na přirozená čísla dostáváme operace sčítání, násobení a mocnění přirozených čísel. Z dokázaných vět vyplývá, že aritmetické operace na přirozených číslech v teorii množin mají všechny vlastnosti, které lze dokázat v Peanově aritmetice. Proto se množina ω spolu s operacemi součtu a součinu a konstantami 0, 1 nazývá standardním modelem Peanovy aritmetiky.

V aritmetice lze každé přirozené číslo vyjádřit rozvojem podle mocnin základu $z > 1$. Ukážeme, že obdobné tvrzení platí i v ordinální aritmetice. Mezi ordinály, které mohou být základem takového vyjádření, zaujímá ω význačné postavení. Tvrzení dokážeme pro tento speciální případ.

3.29 Lemma. *Jsou-li k, $m_0, m_1, \ldots, m_k$ přirozená čísla a $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ jsou ordinály menší než δ, potom*

$$\omega^\delta > \omega^{\gamma_0} . m_0 + \omega^{\gamma_1} . m_1 + \ldots + \omega^{\gamma_k} . m_k\,.$$

Důkaz. Nechť m je největší z přirozených čísel m_i a γ je největší z ordinálů γ_i, $i \leq k$. Potom ordinál $\omega^\gamma . m . k$ majorizuje součet na pravé straně nerovnosti. Podle předpokladu je $\delta \geq \gamma + 1$, odkud $\omega^\delta \geq \omega^{\gamma + 1} > \omega^\gamma . m . k$.

3.30 Věta o rozvoji ordinálních čísel v mocninách ω. *Ke každému ordinálu $\alpha > 0$ lze jednoznačně přiřadit přirozená čísla k, $m_0, m_1, \ldots, m_k$ různá od nuly a ordinály $\gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_k$ tak, že*

(1) $$\alpha = \omega^{\gamma_0} . m_0 + \omega^{\gamma_1} . m_1 + \ldots + \omega^{\gamma_k} . m_k .$$

Výraz na pravé straně nazýváme Cantorovým normálním tvarem ordinálu α.

Je-li

(2) $$\beta = \omega^{\delta_0} . n_0 + \omega^{\delta_1} . n_1 + \ldots + \omega^{\delta_l} . n_l$$

vyjádření ordinálu β *v Cantorově normálním tvaru, potom* $\alpha < \beta$, *právě když nastane jeden ze dvou následujících případů:*

(i) $k < l$ *a pro každé* $i \leq k$ *je* $\langle \gamma_i, m_i \rangle = \langle \delta_i, n_i \rangle$,

(ii) *existuje* $i \leq \min(k, l)$ *takové, že* $\langle \gamma_i, m_i \rangle \neq \langle \delta_i, n_i \rangle$, *a pro nejmenší takový index i je buď* $\gamma_i < \delta_i$, *nebo* $\gamma_i = \delta_i$ *a* $m_i < n_i$.

Důkaz. Indukcí podle α dokážeme, že každý nenulový ordinál lze jednoznačně vyjádřit v Cantorově normálním tvaru. Pro $\alpha = 1$ je $\alpha = \omega^0 . 1$ jediné vyjádření, které splňuje podmínky věty. Předpokládejme, že $\alpha > 1$ a že každý nenulový ordinál $\beta < \alpha$ lze jednoznačně vyjádřit v Cantorově normálním tvaru. ω^γ je normální funkce, existuje tedy největší ordinál γ takový, že $\omega^\gamma \leq \alpha$. Z normality součinu plyne existence největšího ordinálu δ, $\omega^\gamma . \delta \leq \alpha$. Přitom $\delta < \omega$, protože $\omega^{\gamma+1} = \omega^\gamma . \omega > \alpha$. Je-li $\omega^\gamma . \delta = \alpha$, z lemmatu 3.29 plyne jednoznačnost takového vyjádření. Je-li $\omega^\gamma . \delta < \alpha$, pak existuje právě jeden nenulový ordinál β takový, že $\omega^\gamma . \delta + \beta = \alpha$. Přitom $\beta < \omega^\gamma$, protože z $\beta \geq \omega^\gamma$ dostáváme $\omega^\gamma . \delta + \beta \geq \omega^\gamma(\delta + 1)$, a to je ve sporu s volbou ordinálu δ.

Nechť

$$\beta = \omega^{\gamma_1} . m_1 + \omega^{\gamma_2} . m_2 + \ldots + \omega^{\gamma_k} . m_k$$

je vyjádřením ordinálu β v Cantorově normálním tvaru. Položíme-li $\gamma_0 = \gamma$, $m_0 = \delta$, pak $\gamma_0 > \gamma_1$ a (1) je vyjádřením ordinálu α v Cantorově normálním tvaru. Jednoznačnost vyjádření plyne z lemmatu 3.29 a z jednoznačnosti vyjádření ordinálu β.

Nyní dokážeme druhé tvrzení věty. Předpokládejme, že ordinály α, β jsou vyjádřeny ve tvarech (1) a (2). Platí-li (i), potom $\alpha < \beta$, protože zbývající členy v rozvoji β jsou nenulové. Předpokládejme, že platí (ii) a že i je nejmenší index, ve kterém se oba normální tvary liší. Je-li $\gamma_i < \delta_i$, potom $\alpha < \beta$ plyne z lemmatu 3.29. Je-li $\gamma_i = \delta_i$ a $m_i < n_i$, potom $n_i \geq m_i + 1$
a

$$\omega^{\delta_i} . n_i \geq \omega^{\gamma_i} . m_i + \omega^{\gamma_i} .$$

Podle lemmatu 3.29 poslední sčítanec na pravé straně majorizuje součet všech zbývajících členů v (1), tedy také $\alpha < \beta$.

Zbývá dokázat obrácenou implikaci. Je-li $\alpha < \beta$, normální tvary (1) a (2) se musí lišit. Potom buď rozvoj jednoho ordinálu splývá s počátečními členy rozvoje druhého ordinálu, nebo existuje $i \leq k, l$, kde se rozvoje liší. S pomocí již dokázané implikace se ukáže, že mohou nastat jen případy (i) nebo (ii).

3.31 Důsledek. *Je-li* $\alpha > 0$, *potom platí:*

(i) *existuje právě jedno přirozené číslo* $l > 0$ *a jednoznačně určené ordinály* $\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \ldots \geq \gamma_l$ *tak, že*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} + \omega^{\gamma_1} + \ldots + \omega^{\gamma_l},$$

(ii) *existují jednoznačně určené ordinály* β, γ *takové, že*

$$\alpha = \omega^{\gamma}(\beta + 1).$$

Důkaz. (i) Pro každý ordinál γ a přirozené m je $\omega^{\gamma} . m$ součtem m sčítanců tvaru ω^{γ}. Rovnost (i) získáme rozepsáním Cantorova normálního tvaru (1).

(ii) Je-li α v normálním tvaru (1), položme $\gamma = \gamma_k$. Potom pro každé $i \leq k$ je $\gamma_i = \gamma + \delta_i$ pro nějaký ordinál δ_i. Podle 3.26(i) a z levé distributivity dostáváme

$$\alpha = \omega^{\gamma}(\omega^{\delta_0} . m_0 + \omega^{\delta_1} . m_1 + \ldots + \omega^0 . m_k).$$

V závorce na pravé straně je izolované číslo tvaru $\beta + 1$, protože m_k je přirozené číslo různé od nuly. Jednoznačnost takového vyjádření plyne z jednoznačnosti Cantorova normálního tvaru.

3.32 Rozvoj ordinálních čísel podle mocnin libovolného základu $\eta > 1$. S výjimkou lemmatu 3.29 jsme v důkazu věty 3.30 nepoužili žádné speciální vlastnosti ω. Vyslovíme-li lemma 3.29 opatrněji, jen pro pravé strany s klesajícími exponenty a s koeficienty $m_i < \eta$, můžeme je dokázat pro každý základ $\eta > 1$ místo ω indukcí podle γ_0.

Když ve znění (1) v důkazu věty 3.30 všude nahradíme základ ω daným ordinálem $\eta > 1$ a přirozená čísla m_i, n_i nahradíme nenulovými ordinály menšími než η, dokážeme obdobnou větu o vyjádření ordinálů podle mocnin základu η.

Omezíme-li se jen na přirozená čísla, dostáváme známou větu o rozvoji přirozených čísel podle mocnin základu $z > 1$. Tohoto výsledku použijeme k důkazu Goodsteinovy věty (1944), která spolu s větou Kirbyho a Parise (1981) ukazuje zajímavou souvislost mezi aritmetikou nekonečných ordinálních čísel a aritmetikou přirozených čísel. Nejprve zavedeme potřebné pojmy.

3.33 Definice. ε-číslo. Říkáme, že ordinál ξ je ε-číslo, je-li pevným bodem funkce ω^{ξ}, to znamená, že ξ je ε-číslem, jestliže $\xi = \omega^{\xi}$.

3.34 Příklad. Víme, že ω^{ξ} je normální funkce. Podle věty 3.9 je třída všech ε-čísel uzavřená a neomezená. Je zřejmé, že žádné přirozené číslo nemůže být ε-číslem. Podle věty 3.9 je nejmenší ε-číslo supremem rostoucí posloupnosti

$$\omega, \omega^{\omega}, \omega^{(\omega^{\omega})}, \omega^{(\omega^{(\omega^{\omega})})}, \ldots$$

Později uvidíme, že každý člen této posloupnosti je spočetný ordinál a že nejmenší ε-číslo, které se označuje ε_0, je také spočetný ordinál.

Ordinál ε_0 má úzký vztah k Peanově aritmetice. Gerhard Gentzen (1909–1945) dokázal v roce 1936 bezespornost Peanovy aritmetiky transfinitní indukcí do ε_0. Indukce do ε_0 je také jádrem důkazu Goodsteinovy věty.

3.35 Goodsteinovy posloupnosti. Je-li dáno přirozené číslo m, můžeme sestrojit posloupnost přirozených čísel

$$m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}, \ldots \tag{3}$$

tak, že položíme $m_0 = m$ a čísla m_n, $n > 0$ vypočteme následujícím způsobem: nejprve vyjádříme m_0 podle mocnin základu 2 a totéž provedeme se všemi exponenty, které jsou větší než 2. Je-li třeba, stejným způsobem upravíme i exponenty exponentů atd. Je-li například $m = 29$, dostáváme

$$m_0 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 2^{(2^2)} + 2^{(2+1)} + 2^2 + 1\,.$$

Je to výraz sestavený jen z čísel nejvýše rovných dvěma, nazveme ho *úplné vyjádření čísla m_0 podle mocnin základu* 2. Číslo m_1 vypočteme tak, že ve výrazu každou dvojku nahradíme trojkou (ostatní čísla ponecháme beze změny) a od výsledku odečteme jedničku. V našem případě dostáváme

$$m_1 = 3^{(3^3)} + 3^{(3+1)} + 3^3 + 1 - 1 \sim 8\,.\,10^{12}\,.$$

Známe-li již číslo m_n, m_{n+1} vypočítáme tak, že v úplném vyjádření čísla m_n podle mocnin základu $(n+2)$ všude nahradíme základ $(n+2)$ číslem $n+3$ a odečteme jedničku. Tedy

$$m_2 = 4^{(4^4)} + 4^{(4+1)} + 4^4 - 1 \sim 10^{154}\,.$$

Vyjádříme-li

$$4^4 - 1 = 4^3\,.\,3 + 4^2\,.\,3 + 4\,.\,3 + 3\,,$$

můžeme pokračovat

$$m_3 = 5^{(5^5)} + 5^{(5+1)} + 5^3\,.\,3 + 5^2\,.\,3 + 5\,.\,3 + 3 - 1 \sim 10^{2200}\,,$$
$$m_4 = 6^{(6^6)} + 6^{(6+1)} + 6^3\,.\,3 + 6^2\,.\,3 + 6\,.\,3 + 2 - 1 \sim 10^{36305}\,,$$
$$m_5 = 7^{(7^7)} + 7^{(7+1)} + 7^3\,.\,3 + 7^2\,.\,3 + 7\,.\,3 + 1 - 1 \sim 10^{696000}\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Výpočet několika členů naznačuje, že Goodsteinova posloupnost (3) velmi rychle roste. Následující tvrzení je překvapující.

3.36 Věta (Goodstein 1944). *Pro každé přirozené číslo m existuje přirozené n takové, že $m_n = 0$.*

Důkaz využívá dobrého uspořádání ordinálních čísel. Ukážeme, že posloupnost (3) je majorizována posloupností ordinálů $\langle \mu_n : n < \omega \rangle$ takovou, že pro každé n platí

$$\mu_n > 0 \rightarrow \mu_{n+1} < \mu_n\,. \tag{4}$$

Protože dobré uspořádání připouští jen konečné klesající posloupnosti, existuje přirozené n takové, že $\mu_n = m_n = 0$. Členy posloupnosti μ_n sestrojíme tak, že v úplném vyjádření čísla m_n nahradíme základ všude ordinálem ω.

Nejprve definujeme zobrazení $e(m, n, x)$. Jeho hodnotou bude ordinální číslo, které vypočteme tak, že v úplném vyjádření přirozeného čísla m podle mocnin základu $n > 1$ všude nahradíme základ n ordinálem $x \leq \omega$. Zobrazení e definujeme rekurzí podle m pro každé $n > 1$ a $x \leq \omega$. Je-li $m = 0$, položíme $e(0, n, x) = 0$. Je-li $m > 0$ a

(5) $$m = \sum_{i=0}^{k} n^i \cdot p_i$$

je jednoznačné vyjádření m podle mocnin n, položíme

(6) $$e(m, n, x) = \sum_{i=0}^{k} x^{e(i,n,x)} \cdot p_i .$$

Uvědomme si, že pro každé přirozené m a $n > 1$ ve vyjádření (5) platí $k < m$. V definici (6) používáme jen hodnoty zobrazení e, které byly definovány dříve.

Dále definujeme zobrazení $G_n(m)$, $O_n(m)$ pro každé přirozené m a $n > 1$. Položíme

$$G_n(0) = O_n(0) = 0 \qquad \text{pro každé} \quad n > 1 .$$

Je-li $m > 0$, definujeme

$$G_n(m) = e(m, n, n + 1) - 1 ,$$
$$O_n(m) = e(m, n, \omega) .$$

Je-li $m = m_0$ počátečním členem Goodsteinovy posloupnosti (3), pro její zbývající členy platí

(7) $$m_{n+1} = G_{n+2}(m_n) .$$

Snadno se nahlédne, že pro každé m a $n > 1$ je $O_n(m) < \varepsilon_0$.

Rekurzí podle $\alpha < \varepsilon_0$ pro každé přirozené n definujeme ordinál $\langle\alpha\rangle(n)$ tak, že položíme

$$\langle 0\rangle(n) = 0 ,$$
$$\langle \beta + 1\rangle(n) = \beta ,$$

a je-li α limitní ordinál, je tvaru $\omega^\delta . (\beta + 1)$ pro nějaký ordinál β a $\delta > 0$, a potom položíme

$$\langle \omega^\delta . (\beta + 1)\rangle (n) = \omega^\delta . \beta + \omega^{\langle\delta\rangle(n)} . n + \langle \omega^{\langle\delta\rangle(n)} \rangle (n) .$$

Indukcí se snadno ověří, že pro každý $\alpha < \varepsilon_0$ platí

(8) $$0 < \alpha \rightarrow \langle\alpha\rangle(n) < \alpha ,$$

pro $\alpha = \varepsilon_0$ již definice nemá smysl.

Jádrem důkazu Goodsteinovy věty je následující tvrzení.

3.37 Lemma. *Pro každé* $\alpha < \varepsilon_0$ *a přirozená čísla m, n platí:*

(i) *Je-li* $m > 0$, $n > 0$ *a* $\alpha = O_{n+1}(m)$, *potom*

$$O_{n+1}(m-1) = \langle\alpha\rangle(n).$$

(ii) *Pro každé* $n > 1$ *platí*

$$\langle O_n(m)\rangle(n) = O_{n+1}(G_n(m)).$$

Důkaz lemmatu. (i) Dokazujeme indukcí podle m. Předpokládejme, že

$$m = \sum_{i=0}^{k} (n+1)^i \,.\, p_i$$

je vyjádření čísla m podle mocnin základu $n+1$ a že j je nejmenší index takový, že $p_j \neq 0$. Je-li $j = 0$, potom $\alpha = \beta + 1$ pro nějaký ordinál β a tvrzení plyne z definice $\langle\beta + 1\rangle(n)$ a $O_{n+1}(m-1)$. Předpokládejme, že $j > 0$ a že tvrzení již platí pro každé m', $0 < m' < m$. Z definice O_{n+1} a z vyjádření čísla m dostáváme

$$(9) \qquad O_{n+1}(m-1) = \sum_{i=j+1}^{k} \omega^{e(j,n+1,\omega)} \,.\, p_i + O_{n+1}((n+1)^j \,.\, p_j - 1).$$

Přitom

$$(10) \quad (n+1)^j \,.\, p_j - 1 = (n+1)^j \,.\, (p_j - 1) + (n+1)^{j-1} \,.\, n + (n+1)^{j-1} - 1,$$

odkud

$$O_{n+1}((n+1)^j \,.\, p_j - 1) =$$
$$= \omega^{e(j,n+1,\omega)} \,.\, (p_j - 1) + \omega^{O_{n+1}(j-1)} \,.\, n + O_{n+1}((n+1)^{j-1} - 1).$$

Z indukčního předpokladu dostáváme

$$O_{n+1}(j-1) = \langle O_{n+1}(j)\rangle(n) = \langle e(j, n+1, \omega)\rangle(n)$$

a

$$O_{n+1}((n+1)^{(j-1)} - 1) = \langle O_{n+1}((n+1)^{(j-1)})\rangle(n) = \langle\omega^{O_{n+1}(j-1)}\rangle(n).$$

Celkem tedy

$$(11) \quad O_{n+1}((n+1)^j \,.\, p_j - 1) =$$
$$= \omega^{e(j,n+1,\omega)} \,.\, (p_j - 1) + \omega^{\langle e(j,n+1,\omega)\rangle(n)} \,.\, n + \langle\omega^{\langle e(j,n+1,\omega)\rangle(n)}\rangle(n).$$

Na druhé straně α je limitní ordinál, a proto

$$\langle\alpha\rangle(n) = \sum_{i=j+1}^{k} \omega^{e(i,n+1,\omega)} \,.\, p_i + \omega^{e(j,n+1,\omega)} \,.\, (p_j - 1) +$$
$$+ \omega^{\langle e(j,n+1,\omega)\rangle(n)} \,.\, n + \langle\omega^{\langle e(j,n+1,\omega)\rangle(n)}\rangle(n).$$

Tvrzení (i) plyne z (11) a (9).

(ii) Z definice $G_n(m)$ a z (i) dostáváme

$$O_{n+1}(G_n(m)) = O_{n+1}(e(m, n, n+1) - 1) = \\ = \langle O_{n+1}(e(m, n, n+1))\rangle(n).$$

Přitom

$$O_{n+1}(e(m, n, n+1)) = O_n(m),$$

odkud bezprostředně vyplývá (ii).

K dokončení věty 3.36 stačí majorizovat členy Goodsteinovy posloupnosti (3) ordinály

(12) $$\mu_n = O_{n+2}(m_n) \geq m_n .$$

V našem případě dostáváme

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \omega^{(\omega^\omega)} + \omega^{\omega+1} + \omega^\omega + 1, \\
\mu_1 &= \omega^{(\omega^\omega)} + \omega^{\omega+1} + \omega^\omega, \\
\mu_2 &= \omega^{(\omega^\omega)} + \omega^{\omega+1} + \omega^3 . 3 + \omega^2 . 3 + \omega . 3 + 3, \\
\mu_3 &= \omega^{(\omega^\omega)} + \omega^{\omega+1} + \omega^3 . 3 + \omega^2 . 3 + \omega . 3 + 2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Tedy $\mu_0 = O_2(m_0)$ a ze (7), (12) a 3.37(ii) dostáváme

$$\mu_{n+1} = \langle \mu_n \rangle (n + 2).$$

Nakonec z (8) vyplývá, že posloupnost μ_n splňuje podmínku (4), má tedy jen konečně mnoho nenulových členů.

3.38 Ještě jednou Goodsteinovy posloupnosti. Konstrukci Goodsteinovy posloupnosti můžeme zobecnit tím, že s prvním členem m zvolíme i základ $z > 1$ pro úplné vyjádření čísla $m_0 = m$ (v původní konstrukci jsme zvolili $z = 2$). Ostatní členy posloupnosti jsou dány vztahem $m_{n+1} = G_{n+z}(m_n)$. Z důkazu Goodsteinovy věty je zřejmé, že její tvrzení platí i pro zobecněné Goodsteinovy posloupnosti.

3.39 Přirozená čísla v teorii množin a Peanova aritmetika. Ukázali jsme, že pro přirozená čísla v teorii množin platí všechny axiomy Peanovy aritmetiky, to znamená, že každé tvrzení o přirozených číslech, které lze dokázat v aritmetice, je také větou teorie množin. Říkáme, že přirozená čísla v teorii množin jsou standartním modelem Peanovy aritmetiky. Tvrzení Goodsteinovy věty je pravdivé ve standartním modelu aritmetiky, je tedy bezesporné s axiomy Peanovy aritmetiky. Věta L. Kirbyho a J. Parise (1982) ukazuje, že v samotné Peanově aritmetice toto tvrzení nelze dokázat. Jinými slovy, negace Goodsteinovy věty je také bezesporná s axiomy Peanovy aritmetiky. To znamená, že Goodsteinova věta je příkladem tvrzení, které je v Peanově aritmetice nerozhodnutelné, ale je dokazatelné v teorii množin. Z axiomů teorie množin lze tedy o přirozených číslech dokázat více než z axiomů Peanovy aritmetiky!

Tato skutečnost se překvapivě odráží i v samotné teorii množin. Teorie konečných množin, která vznikne z teorie množin, nahradíme-li axiom nekonečna jeho negací, je konzervativní rozšíření Peanovy aritmetiky. To znamená, že v teorii konečných množin se o přirozených číslech dají dokázat tytéž věty jako v Peanově aritmetice, tedy Goodsteinova věta zde není dokazatelná. Dostáváme se k zajímavému zjištění, že přijetím či odmítnutím axiomu nekonečna ovlivňujeme dokazatelnost tvrzení o přirozených číslech, tedy tvrzení o konečných množinách.

§ 4 Kardinální čísla

Zavedeme pojem kardinálního čísla a ukážeme, že kardinální čísla vyjadřují mohutnosti množin, pro které existuje dobré uspořádání. To znamená, že za předpokladu axiomu výběru kardinální čísla vyjadřují mohutnosti všech množin. Kardinální čísla jsou podtřídou On a existuje normální funkce $\aleph$ (alef), která zobrazuje On na třídu všech nekonečných kardinálních čísel. Uvedeme základní vlastnosti této funkce a pojem kofinality, který rozděluje kardinální čísla na regulární a singulární. Nakonec zavedeme operace součtu a součinu kardinálních čísel a vyslovíme zobecněnou hypotézu kontinua.

4.1 Prostá zobrazení a mohutnosti. Víme, že mohutnosti množin lze srovnávat pomocí prostých zobrazení a že relace $x \approx y$ „*množiny* x a y *mají stejnou mohutnost*“ je ekvivalencí na univerzální třídě. Chceme-li přejít od pouhého srovnávání velikostí dvou množin ke kvantitativnímu vyjádření mohutností množin, stojíme před otázkou, jak reprezentovat třídy

$$\{y : y \approx x\} \tag{1}$$

všech množin, které mají stejnou mohutnost jako x. Jde o to, zda můžeme definovat zobrazení, které každé množině x přiřadí nějakou množinu $|x|$ tak, aby pro libovolné dvě množiny x, y platilo

$$x \approx y \leftrightarrow |x| = |y| . \tag{2}$$

Ideální je taková reprezentace, kde množina $|x|$ je v nějakém vztahu ke třídě (1). Množinu $|x|$ nazveme mohutnost množiny x.

Pro některé třídy množin je snadné definovat mohutnosti jejich prvků tak, aby byla splněna podmínka (2). Je-li x konečná množina, potom existuje právě jedno přirozené číslo n takové, že $x \approx n$, a můžeme položit $|x| = n$. Podobně, je-li x spočetná, položíme $|x| = \omega$ a podmínka (2) je splněna pro každou množinu y.

V obou případech jsme mohutnost množiny definovali vhodným ordinálním číslem. Nebylo to náhodou. Je-li x množina, kterou lze dobře uspořádat (každou konečnou i spočetnou množinu lze dobře uspořádat), zvolme nějaké její dobré uspořádání. Vzhledem ke zvolenému uspořádání je x izomorfní s nějakým ordinálem α

a třída (1) má neprázdný průnik s On. Mohutnost $|x|$ můžeme potom definovat jako nejmenší ordinál, který je prvkem třídy (1). Je zřejmé, že žádný ordinál $\xi < |x|$ nemá stejnou mohutnost jako ordinál $|x|$. To je klíč k definici kardinálních čísel.

4.2 Definice. Kardinální čísla. (i) Říkáme, že $\varkappa$ je *kardinální číslo*, jestliže $\varkappa$ je ordinál, který nelze prostě zobrazit na žádné menší ordinální číslo. *Třídu všech kardinálních čísel* označíme Cn, tedy

$$Cn = \{\varkappa \in On : (\forall \xi < \varkappa)(\xi \not\approx \varkappa)\}.$$

Kardinální čísla budeme označovat zpravidla malými písmeny $\varkappa, \lambda, \mu, \nu \ldots$ ze středu řecké abecedy.

(ii) Říkáme, že kardinální číslo $\varkappa$ je *mohutnost množiny* x, a píšeme $|x| = \varkappa$, jestliže existuje prosté zobrazení množiny x na $\varkappa$.

4.3 Mohutnosti dobře uspořádaných množin. Podle 4.1 a definice 4.2 má každá dobře uspořádaná množina stejnou mohutnost s právě jedním kardinálním číslem.

Naopak, je-li $X \approx \varkappa$ pro nějaký kardinál $\varkappa$, potom existuje dobré uspořádání množiny X podle typu $\varkappa$. Je-li f prosté zobrazení X na $\varkappa$, na množině X můžeme definovat relaci $\lhd$ tak, že f je izomorfismus X a $\varkappa$ vzhledem k $\lhd$ a dobrému uspořádání $\varkappa$. Stačí, položíme-li

$$x \lhd y \leftrightarrow f(x) < f(y)$$

pro každé $x, y \in X$.

Kardinální čísla jsou tedy mohutnosti množin, které lze dobře uspořádat. Množinu, která nemá stejnou mohutnost se žádným kardinálním číslem, nelze dobře uspořádat. V § 6 ukážeme, že i pro takové množiny lze definovat mohutnost tak, aby byla splněna podmínka (2). Přijmeme-li axiom výběru, z principu dobrého uspořádání vyplývá, že ke každé množině x je přiřazeno právě jedno kardinální číslo $\varkappa$, $|x| = \varkappa$.

4.4 Příklady. (a) 0 a ω jsou kardinální čísla. Víme, že ω je nekonečná množina, a proto nemůže být $\omega \approx n$ pro žádné přirozené $n < \omega$.

(b) $\omega \subseteq Cn$. Je-li n libovolné přirozené číslo a $m < n$, potom $m \subset n$ a podle I.6.4 konečná množina n nemůže mít stejnou mohutnost s vlastní podmnožinou m. Tedy $n \in Cn$.

(c) $\omega + 1 \notin Cn$. Ukážeme, že existuje prosté zobrazení $\omega + 1$ na ω. Víme, že $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$. Položíme-li $f(n) = n + 1$ pro každé $n < \omega$ a $f(\omega) = 0$, potom f je hledané prosté zobrazení.

Podobným způsobem se pro každý ordinál $\alpha \geq \omega$ ukáže, že $\alpha + 1 \notin Cn$.

(d) Ukázali jsme, že každé kardinální číslo $\varkappa \geq \omega$ musí být limitním ordinálem. Neplatí to naopak, každý limitní ordinál není kardinálním číslem. Například $\omega + \omega > \omega$ a podle definice ordinálního součtu je $\omega + \omega = \omega . 2 \approx 2 . \omega = \omega$. Podobně se ukáže, že každý ordinál $\omega . n$ pro $n < \omega$ je spočetná množina a není kardinálním číslem. A můžeme jít ještě dál: z definice ordinálního součinu vyplývá, že ordinál $\omega . \omega = \omega^2$ je také spočetná množina, a indukcí se dá ukázat, že totéž platí pro každý ordinál ω^n, $n < \omega$.

Víme, že ω^ω je supremem spočetných ordinálů ω^n, $n < \omega$. Není proto těžké sestrojit prosté zobrazení ω^ω do $\omega \times \omega$ a potom do ω. To znamená, že ω^ω je také spočetný ordinál. Podobně se ukáže, že

$$\omega^{(\omega^\omega)}, \omega^{(\omega^{(\omega^\omega)})}, \dots$$

jsou spočetné ordinály a jejich supremum – ordinál ε_0 – je také spočetný ordinál.

Závěr: Ukázali jsme, že každý ordinál $\alpha \leq \omega$ je kardinálním číslem, ale za kardinálem ω následuje velký interval ordinálních čísel, které nejsou kardinály. Později uvidíme, že totéž platí pro každý nekonečný kardinál $\varkappa$.

4.5 Lemma. *Je-li X množina kardinálních čísel, potom* $\sup X$ *je také kardinální číslo. To znamená, že Cn je uzavřena na suprema.*

Důkaz. V 1.12 jsme ukázali, že $\sigma = \sup(X) = \bigcup X \in On$. Je třeba dokázat implikaci

$$\alpha < \sigma \rightarrow \alpha \not\approx \sigma .$$

Nechť α je libovolný ordinál menši než σ. To znamená, že $\alpha \in \bigcup X$ a $\alpha \in \varkappa$ pro nějaký kardinál $\varkappa \in X$. Z tranzitivnosti množiny $\varkappa$ dostáváme $\alpha \subset \varkappa \subseteq \bigcup X = \sigma$. Přitom $\alpha \not\approx \varkappa$, protože $\varkappa \in Cn$. Podle Cantorovy a Bernsteinovy věty nemůže být ani $\alpha \approx \sigma$.

4.6 Věta. (i) *Ke každému kardinálu existuje větší kardinál.*

(ii) *Cn je vlastní třída.*

Důkaz. (i) sporem. Předpokládejme, že $\varkappa$ je největší kardinální číslo, potom pro každé $\alpha > \varkappa$ existuje prosté zobrazení ordinálu α na $\varkappa$. Podle 4.3 pak existuje dobré uspořádání množiny $\varkappa$ podle typu α. Jsou-li r_α, r_β nějaká dobrá uspořádání množiny $\varkappa$ podle typů $\alpha > \beta > \varkappa$, potom $r_\alpha \neq r_\beta$, protože ordinály α a β nejsou izomorfní. Každé uspořádání r_α množiny $\varkappa$ podle typu α je podmnožinou $\varkappa \times \varkappa$. Pro každé $\alpha > \varkappa$ můžeme definovat množinu $R_\alpha \in \mathscr{P}\mathscr{P}(\varkappa \times \varkappa)$ všech uspořádání množiny $\varkappa$ podle typu α. Potence množiny je opět množina a podle předpokladu jsou množiny R_α, $\alpha > \varkappa$ neprázdné. Víme, že jsou po dvou disjunktní. Dostáváme tak prosté zobrazení vlastní třídy $On - \varkappa$ do množiny $\mathscr{P}\mathscr{P}(\varkappa \times \varkappa)$ a to je spor podle axiomu nahrazení.

(ii) Kdyby Cn byla množina, podle lemmatu 4.5 by její supremum bylo největší kardinální číslo a to je ve sporu s (i).

4.7 Definice. Následník kardinálu, limitní kardinál. (i) Je-li $\varkappa \in Cn$, nejmenší ze všech kardinálních čísel $\lambda > \varkappa$ nazveme následníkem kardinálu $\varkappa$ a označíme $\varkappa^+$. Říkáme, že kardinál $\varkappa$ je předchůdcem kardinálu λ, je-li $\lambda = \varkappa^+$.

(ii) Říkáme, že kardinál λ je limitní, jestliže nemá předchůdce.

Je zřejmé, že pro každé přirozené číslo n platí $n^+ = n + 1$, že ω je nejmenší limitní kardinál a ω^+ je nejmenši nespočetné kardinální číslo.

4.8 Funkce $\aleph$. Ukázali jsme, že Cn je vlastní třída, která je částí On. Je tedy dobře uspořádána úzkou relací $<$ dobrého uspořádání třídy On. Podle věty 2.11 existuje jednoznačně určená rostoucí ordinální funkce, která je izomorfismem tříd On a Cn. Podle lemmatu 4.5 je to spojitá, tedy normální funkce. Na dolní množině $\omega \cup \{\omega\}$ však splývá s identitou, protože $\omega \cup \{\omega\} \subseteq Cn$.

Stejnou úvahu můžeme opakovat pro třídu $Cn - \omega$ všech nekonečných kardinálních čísel a dostáváme existenci normální funkce, která zobrazuje On na $Cn - \omega$. To je zajímavější zobrazení, které pomocí důvěrně známých přirozených čísel očísluje prvních ω nekonečných kardinálů a vnáší jisté měřítko do světa nekonečných mohutností. Vžilo se pro něj označení prvním písmenem $\aleph$ (alef) hebrejské abecedy.

4.9 Označení. Jednoznačně určenou normální funkci, která zobrazuje On na třídu všech nekonečných kardinálních čísel, označíme $\aleph$ (alef) a její hodnoty $\aleph(\alpha)$ označujeme krátce $\aleph_\alpha$ (alef alfa).

To znamená, že $\aleph_\alpha$ označuje α-tý nekonečný kardinál, speciálně $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_1 = \omega^+$, $\aleph_2 = \omega^{++}$ atd.

Je zřejmé, že $\aleph_0$ je limitní kardinál a že pro $\alpha > 0$ je $\aleph_\alpha$ izolovaný (limitní) kardinál, právě když α je izolované (limitní) ordinální číslo.

Souběžně se pro kardinály $\aleph_\alpha$, $\alpha \in On$ používá označení ω_α, speciálně $\omega_0 = \omega = \aleph_0$, $\omega_1 = \omega^+ = \aleph_1, \dots$ Označení ω_α se tradičně užívá v případech, kdy máme na mysli dané kardinální číslo jako ordinál, tedy i s jeho dobrým uspořádáním. Tato paralelní symbolika vznikla historickým vývojem, když se kardinální a ordinální čísla definovala abstrakcí a symboly $\aleph_\alpha$ a ω_α označovaly dvě různé třídy abstrakce. Pro nás však $\aleph_\alpha$ i ω_α označují tutéž množinu.

4.10 Věta. *Pro každé $\alpha \in On$ a limitní ordinál ξ platí*

(i) $\alpha \leq \aleph_\alpha$,

(ii) ω_α *je limitní ordinál,*

(iii) $\aleph_\xi = \sup \{\aleph_\alpha : \alpha < \xi\}$,

(iv) $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha$,

(v) $|[\aleph_\alpha]^{<\omega}| = \aleph_\alpha$.

Důkaz. (i) podle věty 3.2, (ii) plyne z příkladu 4.4(c), (iii) ze spojitosti funkce $\aleph$.

(iv) Dokazujeme indukci podle α. Pro $\alpha = 0$ jsme to dokázali v příkladu I.6.28(b). Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a že (iv) platí pro každé $\beta < \alpha$. Maximo-lexikografické uspořádání je podle věty 1.23 dobré uspořádání na $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$.

Existuje tedy právě jeden ordinál η, který je izomorfní s $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ při maximo-lexikografickém uspořádání. Stačí, když ukážeme $\eta = \omega_\alpha$. Je zřejmé, že neplatí

$\eta < \omega_\alpha$, protože $\omega_\alpha \preccurlyeq \omega_\alpha \times \omega_\alpha \approx \eta$, a ukážeme, že nemůže platit $\omega_\alpha < \eta$. V opačném případě by nějaká dvojice $\langle \gamma, \delta \rangle \in \omega_\alpha \times \omega_\alpha$ musela mít ω_α předchůdců při maximo-lexikografickém uspořádání. Ukážeme, že to není možné. Nechť $\xi = \max\{\gamma, \delta\} + 1$. Potom každý předchůdce dvojice $\langle \gamma, \delta \rangle$ je prvkem množiny $\xi \times \xi$, která má mohutnost menší než ω_α, protože $\xi < \omega_\alpha$ a $|\xi| = \omega_\beta$ pro nějaké $\beta < \alpha$. Ověřili jsme, že $\eta = \omega_\alpha$ a že (iv) platí pro každé α.

(v) Připomeňme, že $[\aleph_\alpha]^{<\omega}$ je množina všech konečných podmnožin $\aleph_\alpha$, která je dobře uspořádána relací $\lhd$ z definice 1.24. Dokazujeme indukcí podle α. Pro $\alpha = 0$ užijeme výsledku příkladu I.6.28(c). Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a že tvrzení platí pro každé $\beta < \alpha$. Je-li η ordinál, který je izomorfní s $[\aleph_\alpha]^{<\omega}$ při uspořádání $\lhd$, snadno se nahlédne, že neplatí $\eta < \omega_\alpha$. Je-li x konečná podmnožina $\aleph_\alpha$ a ξ je její největší prvek, každý předchůdce y množiny x v uspořádání $\lhd$ je podle věty 1.25 podmnožinou $\xi + 1$. Přitom $\xi + 1 < \omega_\alpha$, tedy $|\xi + 1| = \omega_\beta$ pro nějaké $\beta < \alpha$, a podle indukčního předpokladu je jenom ω_β konečnýcn podmnožin ordinálu $\xi + 1$. To znamená, že x má méně než ω_α předchůdců, tedy neplatí ani $\omega_\alpha < \eta$ a tvrzení (v) je dokázáno.

4.11 Výpočty nebo odhady mohutností množin a systémů množin jsou často podstatným krokem k řešení různých problémů. Předchozí věta v podstatě určuje operace kardinálního součtu a součinu, které se používají pro výpočet mohutnosti sjednocení a kartézského součinu dvou množin.

4.12 Definice. Součet a součin kardinálních čísel. Jsou-li $\varkappa$, λ kardinální čísla, jejich *součet* $\varkappa + \lambda$ *a součin* $\varkappa \,.\, \lambda$ definujeme vztahy

$$\varkappa + \lambda = |(\{0\} \times \varkappa) \cup (\{1\} \times \lambda)|,$$
$$\varkappa \,.\, \lambda = |\lambda \times \varkappa|.$$

To znamená, že $\varkappa + \lambda$ a $\varkappa \,.\, \lambda$ jsou kardinální čísla, která vyjadřují mohutnost množiny na pravé straně rovnosti, na rozdíl od ordinálního součtu a součinu, který určuje ordinální typ stejné množiny při lexikografickém uspořádání. Chceme-li tento rozdíl zdůraznit, mluvíme o kardinálním součtu a součinu.

Snadno se nahlédne, že kardinální součet a součin jsou asociativní, komutativní a distributivní operace. Jsou-li $\varkappa$, λ přirozená čísla, kardinální součet a součin se shodují s ordinálním součtem a součinem, protože $\omega \subseteq Cn$.

4.13 Jsou-li x, y množiny a $\varkappa$, λ kardinální čísla taková, že $|x| = \varkappa$ a $|y| = \lambda$, potom

$$\varkappa \,.\, \lambda = |y \times x| = |x \times y|$$

a $\varkappa + \lambda$ je mohutnost disjunktního sjednocení $(\{0\} \times x) \cup (\{1\} \times y)$ množin x, y. Jsou-li x a y disjunktní množiny, platí

$$\varkappa + \lambda = |x \cup y|.$$

Z následující věty vyplývá, že tato rovnost platí pro libovolné množiny x, y, je-li alespoň jedno z kardinálních čísel $\varkappa$, λ nekonečné.

4.14 Věta. (i) *Pro každé* $\alpha, \beta \in On$ *platí*

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha . \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\} .$$

(ii) *Jsou-li* $\varkappa$, λ *kardinální čísla a alespoň jedno z nich je nekonečné, potom*

$$\begin{aligned} \varkappa + \lambda &= \max\{\varkappa, \lambda\} , \\ \varkappa . \lambda &= \max\{\varkappa, \lambda\} , \qquad \textit{je-li} \quad \varkappa, \lambda > 0 . \end{aligned}$$

Důkaz. (i) Nechť $\varkappa = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$, potom podle 4.10(iv) dostáváme

$$\varkappa \preccurlyeq (\{0\} \times \omega_\alpha) \cup (\{1\} \times \omega_\beta) \preccurlyeq \omega_\alpha \times \omega_\beta \preccurlyeq \varkappa \times \varkappa \approx \varkappa .$$

Tvrzení (i) vyplývá z Cantorovy a Bernsteinovy věty. (ii) se dokazuje obdobně.

4.15 Příklad. *Kardinální čísla a rozklady množin.* Uvažujme kardinální číslo $\aleph_\omega$, které je supremem kardinálních čísel $\aleph_n$, $n < \omega$. Definujme množiny A_n, $n < \omega$

$$\begin{aligned} A_0 &= \omega_0 , \\ A_n &= \omega_n - \bigcup\{A_k : k < n\} \qquad \text{pro každé} \quad n > 0 . \end{aligned}$$

Podle předchozí věty pro každé n platí $|A_n| = \aleph_n < \aleph_\omega$. Množiny A_n jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocením je kardinál $\aleph_\omega$. To znamená, že kardinál $\aleph_\omega$ lze rozložit na ω, tedy méně než $\aleph_\omega$ množin, z nichž každá má mohutnost menší než $\aleph_\omega$.

Srovnejme to s kardinálem $\aleph_0$. Víme, že sjednocením konečně mnoha konečných množin získáme jenom konečnou množinu. Kardinál $\aleph_0$ tedy nelze rozložit na menší počet množin menší mohutnosti.

4.16 Ukázali jsme, že kardinály $\aleph_0$ a $\aleph_\omega$ mají vzhledem k rozkladům odlišné vlastnosti. Dříve než zavedeme odpovídající pojmy regulárních a singulárních kardinálů, povšimněme si, že rozklad $\aleph_\omega$ byl definován pomocí posloupnosti $\aleph_n$, $n < \omega$ se supremem $\aleph_\omega$. Naproti tomu žádná konečná posloupnost přirozených čísel nemá supremum $\aleph_0$. Začneme tedy oklikou a budeme studovat typy kofinálních posloupností.

4.17 Definice. Kofinální množina. Nechť X je množina uspořádaná relací $\leq$. Říkáme, že $Y \subseteq X$ je *kofinální s* X nebo že Y je *kofinální podmnožinou* X vzhledem k uspořádání $\leq$, jestliže k libovolnému $x \in X$ existuje $y \in Y$, $x \leq y$.

4.18 Je zřejmé, že kofinální podmnožina musí obsahovat každý maximální prvek množiny X. Je-li x největší prvek množiny X, potom $\{x\}$ je kofinální podmnožina X. Snadno se ověří, že je-li Y kofinální s X a Z je kofinální s Y, potom Z je také kofinální s X.

Pokud $\leq$ není lineární uspořádání na X, může se stát, že žádná kofinální podmnožina není lineárně uspořádaná. Stačí, když v X existují alespoň dva maximální prvky, ale není to nutná podmínka. Naproti tomu se dá ukázat, že je-li $\leq$ lineární uspořádání, potom existuje dobře uspořádaná kofinální podmnožina.

4.19 Kofinální podmnožiny ordinálních čísel. Je-li α limitní ordinál a $x \subseteq \alpha$, ze 4.17 vyplývá, že x je kofinální s α, právě když $\sup x = \alpha$. Přitom každá podmnožina ordinálu α je dobře uspořádána, má tedy jednoznačně určený ordinální typ. V mnoha případech stačí uvažovat jen typy kofinálních podmnožin. Je zřejmé, že $\alpha > 0$ je izolovaný ordinál, právě když má kofinální podmnožinu uspořádanou podle typu 1. V následující definici se proto omezíme jen na limitní ordinály.

4.20 Definice. Kofinál. Nechť α je limitní ordinál. Nejmenší ordinál β, který je typem uspořádání nějaké kofinální podmnožiny ordinálu α, nazveme *kofinálem* α a označíme $\mathrm{cf}(\alpha)$.

Pro každé limitní α platí $\omega \leq \mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$ a $\mathrm{cf}(\alpha)$ je limitní ordinál.

4.21 Příklady.

(a)
$$\mathrm{cf}(\omega) = \omega,$$
$$\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega.$$

(b)
$$\mathrm{cf}(\omega + \omega) = \mathrm{cf}(\omega \,.\, \omega) = \mathrm{cf}(\omega^\omega) = \omega,$$

kde $+$ a $.$ označují ordinální součet a součin. Dokonce platí:

(c) Je-li α spočetný limitní ordinál, potom $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$. Podle předpokladu existuje prosté zobrazení f ω na α. Sestrojíme rostoucí funkci g, která zobrazí ω na kofinální podmnožinu α.

Položíme

$$g(0) = 0$$

a

$$g(n + 1) = \max\{f(n), g(n)\} + 1 \qquad \text{pro} \quad n \geq 0.$$

Zřejmě $\sup\{g(n): n < \omega\} = \sup\{f(n): n < \omega\} = \alpha$ a indukcí se ověří, že g je rostoucí funkce.

(d) Je-li α limitní ordinál, potom $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$. Kardinál $\aleph_\alpha$ je supremem kardinálů $\aleph_\beta$, $\beta < \alpha$. Můžeme se omezit jen na kofinální podmnožiny sestávající z kardinálních čísel. Stačí si uvědomit, že množina $\{\aleph_\beta : \beta \in x\}$ je kofinální s $\aleph_\alpha$, právě když x je kofinální podmnožina α.

4.22 Lemma. *Pro každý limitní ordinál α platí*

(i) $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$,

(ii) $\mathrm{cf}(\alpha)$ *je nekonečné kardinální číslo.*

Důkaz. (i) Položme $\beta = \mathrm{cf}(\alpha)$ a $\gamma = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$, tedy $\gamma \leq \beta$. Podle definice kofinálu existuje rostoucí funkce f, která zobrazuje β na kofinální podmnožinu α, a rostoucí funkce g, která zobrazuje γ na kofinální podmnožinu β. Potom fg je rostoucí funkce, která zobrazuje γ na kofinální podmnožinu α. Proto nemůže být $\gamma < \beta$.

(ii) Víme, že $\mathrm{cf}(\alpha)$ je nekonečný ordinál. Kdyby $\mathrm{cf}(\alpha)$ nebyl kardinálním číslem, pak existuje kardinál $\varkappa < \mathrm{cf}(\alpha)$ a prosté zobrazení f z $\varkappa$ na $\mathrm{cf}(\alpha)$. Položíme-li $g(\beta) = \sup f[\beta]$ pro každé $\beta < \varkappa$, potom g je neklesající funkce a $\mathrm{Rng}(g)$ je kofinální podmnožina $\mathrm{cf}(\alpha)$ uspořádaná podle nějakého typu $\gamma \leq \varkappa$. Je-li h rostoucí funkce, která zobrazuje $\mathrm{cf}(\alpha)$ na kofinální podmnožinu α, potom $h[\mathrm{Rng}(g)]$ je kofinální podmnožina α, která je uspořádána podle typu $\gamma \leq \varkappa < \mathrm{cf}(\alpha)$. To je ve sporu s definicí $\mathrm{cf}(\alpha)$, proto $\mathrm{cf}(\alpha)$ musí být kardinální číslo.

4.23 Definice. Regulární a singulární kardinály. Nechť $\varkappa$ je nekonečné kardinální číslo. Říkáme, že $\varkappa$ je *regulární kardinál*, je-li $\mathrm{cf}(\varkappa) = \varkappa$. Říkáme, že $\varkappa$ je *singulární kardinál*, je-li $\mathrm{cf}(\varkappa) < \varkappa$.

4.24 Třída Cn obsahuje dvě disjunktní podtřídy regulárních a singulárních kardinálů. Podle 4.21 je $\aleph_0$ regulární kardinál a $\aleph_\omega$ je singulární kardinál. Snadno se nahlédne, že pro každé $\alpha \geq \omega$ je $\aleph_{\alpha+\omega}$ singulární kardinál.

Podle 4.22 je kofinál limitního ordinálu vždy regulární kardinální číslo. Ptáme se, zda existují regulární kardinální čísla větší než $\aleph_0$. Ukážeme, že ano, pokud přijmeme axiom výběru. Gitik (1979) ukázal, že tvrzení „$\aleph_0$ je jediný regulární kardinál“ je bezesporné s axiomy ZF. V takovém případě každý limitní ordinál α má kofinální podmnožinu uspořádanou podle typu ω.

4.25 Věta. *Nekonečné kardinální číslo $\varkappa$ je singulární, právě když $\varkappa = \bigcup X$, kde X je nějaká množina mohutnosti menší než $\varkappa$ a $(\forall x \in X)(|x| < \varkappa)$.*

Jinými slovy, kardinál $\varkappa$ je singulární, právě když ho lze vyjádřit jako sumu méně než $\varkappa$ množin mohutnosti menší než $\varkappa$.

Důkaz. Je-li $\varkappa$ singulární kardinál a $X \subset \varkappa$ je kofinální podmnožina $\varkappa$ uspořádaná podle typu $\mathrm{cf}(\varkappa)$, potom $|X| = \mathrm{cf}(\varkappa) < \varkappa$ a $|x| < \varkappa$ pro každé $x \in X$. Navíc $\varkappa = \sup X = \bigcup X$.

Naopak, předpokládejme, že $\varkappa$ je regulární kardinál a že existuje množina X, která vyhovuje tvrzení věty. Potom $Y = \{\sup(x) : x \in X\}$ je kofinální podmnožina $\varkappa$ a $|Y| \leq |X| < \varkappa$. To znamená, že $\varkappa$ není regulární kardinál — spor.

Často se používá následující tvrzení:

4.26 Důsledek. *Je-li $\varkappa$ regulární kardinál* a $\varkappa = \bigcup X$, kde $|X| < \varkappa$, *potom pro nějaký prvek $x \in X$ platí $|x| = \varkappa$.*

Nyní ukážeme, že z axiomu výběru vyplývá, že regulární kardinály tvoří shora neomezenou podtřídu Cn.

4.27 Lemma (AC). *Nechť $|X| \leq \aleph_\alpha$ a nechť pro každé $x \in X$ je také $|x| \leq \aleph_\alpha$. Potom*

$$\left|\bigcup X\right| \leq \aleph_\alpha .$$

Je zřejmé, že je-li nějaké $x \in X$ mohutnosti $\aleph_\alpha$, platí rovnost. Není to však nutná podmínka.

Důkaz. Ukážeme, že $\bigcup X$ lze prostě zobrazit do $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$. Podle předpokladu existuje prosté zobrazení $f: X \to \omega_\alpha$ a pro každé $x \in X$ je množina c_x všech prostých zobrazení množiny x do ω_α neprázdná. Selektor na množině $C = \{c_x : x \in X\}$

potom ke každému $x \in X$ vybere nějaké prosté zobrazení $g_x: x \to \omega_\alpha$. Prosté zobrazení $h: \bigcup X \to \omega_\alpha \times \omega_\alpha$ definujeme tak, že libovolnému $y \in \bigcup X$ přiřadíme hodnotu $h(y) = \langle \delta, g_x(y) \rangle$, kde δ je nejmenší ordinál takový, že $y \in x$ a $f(x) = \delta$.

4.28 Věta (AC). *Pro každý ordinál α je $\aleph_{\alpha+1}$ regulární kardinál.*
Důkaz sporem. Víme, že $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1})$ je kardinální číslo. Předpokládejme, že $\aleph_{\alpha+1}$ je singulární kardinál, potom existuje kofinální podmnožina $X \subset \omega_{\alpha+1}$ mohutnosti nejvýše $\aleph_\alpha$. Podle předchozího lemmatu dostáváme $|\bigcup X| \leq \aleph_\alpha$, protože $|x| \leq \aleph_\alpha$ pro každé $x \in X$. To je ve sporu s kofinalitou X, která tvrdí $\bigcup X = \omega_{\alpha+1}$.

4.29 Nedosažitelné kardinály. Ukázali jsme, že v teorii množin s axiomem výběru je každý nekonečný izolovaný kardinál regulární. Víme, že ω je limitní regulární kardinál. Položme si otázku, zda existují limitní a regulární kardinály větší než ω. Podle 4.21(d) takový kardinál musí být pevným bodem funkce $\aleph$.Z věty 3.9 vyplývá, že existují libovolně velké singulární kardinály, které jsou pevnými body funkce $\aleph$. Naše otázka tedy zní: existují regulární kardinály, které jsou pevným bodem funkce $\aleph$? Taková kardinální čísla si vysloužila označení nedosažitelná: zdola je nelze dosáhnout ani přechodem k následujícímu kardinálu, ani supremem množiny menší mohutnosti. Dnes se taková čísla nazývají slabě nedosažitelná.

4.30 Definice. Slabě nedosažitelné kardinály. Říkáme, že kardinální číslo $\varkappa$ je *slabě nedosažitelné*, je-li $\varkappa$ nespočetný limitní a regulární kardinál.

4.31 Pojem slabě nedosažitelného kardinálu zavedl F. Hausdorff (1908). Teprve mnohem později se ukázalo, že existenci takových kardinálních čísel nelze dokázat z axiomů teorie množin (je-li bezesporná).

Existence slabě nedosažitelného kardinálu vyžaduje, aby dvě vlastnosti – regularita a limitnost – spočetného kardinálu $\aleph_0$ platily i pro nějaké nespočetné kardinální číslo. Tvrzení „existuje slabě nedosažitelné kardinální číslo“ proto můžeme chápat jako silnější formu axiomu nekonečna. Jak uvidíme později, je mnoho problémů, které vedou k otázce, jak dlouhá je škála kardinálních čísel v teorii množin a zda existují kardinální čísla s určitými vlastnostmi. Není-li existence takových čísel dokazatelná v teorii množin (například proto, že jde o kardinální čísla větší než slabě nedosažitelný kardinál), říkáme, že jde o „velké“ kardinální číslo. Slabě nedosažitelný kardinál je nejmenší z velkých kardinálů, kterým bude věnován § 5 kapitoly III.

4.32 Mohutnost potence množiny. Jaká je mohutnost různých systémů podmnožin dané množiny a mohutnost její potence, to je jedna z otázek, se kterými se při řešení různých problémů znovu a znovu setkáváme. Pro konečné množiny indukcí podle $n < \omega$ dostáváme

$$|X| = n \to |\mathscr{P}(X)| = 2^n .$$

Jaká je však mohutnost $\mathscr{P}(X)$, je-li X nekonečná? Je-li $|X| = \varkappa \in Cn$, potom $\mathscr{P}(X) \approx \approx \mathscr{P}(\varkappa)$ a stačí určit mohutnost $\mathscr{P}(\varkappa)$. V analogii s konečnými množinami se mohutnost $\mathscr{P}(\varkappa)$ vyjadřuje jako kardinální mocnina $2^\varkappa$.

Ptejme se nejprve, jaká je mohutnost $\mathscr{P}(\omega)$ a jaké mohou být mohutnosti systémů množin přirozených čísel. Podle věty I.6.42 má $\mathscr{P}(\omega)$ stejnou mohutnost jako množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel a uzavřený interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{P}(\omega)$ má tedy mohutnost kontinua. Ptáme-li se, jaké mohou být mohutnosti systémů $S \subseteq \mathscr{P}(\omega)$, můžeme stejně dobře zkoumat mohutnosti množin reálných čísel. Zjišťujeme, že pro jednoduše definované nekonečné množiny reálných čísel nemáme mnoho na vybranou: takové množiny jsou buď spočetné, nebo mají mohutnost kontinua.

4.33 Mohutnosti otevřených a uzavřených množin reálných čísel. Snadno se nahlédne, že libovolné dva uzavřené netriviální intervaly lze na sebe zobrazit prostým (lineárním) zobrazením. To znamená, že každý netriviální interval má mohutnost kontinua a totéž platí pro každý neprázdný otevřený interval. Proto i každá neprázdná otevřená množina má mohutnost kontinua.

Víme, že každá konečná množina reálných čísel je uzavřená a prostá konvergentní posloupnost spolu s limitou je příkladem spočetné uzavřené množiny. Uzavřené množiny reálných čísel mohou nabývat všech mohutností $\varkappa \leq \omega$. Ukážeme, že každá nespočetná uzavřená množina reálných čísel má mohutnost kontinua. Nejprve vyšetříme speciální případ perfektní množiny. Připomeňme, že $X \subset \mathbb{R}$ je *perfektní množina*, je-li neprázdná, uzavřená a nemá žádné izolované body.

4.34 Lemma. *Každá perfektní množina reálných čísel má mohutnost kontinua.*

Důkaz. Víme, že množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná a hustá v $\mathbb{R}$. Z toho plyne, že množina všech uzavřených intervalů s racionálními konci je také spočetná. Budeme uvažovat jen takové intervaly, jejichž koncové body jsou různé, a množinu všech takových intervalů označímu U.

Nechť P je libovolná perfektní množina. Víme, že P musí mít více než jeden bod, nechť $p_0, p_1 \in P$ jsou dva různé body. Nechť $I_0, I_1 \in U$ jsou disjunktní intervaly takové, že $p_0 \in I_0$, $p_1 \in I_1$ a $P_0 = P \cap I_0$, $P_1 = P \cap I_1$ jsou dvě disjunktní perfektní podmnožiny P. Nyní můžeme stejný postup opakovat s každou z nich. Sestrojíme disjunktní intervaly $I_{00}, I_{01} \in U$ a perfektní podmnožiny $P_{00}, P_{01} \subseteq P_0$ a podobně pro množinu P_1 sestrojíme intervaly I_{10}, I_{11} a perfektní podmnožiny $P_{10}, P_{11} \subseteq P$. Je zřejmé, že pro libovolnou konečnou posloupnost nul a jedniček $\sigma \in {}^{<\omega}2$ sestrojíme interval I_σ a perfektní množinu $P_\sigma = P \cap I_\sigma$ tak, že pro libovolné dvě různé posloupnosti σ, ϱ stejné délky jsou I_σ a I_ϱ disjunktní. Přitom můžeme požadovat, aby délka intervalů I_σ s rostoucí délkou posloupnosti σ klesala k nule.

Je-li $s \in {}^{\omega}2$ nekonečná posloupnost nul a jedniček, potom podle principu vložených intervalů (I.8.26) je $\bigcap\{P_\sigma : \sigma \subseteq s \,\&\, \sigma \in {}^{<\omega}2\}$ jednobodová podmnožina perfektní množiny P. Přitom dvěma různým nekonečným posloupnostem odpovídají dva různé prvky množiny P. To znamená, že P má také mohutnost kontinua, protože ${}^{\omega}2 \approx \mathbb{R}$.

4.35 Věta (Cantor, Bendixson). *Každá nespočetná uzavřená množina reálných čísel obsahuje perfektní podmnožinu.*

Důkaz. Nechť C je libovolná nespočetná uzavřená množina reálných čísel. Spočetnou množinu všech neprázdných otevřených intervalů s racionálními mezemi označíme U. Rekurzí podle $\alpha < \omega_1$ konstruujeme uzavřené množiny $C_\alpha \subseteq C$. Položíme $C_0 = C$ a je-li již sestrojena uzavřená množina C_α, $C_{\alpha+1}$ vznikne z C_α vypuštěním všech izolovaných bodů. Protože každý izolovaný bod $x \in C_\alpha$ můžeme oddělit od zbytku množiny C_α nějakým intervalem z U, $C_\alpha - C_{\alpha+1}$ je nejvýše spočetná množina. Je zřejmé, že $C_{\alpha+1}$ je také nespočetná uzavřená množina. Je-li $\xi < \omega_1$ limitní ordinál a všechny množiny C_α, $\alpha < \xi$ již byly sestrojeny, položíme $C_\xi = \bigcap\{C_\alpha : \alpha < \xi\}$. Potom i C_ξ je nespočetná a uzavřená.

Uvědomme si, že každý bod $x \in C - C_\alpha$ lze oddělit od C_α nějakým intervalem z U tak, že dvěma různým bodům přiřadíme dva různé intervaly. Přitom U je spočetná množina a ω_1 je nespočetný kardinál. Existuje tedy $\alpha < \omega_1$ takové, že $C_\alpha = C_{\alpha+1}$. To znamená, že C_α je perfektní podmnožina množiny C.

4.36 Ukázali jsme, že každá nespočetná uzavřená množina reálných čísel obsahuje perfektní podmnožinu, má tedy mohutnost kontinua. Dokázali jsme o trochu více, že každou nespočetnou uzavřenou množinu reálných čísel lze jednoznačně rozložit na perfektní množinu a nejvýše spočetnou rozptýlenou množinu. Připomeňme, že X je rozptýlená množina, jestliže každá její neprázdná podmnožina obsahuje izolovaný bod. V našem případě je $C_\alpha = C_{\alpha+1}$ perfektní podmnožina C a snadno se nahlédne, že $C - C_\alpha$ je rozptýlená.

Víme, že nekonečné otevřené nebo uzavřené množiny reálných čísel jsou buď spočetné, nebo musí mít mohutnost kontinua. Dá se ukázat, že stejné tvrzení platí i pro všechny Borelovské množiny a pro všechny analytické množiny na reálné přímce. Tyto výsledky naznačují, že mezi $\aleph_0$ a mohutností kontinua již není žádná „střední" mohutnost. Toto tvrzení vyslovil Cantor jako domněnku již v roce 1878, která se stala známá jako *hypotéza kontinua* (CH). Cantor ji formuloval v následujícím tvaru:

$$\text{(CH)} \qquad 2^{\aleph_0} = \aleph_1 .$$

Protože ani pozdější výsledky o mohutnostech Borelovských a analytických množin nebyly s hypotézou kontinua ve sporu, nelze se divit, že se Cantor a po něm mnoho dalších po léta snažili tuto domněnku dokázat. V roce 1908 vyslovil F. Hausdorff takzvanou *zobecněnou hypotézu kontinua* (GCH) ve tvaru

$$\text{(GCH)} \qquad (\forall\alpha)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}) .$$

Připomeňme, že $2^{\aleph_\alpha}$ je mohutnost $\mathscr{P}(\omega_\alpha)$. Zobecněná hypotéza kontinua tvrdí, že každá taková potence má za mohutnost kardinální číslo, to znamená, že každou množinu $\mathscr{P}(\omega_\alpha)$ lze dobře uspořádat. A. H. Kruse a H. Rubin dokázali v roce 1960, že zobecněná hypotéza kontinua implikuje axiom výběru.

§ 5 Kardinální aritmetika

Známe již součet a součin kardinálních čísel a víme, že se v oboru nekonečných kardinálů redukují na maximum z obou argumentů. Zavedeme mocniny kardinálů, součty a součiny souborů kardinálních čísel, které jsou nezbytné pro výpočty mohutností různých matematických struktur, to znamená systémů množin a zobrazení. Seznámíme se s vlastnostmi kardinální funkce $2^\varkappa$, která určuje mohutnosti $\mathscr{P}(\varkappa)$, a $\varkappa^\lambda$, která určuje mohutnost množiny všech zobrazení z λ do $\varkappa$, a s jejich vztahem k funkci gimel. Ukážeme, že zobecněná hypotéza kontinua (GCH), která předepisuje hodnoty $2^{\aleph_\alpha}$, radikálně zjednodušuje i průběh mocniny a funkce gimel. Podobný vliv na průběh zmíněných kardinálních funkcí má hypotéza singulárních kardinálů (SCH).

Axiomy teorie množin připouštějí velkou volnost pro hodnoty $2^\varkappa$ na regulárních kardinálech. Pro singulární $\varkappa$ však hodnoty $2^\varkappa$ závisí na hodnotách 2^λ pro $\lambda < \varkappa$. Na závěr vyslovíme Silverovu větu (1974), která je podstatným krokem řešení problému singulárních kardinálů, a větu Shelahovu (1982), která dává horní odhad pro hodnoty $2^\varkappa$ na singulárních kardinálech. V celém oddílu budeme předpokládat axiom výběru. Každá množina je tedy ekvivalentní s právě jedním kardinálním číslem, které vyjadřuje její mohutnost.

5.1 Mohutnosti množin zobrazení. Připomeňme, že ${}^b a$ je množina všech zobrazení množiny b do a. Speciálně, je-li $a = \{0, 1\} = 2$, potom ${}^b 2$ je množina všech charakteristických funkcí podmnožin $c \subseteq b$. Jsou-li $\varkappa, \lambda$ kardinální čísla taková, že $|a| = \varkappa$ a $|b| = \lambda$, potom množiny ${}^b a$ a ${}^\lambda \varkappa$ mají stejnou mohutnost podle I.5.53. Stačí tedy zkoumat mohutnost množiny ${}^\lambda \varkappa$.

5.2 Definice. Kardinální mocnina $\varkappa^\lambda$. Jsou-li $\varkappa, \lambda$ kardinální čísla, *kardinální mocninu* $\varkappa^\lambda$ definujeme vztahem

$$\varkappa^\lambda = |{}^\lambda \varkappa|$$

jako kardinální číslo, které je mohutností množiny všech zobrazení λ do $\varkappa$.

5.3 Z definice součtu a součinu kardinálních čísel a z I.5.52 a I.6.32 pro libovolné kardinály $\varkappa$, λ, μ, ν dostáváme

(i) $2^\varkappa = |\mathscr{P}(\varkappa)| > \varkappa$,

(ii) $(0 \neq \varkappa \leq \mu \,\&\, \lambda \leq \nu) \rightarrow \varkappa^\lambda \leq \mu^\nu$,

(iii) $\varkappa^{(\mu + \nu)} = \varkappa^\mu \,.\, \varkappa^\nu$,

(iv) $(\varkappa^\mu)^\nu = \varkappa^{\mu.\nu}$.

Jsou-li $\varkappa$, λ přirozená čísla, indukcí podle λ se dokáže, že kardinální mocnina $\varkappa^\lambda$ se rovná odpovídající ordinální mocnině. Na přirozených číslech tedy splývají operace kardinální a ordinální mocniny. Není těžké vypočítat hodnoty $\varkappa^\lambda$ v případech, kdy alespoň jeden z argumentů je přirozené číslo.

5.4 Věta. *Pro libovolná kardinální čísla* $\varkappa$, λ *platí*

(i) $0^0 = 1$,
$\lambda \neq 0 \rightarrow 0^\lambda = 0$,

(ii) $\varkappa^0 = 1$,
$1^\lambda = 1$,

(iii) $(\varkappa \geq \omega \,\&\, 0 < \lambda < \omega) \rightarrow \varkappa^\lambda = \varkappa$,

(iv) $(2 \leq \varkappa \leq \lambda \,\&\, \lambda \geq \omega) \rightarrow \varkappa^\lambda = 2^\lambda$.

Důkaz. (iii) se dokáže indukcí podle λ s použitím 4.10(iv). (iv) Je-li $f \in {}^\lambda\varkappa$, potom $f \in \mathscr{P}(\lambda \times \varkappa)$, a podle předpokladu je $|\lambda \times \varkappa| = \lambda$. Dostáváme

$$2^\lambda \leq \varkappa^\lambda = |{}^\lambda\varkappa| \leq |\mathscr{P}(\lambda \times \varkappa)| = |\mathscr{P}(\lambda)| = 2^\lambda .$$

5.5 Příklady. *Množiny reálných čísel a spojité funkce.* Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a $\mathscr{P}(\omega)$ mají stejnou nespočetnou mohutnost 2^ω, říkáme jí mohutnost kontinua. Hustá množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

(a) *Mohutnost množiny* $O(\mathbb{R})$ *všech otevřených množin na* $\mathbb{R}$. Uvažujme nejprve množinu $[\mathbb{R}]^2$ všech dvouprvkových množin reálných čísel. Snadno se nahlédne, že $[\mathbb{R}]^2 = 2^\omega$, protože

$$2^\omega \leq |[\mathbb{R}]^2| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = 2^\omega \,.\, 2^\omega = 2^\omega .$$

To znamená, že množina $I(\mathbb{R})$ všech neprázdných otevřených intervalů na reálné přímce má také mohutnost kontinua. Přitom každá neprázdná otevřená množina je sjednocením spočetného souboru intervalů z $I(\mathbb{R})$. Dostáváme nerovnosti

$$2^\omega = |I(\mathbb{R})| \leq |O(\mathbb{R})| \leq |{}^\omega I(\mathbb{R})| = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega.\omega} = 2^\omega ,$$

odtud plyne

$$|O(\mathbb{R})| = 2^\omega .$$

Systém všech otevřených množin na reálné přímce má mohutnost kontinua a každá uzavřená množina je doplňkem právě jedné otevřené množiny. To znamená, že systém všech uzavřených množin na reálné přímce má také mohutnost kontinua.

(b) *Mohutnost množiny* $C(\mathbb{R})$ *všech spojitých reálných funkcí.* Označme $C(\mathbb{R})$ množinu všech spojitých funkcí $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a položme si otázku, zda existuje reálná funkce g, jejíž graf má neprázdný průnik s grafem každé spojité funkce $f \in C(\mathbb{R})$.

Mohutnost množiny $C(\mathbb{R})$ dává klíč k řešení problému. Víme, že každá spojitá funkce $f \in C(\mathbb{R})$ je jednoznačně určena svými hodnotami v racionálních bodech. Víme také, že každá konstanta $c \in \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Shrnutím dostáváme

$$2^{\omega} = |\mathbb{R}| \leq |C(\mathbb{R})| \leq |{}^{\omega}\mathbb{R}| = (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega}.$$

To znamená, že existuje prosté zobrazení, které každému reálnému číslu r přiřazuje právě jednu funkci $f_r \in C(\mathbb{R})$ tak, že soubor

$$\langle f_r : r \in \mathbb{R} \rangle \tag{1}$$

obsahuje všechny funkce z $C(\mathbb{R})$. Položíme-li

$$g(r) = f_r(r) \qquad \text{pro každé} \quad r \in \mathbb{R},$$

je zřejmé, že g je hledaná funkce, jejíž graf protíná graf každé $f \in C(\mathbb{R})$. Povšimněme si, že funkce g byla sestrojena diagonalizací souboru (1), který indexuje spojité funkce reálnými čísly. Není těžké nahlédnout, že g není prvkem $C(\mathbb{R})$.

5.6 Mohutnosti sjednocení a součinů souborů množin. Je-li $\langle X_i : i \in I \rangle$ soubor množin s indexovou množinou I, ptejme se, jaká je mohutnost sjednocení

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i .$$

Stejně jako u sjednocení dvou množin zkoumáme nejprve případ, kdy jsou množiny X_i po dvou disjunktní. Potom ke každému $x \in X$ existuje právě jeden index $i \in I$ takový, že $x \in X_i$. Nechť $\varkappa_i$ jsou kardinální čísla taková, že $|X_i| = \varkappa_i$ pro každé $i \in I$. Na rozdíl od množin X_i nemusí být kardinální čísla $\varkappa_i$ po dvou disjunktní množiny. Vhodným protějškem množiny X je tedy disjunktní sjednocení

$$K = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \varkappa_i).$$

Ukážeme, že existuje prosté zobrazení množiny X na K. Axiom výběru zaručuje existenci souboru $\langle f_i : i \in I \rangle$, kde f_i je prosté zobrazení X_i na $\varkappa_i$. Přiřadíme-li každému $x \in X$ dvojici $\langle i, f_i(x) \rangle$, kde i je jednoznačně určený index takový, že $x \in X_i$, dostáváme prosté zobrazení X na K. Stačí tedy určit mohutnost množiny K.

Podobným způsobem se pomocí zobrazení f_i sestrojí prosté zobrazení kartézského součinu $\bigtimes X_i$ na součin $\bigtimes \varkappa_i$. Mohutnost kartézského součinu množin je stejná jako mohutnost odpovídajícího součinu kardinálních čísel.

5.7 Definice. Součet a součin souboru kardinálních čísel. Nechť $\langle \varkappa_i : i \in I \rangle$ je soubor kardinálních čísel. Jeho *součet*

$$\sum_{i \in I} \varkappa_i = \Big|\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \varkappa_i)\Big|$$

definujeme jako mohutnost disjunktního sjednocení kardinálů $\varkappa_i$ a *součin*

$$\prod_{i \in I} \varkappa_i = \Big|\bigtimes_{i \in I} \varkappa_i\Big|$$

definujeme jako mohutnost kartézského součinu kardinálů $\varkappa_i$. Speciálně, je-li $\varkappa_i = \varkappa$ pro každé $i \in I$ a $|I| = \lambda$, potom

$$\prod_{i \in I} \varkappa_i = \varkappa^\lambda .$$

5.8 Něco nového přináší jen případ, kdy I je nekonečná množina. Součet a součin konečného souboru kardinálů lze vyjádřit pomocí operací součtu a součinu dvou kardinálních čísel.

Snadno se nahlédne, že součet a součin souboru kardinálů se permutací indexů nemění. Jsou-li λ_i kardinální čísla taková, že $\varkappa_i \leq \lambda_i$ pro každé $i \in I$, potom

$$\sum_{i \in I} \varkappa_i \leq \sum_{i \in I} \lambda_i ,$$

a je-li $J \subseteq I$, potom také

$$\sum_{i \in J} \varkappa_i \leq \sum_{i \in I} \varkappa_i .$$

Podobné nerovnosti platí i pro součiny. Jsou-li X_i libovolné množiny takové, že $\varkappa_i = |X_i|$ pro každé $i \in I$, potom

$$\left|\bigcup_{i \in I} X_i\right| \leq \sum_{i \in I} \varkappa_i .$$

Jsou-li navíc množiny X_i po dvou disjunktní, platí rovnost. Není to však nutná podmínka.

5.9 Definice. Množiny $[X]^\lambda$ a $[X]^{<\lambda}$. Je-li X množina a λ kardinální číslo, definujeme

$$[X]^\lambda \;\; = \{x : x \subseteq X \;\&\; |x| = \lambda\} ,$$
$$[X]^{<\lambda} = \{x : x \subseteq X \;\&\; |x| < \lambda\} .$$

Obě množiny jsou částí $\mathscr{P}(X)$, $[X]^\lambda$ sestává z podmnožin mohutnosti λ a $[X]^{<\lambda}$ sestává ze všech podmnožin mohutnosti menší než λ. Speciálně $[X]^{<\omega}$ je množina všech konečných podmnožin X, kterou jsme definovali již v první kapitole. Povšimněme si, že pro $\lambda > |X|$ dostáváme $[X]^{<\lambda} = \mathscr{P}(X)$ a $[X]^\lambda = 0$.

5.10 Lemma. *Nechť X je množina mohutnosti $\varkappa$ a λ je kardinální číslo. Potom*

(i) $|[X]^\lambda| \;\; = \varkappa^\lambda$, *je-li* $\lambda \leq \varkappa$,

(ii) $|[X]^{<\lambda}| = \sum_{\mu < \lambda} \varkappa^\mu$, *je-li* $\lambda \leq \varkappa^+$.

Důkaz. (i) Je zřejmé, že mohutnost $[X]^\lambda$ závisí jenom na $\varkappa$ a λ. Můžeme předpokládat, že $X = \varkappa$. Pro libovolnou množinu $x \in [\varkappa]^\lambda$ existuje zobrazení $f \in {}^\lambda\varkappa$ takové, že $x = \mathrm{Rng}(f)$. Pomocí axiomu výběru každému $x \in [\varkappa]^\lambda$ přiřadíme právě jedno takové zobrazení f_x. Dostáváme tak prosté zobrazení $[\varkappa]^\lambda$ do ${}^\lambda\varkappa$. Abychom dokázali obrácenou nerovnost, uvědomme si, že každé zobrazení $f \in {}^\lambda\varkappa$ je prvkem $[\lambda \times \varkappa]^\lambda$. Shrnutím obou faktů dostáváme

$$\varkappa^\lambda \le |[\lambda \times \varkappa]^\lambda| = |[\varkappa]^\lambda| \le \varkappa^\lambda .$$

(ii) plyne z (i) a z toho, že množiny $[X]^\mu$, $\mu < \lambda$ jsou po dvou disjunktní.

5.11 Definice. Slabá mocnina $\varkappa^{<\lambda}$. Pro libovolné kardinály $\varkappa$, λ definujeme

$$\varkappa^{<\lambda} = \sum_{\mu < \lambda} \varkappa^\mu ,$$

kde na pravé straně sčítáme přes kardinální čísla menší než λ. Říkáme, že $\varkappa^{<\lambda}$ je *slabá mocnina kardinálů* $\varkappa$, λ.

5.12 Lemma. *Nechť $\varkappa_i$, $i \in I$ jsou nenulová kardinální čísla. Je-li $|I|$ nebo některé z $\varkappa_i$ nekonečné kardinální číslo, potom*

$$\sum_{i \in I} \varkappa_i = \max(|I|, \sup\{\varkappa_i : i \in I\}) .$$

Důkaz. Nechť $\varkappa = \sup \varkappa_i$. Podle 5.8 je $\sum \varkappa_i \ge \varkappa$ a protože všechna $\varkappa_i$ jsou nenulová, dostáváme stejnou nerovnost pro $|I|$. Abychom dokázali obrácenou nerovnost, uvědomme si, že disjunktní sjednocení $\bigcup(\{i\} \times \varkappa_i)$ lze prostě zobrazit do $I \times \varkappa$.

5.13 Důsledek. (i) *Jsou-li X_i množiny takové, že pro každé $i \in I$ je $|X_i| = \varkappa_i$, a $\sup\{\varkappa_i : i \in I\}$ je nekonečný kardinál větší nebo rovný $|I|$, potom*

$$\left|\bigcup X_i\right| = \sup\{\varkappa_i : i \in I\} = \sum \varkappa_i .$$

(ii) *Kardinál $\varkappa$ je singulární, právě když existují kardinály $\lambda < \varkappa$ a $\varkappa_i < \varkappa$ pro $i < \lambda$ takové, že*

$$\varkappa = \sum_{i < \lambda} \varkappa_i .$$

5.14 Lemma. *Je-li $\varkappa_i \ge 2$ pro každé $i \in I$, potom*

$$\sum_{i \in I} \varkappa_i \le \prod_{i \in I} \varkappa_i .$$

Důkaz. Je-li I nejvýše dvouprvková množina, není těžké tvrzení ověřit. Předpokládejme, že $|I| > 2$. Sestrojíme prosté zobrazení disjunktní sumy $\bigcup(\{i\} \times \varkappa_i) = D$ do $\times \varkappa_i = K$. Podle předpokladu jsou nula i jednička prvkem každého kardinálu $\varkappa_i$. Každé dvojici $\langle j, \alpha \rangle \in D$ chceme přiřadit zobrazení $f_{j\alpha} \in K$. Pro libovolné $j \in I$ a $\alpha < \varkappa_i$ položíme

$$f_{j0}(i) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } i \neq j , \\ 0, & \text{je-li } i = j , \end{cases}$$

a pro $\alpha > 0$

$$f_{j\alpha}(i) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } i \neq j , \\ \alpha, & \text{je-li } i = j . \end{cases}$$

Snadno se nahlédne, že je to prosté zobrazení množiny D do K. Tím je nerovnost dokázána.

5.15 Věta. *Königova nerovnost. Jsou-li* $\varkappa_i$, λ_i *kardinální čísla taková, že* $\varkappa_i < \lambda_i$ *pro každé* $i \in I$, $I \neq 0$, *potom*

$$\sum_{i \in I} \varkappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i .$$

Důkaz. Je zřejmé, že všechna λ_i jsou nenulová kardinální čísla. Je-li pro nějaké $j \in I$ $\lambda_j = 1$, potom všechny funkce $f \in \bigtimes \lambda_i$ nabývají v bodě j téže hodnoty. Vypustíme-li index j, mohutnost součinu se nezmění. Stejně tak můžeme vypustit člen $\varkappa_j = 0$ na druhé straně nerovnosti. Můžeme tedy předpokládat, že $\lambda_i \geq 2$ pro každé $i \in I$, a podle lemmatu 5.14 dostáváme $\sum \varkappa_i \leq \sum \lambda_i \leq \prod \lambda_i$.

Předpokládejme na chvíli, že platí rovnost. To znamená, že existuje soubor $\langle X_i : i \in I \rangle$ po dvou disjunktních množin takový, že $|X_i| = \varkappa_i$ pro každé $i \in I$ a $\bigcup X_i = \bigtimes \lambda_i$. Diagonální metodou sestrojíme funkci $g \in \bigtimes \lambda_i$, která není prvkem žádné z množin X_i. Pro každé $i \in I$ nechť $Y_i = \{f(i) : f \in X_i\}$. Potom $|Y_i| \leq |X_i| = \varkappa_i < \lambda_i$ a funkce z X_i svými hodnotami v bodě i nemohou vyčerpat λ_i. Položíme-li

$$g(i) = \min(\lambda_i - Y_i) \qquad \text{pro} \quad i \in I,$$

potom $g \in \bigtimes \lambda_i$, ale není prvkem žádné množiny X_i — spor. Platí tedy ostrá nerovnost.

5.16 Königova věta je zobecněním Cantorovy věty I.6.32 o mohutnosti potenční množiny. Je-li $|I| = \varkappa$ a pro každé $i \in I$ je $\varkappa_i = 1$ a $\lambda_i = 2$, z Königovy nerovnosti dostáváme $\varkappa < 2^\varkappa$. Navíc platí:

5.17 Důsledek. *Jsou-li* $\varkappa$, λ *kardinální čísla taková, že* $\varkappa \geq 2$ *a* $\lambda \geq \omega$, *potom*

(i) $\operatorname{cf}(2^\lambda) > \lambda$,

(ii) $\operatorname{cf}(\varkappa^\lambda) > \lambda$,

(iii) $\lambda^{\operatorname{cf}(\lambda)} > \lambda$.

Důkaz. (i) je speciálním případem (ii). Je-li $\langle \varkappa_i : i < \lambda \rangle$ posloupnost kardinálních čísel menších než $\varkappa^\lambda$, z Königovy nerovnosti dostáváme

$$\sum_{i<\lambda} \varkappa_i < \prod_{i<\lambda} \varkappa^\lambda = (\varkappa^\lambda)^\lambda = \varkappa^\lambda .$$

To znamená, že každá kofinální podmnožina kardinálu $\varkappa^\lambda$ musí mít mohutnost větší než λ. (iii) Nechť $\lambda = \sum \lambda_i$, kde λ_i jsou kardinály takové, že $\lambda_i < \lambda$ platí pro každé $i < \operatorname{cf}(\lambda)$. Z Königovy nerovnosti dostáváme

$$\lambda = \sum_{i<\operatorname{cf}(\lambda)} \lambda_i < \prod_{i<\operatorname{cf}(\lambda)} \lambda = \lambda^{\operatorname{cf}(\lambda)} .$$

5.18 Funkce $2^{\aleph_\alpha}$. Shrneme-li vše, co jsme o mocninách $2^{\aleph_\alpha}$ zatím dokázali, jsou to následující nerovnosti:

$$(2) \qquad \alpha \leq \beta \to 2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta},$$
$$2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha,$$
$$\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha.$$

Budeme-li předpokládat, že pro hodnoty $2^{\aleph_\alpha}$ platí

$$(\mathrm{H}) \qquad (\forall\alpha)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+2}),$$

vidíme, že tato hypotéza vyhovuje nerovnostem (2) stejně dobře jako zobecněná hypotéza kontinua (GCH). To znamená, že uvedené nerovnosti neurčují hodnotu $2^{\aleph_\alpha}$ ani v jediném speciálním případě.

K. Gödel (1939) dokázal, že zobecněná hypotéza kontinua je bezesporná vzhledem k axiomům teorie množin. Můžeme tedy předpokládat, že $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. P. Cohen (1963) ukázal, že hypotéza kontinua je nezávislá na axiomech teorie množin: je bezesporné předpokládat, že $2^{\aleph_0}$ je $\aleph_2$ nebo něco jiného. Mohutnost kontinua tedy není jednoznačně určena axiomy teorie množin. W. Easton (1970) ukázal, že nerovnosti (2) jsou vše, co lze z axiomů dokázat o hodnotách $2^{\aleph_\alpha}$ pro regulární $\aleph_\alpha$. H. Woodin (1981) dokázal, že i hypotéza (H) je bezesporná vzhledem k axiomům teorie množin, předpokládáme-li že existence superkompaktního kardinálu je bezesporná s axiomy teorie množin.

Nyní se budeme zabývat hodnotami $2^\varkappa$ pro singulární kardinály $\varkappa$.

5.19 Lemma. *Je-li $\varkappa$ limitní kardinál, potom*

$$2^\varkappa = (2^{<\varkappa})^{\mathrm{cf}(\varkappa)}.$$

Důkaz. Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$(2^{<\varkappa})^{\mathrm{cf}(\varkappa)} \leq 2^{\varkappa . \mathrm{cf}(\varkappa)} = 2^\varkappa.$$

Přitom $2^{<\varkappa}$ je mohutnost množiny všech shora omezených podmnožin limitního kardinálu $\varkappa$. K důkazu opačné nerovnosti stačí ukázat, že libovolná podmnožina $X \subseteq \varkappa$ je jednoznačně určena jistou posloupností $\langle X_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\varkappa)\rangle$ omezených podmnožin. Nechť $\langle \varkappa_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\varkappa)\rangle$ je rostoucí posloupnost kardinálních čísel se supremem $\varkappa$. Libovolné podmnožině $X \subseteq \varkappa$ přiřadíme posloupnost množin $X_\alpha = X \cap \varkappa_\alpha$ pro $\alpha < \mathrm{cf}(\varkappa)$. Je zřejmé, že jsou-li X, Y dvě různé podmnožiny kardinálu $\varkappa$, jim přiřazené posloupnosti se musí lišit ve všech členech od jistého počínaje.

5.20 Definice. Funkce gimel. Pro libovolný nekonečný kardinál $\varkappa$ definujeme funkci

$$\gimel(\varkappa) = \varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)},$$

kterou nazýváme gimel. Je to kardinální funkce, která zobrazuje třídu všech nekonečných kardinálních čísel do Cn. Víme, že $\gimel(\varkappa) > \varkappa$, a z Königovy nerovnosti také plyne $\mathrm{cf}(\gimel(\varkappa)) > \mathrm{cf}(\varkappa)$, speciálně $\mathrm{cf}(\gimel(\varkappa)) > \aleph_0$ pro každý nekonečný kardinál $\varkappa$.

5.21 Věta. *Průběh funkce* $2^{\aleph_\alpha}$. (i) *Je-li* $\aleph_\alpha$ *regulární kardinál, potom*

$$2^{\aleph_\alpha} = \gimel(\aleph_\alpha).$$

(ii) (*Bukovský*) *Je-li* $\aleph_\alpha$ *singulární kardinál, mohou nastat dva případy*: (a) *Existuje* $\beta < \alpha$ *tak, že pro každý ordinál* γ *v intervalu* $\beta \leq \gamma < \alpha$ *platí* $2^{\aleph_\gamma} = 2^{\aleph_\beta}$, *potom*

$$2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\beta} = 2^{<\aleph_\alpha}.$$

(b) *Ke každému* $\beta < \alpha$ *existuje* $\gamma, \beta < \gamma < \alpha$ *takové, že* $2^{\aleph_\beta} < 2^{\aleph_\gamma}$. *Potom*

$$2^{\aleph_\alpha} = \gimel(2^{<\aleph_\alpha}).$$

Důkaz. (i) Pro regulární $\aleph_\alpha$ je $\gimel(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$. K důkazu (ii) použijeme lemmatu 5.19. Je-li splněn předpoklad tvrzení (a), potom $2^{<\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\beta}$, a můžeme předpokládat, že $\operatorname{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha$. Podle 5.19 dostáváme

$$2^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_\beta})^{\operatorname{cf}(\aleph_\alpha)} = 2^{\aleph_\beta} = 2^{<\aleph_\alpha}.$$

Je-li splněn předpoklad tvrzení (b), potom $2^{<\aleph_\alpha}$ je limitní kardinál, a $\operatorname{cf}(2^{<\aleph_\alpha}) = \operatorname{cf}(\aleph_\alpha)$. Tvrzení plyne z lemmatu 5.19.

5.22 Funkce $\gimel$ a $2^{\aleph_\alpha}$. (i) Předpokládejme, že $\aleph_\alpha$ je singulární kardinál, který splňuje podmínku (ii)(a) z předchozí věty, potom z Königovy nerovnosti dostáváme

$$\operatorname{cf}(2^{<\aleph_\alpha}) > \aleph_\gamma \qquad \text{pro každé} \quad \gamma < \alpha.$$

Stejná nerovnost platí i pro $\gamma = \alpha$, protože na levé straně je regulární kardinál. Víme, že v případě (b) je $\operatorname{cf}(2^{<\aleph_\alpha}) = \operatorname{cf}(\aleph_\alpha) < \aleph_\alpha$. To znamená, že $2^{\aleph_\alpha}$ nabývá nejmenší možné hodnoty vzhledem k $2^{\aleph_\beta}$, $\beta < \alpha$, pokud je splněna podmínka $\operatorname{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$. Jinak $2^{\aleph_\alpha} = \gimel(2^{<\aleph_\alpha})$.

(ii) Všechny hodnoty $2^{\aleph_\alpha}$ jsou jednoznačně určeny průběhem funkce $\gimel$. Ve dvou případech je to explicitně vyjádřeno v předchozí větě. Zbývá případ (ii)(a). Je-li $\aleph_\beta$ nejmenší kardinál takový, že $2^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha}$, potom buď je $\aleph_\beta$ regulární, nebo $\aleph_\beta$ je singulární a musí splňovat předpoklady tvrzení (ii)(b). V obou případech dostáváme $2^{\aleph_\alpha} = \gimel(\aleph_\beta)$.

5.23 Singulární kardinály a GCH. V 5.18 jsme konstatovali, že hodnoty $2^{\aleph_\alpha}$ pro regulární $\aleph_\alpha$ nejsou jednoznačně určeny axiomy teorie množin. Dá se ukázat, že kterýkoli rozumně definovaný regulární kardinál $\aleph_\alpha$, například

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_{100}, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega_1+1},$$

může být první, na kterém se poruší zobecněná hypotéza kontinua, to znamená, že $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_{\alpha+1}$ a $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ pro každé $\beta < \alpha$.

Otázka, zda hypotéza kontinua může být poprvé porušena na singulárním kardinálu, zůstala dlouho otevřená. Silver (1974) dal negativní odpověď pro singulární kardinály s nespočetnou kofinalitou. Pro singulární kardinály se spočetnou kofinalitou ukázal Magidor (1977), že tvrzení $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$ a $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ pro každé přirozené n je bezesporné s axiomy teorie množin, pokud je bezesporné předpokládat, že existuje jistá dvojice velkých kardinálních čísel.

V Silverově výsledku jde o speciální horní odhad mohutnosti $2^{\aleph_\alpha}$ pro singulární $\aleph_\alpha$, jestliže $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ pro každé $\beta < \alpha$. Galvin a Hajnal (1975) dali horní odhad mohutnosti $2^{\aleph_\alpha}$ za slabších předpokladů, je-li $\aleph_\alpha$ silně limitní singulární kardinál s nespočetnou kofinalitou. Shelah (1982) dokázal, že stejný odhad platí pro všechny silně limitní singulární kardinály (5.25).

5.24 Věta (Silver). *Je-li $\aleph_\alpha$ singulární kardinál takový, že* $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) > \omega$, *a pro každé $\beta < \alpha$ platí $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$, potom také $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.*

Důkaz Silverovy věty využívá vlastnosti stacionárních množin. Provedeme jej v III.2.29.

5.25 Definice. Silně limitní kardinální čísla. Říkáme, že kardinální číslo $\varkappa$ je *silně limitní*, jestliže pro každý kardinál $\lambda < \varkappa$ platí $2^\lambda < \varkappa$.

Je zřejmé, že ω je silně limitní kardinál a že každé silně limitní kardinální číslo je limitní. Dá se ukázat, že ke každému kardinálu λ existuje silně limitní singulární kardinál $\varkappa > \lambda$.

5.26 Věta (Galvin, Hajnal, Shelah). *Je-li $\aleph_\alpha$ silně limitní singulární kardinál, potom*

$$2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{(|\alpha|^{\mathrm{cf}(\alpha)})^+}.$$

Navíc, je-li $\alpha = \beta + \gamma$ a $\gamma \neq 0$, potom

$$2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\beta+(|\gamma|^{\mathrm{cf}(\gamma)})^+}.$$

Speciálně, jsou-li $\aleph_\omega$ a $\aleph_{\omega_1+\omega}$ silně limitní kardinály, dostáváme

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$$

a

$$2^{\aleph_{\omega_1\cdot\omega}} < \aleph_{\omega_1+(2^{\aleph_0})^+}.$$

Důkaz věty přesahuje rámec této knihy (Shelah 1982).

5.27 Vlastnosti funkce $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Jsou-li $\varkappa$, λ nekonečná kardinální čísla a $\varkappa \leq \lambda$, potom $\varkappa^\lambda = 2^\lambda$ podle 5.4. Je-li naopak $\lambda \leq \varkappa$, podle 5.10 je $\varkappa^\lambda = |[\varkappa]^\lambda|$. Je-li navíc $\lambda < \mathrm{cf}(\varkappa)$, potom každá podmnožina $X \subseteq \varkappa$ mohutnosti λ je shora omezená nějakým ordinálem $\xi < \varkappa$. Proto

$$[\varkappa]^\lambda = \bigcup_{\xi<\varkappa} [\xi]^\lambda. \tag{3}$$

Pro případ $\mathrm{cf}(\varkappa) \leq \lambda < \varkappa$ dostáváme:

5.28 Lemma. *Je-li* $\aleph_\alpha$ *limitní kardinál a* $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta$, *potom*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \Big(\sum_{\gamma<\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}\Big)^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}.$$

Důkaz. Nechť

$$A = \bigcup_{\gamma<\alpha} {}^{\omega_\beta}\omega_\gamma$$

je množina všech zobrazení ω_β do ω_α, jejichž hodnoty jsou shora omezeny nějakým kardinálem $\varkappa < \omega_\alpha$. Podle 5.8 je $|A| \leq \sum \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Přitom $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ je mohutnost množiny všech zobrazení $f\colon \omega_\beta \to \omega_\alpha$. Ukážeme, že každé takové zobrazení je jednoznačně určeno jistou posloupností zobrazení z A.

Nechť $\langle \varkappa_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)\rangle$ je rostoucí posloupnost kardinálních čísel, která je kofinální s $\aleph_\alpha$. Je-li f zobrazení ω_β do ω_α a $\xi < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, nechť f_ξ je zobrazení ω_β do $\varkappa_{\xi+1}$ definované vztahem $f_\xi(\delta) = \min(f(\delta), \varkappa_\xi)$ pro každé $\delta < \omega_\beta$. Je zřejmé, že posloupnost $\langle f_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)\rangle$ jednoznačně určuje zobrazení f. To znamená, že $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq$ $\leq (\sum \aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$. Majorizujeme-li každý člen sumy kardinálem $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, dostáváme opačnou nerovnost.

5.29 Věta. *Pro mocniny* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ *platí následující tvrzení:*

(i) *Je-li* $\alpha \leq \beta$, *potom* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

(ii) (Hausdorff) *Je-li* $\alpha = \gamma + 1$, *potom*

$$\aleph_{\gamma+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\gamma+1} \cdot \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

(iii) (Tarski) *Je-li* α *limitní a* $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, *potom*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\gamma<\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

(iv) (Bukovský) *Je-li* $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha$, *mohou nastat dva případy:*

(a) *Existuje* $\gamma < \alpha$ *takové, že* $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\delta^{\aleph_\beta}$ *pro každé* δ, $\gamma \leq \delta < \alpha$, *potom*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

(b) *Pro každé* $\gamma < \alpha$ *existuje* δ, $\gamma < \delta < \alpha$ *takové, že* $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\delta^{\aleph_\beta}$, *potom*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \gimel(\aleph_\varepsilon), \qquad kde \quad \aleph_\varepsilon = \sum_{\gamma<\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

Důkaz. (ii) a (iii) jsou důsledkem (3): předpokládejme, že $\beta < \alpha = \gamma + 1$. Pro každý ordinál ξ takový, že $\omega_\gamma \leq \xi < \omega_{\gamma+1}$, je $|[\xi]^{\aleph_\beta}| = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Podle (3) a 5.12 dostáváme

$$\aleph_{\gamma+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\gamma+1} \cdot \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

Opačná nerovnost je zřejmá. Snadno se ověří, že vzorec (ii) platí i pro $\alpha \leq \beta$. (iii) Je-li α limitní a $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, z (3) dostáváme $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \sum \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Obrácená nerovnost plyne z 5.12 a z monotónnosti mocnin. (iv) Splňuje-li $\gamma < \alpha$ podmínku tvrzení (a), potom pro každé $\delta < \alpha$ platí $\aleph_\delta \leq \aleph_\delta^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$, tedy také $\aleph_\alpha \leq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Odtud dostáváme

(4) $$\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq (\aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

Je-li splněna podmínka tvrzení (b), potom $\mathrm{cf}(\aleph_\iota) = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$ a tvrzení plyne z lemmatu 5.28.

5.30 Důsledek. *Induktivní výpočet* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. *Pro libovolné* α *a pevné* β *platí:*

(i) *Existuje-li kardinál* $\varkappa < \aleph_\alpha$ *takový, že* $\varkappa^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha$, *potom* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \varkappa^{\aleph_\beta}$. *Speciálně, je-li* $\alpha \leq \beta$, *dostáváme* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

(ii) *Je-li* $\varkappa^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$ *pro každý kardinál* $\varkappa < \aleph_\alpha$, *potom*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, & \textit{pokud} \quad \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha), \\ \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}, & \textit{pokud} \quad \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha. \end{cases}$$

Důkaz. (i) Je-li $\varkappa < \aleph_\alpha$ kardinál takový, že $\varkappa^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha$, potom v nerovnosti (4) můžeme všude nahradit $\aleph_\gamma$ kardinálem $\varkappa$ a dostáváme $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \varkappa^{\aleph_\beta}$.

(ii) Uvažujme nejprve případ $\alpha = \gamma + 1$. Potom nutně $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$ a podle Hausdorffovy formule dostáváme $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha \,.\, \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$. Je-li α limitní ordinál, podle předpokladu je

$$\aleph_\alpha = \sum_{\gamma<\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$$

a tvrzení plyne z 5.29(iii) a (iv)(b).

5.31 Funkce $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ a $\gimel$. Mocnina $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ nabývá vždy některé z následujících hodnot $\aleph_\alpha$, $2^{\aleph_\beta}$, $\gimel(\aleph_\gamma)$ pro nějaké $\gamma \leq \alpha$. Dokážeme to indukcí podle α. Pro $\alpha = 0$ a libovolné β dostáváme $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$. Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a že tvrzení platí pro každé $\gamma < \alpha$ a libovolné β. Rozebereme případy (i) a (ii) z 5.30. V prvním existuje $\delta < \alpha$ takové, že $\aleph_\delta^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, a tvrzení plyne z indukčního předpokladu. Ve druhém případě není co dokazovat.

Víme, že hodnoty $2^{\aleph_\beta}$ jsou jednoznačně určeny průběhem funkce $\gimel$. Odtud plyne, že totéž platí i pro hodnoty $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Naopak z definice funkce $\gimel$ je zřejmé, že její hodnoty jsou jednoznačně určeny průběhem mocniny $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Magidor (1977) ukázal, že hodnoty funkce $\gimel$ nejsou jednoznačně určeny průběhem funkce $2^{\aleph_\beta}$, je-li existence superkompaktního kardinálu bezesporná s axiomy teorie množin.

Přijmeme-li zobecněnou hypotézu kontinua (GCH) jako další axiom, potom $\gimel(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+1}$ pro každé α a výpočet $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ se radikálně zjednoduší.

5.32 Důsledek (GCH). *Pro libovolné ordinály* α, β *platí*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, & \textit{je-li} \quad \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha), \\ \aleph_{\alpha+1}, & \textit{je-li} \quad \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha, \\ \aleph_{\beta+1}, & \textit{je-li} \quad \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

5.33 Hypotéza singulárních kardinálů. Zobecněná hypotéza kontinua předepisuje hodnoty $2^\varkappa = \varkappa^+$ pro všechny nekonečné kardinály. Tím daleko překračuje to, co lze odvodit z axiomů, které ponechávají jistou volnost hodnotám $2^\varkappa$ pro regulární $\varkappa$. Solovay (1974) vyslovil *hypotézu singulárních kardinálů* (SCH), která určuje chování funkce gimel na singulárních kardinálech. Je to následující tvrzení:

(SCH) Pro každý singulární kardinál $\aleph_\alpha$ platí

$$\gimel(\aleph_\alpha) = \max\left(2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}, \aleph_{\alpha+1}\right).$$

Povšimněme si, že pro regulární $\aleph_\alpha$ hypotéza dává jen rovnost $2^{\aleph_\alpha} = \gimel(\aleph_\alpha)$ z věty 5.21. Kdybychom předpokládali, že hypotéza platí i pro všechny regulární kardinály, nedostaneme nic nového. Hypotéza singulárních kardinálů je důsledkem zobecněné hypotézy kontinua, to znamená, že je také bezesporná s axiomy teorie množin. Je-li $\aleph_\alpha$ singulární kardinál, z GCH dostáváme $2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} < \aleph_\alpha$ a $\gimel(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+1}$, jak požaduje SCH. Magidor (1977) ukázal, že SCH není dokazatelná v teorii množin, pokud je existence superkompaktního kardinálu bezesporná s axiomy. Na druhé straně Jensen (1976) ukázal, že hypotéza singulárních kardinálů je dokazatelná v teorii množin rozšířené o axiom, který zakazuje existenci všech dosti velkých kardinálů.

Na závěr ukážeme, že hypotéza singulárních kardinálů zjednodušuje výpočet hodnot $2^{\aleph_\beta}$ a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

5.34 Důsledek (SCH). (i) *Je-li $\aleph_\alpha$ singulární kardinál, potom*

$$2^{\aleph_\alpha} = \begin{cases} 2^{<\aleph_\alpha}, & \textit{jestliže} \ \ \mathrm{cf}(2^{<\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha, \\ (2^{<\aleph_\alpha})^+, & \textit{jestliže} \ \ \mathrm{cf}(2^{<\aleph_\alpha}) < \aleph_\alpha. \end{cases}$$

(ii) *Pro libovolné ordinály α, β platí*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} 2^{\aleph_\beta}, & \textit{je-li} \ \ 2^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha, \\ \aleph_\alpha, & \textit{je-li} \ \ 2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha \ \textit{a} \ \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha), \\ \aleph_{\alpha+1}, & \textit{je-li} \ \ 2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha \ \textit{a} \ \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta. \end{cases}$$

Důkaz. (i) Položme $\varkappa = 2^{<\aleph_\alpha}$. Je-li $\mathrm{cf}(\varkappa) > \aleph_\alpha$, podle 5.22 jde o případ (ii)(a) z věty 5.21 a $2^{\aleph_\alpha} = \varkappa$. Je-li $\mathrm{cf}(\varkappa) < \aleph_\alpha$, jde o případ (ii)(b). Přitom $\varkappa$ je singulární kardinál a $2^{\mathrm{cf}(\varkappa)} < \varkappa$. Z hypotézy singulárních kardinálů dostáváme $2^{\aleph_\alpha} = \gimel(\varkappa) = \varkappa^+$.

(ii) Postupujeme indukcí podle α. Pro $\alpha = 0$ a libovolné β tvrzení platí, protože $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} > \aleph_\alpha$. Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a že věta platí pro každé $\gamma < \alpha$ a každé β. Je-li $2^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha$, potom $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$ podle 5.30(i). Předpokládejme, že $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$. Je-li $\alpha = \gamma + 1$, podle indukčního předpokladu je $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$ a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$ podle Hausdorffovy formule. Je-li α limitní ordinál, podle indukčního předpokladu je $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$ pro každé $\gamma < \alpha$. Tvrzení plyne z 5.30(ii). V případě, že $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha$, z indukčního předpokladu dostáváme $2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} < \aleph_\alpha$ a z SCH plyne $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \gimel(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+1}$.

§ 6 Fundované relace a axiom fundovanosti

K nejdůležitějším prostředkům teorie množin patří transfinitní indukce a rekurze, které jsou vázány na dobrá uspořádání. Přirozeným zobecněním pojmu dobré uspořádání se dostáváme k pojmu fundované relace, který dovoluje rozšířit metody indukce a rekurze i na relace, které nejsou dobrým uspořádáním.

Dokážeme věty o fundované indukci a fundované rekurzi. Potom se budeme věnovat relaci náležení a ukážeme, že existuje největší tranzitivní třída, říkáme jí fundované jádro, na které je relace $\in$ fundovaná. Tato třída je sjednocením kumulativní hierarchie množin, která vznikne iterováním operace potence. Ukážeme, že je uzavřená na množinové operace a že jejími prvky jsou základní číselné obory – množiny ω, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ všech přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel. Ukážeme, že fundované jádro má podobné postavení vzhledem k úzkým fundovaným relacím, jaká má třída *On* vzhledem k dobrým uspořádáním: budeme definovat Mostowského kolapsující zobrazení a s jeho pomocí ukážeme, že každá extenzionální úzká fundovaná relace má izomorfní kopii ve fundovaném jádře.

Axiom fundovanosti zaručuje, že relace $\in$ je fundovaná. To znamená, že univerzální třída splývá s fundovaným jádrem. Tato skutečnost dovoluje v mnoha důležitých případech nahradit vlastní třídy množinami. Dokážeme, že princip fundované indukce potom platí pro všechny fundované relace a že každá relace ekvivalence může být vhodně reprezentována množinami. Tím bude řešen problém faktorizace vlastních tříd podle relací ekvivalence. Podrobněji se budeme zabývat dvěma speciálními případy této úlohy, a to zavedením mohutnosti množin, které nelze dobře uspořádat, a reprezentováním tříd navzájem izomorfních matematických struktur.

6.1 Definice. Fundované relace. (i) Říkáme, že relace R je *fundovaná*, jestliže každá neprázdná množina má alespoň jeden R-minimální prvek. Říkáme, že r je *R-minimální prvek množiny X*, je-li $r \in X$ a pro žádné $x \in X$ neplatí $\langle x, r\rangle \in R$.

(ii) Říkáme, že relace R je *fundovaná na třídě A*, jestliže každá neprázdná podmnožina třídy A má alespoň jeden R-minimální prvek. Tedy R je fundovaná relace, je-li fundovaná na univerzální třídě.

6.2 Fundované relace jsme definovali pomocí R-minimality, která připomíná obdobný pojem pro uspořádání. Je zřejmé, že fundovaná relace je antireflexivní, ale tím končí analogie s ostrým uspořádáním, protože fundované relace nemusí být tranzitivní. Některé pojmy z uspořádaných množin budeme však používat i pro fundované relace, protože jsou názorné a vystihují, o co jde.

Snadno se nahlédne, že každá podtřída fundované relace, speciálně prázdná relace, je fundovaná. Je-li R relace fundovaná na třídě A, potom $R_A = R \cap (A \times A)$ je fundovaná relace.

6.3 Příklady. (a) Relace $\in$ je fundovaná na každém ordinálu i na On. Relace $\in$ je také fundovaná na množině $A = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}\}$, ale není tranzitivní na A. Proto $\in_A$ je fundovaná relace, která není tranzitivní.

(b) Ostré lexikografické uspořádání na třídě $On \times On$ je fundovaná relace. Je-li $R \subseteq A \times A$ ostré dobré uspořádání na třídě A, potom R je fundovaná relace. To znamená, že fundované relace jsou zobecněním dobrých uspořádání.

(c) Relace R definovaná na $On \times On$ vztahem

$$R = \{\langle\langle\alpha, \beta\rangle, \langle\alpha', \beta'\rangle\rangle : \beta < \beta'\}$$

je fundovaná.

(d) Relace inkluze je fundovaná na množině ${}^{<\omega}2$ všech konečných posloupností nul a jedniček. Tato množina spolu s uspořádáním inkluzí se nazývá úplný binární strom. Obecně, je-li A neprázdná množina a α ordinál, potom relace inkluze je fundovaná na množině

$${}^{<\alpha}A = \bigcup_{\beta < \alpha} {}^{\beta}A$$

všech posloupností prvků z A délky menší než α. Mluvíme o úplném A-árním stromu výšky α. Stromová uspořádání jsou často užívanými případy fundovaných relací. Budeme se jimi podrobněji zabývat v § 3 III. kapitoly.

6.4 Snadno se nahlédne, že fundovaná relace nepřipouští konečný cyklus ani nekonečnou klesající posloupnost. Je-li R fundovaná relace, pak neexistuje žádná posloupnost $\langle a_n : n < \omega\rangle$ taková, že $\langle a_{n+1}, a_n\rangle \in R$ pro každé n. Z axiomu výběru plyne i opačná implikace.

6.5 Věta (AC). *Relace R je fundovaná, právě když neexistuje žádná nekonečná posloupnost klesající v R.*

Důkaz. Stačí, když ukážeme, že relace, která není fundovaná, připouští nekonečnou klesající posloupnost. Nechť R je relace a nechť u je neprázdná množina, která nemá R-minimální prvek. To znamená, že pro libovolné $x \in u$ existuje $y \in u$ takové, že $\langle y, x\rangle \in R$. Zvolme nějaké dobré uspořádání $<$ množiny u a konstruujme posloupnost $\langle a_n : n < \omega\rangle$ následujícím způsobem. Libovolně zvolíme $a_0 \in u$. Je-li již sestrojen prvek $a_n \in u$, pak a_{n+1} je nejmenší prvek množiny $\{y \in u : \langle y, a_n\rangle \in R\}$ v dobrém uspořádání $<$. Potom pro každé přirozené n dostáváme $\langle a_{n+1}, a_n\rangle \in R$, takže R připouští nekonečnou klesající posloupnost.

6.6 Úzké fundované relace jsou nejdůležitějším případem fundovaných relací, protože zaručují existenci minimálních prvků nejenom v neprázdných podmnožinách, ale i ve všech neprázdných třídách. Pro úzké fundované relace lze dokázat věty o indukci a rekurzi podobné těm, které známe pro ordinální čísla.

Připomeňme, že relace R je úzká, jestliže každé y má v R jenom množinu předchůdců $\{x: \langle x, y\rangle \in R\}$. Relace náležení a inkluze jsou úzké, to znamená, že v příkladu 6.3 jsou (a) a (d) úzké fundované relace. Relace (b) (c) z 6.3 nejsou úzké.

Ukážeme, že úzké relace dovolují sestrojit tranzitivní nadmnožinu ke každé množině.

6.7 Definice. R-tranzitivní množina. Říkáme, že množina A je *tranzitivní vzhledem k relaci R*, nebo krátce, že A je *R-tranzitivní množina*, jestliže pro každé $a \in A$ je

$$\{x: \langle x, a\rangle \in R\} \subseteq A.$$

Je zřejmé, že $\in$-tranzitivní množina je totéž co tranzitivní množina z definice 1.1. Průnik libovolného systému R-tranzitivních množin je R-tranzitivní množina. Podobně i sjednocení množiny R-tranzitivních množin je R-tranzitivní množina.

6.8 Lemma. R-tranzitivní obal. *Je-li R úzká relace, pro libovolnou množinu u existuje R-tranzitivní nadmnožina, která je nejmenší vzhledem k inkluzi. Označíme ji $U_R(u)$ a nazveme ji R-tranzitivním obalem množiny u.*

Důkaz. Je-li dána množina u, rekurzí definujeme množiny u_n, $n < \omega$. Položíme

$$u_0 = u$$

a

$$u_{n+1} = \{x: (\exists y \in u_n)(\langle x, y\rangle \in R)\} \qquad \text{pro každé } n.$$

V každém kroku dostáváme jen množinu, protože R je úzká relace. Je zřejmé, že $\bigcup u_n$ je R-tranzitivní nadmnožina množiny u. Ukážeme, že je to R-tranzitivní obal množiny u. Je-li v libovolná R-tranzitivní nadmnožina u, potom indukcí ověříme, že $u_n \subseteq v$ pro každé $n < \omega$. To znamená, že $\bigcup u_n = U_R(u) \subseteq v$.

6.9 Příklad. *Tranzitivní obal množiny.* Pro libovolnou množinu u je podle lemmatu 6.8 $U_\in(u)$ nejmenší tranzitivní nadmnožina množiny u. Říkáme jí tranzitivní obal množiny u. Je zřejmé, že $U_\in(u) = u$ pro každou tranzitivní množinu u, speciálně pro každý ordinál. Všimněme si, že pro libovolné x je $U_\in(\{x\})$ nejmenší tranzitivní množina, jejímž prvkem je x.

6.10 Lemma. Princip minimality. *Je-li R úzká fundovaná relace, potom každá neprázdná třída má alespoň jeden R-minimální prvek.*

Důkaz. Je-li dána neprázdná třída A, nechť r je nějaký její prvek. Pokud r není sám R-minimální v A, uvažujme neprázdnou množinu $u = A \cap U_R(\{r\})$. Ta má nějaký R-minimální prvek s. Ukážeme, že s je také R-minimální prvek třídy A. V opačném případě existuje $t \in A$ takový, že $\langle t, s\rangle \in R$. Odtud plyne $t \in u$ a s není R-minimální v u — spor.

6.11 Věta. Fundovaná indukce. *Je-li R úzká fundovaná relace a X je třída taková, že pro každé x platí*

(1) $$\{y: \langle y, x\rangle \in R\} \subseteq X \rightarrow x \in X\,,$$

potom $X = \mathbf{V}$.

Důkaz sporem. Předpokládejme, že $\mathbf{V} - X \neq 0$ a že x je R-minimálni prvek $\mathbf{V} - X$. Potom $x \notin X$, ale $\{y: \langle y, x\rangle \in R\} \subseteq X$. To je ve sporu s předpokladem (1).

6.12 Věta. Fundovaná rekurze. *Nechť R je úzká fundovaná relace a nechť G je zobrazení definované na univerzální třídě $\mathbf{V}$. Potom existuje právě jedno zobrazení F takové, že* $\mathrm{Dom}(F) = \mathbf{V}$ *a*

$$F(x) = G(F \mid \{y: \langle y, x\rangle \in R\}) \qquad \textit{pro každé } x.$$

Důkaz. Postupujeme obdobně jako při důkazu věty 2.3 o transfinitní rekurzi. Definujeme třídu A všech zobrazení f takových, že $\mathrm{Dom}(f)$ je R-tranzitivní množina a pro každé $x \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$f(x) = G(f \mid \{y: \langle y, x\rangle \in R\})\,.$$

Fundovanou indukcí lze dokázat

(a) pro libovolné $f, f' \in A$ a $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(f')$ je $f(x) = f'(x)$,

(b) pro každé x existuje $f \in A$ takové, že $\mathrm{Dom}(f) = U_R(\{x\})$.

Dokážeme jen tvrzení (b). Je-li x libovolná množina, pak $U_R(\{x\})$ je nejmenši R-tranzitivní množina, jejímž prvkem je x. Předpokládejme, že pro každé y takové, že $\langle y, x\rangle \in R$, existuje zobrazení $g \in A$ s definičním oborem $U_R(\{y\})$. Podle (a) je takové zobrazení určeno jednoznačně, můžeme jej označit g_y. Položíme-li

$$h = \bigcup\{g_y: \langle y, x\rangle \in R\}\,,$$

potom h je také zobrazení podle (a). Navíc, h je definováno pro všechny prvky množiny $U_R(\{x\})$ s výjimkou x. Zobrazení f, pro které platí (b), získáme tak, že h rozšíříme o hodnotu $f(x) = G(h \mid \{y: \langle y, x\rangle \in R\})$. Podle věty 6.11 je podmínka (b) dokázána pro každé x.

Položíme-li $F = \bigcup A$, stejným způsobem jako ve větě 2.3 dokážeme, že F je zobrazení, které vyhovuje tvrzení věty. Nakonec fundovanou indukcí ověříme, že takové zobrazení je jediné.

6.13 Typové funkce. Je-li R úzká fundovaná relace, rekurzí podle R můžeme definovat zobrazení $\varrho_R: \mathbf{V} \longrightarrow On$ tak, že pro libovolné x položíme

(2) $$\varrho_R(x) = \sup\{\varrho_R(y) + 1: \langle y, x\rangle \in R\}\,.$$

Podle věty 6.12 je funkce ϱ_R jednoznačně určena podmínkou (2) a je definována pro každé x.

Říkáme, že ϱ_R je typová funkce relace R a že $\varrho_R(x)$ je typ množiny x (vzhledem k R). Snadno se ukáže, že typ nula mají právě všechny R-minimální prvky třídy V.

Typ jedna mají množiny, které nejsou R-minimální, ale mají jen R-minimální předchůdce.

Pro libovolné x, y platí

$$\langle x, y\rangle \in R \rightarrow \varrho_R(x) < \varrho_R(y). \tag{3}$$

Na druhou stranu, existuje-li zobrazení ϱ, které splňuje podmínku (3), potom R je fundovaná relace. Nemusí však být úzká. Pro fundovanou relaci z příkladu 6.3(c) lze definovat zobrazení, které splňuje (3) a dokonce i (2). Pro relaci 6.3(b) podobné zobrazení neexistuje.

6.14 Fundovaná indukce a rekurze vzhledem ke třídě. Je-li R úzká relace, která je fundovaná na nějaké třídě A, podle 6.2 je $R_A = R \cap (A \times A)$ úzká fundovaná relace. Pro R_A bychom mohli použít větu 6.11 o fundované indukci v doslovném znění. Ve většině případů bychom jen obtížně ověřili předpoklad (1). Uvědomme si, že každé $x \notin A$ je R_A-minimální prvek třídy $\mathbf{V}$. Ověřit (1) pro x znamená ukázat, že $x \in X$. Přitom na množinách, které nejsou prvky třídy A, zpravidla nezáleží.

V takových případech je vhodné omezit indukci jen na třídu A. Ověříme-li, že pro každé $x \in A$ platí

$$\{y \in A : \langle y, x\rangle \in R\} \subseteq X \rightarrow x \in X, \tag{1'}$$

stejným způsobem jako v 6.11 dokážeme $A \subseteq X$. To je princip fundované indukce vzhledem ke třídě A.

Podobně je tomu s fundovanou rekurzí. Použijeme-li větu 6.12 pro operaci G a relaci R_A, dostáváme zobrazení F takové, že $\mathrm{Dom}(F) = V$ a pro každé x platí

$$F(x) = G(F \mid \{y : \langle y, x\rangle \in R_A\}). \tag{4}$$

Snadno se nahlédne, že pro každé $x \notin A$ je $F(x) = G(0)$. Na doplňku třídy A dostáváme nezajímavé konstantní zobrazení. Omezíme-li se jen na třídu A, podle (4) pro každé $a \in A$ platí

$$F(a) = G(F \mid \{y \in A : \langle y, a\rangle \in R\}). \tag{5}$$

Ukázali jsme, že za uvedených předpokladů existuje zobrazení F takové, že $\mathrm{Dom}(F) = A$ a pro každé $a \in A$ platí (5). To je princip fundované rekurze vzhledem ke třídě A.

Fundované jádro je největší ze všech tranzitivních tříd, na kterých je fundovaná relace $\in$. Je překvapivé, že taková třída existuje a může být definována z prázdné množiny iterováním operace potence.

6.15 Definice. Množiny V_α. Pro každý ordinál α definujeme množinu V_α. Položíme

$$\begin{aligned} V_0 &= 0, \\ V_{\alpha+1} &= \mathscr{P}(V_\alpha), \\ V_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \qquad \text{pro limitní } \lambda. \end{aligned}$$

Třída WF je sjednocením všech množin V_α, tedy

$$WF = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in On\}.$$

6.16 Lemma. *Pro každý ordinál α platí*

(i) *V_α je tranzitivní množina,*

(ii) $V_\beta \subseteq V_\alpha$ *pro každé* $\beta < \alpha$,

to znamená, že množiny V_α tvoří kumulativní hierarchii a WF je také tranzitivní třída.

Důkaz transfinitní indukcí. Uvědomme si, že V_α je tranzitivní množina, právě když každý její prvek je také její podmnožinou. Obě tvrzení jsou zřejmá pro α limitní a pro $\alpha = 0$. Je-li V_α tranzitivní, pak $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$, a snadno se nahlédne, že $V_{\alpha+1}$ je také tranzitivní. WF je tranzitivní podle lemmatu 1.3.

6.17 Definice. Typová funkce třídy WF. V kumulativní hierachii přibývají nové prvky třídy WF jen jako podmnožiny nějaké množiny V_α. Pro libovolné $x \in WF$ můžeme definovat

$$\varrho(x) = \min\{\alpha : x \subseteq V_\alpha\}.$$

Říkáme, že ϱ je *typová funkce pro třídu WF.*

Snadno se ukáže, že pro libovolný ordinál α a $x \in WF$ platí

(6)
$$\varrho(x) = \alpha \leftrightarrow x \in V_{\alpha+1} - V_\alpha,$$
$$V_\alpha = \{x \in WF : \varrho(x) < \alpha\}.$$

6.18 Lemma. *Pro libovolné $y \in WF$ a libovolné x platí*

(i) $x \in y \rightarrow \varrho(x) < \varrho(y)$,

(ii) $x \in WF \leftrightarrow x \subseteq WF$.

Důkaz. (i) Je-li $\varrho(y) = \beta$, potom $y \subseteq V_\beta$, ale $y \notin V_\beta$. Pro libovolné $x \in y$ dostáváme $x \in V_\beta \subseteq WF$ a $\varrho(x) < \varrho(y)$.

(ii) Je-li $x \subseteq WF$, položme $\alpha = \sup\{\varrho(y) + 1 : y \in x\}$. Potom $x \subseteq V_\alpha$ podle (6) a $x \in V_{\alpha+1} \subseteq WF$. Opačná implikace plyne z toho, že WF je tranzitivní třída.

6.19 Věta. *WF je největší tranzitivní třída, na které je fundovaná relace $\in$. Říkáme, že WF je fundované jádro relace $\in$.*

Důkaz. Podle 6.18(i) splňuje typová funkce ϱ podmínku (3) z 6.13. Relace $\in$ je tedy fundovaná na třídě WF. Ukážeme, že je to největší tranzitivní třída s touto vlastností. Nechť X je tranzitivní třída a nechť $\in$ je fundovaná na X. Ukážeme, že $X \subseteq WF$. V opačném případě je $X - WF \neq 0$ a podle principu minimality existuje alespoň jeden $\in$-minimální prvek $x \in X - WF$, protože $\in$ je úzká relace. Potom $x \subseteq WF$, protože $x \subseteq X$ a žádný prvek množiny x nepatří do $X - WF$. Podle 6.18(ii) je $x \in WF$, spor.

6.20 Relace $\in$ je úzká a fundovaná na WF. Podle 6.13 existuje právě jedna typová funkce ϱ taková, že pro každé $x \in WF$ platí

$$\varrho(x) = \sup\{\varrho(y) + 1 : y \in x\}.$$

Přesvědčíme se, že typová funkce ϱ z 6.17 splňuje uvedenou podmínku. Tím bude ospravedlněn její název. Je-li $x \in WF$, položíme $\alpha = \sup\{\varrho(y) + 1 : y \in x\}$. Potom $x \subseteq V_\alpha$ podle (6) a α je nejmenší takový ordinál, tedy $\varrho(x) = \alpha$.

Ukázali jsme, že každá tranzitivní třída, na které je fundovaná relace $\in$, je podtřídou WF, speciálně $On \subseteq WF$.

6.21 Lemma. *Pro každé $\alpha \in On$ platí*

(i) $\varrho(\alpha) = \alpha$,
(ii) $\alpha = V_\alpha \cap On$.

Důkaz. (i) transfinitní indukcí. Předpokládejme, že pro každé $\beta < \alpha$ platí $\varrho(\beta) = \beta$. Potom $\alpha \subseteq V_\alpha$ a pro žádné $\beta < \alpha$ nemůže platit $\alpha \subseteq V_\beta$, proto $\varrho(\alpha) = \alpha$.

(ii) plyne z (i) a (6).

6.22 Fundované jádro WF má další zajímavé vlastnosti. Každá množina, která vznikne z prvků WF nějakou množinovou operací, je sama také prvkem WF. Říkáme, že třída WF je uzavřena na množinové operace. Protože $\omega \in WF$ a z množiny všech přirozených čísel lze sestrojit množiny $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ všech celých, racionálních, reálných a komplexních čísel, tyto číselné obory jsou také prvkem fundovaného jádra.

6.23 Lemma. *Nechť $x, y \in WF$, $\alpha = \varrho(x)$ a $\beta = \max\{\varrho(x), \varrho(y)\}$. Potom:*

(i) *Množiny $x \cap y$, $x - y$, $\bigcup x$, $\mathrm{Dom}(x)$, $\mathrm{Rng}(x)$, $\{x\}$ a $\mathscr{P}(x)$ jsou prvky WF a typ každé z nich je $\leq \alpha + 1$.*

(ii) *Množiny $x \cup y$, $\{x, y\}$, $\langle x, y\rangle$, $x \times y$ a ${}^x y$ jsou také prvky WF a typ každé z nich je nejvýše $\beta + 3$.*

(iii) *Množiny $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ všech celých, racionálních, reálných a komplexních čísel jsou prvky $V_{\omega+\omega}$.*

Důkaz. (i) Podle předpokladu je $x \subseteq V_\alpha$ a totéž platí pro $x \cap y$ a $x - y$. Podle 6.18(ii) patří obě množiny do WF a jejich typ je $\leq \alpha$. Podobně $\bigcup x \subseteq V_\alpha$, protože V_α je tranzitivní množina. Připomeňme, že $\mathrm{Dom}(x)$ a $\mathrm{Rng}(x)$ jsou podmnožiny $\bigcup\bigcup x$. Dále $\mathscr{P}(x) \subseteq \mathscr{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$ a totéž platí pro $\{x\}$.

(ii) Podle předpokladu je $x \cup y \subseteq V_\beta$. Je-li $a \in x$ a $b \in y$, potom $\{a, b\} \subseteq V_\beta$ a $\langle a, b\rangle \subseteq V_{\beta+1}$, odkud dostáváme $\langle a, b\rangle \in V_{\beta+2}$ a $x \times y \subseteq V_{\beta+2}$. Nakonec ${}^x y \subseteq \mathscr{P}(x \times y) \subseteq V_{\beta+3}$.

(iii) Podle lemmatu 6.21 je $\omega \subseteq V_\omega$. Množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel vznikne faktorizací $\omega \times \omega$ podle jisté relace ekvivalence. Proto $\mathbb{Z} \subseteq \mathscr{P}(\omega \times \omega) \subseteq V_{\omega+3}$. Podobně postupujeme i pro další číselné obory. Uvědomme si, že $\mathbb{Q}$ vznikne faktorizací množiny $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, $\mathbb{R} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{Q})$ a $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

6.24 Fundované relace a WF. Podle věty 6.19 fundované jádro zahrnuje každou tranzitivní třídu, na které je relace $\in$ fundovaná.

Nyní ukážeme, že fundované jádro zahrnuje i obrazy všech úzkých fundovaných relací. Je-li R úzká relace fundovaná na třídě A, pak existuje zobrazení třídy A do WF, které relaci R převádí na $\in$.

6.25 Definice. Mostowského kolaps. Je-li R úzká relace fundovaná na třídě A, fundovanou rekurzí na A definujeme zobrazení F tak, že

$$F(x) = \{F(y) : y \in A \mathbin{\&} \langle y, x\rangle \in R\}$$

pro každé $x \in A$. Říkáme, že F je Mostowského kolapsující zobrazení nebo krátce Mostowského kolaps třídy A určený relací R.

6.26 Z definice je zřejmé, že obor hodnot kolapsujícího zobrazení je tranzitivní třída a že pro libovolné $x, y \in A$ platí

$$\langle x, y\rangle \in R \rightarrow F(x) \in F(y)\,.$$

Fundovanou indukcí se dokáže, že $F(x) \in WF$ pro každé $x \in A$. To znamená, že F zobrazuje třídu A na tranzitivní část fundovaného jádra. Nemusí to vždy být zajímavé zobrazení. Je-li $R = 0$ nebo je-li R disjunktní s $A \times A$, potom $F(x) = 0$ pro každé $x \in A$. Ukážeme, že kolapsující zobrazení je izomorfismus vzhledem k R a $\in$, právě když R je extenzionální na A.

6.27 Definice. Extenzionální relace. Říkáme, že relace R je extenzionálni na třídě A, jestliže pro libovolné $x, y \in A$ platí

$$(\forall z \in A)(\langle z, x\rangle \in R \leftrightarrow \langle z, y\rangle \in R) \rightarrow x = y\,.$$

Jinými slovy, relace R je extenzionálni na A, jestliže na A platí axiom extenzionality v případě, že relaci $\in$ nahradíme relací R.

6.28 Příklady. (a) Každé lineární uspořádání na třídě A je extenzionální na A.

(b) Je-li A tranzitivní třída, potom relace $\in$ je extenzionální na A, protože pro každé $a \in A$ je $a = \{x \in A : x \in a\}$.

(c) Je-li A množina sestávající ze dvou prvků 0 a $\{\{0\}\}$, pak $\in$ není extenzionální na A. Uvědomme si, že $\in_A = 0$. Obecně, prázdná relace není extenzionální na žádné třídě, která má alespoň dva prvky. Extenzionálnost relace R je tedy nutnou podmínkou, aby kolapsující zobrazení bylo prosté.

6.29 Mostowského věta o kolapsu. *Je-li R úzká relace, která je extenzionální a fundovaná na třídě A, pak existuje právě jedna tranzitivní třída $M \subseteq WF$ a jednoznačně určené zobrazení F, které zobrazuje A na M a je izomorfismem vzhledem k relacím R a $\in$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že Mostowského kolapsující zobrazení F splňuje podmínky věty. Položíme-li $M = \mathrm{Rng}(F)$, potom M je tranzitivní část WF. Stačí, ukážeme-li, že F je prosté zobrazení, z definice F pak bude zřejmé, že F je izomorfismus A a M vzhledem k R a $\in$. Předpokládejme, že F není prosté a že a je R-minimální prvek třídy $\{x \in A : (\exists y \in A)(x \neq y \,\&\, F(x) = F(y))\}$. Zvolme nějaké $b \in A$ různé od a takové, že $F(a) = F(b)$. Potom $\{v \in A : \langle v, a \rangle \in R\} \neq \{w \in A : \langle w, b \rangle \in R\}$, protože R je extenzionální na A. Mohou nastat dva případy. Předpokládejme, že pro nějaké $v \in A$ je $\langle v, a \rangle \in R$, ale $\langle v, b \rangle \notin R$. Potom $F(v) \in F(a) = F(b)$ a z definice F plyne, že $F(v) = F(w)$ pro nějaké $w \in A$, které je různé od v. Dostáváme spor s minimalitou prvku a. Stejným způsobem dojdeme ke sporu i ve druhém případě, kdy existuje $w \in A$ takové, že $\langle w, b \rangle \in R$, ale $\langle w, a \rangle \notin R$. Zobrazení F je tedy prosté a je to izomorfismus. Zbývá dokázat jednoznačnost F a M. Kdyby F' byl jiný izomorfismus zobrazující A na M', fundovanou indukcí dokážeme $F(x) = F'(x)$ pro každé $x \in A$, odkud plyne $M = M'$.

Je-li R relace náležení, dostáváme důležitý speciální případ věty o kolapsu.

6.30 Věta o kompresi (Gödel 1938). *Je-li $A \subseteq WF$ a $\in$ je extenzionální na třídě A, potom existuje právě jedna tranzitivní třída $M \subseteq WF$ a jednoznačně určené zobrazení F, které je izomorfismem tříd A, M vzhledem k relaci $\in$. To znamená, že pro libovolné $x, y \in A$ platí*

$$x \in y \leftrightarrow F(x) \in F(y).$$

Je-li B tranzitivní třída a $B \subseteq A$, potom

$$F(x) = x \qquad \text{pro každé} \quad x \in B.$$

Důkaz. Relace $\in$ je úzká a je fundovaná na WF. Je-li $A \subseteq WF$, první část tvrzení plyne z Mostowského věty o kolapsu. Je-li $B \subseteq A$ tranzitivní, fundovanou indukcí se dokáže, že $F(x) = x$ pro každé $x \in B$.

6.31 Axiom fundovanosti a *WF*. Připomeňme, že axiom fundovanosti je následující tvrzení:

$$(\forall a)(a \neq 0 \rightarrow (\exists x \in a)(x \cap a = 0)).$$

Je-li $x \in a$ a $x \cap a = 0$, potom x je $\in$-minimální prvek množiny a. Axiom fundovanosti tedy tvrdí, že relace $\in$ je fundovaná. Protože $WF \subseteq V$ a univerzální třída je tranzitivní, z věty 6.19 dostáváme:

6.32 Věta. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *axiom fundovanosti,*

(ii) $\mathrm{V} = WF$,

(iii) $(\forall x)(\exists \alpha)(x \in V_\alpha)$.

6.33 Axiom fundovanosti postuluje důležitou vlastnost relace náležení a globálně charakterizuje univerzum množin. V tom se podobá axiomu extenzionality. Plyne z něj, že do univerza patří jen takové množiny, které vzniknou z prázdné množiny postupným iterováním operace potence. Podle věty o kompresi nemůže mít takové univerzum žádný netriviální automorfismus, to znamená izomorfní zobrazení univerza na sebe.

Na rozdíl od axiomu extenzionality, který používáme tak často, že si to ani neuvědomujeme, axiom fundovanosti jsme zatím nepoužili k důkazu žádné věty teorie množin. Co získáváme a co ztrácíme, přijmeme-li tento axiom? Získáváme přesnější popis univerza množin a možnost používat fundované indukce a rekurze podle $\in$ na celé univerzální třídě. To zjednodušuje studium modelů a metamatematiky teorie množin a dává nové matematické prostředky pro řešení některých problémů, které se týkají tříd. Ztrácíme množiny, které nejsou prvkem fundovaného jádra, například množiny tvaru $x = \{x\}$. Takové množiny přestávají být předmětem našeho zájmu. Podle lemmatu 6.23 to není žádné podstatné omezení. Základní číselné obory jsou prvky fundovaného jádra, které je uzavřeno na množinové operace. Do fundovaného jádra tedy patří i všechny další struktury, které z nich lze vytvořit obvyklými matematickými konstrukcemi. Nic podstatného neztrácíme ani v metamatematice: dá se ukázat, že přidáním axiomu fundovanosti k ostatním axiomům získáme bezespornou teorii, je-li bezesporná teorie množin bez axiomu fundovanosti.

Axiom fundovanosti v mnoha případech dovoluje nahradit vlastní třídy množinami.

6.34 Nahrazení třídy podmnožinou. Jde o technický prostředek, který je dán existencí kumulativní hierarchie množin. Je-li dána neprázdná třída A, pak existuje ordinál α takový, že $V_\alpha \cap A$ je neprázdná množina. Je-li α nejmenší ordinál s touto vlastností, získáváme podmnožinu $a = V_\alpha \cap A$ třídy A, kterou můžeme vyjádřit pomocí typové funkce následujícím způsobem:

$$a = \{x \in A : (\forall y \in A)(\varrho(x) \leq \varrho(y))\}.$$

Je zřejmé, že množina a závisí jen na třídě A a že její definice je návodem, jak nahradit libovolnou třídu nějakou její podmnožinou.

Předvedeme dvojí použití takového postupu: dokážeme, že princip minimality platí pro všechny fundované relace a že každá relace ekvivalence má množinovou reprezentaci tříd ekvivalence. Toho využijeme k definici mohutnosti množin, které nelze prostě zobrazit na žádné kardinální číslo. Nejprve dokážeme:

6.35 Lemma. *Každá relace obsahuje úzkou relaci, která má stejný obor hodnot. Jinými slovy, ke každé relaci R existuje úzká relace S taková, že* $S \subseteq R$ *a* $\operatorname{Rng}(S) = \operatorname{Rng}(R)$.

Důkaz. Je-li dána relace R, s využitím typové funkce ϱ definujeme relaci S

$$S = \{\langle x, y\rangle \in R : y \in \operatorname{Rng}(R) \mathbin{\&} (\forall t)(\langle t, y\rangle \in R \rightarrow \varrho(x) \leq \varrho(t))\}.$$

Je zřejmé, že S splňuje tvrzení lemmatu, protože pro libovolné $y \in \operatorname{Rng}(R)$ ze všech dvojic $\langle x, y\rangle \in R$ do S patří jen ty, ve kterých je x nejmenšího možného typu.

Princip minimality a fundovaná indukce platí pro všechny fundované relace. Je-li R fundovaná relace a A neprázdná třída, nechť $R_A = R \cap (A \times A)$ a $S \subseteq R_A$ je úzká relace z lemmatu 6.35 taková, že $\mathrm{Rng}(S) = \mathrm{Rng}(R_A)$. Potom S je také fundovaná relace a podle lemmatu 6.10 existuje S-minimální prvek $a \in A$. Je zřejmé, že a je také R-minimální prvek třídy A. V opačném případě existuje $b \in A$ tak, že $\langle b, a\rangle \in R$, tedy $a \in \mathrm{Rng}(R_A) = \mathrm{Rng}(S)$, a pro nějaké $c \in A$ musí platit $\langle c, a\rangle \in S$. To je ve sporu s S-minimalitou prvku a.

Ukázali jsme, že princip minimality vyslovený v lemmatu 6.10 platí pro všechny fundované relace. Stejně tak můžeme vynechat omezení na úzké relace v principu fundované indukce z věty 6.11, která je důsledkem principu minimality. Ze znění i z důkazu věty 6.12 je vidět, že v principu fundované rekurze nelze vypustit omezení na úzké relace.

6.36 Mohutnost množin. Definovat mohutnost množiny x je totéž jako reprezentovat třídu $\{y: x \approx y\}$ všech množin y, které lze prostě zobrazit na x. To je jednoduché, pokud lze množinu x dobře uspořádat, potom prvkem uvažované třídy je právě jedno kardinální číslo, které jsme definovali jako mohutnost $|x|$ množiny x. V tomto případě dokonce dostáváme

$$x \approx |x|. \tag{7}$$

Pokud x nelze dobře uspořádat, musíme použít axiom fundovanosti. Položíme-li

$$|x| = \{y: y \approx x \,\&\, (\forall z)(z \approx x) \rightarrow \varrho(y) \leq \varrho(z))\},$$

není těžké ověřit, že pro libovolné x a y platí

$$x \approx y \leftrightarrow |x| = |y|. \tag{8}$$

Množinu $|x|$ můžeme plným právem nazvat mohutnost množiny x. Dá se ukázat, že při této definici mohutnosti již neplatí (7). Proto je výhodné kombinovat oba přístupy a právě uvedenou definici mohutnosti vyhradit jen pro množiny, které nelze dobře uspořádat.

Axiom fundovanosti má podstatnou roli při definici mohutnosti. A. Lévy (1969) ukázal, že bez axiomu fundovanosti a axiomu výběru nelze definovat zobrazení, které by každé množině x přiřadilo množinu $|x|$ tak, aby platilo (8). Podstatná je i role dobrého uspořádání při důkazu (7). D. Pincus (1974) ukázal, že bez axiomu výběru neexistuje zobrazení takové, že (8) a (7) platí pro libovolné množiny.

Zavedení mohutnosti je jen speciálním případem reprezentace tříd ekvivalence.

6.37 Věta. Reprezentace tříd ekvivalence. *Je-li R relace ekvivalence na třídě A, potom existuje zobrazení $\tau: A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$ takové, že*

$$\tau(a) = \tau(b) \leftrightarrow \langle a, b\rangle \in R$$

platí pro každé $a, b \in A$.

Důkaz. K definici zobrazení τ použijeme typovou funkci ϱ. Pro libovolné $a \in A$ definujeme

$$\tau(a) = \{x \in A : \langle a, x\rangle \in R \mathbin{\&} (\forall y \in A)(\langle a, y\rangle \in R \rightarrow \varrho(x) \leq \varrho(y))\}.$$

Ze symetrie a tranzitivnosti R plyne, že τ má požadovanou vlastnost.

6.38 Typy uspořádaných množin. Nechť A je třída všech uspořádaných množin. Jejími prvky jsou všechny dvojice $\langle a, r\rangle$ takové, že r je nějaké uspořádání na množině a. Izomorfismy mezi uspořádanými množinami definují relaci $\cong$, která je ekvivalencí na třídě A. Podle věty 6.37 existuje zobrazení τ, pro které platí

$$\tau(\langle a, r\rangle) = \tau(\langle b, s\rangle) \leftrightarrow \langle a, r\rangle \cong \langle b, s\rangle.$$

Říkáme, že $\tau(\langle a, r\rangle)$ je typem uspořádané množiny $\langle a, r\rangle$. Je to neprázdná množina sestávající z některých uspořádaných množin, které jsou izomorfní s $\langle a, r\rangle$. Známe-li typ uspořádané množiny, známe všechny její vlastnosti, které se zachovávají při izomorfním zobrazení.

Je zřejmé, že stejným způsobem můžeme definovat i typy jiných matematických struktur, grup, okruhů, těles, Booleových algeber a dalších.

§ 7 Konstruovatelné množiny

Pojem konstruovatelné množiny je radikálním pokusem o co nejpřesnější vymezení univerza množin. Konstruovatelné množiny tvoří jakési minimální jádro univerza množin, jehož prvky se konstruují každý zvlášť transfinitním iterováním několika jednoduchých operací. Odlišnost takového postupu vynikne, srovnáme-li jej s konstrukcí hierarchie množin V_α, která v jediném kroku $\omega + 1$ generuje všechny nekonečné podmnožiny V_ω, tedy nespočetně mnoho množin najednou.

Budeme definovat množiny $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ a třídu **L** všech konstruovatelných množin. Dá se ukázat, že v **L** platí všechny axiomy teorie množin a navíc tvrzení V = L, které se nazývá axiom konstruovatelnosti. Volně řečeno, třída **L** je model rozšíření Zermelovy a Fraenkelovy teorie množin, které označujeme ZF + V = L.

Technické prostředky ke studiu třídy **L**, které vytvořil K. Gödel (1938), byly rozvinuty R. B. Jensenem (1972) do té míry, že dovolují zcela detailní popis univerza konstruovatelných množin, jakému se vymyká každý jiný model teorie množin. Proto se třída **L** těší velké pozornosti a je místem, kde se testují různé hypotézy.

Univerzum konstruovatelných množin můžeme studovat matematicky jako speciální třídu definovanou v teorii množin nebo metamatematicky jako model teorie množin. To druhé by vyžadovalo více prostředků z matematické logiky, než jsme mohli do této knihy zařadit. Seznámíme se s jednoduchými vlastnostmi množin L_α a ukážeme, že axiom výběru (AC) a zobecněná hypotéza kontinua (GCH) vyplývají z axiomu konstruovatelnosti. To znamená, že **L** je modelem ZFC + GCH. Na závěr si všimneme vztahu mezi univerzem konstruovatelných množin a univerzem všech množin. Uvedeme Jensenovu větu o pokrytí, která tvrdí, že konstruovatelné množiny mohou dobře aproximovat všechny nespočetné množiny ordinálů, pokud univerzum množin neobsahuje některé typy velkých kardinálů. Ukážeme, že v takovém případě platí hypotéza singulárních kardinálů (SCH), jejímiž důsledky jsme se zabývali v § 5.

7.1 Hierarchie množin L_α. Chceme-li úsporněji napodobit proces, kterým se vytvářejí množiny V_α, budeme na každém kroku postaveni před stejnou otázku: Je-li L_α vše, co jsme dosud vytvořili, které podmnožiny $x \subseteq L_\alpha$ nemůžeme zapřít, a proto musíme zařadit jako prvky do množiny $L_{\alpha+1}$? „Všechny," tvrdí axiom potence. Pokusíme se tento hlas ignorovat a hledáme odpověď u ostatních axiomů. Axiom dvojice požaduje všechny množiny $\{u, v\}$ pro $u, v \in L_\alpha$ a přihlédneme-li k axiomu sumy, zařadíme i další konečné podmnožiny. Podle schématu vydělení musíme přidat všechny množiny tvaru

$$x = \{t \in L_\alpha : \varphi(t, a_1, \dots, a_n)\},$$

kde φ je nějaká formule a množiny $a_1, \dots, a_n$ jsou nějaké její parametry. Je zřejmé, že v kroku α nemůžeme brát množiny $a_1, \dots, a_n$ odjinud než z L_α a že každý kvantifikátor ve formuli φ se může vztahovat jen na prvky z L_α. Říkáme, že množina x je v L_α definována formulí φ z parametrů $a_1, \dots, a_n$. Schéma nahrazení požaduje zařadit všechny podmnožiny L_α, které jsou obrazem nějaké množiny $u \in L_\alpha$ při definovatelném zobrazení. Ve všech případech jde o podmnožiny L_α, které jsou v L_α definovatelné nějakou formulí z parametrů z L_α.

To je jeden pohled na množinu $L_{\alpha+1}$. Nemůžeme ho použít k definici množiny $L_{\alpha+1}$, protože překračuje rámec jazyka teorie množin. Mluví o formulích i množinách současně.

Podrobnějším metamatematickým rozborem lze ukázat, že existuje méně než deset základních operací, s pomocí kterých lze každou takovou podmnožinu L_α sestrojit z prvků L_α a množiny L_α. Zde je příklad takové sady operací:

$$\begin{aligned}
F_1(u) &= \mathrm{Dom}(u),\\
F_2(u) &= \{\langle x, y\rangle \in u : x \in y\},\\
F_3(u) &= \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in u\},\\
F_4(u) &= \{\langle\langle x, z\rangle, y\rangle : \langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in u\},\\
F_5(u, v) &= \{u, v\},\\
F_6(u, v) &= u - v,\\
F_7(u, v) &= u \times v.
\end{aligned}$$

7.2 Uzávěr množiny na operace $F_1, \dots, F_7$. Říkáme, že množina Y je *uzavřena na operace* $F_1, \dots, F_7$, jestliže pro každé $u, v \in Y$ je také $F_i(u) \in Y$ pro $i = 1, 2, 3, 4$ a $F_j(u, v) \in Y$ pro $j = 5, 6, 7$.

Podobně, jako se konstruuje tranzitivní obal množiny, můžeme ke každé množině X sestrojit nadmnožinu uzavřenou na operace F_i. Rekurzí sestrojíme množiny X_n pro $n < \omega$. Položíme

$$X_0 = X$$

a pro každé přirozené n

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = X_n \cup \{x : (\exists u, v \in X_n)(x = F_1(u) \vee \dots \vee\\
\vee \dots \vee x = F_4(u) \vee \dots \vee x = F_5(u, v) \vee \dots \vee x = F_7(u, v))\}.
\end{aligned}$$

Potom $\mathrm{Df}(X) = \bigcup X_n$ je nejmenší nadmnožina množiny X, která je uzavřena na operace F_i. Je-li X nekonečná, potom $|\mathrm{Df}(X)| = |X|$.

Protože nám půjde jen o podmnožiny $x \subseteq X$, které lze vytvořit pomocí operací F_i z prvků X a z množiny X, položíme

$$\mathrm{Def}(X) = \mathrm{Df}(X \cup \{X\}) \cap \mathscr{P}(X).$$

7.3 Definice. Množiny L_α a třída L. Pro každý ordinál definujeme

$$\begin{aligned} L_0 &= 0, \\ L_{\alpha+1} &= \mathrm{Def}(L_\alpha), \\ L_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta, \qquad \text{je-li } \alpha \text{ limitní.} \end{aligned}$$

Dále

$$\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha .$$

Říkáme, že **L** je třída konstruovatelných množin, a její prvky nazýváme konstruovatelné množiny.

7.4 Srovnání množin V_α a L_α. Z definice je zřejmé, že pro každé α platí $L_\alpha \subseteq V_\alpha$. Navíc pro každé přirozené n platí

$$L_n = V_n ,$$

odkud také

$$L_\omega = V_\omega , \qquad |L_\omega| = |V_\omega| = \omega .$$

Potom

$$|V_{\omega+1}| = |\mathscr{P}(V_\omega)| = 2^\omega ,$$

ale

$$|L_{\omega+1}| = \omega ,$$

protože uzavřením spočetné množiny $L_\omega \cup \{L_\omega\}$ na základní operace získáme jenom spočetnou množinu. Můžeme říci, že hierarchie V_α roste exponenciálně, zatímco hierarchie L_α roste jen lineárně. Víc o tom říká následující tvrzení.

7.5 Lemma. *Pro libovolné ordinály α, β platí:*

(i) L_α *je tranzitivní množina,*

(ii) $\alpha < \beta \to L_\alpha \subseteq L_\beta$,

(iii) $\alpha = L_\alpha \cap On$,

(iv) $\alpha \geq \omega \to |L_\alpha| = |\alpha|$.

Důkaz transfinitní indukcí. Je zřejmé, že (i)–(iii) platí pro $\alpha = 0$. Nejprve ukážeme, že $L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1}$, pokud je L_α tranzitivní. To bude klíč k důkazu (i) a (ii). Je-li L_α tranzitivní a $x \in L_\alpha$, potom $x \subseteq L_\alpha$. Odtud dostáváme $x \in L_{\alpha+1}$, protože $x \in$

$\in \mathrm{Df}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\})$. Odtud také plyne, že $L_{\alpha+1}$ je tranzitivní: pro každé $x \in L_{\alpha+1}$ je $x \subseteq L_\alpha \subseteq L_{\alpha-1}$. Pro limitní α plyne (i) z definice L_α. Platí-li (ii) pro nějaké β, z dokázané inkluze je zřejmé, že platí i pro $\beta + 1$. Pro limitní β plyne (ii) z definice L_β. Tvrzení (iii) a (iv) dokazujeme společně. Je-li α limitní a obě tvrzení platí pro každé $\xi < \alpha$, potom (iii) a (iv) platí i pro α. Je-li $\alpha = On \cap L_\alpha$, potom α je definovatelná podmnožina L_α, a proto $\alpha \in L_{\alpha+1}$. Přitom žádný ordinál $\beta > \alpha$ nemůže být prvkem $L_{\alpha+1}$, protože neplatí $\beta \subseteq L_\alpha$. To znamená, že $\alpha + 1 = L_{\alpha+1} \cap On$. Tím je dokázáno (iii). Je-li $|L_\alpha| = |\alpha| \geq \omega$, potom uzávěr množiny $L_\alpha \cup \{L_\alpha\}$ na základní operace má také mohutnost $|\alpha|$, odkud plyne $|L_{\alpha+1}| \leq \alpha$. Obrácená nerovnost plyne z (iii).

7.6 Důsledek. **L** *je tranzitivní třída a* $On \subseteq \mathbf{L}$.

Ukážeme, že třídu **L** lze dobře uspořádat, použijeme k tomu následující tvrzení.

7.7 Lemma. *Každé dobré uspořádání množiny X lze rozšířit do dobrého uspořádání jejího uzávěru* $\mathrm{Df}(X)$ *na operace* $F_1, \ldots, F_7$.

Důkaz. Je-li $\leq$ dobré uspořádání množiny X, rekurzí podle $n < \omega$ můžeme definovat uspořádání $\leq_n$ každé množiny X_n z definice uzávěru $\mathrm{Df}(X)$. Nechť $\leq_0$ je $\leq$. Víme, že každé $x \in X_1 - X$ se získá nějakou operací F_i z nějakých prvků $u, v, \in X$ ($F_1, \ldots, F_4$ můžeme také považovat za operace dvou proměnných). S použitím $\leq_0$ definujeme dobré lexikografické uspořádání množiny $X \times X$. Ke každému $x \in X_1 - X$ přiřadíme nejmenší dvojici $\langle u, v\rangle$ takovou, že $x = F_i(u, v)$ pro nějakou operace F_i. Platí-li $x = F_j(u, v)$ i pro nějakou jinou operaci, zvolíme tu s nejmenším indexem. Tím jsme ke každému $x \in X_1 - X$ jednoznačně přiřadili trojici $\langle\langle u, v\rangle, i\rangle$ a dobré uspořádání množiny $(X \times X) \times \omega$ určuje dobré uspořádání r_1 množiny $X_1 - X$. Nechť $\leq_1$ je dobré uspořádání množiny X_1, které je součtem uspořádání $\leq_0$ a r_1. To znamená, že každý prvek množiny X předchází každý prvek z $X_1 - X$ a prvky z X jsou uspořádány relací $\leq_0$ a prvky z $X_1 - X$ relací r_1. Podobným způsobem definujeme uspořádání $\leq_{n+1}$ množiny X_{n+1} z uspořádání $\leq_n$ množiny X_n. Sjednocením všech relací $\leq_n$ dostáváme uspořádání množiny $\mathrm{Df}(X)$.

7.8 Lemma. *Pro každý ordinál α existuje relace $\lhd_\alpha \in L$ dobrého uspořádání množiny L_α taková, že $\lhd = \bigcup\{\lhd_\alpha : \alpha \in On\}$ je dobré uspořádání třídy* **L**.

Důkaz. Pro $\alpha = 0$ položíme $\lhd_0 = 0$. Je-li $\lhd_\alpha$ dobré uspořádání množiny L_α, rozšíříme ho do uspořádání množiny $L_\alpha \cup \{L_\alpha\}$ tak, že L_α bude největší prvek. Dobré uspořádání množiny $\mathrm{Df}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\})$ indukuje dobré uspořádání $\lhd_{\alpha+1}$ její podmnožiny $\mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$. Je zřejmé, že L_α je dolní podmnožinou $L_{\alpha-1}$ vzhledem k uspořádání $\lhd_{\alpha+1}$ a že $\lhd$ je úzká relace dobrého uspořádání třídy **L**. Dá se také ukázat, že každá relace $\lhd_\alpha$ je prvkem **L**.

Můžeme říci, že dobré uspořádání třídy **L** z předchozího lemmatu je dáno pořadím, v jakém se generují jednotlivé konstruovatelné množiny. Z lemmatu 7.8 také plyne, že existuje prosté zobrazení třídy **L** na On.

Pro konstruovatelné podmnožiny nekonečných kardinálů v **L** platí následující tvrzení, které uvádíme bez důkazu:

(1) Pro každé α a každou konstruovatelnou $x \subseteq \omega_\alpha$ existuje $\beta < \omega_{\alpha+1}$ takové, že $x \in L_\beta$.

7.9 Axiom konstruovatelnosti tvrdí, že V = L, to znamená, že třída **L** obsahuje všechny množiny.

7.10 Věta. *Axiom konstruovatelnosti implikuje axiom výběru a zobecněnou hypotézu kontinua. Tedy*

$$\mathrm{V} = \mathrm{L} \rightarrow (\mathrm{AC} \,\&\, \mathrm{GCH}).$$

Důkaz. Podle lemmatu 7.8 je $\lhd$ dobré uspořádání třídy **L**. Je-li V = L, pak $\lhd$ je dobré uspořádání na každé množině x.

Podle (1) pro každé α platí $\mathscr{P}(\omega_\alpha) \subseteq L_{\omega_{\alpha+1}}$ a podle lemmatu 7.5(iv) je na pravé straně inkluze množina mohutnosti $\omega_{\alpha+1}$. Odtud plyne GCH.

7.11 Bezespornost axiomu konstruovatelnosti. K. Gödel (1938) ukázal, že axiom konstruovatelnosti je bezesporný vzhledem k axiomům Zermelovy a Fraenkelovy teorie množin. To znamená, že teorie množin s axiomem konstruovatelnosti ZF + V = L je bezesporná, je-li bezesporná samotná teorie množin ZF. Tento výsledek se obvykle zapisuje

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L}),$$

kde predikát Con vyznačuje bezespornost (konzistenci) uvedené teorie. Podle věty 7.10 dostáváme také

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}),$$

to znamená, že axiom výběru a zobecněná hypotéza kontinua jsou bezesporné vzhledem k axiomům teorie množin. Na dlouhou dobu zůstala teorie ZFC + GCH nejsilnějším rozšířením teorie množin, o kterém bylo známo, že je bezesporné vzhledem k ZF.

Alespoň naznačíme důkaz bezespornosti axiomu konstruovatelnosti. Nejprve se ukáže, že všechny axiomy ZF platí ve třídě **L**. Vyjádříme se přesněji. Pro libovolnou formuli φ můžeme sestrojit formuli $\varphi^{\mathbf{L}}$ tím, že každý kvantifikátor formule φ relativizujeme do třídy **L**. To znamená, že každou podformuli $(\forall x)\ldots$ formule φ nahradíme formulí $(\forall x \in \mathbf{L})\ldots$ a každou podformuli $(\exists x)\ldots$ nahradíme formulí $(\exists x \in \mathbf{L})\ldots$. Říkáme, že axiom φ platí ve třídě **L**, jestliže platí formule $\varphi^{\mathbf{L}}$. Jde o to dokázat formuli $\varphi^{\mathbf{L}}$ pro každý axiom φ (připomeňme, že axiomy ZF nemají volné proměnné). V některých případech je to docela jednoduché. Víme, že **L** je tranzitivní třída, a podle 6.28(b) je relace $\in$ extenzionální na **L**. Podle definice 6.27 je to totéž jako axiom extenzionality ve třídě **L**. Podobně (axiom dvojice)$^{\mathbf{L}}$ je formule

$$(\forall a \in \mathbf{L})(\forall b \in \mathbf{L})(\exists z \in \mathbf{L})(\forall x \in \mathbf{L})(x \in z \leftrightarrow (x = a \vee x = b)),$$

která plyne z uzavřenosti třídy **L** na operaci dvojice. Platnost dalších axiomů ve třídě **L** nebudeme ověřovat, využívá se přitom uzavřenosti třídy **L** na definovatelné podmnožiny každé množiny L_α.

Nakonec je třeba ověřit, že také axiom konstruovatelnosti platí ve třídě **L**. Víme, že **L** obsahuje všechny ordinály a že je to třída uzavřená na operace $F_1, \ldots, F_7$. Protože v **L** platí všechny axiomy ZF, můžeme v **L** znovu definovat celou hierarchii konstruovatelných množin. Tím sestrojíme třídu $\mathbf{L}^{\mathbf{L}} \subseteq \mathbf{L}$. Dá se ukázat, že $\mathbf{L}^{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$, a to znamená, že v **L** platí axiom konstruovatelnosti.

7.12 Nezávislost axiomu konstruovatelnosti. P. J. Cohen (1963) ukázal, že negace axiomu konstruovatelnosti je také bezesporná vzhledem k axiomům ZF. Dokázal, že platí

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{V} \neq \mathrm{L}),$$
$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \neg \mathrm{GCH}),$$

to znamená, že k axiomům teorie množin je možno bezesporně přidat negaci zobecněné hypotézy kontinua a negaci axiomu konstruovatelnosti. ZFC + V = L je tedy jen jedno z mnoha rozšíření teorie množin, která jsou bezesporná vzhledem k ZF. Studium kombinatorických principů, které platí na třídě **L**, ukázalo, že je to podstatně silnější teorie než ZFC + GCH.

K důkazu nezávislosti Cohen vytvořil novou metodu, které se říká metoda forsingu. Tato metoda byla rozpracována P. Vopěnkou a nezávisle D. S. Scottem a R. M. Solovayem na metodu booleovských rozšíření modelů teorie množin, která je dnes nejpoužívanější metodou důkazů bezespornosti v teorii množin.

7.13 L jako vnitřní model teorie množin. Řekneme, že nějaká tranzitivní třída M je vnitřní model teorie množin, jestliže ve třídě M platí každý axiom teorie množin. To znamená, že pro každý axiom φ platí formule φ^M, která vznikne z φ relativizací kvantifikátorů do třídy M, podobně jako formule $\varphi^{\mathbf{L}}$ vznikla relativizací φ do **L**. Víme, že třída **L** je model teorie množin, a dá se ukázat, že je minimální v následujícím smyslu:

(2) Je-li M vnitřní model teorie množin a $On \subseteq M$, potom $\mathbf{L} \subseteq M$.

Můžeme říci, že univerzum konstruovatelných množin je jeden z možných světů teorie množin. Univerzum všech množin je případně jiný z možných světů. Třída **L** je v určitém smyslu nejmenší svět teorie množin.

Ve třídě **L** můžeme znovu definovat všechny pojmy teorie množin, například pojem kofinálu a kardinálního čísla, které se teď budou vztahovat jen ke konstruovatelným množinám a zobrazením. Můžeme se ptát, jsou-li kofinály a mohutnosti ordinálních čísel uvnitř **L** v nějakém vztahu ke kofinálům a mohutnostem počítaným vně **L**. Následující důležitá věta Jensenova ukazuje, že kofinály a mohutnosti ordinálních čísel vně a uvnitř **L** se nemohou příliš lišit, pokud v univerzu množin neexistují některé typy velkých kardinálů. Tento předpoklad lze nejpřesněji vyjádřit popřením existence jisté množiny přirozených čísel, jejíž označení $0^{\#}$ („o s křížkem") připomíná hudební terminologii. Existenci této množiny si vynucuje každý „dosti velký" ze třídy velkých kardinálů.

7.14 Jensenova věta o pokrytí (Jensen 1974). *Neexistuje-li* $0^{\#}$, *potom platí*:
(CT) *Ke každé nespočetné množině* $X \subseteq On$ *existuje* $Y \in \mathbf{L}$ *taková, že* $X \subseteq Y$ *a* $|X| = |Y|$.

7.15 Jensenovu větu o pokrytí uvádíme bez důkazu. Její tvrzení, které jsme označili (CT), je dokonce ekvivalentní s neexistencí množiny $0^{\#}$. Můžeme říci, že CT je slabší formou axiomu konstruovatelnosti. Každá množina nemusí být konstruovatelná, ale konstruovatelné množiny dobře aproximují nespočetné množiny ordinálních čísel.

Tvrzení věty o pokrytí (CT) je bezesporné vzhledem k axiomům ZFC, protože vyplývá z axiomu konstruovatelnosti. Můžeme je přidat jako dodatečný axiom a získáme další z mnoha rozšíření teorie množin. Podle 7.11 dostáváme

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{CT}).$$

Ukážeme, že v teorii množin s axiomem výběru z (CT) vyplývá hypotéza singulárních kardinálů (SCH), která tvrdí, že rovnost $\varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)} = 2^{\mathrm{cf}(\varkappa)} . \varkappa^{+}$ platí pro každý singulární kardinál $\varkappa$.

7.16 Věta. CT $\rightarrow$ SCH.

7.17 Mezi dvěma světy. Dříve, než dokážeme předchozí větu, připomeňme, že **L** je modelem ZFC + GCH, a uvědomme si, co z toho vyplývá. Všechny pojmy, které jsme dosud použili, můžeme definovat také v **L**. Speciálně ordinální a kardinální čísla, následníky kardinálů, kofinály a operace kardinální aritmetiky, které se pak vztahují jenom k univerzu konstruovatelných množin. Odpovídající operace v **L** budeme označovat indexem **L**. Víme, že

$$On \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{V},$$

a dá se ukázat, že $On^{\mathbf{L}} = On$ a $\omega^{\mathbf{L}} = \omega$ podobně jako $\mathbf{L}^{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$. V ordinálních číslech není žádný rozdíl, ale obě univerza se mohou lišit v podmnožinách ordinálů a v zobrazeních mezi ordinály. Podle definice je $\omega_1^{\mathbf{L}}$ nejmenší z nekonečných ordinálů, který nelze zobrazit prostým konstruovatelným zobrazením na ω. Může se stát, že takové zobrazení $\omega_1^{\mathbf{L}}$ na ω existuje, ale není konstruovatelné. V takovém případě je $\omega_1^{\mathbf{L}}$ jen spočetným ordinálem v univerzu všech množin. Je-li $\varkappa$ kardinálním číslem v **L**, znamená to jen tolik, že $\varkappa$ nelze žádným konstruovatelným zobrazením prostě zobrazit na nějaký menší ordinál. Pokud takové zobrazení existuje, ale není konstruovatelné, $\varkappa$ je jen ordinálním číslem v univerzu všech množin. Naopak je zřejmé, že každý kardinál v univerzu množin je kardinálem i v **L**. Dostáváme

$Cn \subseteq Cn^{\mathbf{L}}$. Podobně $cf^{\mathbf{L}}(\alpha)$ je nejmenší ordinál, který je typem konstruovatelné kofinální podmnožiny ordinálu α. Přitom α může mít i další kofinální podmnožiny, které nejsou konstruovatelné. Proto $cf(\alpha) \leq cf^{\mathbf{L}}(\alpha)$ a může platit i ostrá nerovnost, speciálně některý kardinál, který je regulární v $\mathbf{L}$, může být singulární v univerzu všech množin. Podobně se nahlédne, že $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}} \leq \varkappa^+$ pro každý kardinál $\varkappa$. Můžeme shrnout: oč méně je množin a zobrazení v $\mathbf{L}$, o to více je tam kardinálních čísel a kofinály nabývají vyšší hodnoty.

Důkaz věty 7.16. Předpokládejme, že platí tvrzení věty o pokrytí a že $\varkappa$ je singulární kardinál. Potom $\varkappa$ je také kardinál v $\mathbf{L}$ a ukážeme, že $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}} = \varkappa^+$. V opačném případě je $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}} < \varkappa^+$ a $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}}$ je ordinál, která má v univerzu všech množin mohutnost $\varkappa$ a kofinalitu menší než $\varkappa$, protože $\varkappa$ je singulární kardinál. To znamená, že $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}}$ má nějakou kofinální podmnožinu X mohutnosti menší než $\varkappa$. Podle tvrzení (CT) z věty o pokrytí existuje konstruovatelná nadmnožina $Y \supseteq X$, která má také mohutnost menší než $\varkappa$ (je-li X nespočetná, pak $|X| = |Y|$, a je-li X spočetná, pak $|Y| = \omega_1 < \varkappa$). Můžeme předpokládat, že $X \subseteq Y \subseteq (\varkappa^+)^{\mathbf{L}}$, protože $Y \cap (\varkappa^+)^{\mathbf{L}}$ je také konstruovatelná množina. To znamená, že Y je konstruovatelná kofinální podmnožina ordinálu $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}}$, který je regulárním kardinálem v $\mathbf{L}$. Existuje tedy konstruovatelné prosté zobrazení množiny Y na $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}}$. Ve hře jsou ještě další dvě prostá zobrazení. Jedno zobrazuje Y na nějaký kardinál $\lambda < \varkappa$ a druhé zobrazuje $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}}$ na $\varkappa$. Je zřejmé, že v univerzu všech množin existuje prosté zobrazení λ na $\varkappa$, a to je ve sporu s předpokladem, že $\varkappa$ je kardinál. Proto $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}} = \varkappa$.

Označme $\nu = cf(\varkappa)$. Ukážeme, že platí hypotéza singulárních kardinálů, tedy rovnost

$$\varkappa^\nu = 2^\nu . \varkappa^+ .$$

Z kardinální aritmetiky dostáváme

$$2^\nu . \varkappa^+ \leq \varkappa^\nu = |[\varkappa]^\nu| .$$

Jde o horní odhad mohutnosti množiny $[\varkappa]^\nu$. Podle CT je každá $X \in [\varkappa]^\nu$ podmnožinou nějaké konstruovatelné $Y \subseteq \varkappa$, která má mohutnost $\nu^+ < \varkappa$ (je-li ν nespočetné, pak dokonce $|Y| = \nu$). Přitom každá konstruovatelná množina mohutnosti ν^+ má jen $(\nu^+)^\nu = \nu^\nu . \nu^+ = 2^\nu$ podmnožin mohutnosti ν. Spočítáme-li vůbec všechny konstruovatelné podmnožiny kardinálu $\varkappa$, dojdeme k číslu $(\varkappa^+)^{\mathbf{L}} = \varkappa^+$, protože v $\mathbf{L}$ platí zobecněná hypotéza kontinua. Celkem dostáváme horní odhad $\varkappa^\nu \leq 2^\nu . \varkappa^+$ a hypotéza singulárních kardinálů je dokázána.

7.18 Z Jensenovy věty o pokrytí vyplývá, že univerzum všech množin se podobá třídě $\mathbf{L}$, pokud neexistují žádné anebo jen „malé“ z velkých kardinálů. V takovém univerzu platí hypotéza singulárních kardinálů (SCH), která zjednodušuje kardinální aritmetiku téměř tak podstatně jako GCH. Univerzum všech množin a $\mathbf{L}$ se mohou podstatně lišit, pokud existují některé typy velkých kardinálů. To nemusí hned znamenat, že neplatí SCH, která není ekvivalentní s tvrzením CT z věty o pokrytí.

Jensen (1982) ukázal, že z neplatnosti SCH plyne existence vnitřního modelu teorie množin, ve kterém je mnoho velkých kardinálů: existuje měřitelný kardinál, který je limitou měřitelných kardinálů.

KAPITOLA III

Nekonečná kombinatorika se zabývá nekonečnými systémy množin s určitou organizovaností. Motivace pro studium takových systémů vychází z uspořádaných množin (systémy vzájemně disjunktních prvků, stromy, dobře kvaziuspořádané množiny), z množinové topologie (husté podmnožiny prostoru, ideály, ultrafiltry, stacionární množiny), z algebry, teorie míry a teorie grafů (množiny nezávislých prvků, měřitelné kardinály). Přitom nás může zajímat, zda určitý typ systému existuje, případně jaké dodatečné předpoklady jeho existenci zaručují (Aronszajnův strom, Suslinův strom). Existují-li systémy daného typu, můžeme se ptát, jaké jsou jejich mohutnosti (systém skoro disjunktních množin, systém nezávislých množin) nebo kolik je všech systémů daného typu (ultrafiltrů na dané množině) nebo zda existují dostatečně velké podsystémy s vyšším stupněm organizovanosti (Ramseyova věta). Podrobnější přehled výsledků uvádíme v záhlaví jednotlivých paragrafů. Axiom výběru používáme v celé kapitole.

§ 1 Kombinatorické vlastnosti množin

Seznámíme se s klasickými výsledky kombinatorické teorie množin, které jsou důležité pro studium různých matematických struktur. Budeme se postupně zabývat disjunktními zjemněními souborů množin, nezávislými systémy rozkladů, skoro disjunktními a kvazidisjunktními systémy (Δ-systémy), volnými množinami pro množinová zobrazení. Zajímají nás převážně maximální možné velikosti takových systémů a množin. V celém oddílu budou symboly $\varkappa$, λ značit nekonečná kardinální čísla a ν bude značit libovolný (i konečný) kardinál.

Začneme jednoduchým pozorováním, týkajícím se souboru konečných množin.

1.1 Nechť n je kladné přirozené číslo. Je-li dáno n množin $A_1, \dots, A_n$, z nichž každá má n prvků, pak můžeme vybrat prvky $x_i \in A_i$ tak, že $x_i \neq x_j$, jakmile $i \neq j$. Přejdeme-li od konečného n k nekonečnému kardinálu $\varkappa$, platí poněkud silnější tvrzení.

1.2 Lemma o disjunktním zjemnění. *Nechť $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je soubor $\varkappa$ množin, z nichž každá má mohutnost $\varkappa$. Potom existuje soubor $\langle B_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ vzájemně disjunktních množin takový, že pro každé $\alpha < \varkappa$ platí $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ a $|B_\alpha| = \varkappa$. Říkáme, že $\langle B_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je disjunktním zjemněním souboru $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$.*

Důkaz. Uvažujme maximo-lexikografické uspořádání na $\varkappa \times \varkappa$. Nechť S je systém všech prostých zobrazení f, která jsou definovaná na dolních podmnožinách $\varkappa \times \varkappa$ tak, že pro každé $\langle \alpha, \gamma \rangle \in \mathrm{Dom}(f)$ je $f(\alpha, \gamma) \in A_\alpha$. Systém S je uspořádán inkluzí, nechť g je nějaké maximální zobrazení v S. Ukážeme, že g je definováno na celém $\varkappa \times \varkappa$. V opačném případě existuje nejmenší dvojice $\langle \alpha, \gamma \rangle$, která nepatří do definičního oboru $\mathrm{Dom}(g)$. To znamená, že $|\mathrm{Dom}(g)| < \varkappa$, a jelikož $|A_\alpha| = \varkappa$, je $A_\alpha - \mathrm{Rng}(g) \neq 0$. Můžeme proto vybrat prvek $x_{\alpha,\gamma} \in A_\alpha$ různý od všech $g(\beta, \gamma)$ a zobrazení g prodloužit. To je ve sporu s maximalitou g. Ověřili jsme, že $\mathrm{Dom}(g) = \varkappa \times \varkappa$. Pro $\alpha < \varkappa$ položme

$$B_\alpha = \{g(\alpha, \gamma) : \gamma < \varkappa\}.$$

Z vlastností zobrazení ze systému S plyne, že $B_\alpha \subseteq A_\alpha$. Zobrazení g je prosté, tedy $|B_\alpha| = \varkappa$ a B_α, B_β jsou disjunktní pro různá α, β. Dokázali jsme, že $\langle B_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je požadované disjunktní zjemnění.

1.3 Lemma. *Nechť $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je soubor podmnožin nějaké množiny X, z nichž každá má mohutnost $\varkappa$. Potom existuje $\varkappa$ vzájemně disjunktních množin $B_\beta \subseteq X$, $\beta < \varkappa$,* pro které platí

$$|B_\beta| = \varkappa,$$

$$|B_\beta \cap A_\alpha| = \varkappa \qquad \textit{pro každé} \quad \alpha, \beta \in \varkappa.$$

Důkaz. Nechť $\langle C_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je disjunktní zjemnění souboru $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ z 1.2. Každou množinu C_α rozložme na $\varkappa$ částí $C(\alpha, \beta)$, $\beta < \varkappa$ tak, že každá množina $C(\alpha, \beta)$ má mohutnost $\varkappa$. Máme tedy $C_\alpha = \bigcup\{C(\alpha, \beta) : \beta < \varkappa\}$ pro každé $\alpha < \varkappa$. Pro $\beta < \varkappa$ položme

$$B_\beta = \bigcup\{C(\alpha, \beta) : \alpha < \varkappa\}.$$

Množiny B_β jsou sjednocením $\varkappa$ množin mohutnosti $\varkappa$, tedy $|B_\beta| = \varkappa$. Pro $\beta \neq \gamma$ a libovolné α_1, α_2 jsou množiny $C(\alpha_1, \beta)$ a $C(\alpha_2, \gamma)$ disjunktní, proto jsou disjunktní i množiny B_β a B_γ. Přitom B_β protíná každou množinu A_α v mohutnosti $\varkappa$, protože $C(\alpha, \beta) \subseteq A_\alpha \cap B_\beta$.

Dokázané lemma zaručuje, mimo jiné, existenci dvou disjunktních množin takových, že každá z nich má neprázdný průnik s každou množinou výchozího systému. Použití ukážeme na příkladech.

1.4 Příklady. (a) *Rozklad množiny racionálních čísel na husté podmnožiny.* Množina $\mathbb{Q}$ racionálních čísel je hustou podmnožinou reálných čísel $\mathbb{R}$. Ukážeme, že množinu $\mathbb{Q}$ lze rozložit na nekonečně mnoho částí $\{q_n : n \in \omega\}$ tak, že každé q_n je opět hustou podmnožinou v $\mathbb{R}$.

Uvažujme lineární uspořádání racionálních čísel podle velikosti. Nechť I_n, $n < \omega$ je nějaké očíslování všech neprázdných otevřených intervalů na množině $\mathbb{Q}$. Každý interval $I_n \subseteq \mathbb{Q}$ je spočetný, můžeme použít lemmatu 1.3, podle kterého existují množiny q_m, $m < \omega$, které jsou vzájemně disjunktní a každá z nich má neprázdný průnik se všemi intervaly I_n. To znamená, že množiny q_m jsou husté v $\mathbb{Q}$ i v $\mathbb{R}$. Pokud systém $\{q_m : m < \omega\}$ nepokrývá celé $\mathbb{Q}$, vezmeme $q_0 \cup (\mathbb{Q} - \bigcup_{m>0} q_m)$ místo q_0, ostatní q_m ponecháme beze změny, a tak získáme hledaný rozklad celé množiny $\mathbb{Q}$. Z důkazu je zřejmé, že tvrzení o rozkladu platí pro každou spočetnou hustou podmnožinu $\mathbb{R}$, nikoliv pouze pro $\mathbb{Q}$.

(b) *Báze ultrafiltru.* Nechť $\mathscr{F}$ je filtr na $\varkappa$. Připomeňme, že $B \subseteq \mathscr{F}$ je báze filtru $\mathscr{F}$, jestliže každá množina z $\mathscr{F}$ je nadmnožinou nějaké množiny z B.

Dokážeme, že uniformní filtr $\mathscr{F}$ na $\varkappa$ (každá množina $X \in \mathscr{F}$ má plnou mohutnost $\varkappa$), který má bázi mohutnosti $\leq \varkappa$, není ultrafiltrem. Jinými slovy, jakákoliv báze každého uniformního ultrafiltru na $\varkappa$ má mohutnost větší než $\varkappa$.

Dokazujeme sporem. Předpokládejme, že nějaký uniformní ultrafiltr $\mathscr{F}$ má bázi $B \subseteq \mathscr{F}$, $|B| \leq \varkappa$. Nechť $\langle a_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je nějaké očíslování všech prvků z B, v očíslování připouštíme i opakování. Všechny množiny a_α mají mohutnost $\varkappa$, tedy z 1.3 plyne, že existují dvě disjunktní množiny $b_0, b_1 \subseteq \varkappa$ takové, že jedna je doplňkem druhé, a pro každé $i < 2$ a každé $\alpha < \varkappa$ je $b_i \cap a_\alpha \neq 0$. To znamená, že ani jedna z množin b_i není nadmnožinou nějaké množiny z B a přitom buď b_0, nebo b_1 musí být v ultrafiltru. Dostali jsme spor s tím, že B je báze ultrafiltru $\mathscr{F}$.

(c) *Bernsteinovské množiny.* Budeme se zabývat množinami reálných čísel. Víme, že uzavřené podmnožiny reálné přímky jsou buď nejvýše spočetné, nebo mají již plnou mohutnost 2^ω. Navíc, všech uzavřených množin je 2^ω.

Nechť $\{G_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ je nějaké očíslování všech nespočetných uzavřených množin. Podle 1.3 existují vzájemně disjunktní množiny b_α, $\alpha < 2^\omega$ reálných čísel, každá z nich protíná každou nespočetnou uzavřenou množinu.

Říkáme, že množina $B \subseteq \mathbb{R}$ je *bernsteinovská*, jestliže ona i její doplněk protínají každou nespočetnou uzavřenou množinu. Tedy každá množina b_α je bernsteinovská. Bernsteinovské množiny jsou zajímavé z hlediska míry.

Je-li B bernsteinovská množina, pak je lebesgueovsky neměřitelná a také nemá Baireovu vlastnost (viz IV.1.29).

K tomu stačí dokázat, že každá měřitelná podmnožina množiny B nebo $\mathbb{R} - B$ má míru nula, a také, že každá podmnožina množiny B nebo $\mathbb{R} - B$, která má Baireovu vlastnost, je hubenou množinou.

Nechť $A \subseteq B$ je měřitelná. Libovolná uzavřená množina $G \subseteq A$ je nejvýše spočetná, protože nespočetná uzavřená množina má neprázdný průnik s $\mathbb{R} - B$, a tedy $m(G) = 0$. Množina kladné míry obsahuje uzavřenou množinu také kladné míry a to znamená, že $m(A) = 0$.

Nechť $A \subseteq B$ má Baireovu vlastnost. Potom $A = C \cup D$, kde C je G_δ-množina a D je hubená množina. Protože každá nespočetná G_δ-množina obsahuje nespočetnou uzavřenou množinu, je množina C nejvýše spočetná, a tedy hubená. Množina A je sjednocením dvou hubených množin, proto je také hubená. Stejnou úvahu můžeme použít i pro množinu $\mathbb{R} - B$.

Známá Vitaliho konstrukce neměřitelné množiny využívá invarianci Lebesgueovy míry vůči posunutí, tedy vlastnosti související s grupovou strukturou reálných čísel. Naproti tomu Bernsteinova konstrukce využívá topologických vlastností reálné přímky.

1.5 Definice. Nezávislé systémy množin. Nechť

$$\text{(1)} \qquad \{M(\alpha, i) : \alpha \in A, i < 2\}$$

je systém podmnožin kardinálu $\varkappa$ takový, že pro každé α tvoří množiny $M(\alpha, 0)$ a $M(\alpha, 1)$ rozklad kardinálu $\varkappa$ (to znamená, že $M(\alpha, 1) = \varkappa - M(\alpha, 0)$).

Říkáme, že systém (1) je *nezávislým systémem množin* na $\varkappa$, jestliže pro každou konečnou množinu $B \subseteq A$ a pro každé zobrazení $f: B \to 2$ má průnik

$$\bigcap \{M(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in B\}$$

mohutnost $\varkappa$.

Je-li (1) nezávislým systémem, pak všechny množiny $M(\alpha, i)$ mají mohutnost $\varkappa$ a pro $\alpha_1 \neq \alpha_2$ je $M(\alpha_1, 0) \neq M(\alpha_2, 0)$. To znamená, že největší možná mohutnost nezávislého systému množin na $\varkappa$ je rovna mohutnosti množiny $[\varkappa]^\varkappa$ neboli $2^\varkappa$.

Ukážeme, že existuje nezávislý systém maximální možné mohutnosti $2^\varkappa$ sestávající dokonce z rozkladů kardinálu $\varkappa$ na $\varkappa$ částí.

1.6 Věta o nezávislých rozkladech. *Na nekonečném kardinálu $\varkappa$ existuje systém množin $\{M(\alpha, \beta) : \alpha < 2^\varkappa, \beta < \varkappa\}$ takový, že*

(i) *pro každé $\alpha < 2^\varkappa$ je $\{M(\alpha, \beta) : \beta < \varkappa\}$ rozklad množiny $\varkappa$, neboli pro $\beta_1 < \beta_2 < \varkappa$ je $M(\alpha, \beta_1) \cap M(\alpha, \beta_2) = 0$ a $\bigcup \{M(\alpha, \beta) : \beta < \varkappa\} = \varkappa$,*

(ii) *pro každou konečnou množinu $B \subseteq 2^\varkappa$ a každou funkci $f: B \to \varkappa$ je $|\bigcap \{M(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in B\}| = \varkappa$.*

Důkaz. Vezměme množinu P všech dvojic $\langle x, f \rangle$, kde x je konečná podmnožina kardinálu $\varkappa$ a f je zobrazení $f: \mathscr{P}(x) \to \varkappa$. Pro konečné $x \subseteq \varkappa$ množina všech zobrazení z $\mathscr{P}(x)$ do $\varkappa$ má mohutnost $\varkappa$, všech konečných množin $x \subseteq \varkappa$ je také $\varkappa$, tedy $|P| = \varkappa$. Stačí proto nalézt nezávislý systém rozkladů sestávající z podmnožin množiny P. Pro libovolné $y \subseteq \varkappa$ a $\beta < \varkappa$ definujeme

$$M(y, \beta) = \{\langle x, f \rangle \in P : f(x \cap y) = \beta\}$$

a uvažujme systém

$$\text{(2)} \qquad \{M(y, \beta) : y \subseteq \varkappa, \beta < \varkappa\}.$$

Je zřejmé, že pro dané $y \subseteq \varkappa$ je $\{M(y, \beta) : \beta < \varkappa\}$ rozklad množiny P. Dokazujeme (ii). Zvolme libovolně kladné přirozené n, dále vzájemně různé podmnožiny kardinálu $\varkappa$ $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ a libovolnou posloupnost $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ ordinálních čísel menších než $\varkappa$.

Množiny y_i, $i < n$ jsou vzájemně různé, proto všechny symetrické rozdíly $y_i \triangle y_j$, $i < j < n$ jsou neprázdné množiny. Pro každou konečnou množinu $x \subseteq \varkappa$, která má nějaké společné prvky s každým rozdílem $y_i \triangle y_j$, $i < j < n$, platí

$$x \cap y_i \neq x \cap y_j\,, \qquad \text{jakmile} \quad i \neq j. \tag{3}$$

Zvolme jedno takové x a definujme zobrazení $f_x : \mathscr{P}(x) \to \varkappa$ předpisem

$$f_x(z) = \begin{cases} \beta_i\,, & \text{jakmile} \quad z = x \cap y_i \text{ pro nějaké } i < n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nyní je zřejmé, že

$$\langle x, f_x \rangle \in M(y_0, \beta_0) \cap \ldots \cap M(y_{n-1}, \beta_{n-1})\,.$$

Konečných množin $x \subseteq \varkappa$, které splňují (3), je $\varkappa$, to znamená, že také $|\bigcap\{M(y_i, \beta_i) : i < n\}| = \varkappa$. Podmnožin $y \subseteq \varkappa$ je $2^\varkappa$, proto systém (2) sestává z $2^\varkappa$ nezávislých rozkladů. Důkaz je hotov.

1.7 Právě dokázaná věta zaručuje existenci nezávislého systému $2^\varkappa$ rozkladů na každé nekonečné množině X mohutnosti $\varkappa$. Potřebujeme-li kratší nezávislý systém, stačí některé rozklady z dlouhého systému vynechat, tím neporušíme nezávislost. Každý rozklad v nezávislém systému rozkladů z věty 1.6 má plnou mohutnost $\varkappa$. Jednotlivé rozklady můžeme zmenšit tím, že některé množiny rozkladu sloučíme do jedné. Tím neporušíme podmínku nezávislosti. Například, položíme-li pro každé $\alpha < 2^\varkappa$

$$\begin{aligned} A(\alpha, 0) &= M(\alpha, 0)\,, \\ A(\alpha, 1) &= \bigcup\{M(\alpha, \beta) : 0 < \beta < \varkappa\}\,, \end{aligned}$$

dostáváme nezávislý systém množin $\{A(\alpha, i) : \alpha < 2^\varkappa, i < 2\}$.

Následující tvrzení se týká aproximací funkcí v kartézském součinu a je kombinatorickým jádrem topologické věty Hewittovy, Marczewského a Pondiczeryho z příkladu 1.11(b).

1.8 Důsledek. *Nechť $\langle A_i : i \in I\rangle$ je soubor množin takový, že $|A_i| \leq \varkappa$ pro každé $i \in I$ a $|I| \leq 2^\varkappa$. Pak existuje množina $S \subseteq \mathsf{X}\langle A_i : i \in I\rangle$, která má mohutnost $\leq \varkappa$, a pro každou funkci $f \in \mathsf{X}\langle A_i : i \in I\rangle$ a každou konečnou množinu $J \subseteq I$ existuje $g \in S$ takové, že*

$$f \mid J = g \mid J\,.$$

Důkaz. Stačí omezit se na soubor, ve kterém $I \neq 0$ a každá množina A_i je alespoň dvouprvková. Víme, že na $\varkappa$ existuje nezávislý systém rozkladů $\{M(i, a) : i \in I, a \in A_i\}$. Pro každé $i \in I$ je $\{M(i, a) : a \in A_i\}$ rozklad $\varkappa$ na $|A_i|$ částí.

Nechť $\alpha < \varkappa$. Pro $i \in I$ položme $G_\alpha(i) = a$, právě když $\alpha \in M(i, a)$. Tím je definována funkce $G_\alpha \in \mathsf{X}\langle A_i : i \in I\rangle$. Může se stát, že pro $\alpha < \beta < \varkappa$ jsou funkce G_α a G_β stejné. Položme $S = \{G_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, zřejmě $|S| \leq \varkappa$.

Je-li dána libovolná funkce $f \in \mathsf{X}\langle A_i : i \in I\rangle$ a libovolná neprázdná konečná množina $J \subseteq I$, pak z nezávislosti dostáváme

$$\bigcap\{M(i, f(i)) : i \in J\} \neq 0\,.$$

Pro libovolné α z tohoto průniku platí

$$f \mid J = G_\alpha \mid J\,.$$

Ověřili jsme, že systém S má požadované vlastnosti.

Nezávislé systémy množin slouží ke generování různých filtrů a ultrafiltrů. Filtr na $\varkappa$ je speciální podmnožinou množiny $\mathscr{P}(\varkappa)$, tedy nějakým prvkem množiny $\mathscr{P}\,\mathscr{P}(\varkappa)$, proto na $\varkappa$ existuje nejvýše $2^{2^\varkappa}$ filtrů. B. Pospíšil (1937) ukázal, že počet ultrafiltrů na $\varkappa$ dosahuje horního odhadu počtu filtrů.

1.9 Definice. Je-li $\mathscr{F}$ filtr na $\varkappa$, pak *charakterem filtru* $\mathscr{F}$ rozumíme kardinál

$$\chi(\mathscr{F}) = \min\{|B| : B \text{ je báze filtru } \mathscr{F}\}\,.$$

Je zřejmé, že pro filtr $\mathscr{F}$ na $\varkappa$ je $\chi(\mathscr{F}) \leq 2^\varkappa$, a $\mathscr{F}$ je hlavní, právě když $\chi(\mathscr{F}) = 1$. Filtr, který není hlavní, má nekonečný charakter. Podle 1.4(b) je charakter uniformního ultrafiltru na $\varkappa$ vždy větší než $\varkappa$.

1.10 Věta (Pospíšil). *Pro každé nekonečné $\varkappa$ existuje $2^{2^\varkappa}$ uniformních ultrafiltrů na $\varkappa$, neboli $|\beta\varkappa| = |\mathscr{U}(\varkappa)| = 2^{2^\varkappa}$. Navíc, množina všech uniformních ultrafiltrů, které mají maximální možný charakter $2^\varkappa$, má také mohutnost $2^{2^\varkappa}$.*

Důkaz. Dokazujeme nejprve první část. Vezměme nějaký nezávislý systém $\{M(\alpha, i) : \alpha < 2^\varkappa, i < 2\}$ množin na $\varkappa$, jeho existenci jsme dokázali v 1.6 a 1.7. Z nezávislosti uvažovaného systému plyne, že pro každou funkci $f: 2^\varkappa \to 2$ množina

$$S_f = \{M(\alpha, f(\alpha)) : \alpha < 2^\varkappa\}$$

je uniformně centrovaný systém množin na $\varkappa$. Pro dané f existuje nějaký ultrafiltr $\mathscr{U}_f$ na $\varkappa$, který současně rozšiřuje S_f i Fréchétův filtr na $\varkappa$. Ultrafiltr $\mathscr{U}_f$ je uniformní a $\mathscr{U}_f \supseteq S_f$.

Jsou-li f, g dvě různé funkce z $2^\varkappa$ do 2 a je-li $f(\alpha) \neq g(\alpha)$, potom množiny $M(\alpha, f(\alpha))$, $M(\alpha, g(\alpha))$ jsou disjunktní a první padne do $\mathscr{U}_f$ a druhá do $\mathscr{U}_g$. Z toho plyne, že $\mathscr{U}_f \neq \mathscr{U}_g$. Všech funkcí $f: 2^\varkappa \to \varkappa$ je $2^{2^\varkappa}$, proto počet uniformních ultrafiltrů na $\varkappa$ je také $2^{2^\varkappa}$.

Dokázali jsme $|\mathscr{U}(\varkappa)| = 2^{2^\varkappa}$. Uniformní ultrafiltry tvoří podmnožinu všech ultrafiltrů na $\varkappa$, $\mathscr{U}(\varkappa) \subseteq \beta\varkappa$, a víme, že $|\beta\varkappa| \leq 2^{2^\varkappa}$, tedy $|\mathscr{U}(\varkappa)| = |\beta\varkappa| = 2^{2^\varkappa}$.

Důkaz druhé části. Vyjdeme opět ze stejného nezávislého systému množin na $\varkappa$, ale místo S_f použijeme bohatší systémy. Pro každé $f: 2^\varkappa \to 2$ položme

$$T_f = S_f \cup \{\varkappa - \bigcap Y : Y \in [S_f]^\omega\}.$$

Množina T_f obsahuje kromě množin z S_f také doplňky všech průniků spočetných podsystémů systému S_f. Ověříme, že pro každé f je T_f uniformně centrovaný systém na $\varkappa$. Pro kladná přirozená čísla n, k mějme dány různá ordinální čísla $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} < 2^\varkappa$ a různé spočetné podmnožiny $Y_0, \ldots, Y_{k-1} \subseteq 2^\varkappa$. Zvolme čísla β_j pro $j < k$ vzájemně různá a také různá od všech čísel α_i tak, aby $\beta_j \in Y_j$. Protože množiny Y_j jsou nekonečné, taková volba je možná. Je zřejmé, že

$$\bigcap_{i<n} M(\alpha_i, f(\alpha_i)) \cap \bigcap_{j<k} (\varkappa - \bigcap\{M(\xi, f(\xi)) : \xi \in Y_j\}) \supseteq$$
$$\supseteq \bigcap_{i<n} M(\alpha_i, f(\alpha_i)) \cap \bigcap_{j<k} M(\beta_j, 1 - f(\beta_j)),$$

a z nezávislosti výchozího systému plyne, že průnik má mohutnost $\varkappa$. Tedy T_f je uniformně centrovaný systém.

Nechť $\mathscr{V}_f$ je nějaké rozšíření systému T_f do uniformního ultrafiltru na $\varkappa$. Ověříme sporem, že $\chi(\mathscr{V}_f) = 2^\varkappa$. Předpokládejme, že ultrafiltr $\mathscr{V}_f$ má bázi B mohutnosti $< 2^\varkappa$. Víme, že $2^\varkappa$ množin $M(\alpha, f(\alpha))$ je v ultrafiltru $\mathscr{V}_f$ a $|B| < 2^\varkappa$, tedy existuje $C \in B$ takové, že množina

$$Y' = \{\alpha < 2^\varkappa : C \subseteq M(\alpha, f(\alpha))\}$$

je nekonečná. Vezměme spočetnou podmnožinu $Y \subseteq Y'$. Potom

$$C \subseteq \bigcap\{M(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in Y\} \in \mathscr{V}_f$$

a současně

$$(\varkappa - \bigcap\{M(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in Y\}) \in T_f \subseteq \mathscr{V}_f,$$

neboli v ultrafiltru $\mathscr{V}_f$ leží množina i její doplněk a to je spor. Proto $\chi(\mathscr{V}_f) = 2^\varkappa$. Dokázali jsme, že $|\mathscr{V} \in \mathscr{U}(\varkappa) : \chi(\mathscr{V}) = 2^\varkappa| = 2^{2^\varkappa}$.

1.11 Příklady. (a) *Zobecněné nezávislosti.* Nechť λ, $\varkappa$ jsou nekonečná kardinální čísla a nechť $\varkappa^{<\lambda} = \varkappa$ (tedy $\lambda \leq \varkappa$). Pak existuje systém $\{A(\alpha, \beta) : \alpha < 2^\varkappa, \beta < \varkappa\}$ rozkladů na $\varkappa$ plné mohutnosti $2^\varkappa$, který je λ-nezávislý, to znamená, že pro každé $B \subseteq 2^\varkappa$ mohutnosti $< \lambda$ a pro každou funkci $f: B \to \varkappa$ je množina

$$\bigcap\{A(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in B\}$$

neprázdná a má mohutnost $\varkappa$.

Uvědomme si, že pro nekonečné $\varkappa$ platí $\varkappa^{<\omega} = \varkappa$, a ω-nezávislost je totéž, co obvyklý pojem nezávislosti. Uvedené tvrzení je proto zobecněním věty 1.6. Je-li λ nespočetný kardinál, pak λ-nezávislost je silnější než pouhá ω-nezávislost. Nepřekvapuje, že existence velkého λ-nezávislého systému na $\varkappa$ závisí na vztahu mezi kardinály $\varkappa$ a λ.

Snadno se ověří, že na ω nemůže existovat nekonečný ω_1-nezávislý systém množin.

Důkaz zobecněného tvrzení získáme úpravou důkazu věty 1.6. Použijeme množinu

$$P = \{\langle A, F\rangle : A \in [\varkappa]^{<\lambda}, F : B \to \varkappa,\ B \in [\mathscr{P}(A)]^{<\lambda}\},$$

pro kterou z předpokladu $\varkappa^{<\lambda} = \varkappa$ plyne $|P| = \varkappa$. Pro $C \subseteq \varkappa$, stačí položit

$$A(C, \alpha) = \{\langle A, F\rangle : A \cap C \in \mathrm{Dom}(F) \,\&\, F(A \cap C) = \alpha\}, \text{ je-li } 0 < \alpha < \varkappa$$

a

$$A(C, 0) = P - \bigcup\{M(C, \alpha) : 0 < \alpha < \varkappa\}.$$

(b) **Věta** (Hewitt, Marczewski, Pondiczery). *Jsou-li S_i, $i \in I$ topologické prostory, z nichž každý má hustou podmnožinu mohutnosti $\leq \varkappa$, a je-li $|I| \leq 2^\varkappa$, pak topologický součin $\mathsf{X}\langle S_i : i \in I\rangle$ obsahuje nějakou hustou množinu mohutnosti $\leq \varkappa$.*

Důkaz plyne z 1.8. Jsou-li A_i husté množiny v S_i, $|A_i| \leq \varkappa$, pak množina funkcí $S \subseteq \mathsf{X}\langle A_i : i \in I\rangle$ popsaná v 1.8 má mohutnost $\leq \varkappa$ a je hustá v součinu $\mathsf{X}\langle S_i : i \in I\rangle$.

Připomeňme, že topologický prostor je separabilní, jestliže obsahuje hustou podmnožinu, která je nejvýše spočetná. Je zřejmé, že součin konečně mnoha separabilních prostorů S_i, $i < n$ je opět separabilní prostor, protože jsou-li $A_i \subseteq S_i$ husté množiny v S_i, pak množina $\mathsf{X} A_i$ je hustá v $\mathsf{X} S_i$.

Z dokázané věty plyne, že dokonce součin 2^ω mnoha separabilních prostorů je opět separabilní prostor. Speciálně prostor ${}^{2^\omega}2$, kde $2 = \{0, 1\}$ je diskrétní, je separabilní. Není těžké ověřit, že prostor ${}^{(2^\omega)^+}2$ již není separabilní. To znamená, že ve větě (Hewitt, Marczewski, Pondiczery) je omezení $|I| \leq 2^\varkappa$ nutné.

1.12 Definice. Skoro disjunktní systémy. (i) Říkáme, že dvě podmnožiny x, y kardinálu $\varkappa$ jsou *skoro disjunktní*, jestliže $|x \cap y| < \varkappa$.

(ii) Říkáme, že S je *skoro disjunktní systém* množin na $\varkappa$, zkráceně AD *systém*, jestliže $S \subseteq [\varkappa]^\varkappa$ a každé dvě různé množiny z S jsou skoro disjunktní.

(iii) Skoro disjunktní systémy na $\varkappa$ jsou uspořádány inkluzí. Říkáme, že S je *maximální skoro disjunktní systém* na $\varkappa$, krátce MAD *systém*, je-li maximální vzhledem k inkluzi.

Z principu maximality plyne, že každý skoro disjunktní systém na $\varkappa$ může být rozšířen do maximálního skoro disjunktního systému.

AD systém S na $\varkappa$ je MAD systémem, právě když pro každé $x \in [\varkappa]^\varkappa$ existuje $y \in S$ takové, že $|x \cap y| = \varkappa$. Zajímají nás maximální možné mohutnosti AD systémů na $\varkappa$. Je zřejmé, že každý disjunktní systém podmnožin $\varkappa$ nemůže mít větší mohutnost než $\varkappa$. Jiná je situace pro AD systémy.

1.13 Lemma. *Předpokládáme, že $\varkappa$ je nekonečný kardinál.*

(i) *Žádný AD systém na $\varkappa$ mohutnosti* $\mathrm{cf}(\varkappa)$ *není maximální.*

(ii) *Existuje AD systém na $\varkappa$ mohutnosti $\geq \varkappa^+$.*

Důkaz. (i) Nechť $\nu = \mathrm{cf}(\varkappa)$ a $\{A_\alpha : \alpha < \nu\}$ je nějaký AD systém na $\varkappa$. Množiny A_α zmenšíme o malé množiny tak, abychom získali disjunktní systém. Pro $\alpha < \nu$ položme

$$A'_\alpha = A_\alpha - \bigcup\{A_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Od A_α jsme odečetli množinu, která je sjednocením méně než $\mathrm{cf}(\varkappa)$ množin $A_\alpha \cap A_\beta$ pro $\beta < \alpha$, z nichž každá má mohutnost menší než $\varkappa$, a tedy množinu mohutnosti $<\varkappa$. To znamená, že $|A_\alpha - A'_\alpha| < \varkappa$, $|A'_\alpha| = \varkappa$ a libovolná množina je skoro disjunktní s A_α, právě když je skoro disjunktní s A'_α. Systém $\{A'_\alpha : \alpha < \nu\}$ je disjunktní.

V případě regulárního $\varkappa$ je $\nu = \varkappa$ a stačí vzít množinu $B \subseteq \varkappa$, která vybírá po jednom prvku z každé množiny A'_α. Potom $|B| = \varkappa$ a B je skoro disjunktní se všemi množinami A_α, tedy výchozí systém není MAD systémem. Je-li $\varkappa$ singulární, tedy $\nu < \varkappa$, nechť $\langle \varkappa_\alpha, \alpha < \nu \rangle$ je rostoucí posloupnost kardinálů konvergující ke $\varkappa$. Pro každé $\alpha < \nu$ zvolme množiny $b_\alpha \subseteq A'_\alpha$ tak, že $|b_\alpha| = \varkappa_\alpha$, a položme $B = \bigcup\{b_\alpha : \alpha < \nu\}$. Jelikož mohutnosti množin b_α konvergují ke $\varkappa$, je $|B| = \varkappa$. Pro $\alpha < \nu$ je $B \cap A'_\alpha = b_\alpha$, to znamená, že B je skoro disjunktní s A'_α, a tedy také s A_α. Dokázali jsme, že $\{A_\alpha : \alpha < \nu\}$ není MAD systémem.

(ii) Pro regulární $\varkappa$ vezměme nějaký rozklad $R = \{A_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ kardinálu $\varkappa$ na množiny mohutnosti $\varkappa$. Jakýkoliv MAD systém na $\varkappa$ rozšiřující rozklad R má podle (i) mohutnost $>\varkappa$.

Zbývá singulární $\varkappa$. Na tomto místě ukážeme využití systémů skoro všude různých funkcí. Nechť $\langle \varkappa_\alpha : \alpha < \nu \rangle$ je rostoucí posloupnost nekonečných kardinálů konvergující ke $\varkappa$. Uvažujme kartézský součin $C = \mathsf{X}\langle \varkappa_\alpha^+ : \alpha < \nu \rangle$. Prvky z C jsou ordinální funkce f definované na ν takové, že pro každé $\alpha < \nu$ platí $f(\alpha) < \varkappa_\alpha^+$. Říkáme, že dvě funkce $f, g \in C$ jsou skoro všude různé, jestliže $|\{\alpha < \nu : f(\alpha) = g(\alpha)\}| < \nu$. Protože ν je regulární kardinál, poslední podmínka je ekvivalentní s tím, že existuje $\xi < \nu$ takové, že $f(\beta) \neq g(\beta)$ pro všechna $\beta \geq \xi$. Nechť $\{f_\gamma : \gamma < \varkappa\} \subseteq C$ je libovolný systém mohutnosti $\varkappa$. Pro každé $\alpha < \nu$ položme

$$g(\alpha) = \sup\{f_\gamma(\alpha) + 1 : \gamma < \varkappa_\alpha\}.$$

Množina $\{f_\gamma(\alpha) + 1 : \gamma < \varkappa_\alpha\}$ má mohutnost nejvýše $\varkappa_\alpha$, a je proto omezenou podmnožinou kardinálu $\varkappa_\alpha^+$. To znamená, že $g(\alpha) < \varkappa_\alpha^+$ pro každé $\alpha < \nu$, tedy $g \in C$. Pro dané $\gamma < \varkappa$ nechť ξ je nejmenší ordinální číslo takové, že $\gamma < \varkappa_\xi$. Potom $g(\alpha) \neq f_\gamma(\alpha)$, jakmile $\xi \leq \alpha < \nu$, a tedy g je skoro všude různé od každé funkce f_γ, $\gamma < \varkappa$.

Tím jsme ukázali, že můžeme rekurzí sestrojit systém $S = \{g_\delta : \delta < \varkappa^+\} \subseteq C$ mohutnosti $\varkappa^+$ vzájemně skoro všude různých funkcí. Tento systém použijeme ke konstrukci hledaného AD systému na $\varkappa$.

Nejprve rozložíme množinu $\varkappa$ na ν částí, $\varkappa = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \nu\}$, tak, že $|A_\alpha| = \varkappa_\alpha^+$. Každou množinu A_α dále rozložíme na $\varkappa_\alpha^+$ množin $A(\alpha, \beta)$, $\beta < \varkappa_\alpha^+$, z nichž každá má mohutnost $\varkappa_\alpha$. Konečně pro $\delta < \varkappa^+$ položme

$$B_\delta = \bigcup\{A(\alpha, f_\delta(\alpha)) : \alpha < \nu\},$$

kde f_δ je funkce ze systému S.

Mohutnosti množin $A(\alpha, f_\delta(\alpha))$ s rostoucím α konvergují ke $\varkappa$, tedy $|B_\delta| = \varkappa$.

Jakmile $\gamma < \delta < \varkappa^+$, je $B_\gamma \cap B_\delta \subseteq \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \xi\}$, kde $\xi < \nu$ je číslo, od kterého počínaje jsou funkce f_γ a f_δ všude různé. Tedy $|B_\gamma \cap B_\delta| < \varkappa$ a $\{B_\delta : \delta < \varkappa^+\}$ je AD systém na $\varkappa$ mohutnosti $\varkappa^+$.

1.14 Největší možná mohutnost AD systému na $\varkappa$ je $2^\varkappa$. Ptáme-li se, jestli vždy existuje MAD systém na $\varkappa$ mohutnosti $2^\varkappa$, odpověď není jednoznačná. Za předpokladu GCH kladná odpověď plyne z 1.13. Nepředpokládáme-li GCH, J. Baumgartner ukázal, že na ω_1 nemusí existovat žádný MAD systém mohutnosti 2^{ω_1}. S důkazem této konzistence se seznámíme v kapitole IV.

Nicméně na množině ω vždy existuje nějaký AD systém, tedy i MAD systém mohutnosti kontinua. To plyne z následujícího obecnějšího tvrzení pro $\varkappa = \omega$.

1.15 Věta. *Jestliže* $2^{<\varkappa} = \varkappa$, *potom existuje AD systém* $A \subseteq \mathscr{P}(\varkappa)$ *mohutnosti* $2^\varkappa$.
Důkaz. Místo množiny $\varkappa$ vezměme množinu $X = {}^{<\varkappa}\{0, 1\}$ všech posloupností nul a jedniček délky $<\varkappa$. Z předpokladu $2^{<\varkappa} = \varkappa$ plyne, že $|X| = \varkappa$. Pro každé $f : \varkappa \to \{0, 1\}$ položme

$$A_f = \{f \mid \alpha : \alpha < \varkappa\}.$$

Je zřejmé, že $A_f \in [X]^\varkappa$. Jsou-li $f, g \in {}^\varkappa\{0, 1\}$ dvě různé funkce, nechť ξ je nejmenší ordinál, pro který $f(\xi) \neq g(\xi)$. Potom $A_f \cap A_g \subseteq \{f \mid \gamma : \gamma \leq \xi\}$, a proto $|A_f \cap A_g| \leq |\xi| < \varkappa$. Tedy $\{A_f : f \in {}^\varkappa\{0, 1\}\}$ je AD systémem mohutnosti $2^\varkappa$ na množině X, která má mohutnost $\varkappa$.

Z věty 1.15 vyplývá, že neexistuje-li MAD systém na ω_1 plné mohutnosti 2^{ω_1}, neplatí hypotéza kontinua.

Na ω existuje MAD systém mohutnosti kontinua, tedy největší možné mohutnosti. Problém, zda každý nekonečný MAD systém na ω má mohutnost 2^ω, je nerozhodnutelný v teorii množin.

1.16 Příklady. (a) Elegantní konstrukce skoro disjunktního systému mohutnosti kontinua na spočetné množině využívá struktury reálné přímky. Na množině $\mathbb{Q}$ racionálních čísel sestrojíme AD systém tak, že pro každé iracionální číslo r vybereme jednu posloupnost $p(r) = \{a_n : n \in \omega\}$ racionálních čísel, která konverguje k r. Jsou-li r_0, r_1 libovolná různá iracionální čísla a V_0, V_1 jsou jejich disjunktní okolí, z konvergence posloupností $p(r_i)$ plyne, že pro každé $i < 2$ je $p(r_i)$, až na konečnou množinu, částí V_i. To znamená, že $p(r_1), p(r_2)$ jsou skoro disjunktní nekonečné množiny. Ověřili jsme, že $S = \{p(r) : r \text{ iracionální}\}$ je AD systém na $\mathbb{Q}$ mohutnosti kontinua.

Zkonstruovaný systém S však není maximálním skoro disjunktním systémem, protože k libovolnému iracionálnímu číslu r lze sestrojit jinou posloupnost racionálních čísel konvergující k r a disjunktní se zvolenou posloupností $p(r)$. Navíc vhodnou volbou prvních členů posloupností $p(r)$ můžeme docílit toho, že $\mathbb{Q} = \bigcup S$. V takovém případě dokonce platí, že pro každou nekonečnou množinu $A \subseteq \mathbb{Q}$ buď existuje konečná $S_0 \subseteq S$ taková, že $A \subseteq \bigcup S_0$, nebo existuje nekonečná podmnožina $B \subseteq A$, která je skoro disjunktní se všemi množinami z S.

(b) *Konstrukce nezávislého systému množin z AD systému.* Nechť $S = \{a_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ je nějaký AD systém na ω. Pomocí S snadno získáme nezávislý systém množin mohutnosti kontinua na spočetné množině $X = [\omega]^{<\omega}$. Pro každé $\alpha < 2^\omega$ definujeme

$$b_{\alpha,0} = \{x \in X : x \cap a_\alpha \neq 0\}$$

a

$$b_{\alpha,1} = X - b_{\alpha,0} .$$

Čtenář se snadno přesvědčí, že $\{b_{\alpha,i} : \alpha < 2^\omega, i < 2\}$ je nezávislý systém podmnožin množiny X.

(c) MAD *systém na* $\varkappa$ *mohutnosti* $\varkappa$. Podle 1.13(i) nemůže takový systém existovat na regulárním $\varkappa$, připadá v úvahu pouze singulární kardinál. P. Erdös a S. Hechler (1973) dokázali následující tvrzení: Je-li $\varkappa$ silně limitní singulární kardinál, pak na $\varkappa$ existuje MAD systém mohutnosti $\varkappa$.

Závěr (GCH): Na libovolném kardinálu $\varkappa$ existuje MAD systém mohutnosti ν, právě když $\nu \neq \mathrm{cf}(\varkappa)$ a $1 \leq \nu \leq 2^\varkappa$.

1.17 Definice. Δ-systém. Říkáme, že systém množin A je *kvazidisjunktní* nebo že je *Δ-systém*, jestliže existuje pevná množina b taková, že pro každé dvě různé množiny $x, y \in A$ je $x \cap y = b$. Množina b se nazývá *jádrem* Δ-systému. Odečteme-li od každé množiny Δ-systému jeho jádro, získáme disjunktní systém.

Říkáme, že $\langle A_i : i \in I \rangle$ je Δ-soubor, jestliže existuje množina b taková, že pro různá $i, j \in I$ je $A_i \cap A_j = b$.

Následující tvrzení je snadno zapamatovatelné a je speciálním případem věty o existenci Δ-systému, který se často používá.

1.18 Lemma. *Je-li A nespočetný systém konečných množin, pak existuje nespočetný podsystém $B \subseteq A$, který je Δ-systémem.*

Lemma plyne z následující věty, když položíme $\lambda = \omega_1$ a $\varkappa = \omega$, protože pro každé spočetné ordinální číslo je množina všech jeho konečných podmnožin opět spočetná.

1.19 Věta o Δ-systémech (Erdös, Rado 1960). *Nechť $\lambda > \varkappa$ a λ je regulární kardinál takový, že pro každé $\alpha < \lambda$ je $|\alpha^{<\varkappa}| < \lambda$. Je-li A systém množin mohutnosti λ a každá množina $x \in A$ má mohutnost menší než $\varkappa$, pak existuje Δ-systém $B \subseteq A$ mohutnosti λ.*

Důkaz. Podle předpokladu je $|A| = \lambda$ a pro $x \in A$ je $|x| < \varkappa < \lambda$, proto $|\bigcup A| \leq \lambda$. Nezáleží na tom, z kterých prvků se množiny $x \in A$ skládají, můžeme předpokládat, že $\bigcup A \subseteq \lambda$. Každá množina $x \in A$ je podmnožinou λ a je uspořádaná podle ordinálního typu $< \varkappa$. Jelikož λ je regulární a $\varkappa < \lambda$, existuje ordinální číslo $\varrho < \varkappa$ takové, že množina $A_1 = \{x \in A : x \text{ je typu } \varrho\}$ má mohutnost λ. Zvolíme pevně takové ϱ a uvažujeme pouze systém A_1.

Pro každé $\alpha < \lambda$ je $|\alpha^{<\varkappa}| < \lambda$, to znamená, že těch $x \in A_1$, které jsou podmnožinami α, je méně než λ. Tedy $\bigcup A_1$ nemůže být omezená podmnožina λ. Pro $\xi < \varrho$ a $x \in A_1$ nechť $x(\xi)$ je ξ-tý prvek množiny x. Jelikož λ je regulární a

$$\bigcup A_1 = \bigcup_{\xi < \varrho} \{x(\xi) : x \in A_1\},$$

existuje nějaké ξ, pro které je množina $\{x(\xi) : x \in A_1\}$ neomezená. Nechť ξ_0 je nejmenší takové ξ (případ $\xi_0 = 0$ je možný). Položme

$$\alpha_0 = \sup\{x(\eta) + 1 : \eta < \xi_0 \;\&\; x \in A_1\}.$$

Pro každé $\eta < \xi_0$ je podmnožina $\{x(\eta) : x \in A_1\}$ omezená v λ, proto $\alpha_0 < \lambda$, a navíc pro libovolné $x \in A_1$ a $\eta < \xi_0$ je $x(\eta) < \alpha_0$.

Nyní transfinitní rekurzí pro $\beta < \lambda$ vybereme $x_\beta \in A_1$ tak, že platí $x_\beta(\xi_0) > \alpha_0$ a $x_\beta(\xi_0)$ je větší než všechny prvky z $\bigcup_{\gamma < \beta} x_\gamma$. Existence takového x_β plyne z toho, že $\alpha_0 < \lambda$, $\bigcup_{\gamma < \beta} x_\gamma$ je omezená a $\{x(\xi_0) : x \in A_1\}$ je neomezená množina v λ.

Položme $A_2 = \{x_\beta : \beta < \lambda\}$. Potom $|A_2| = \lambda$ a pro různé $x, y \in A_2$ je $x \cap y \subseteq \alpha_0$. Jelikož $|\alpha_0^{<\varkappa}| < \lambda$, existují $b \subseteq \alpha_0$ a $B \subseteq A_2$ takové, že $|B| = \lambda$ a $x \cap \alpha_0 = b$ pro každé $x \in B$. Tedy B je hledaný Δ-systém s jádrem b.

Předpoklad regularity kardinálu λ je nutný i v případě systémů sestávajících jen z konečných množin.

1.20 Příklad. Pro libovolný singulár $\lambda > \mathrm{cf}(\lambda) = \nu$ existuje systém A dvouprvkových množin, který má mohutnost λ, a žádný Δ-systém $B \subseteq A$ nemá plnou mohutnost λ. Nechť $\langle \lambda_\xi : \xi < \nu \rangle$ je rostoucí transfinitní posloupnost kardinálů konvergující k λ. Pro $\xi < \nu$ položme

$$A_\xi = \{\{\lambda_\xi, \eta\} : \lambda_\xi < \eta < \lambda_{\xi+1}\}.$$

Je zřejmé, že A_ξ je Δ-systém s jádrem $\{\lambda_\xi\}$ a $|A_\xi| = \lambda_{\xi+1} < \lambda$. Položme $A = \bigcup\{A_\xi : \xi < \nu\}$, pak $|A| = \lambda$. Jakmile $\xi_1 \neq \xi_2$, pak pro libovolné $x \in A_{\xi_1}$, $y \in A_{\xi_2}$ je $x \cap y = 0$. To znamená, že Δ-systém $B \subseteq A$ je buď podmnožinou nějakého A_ξ, a pak $|B| \leq \lambda_{\xi+1} < \lambda$, nebo $|B \cap A_\xi| \leq 1$ pro každé $\xi < \nu$, a pak $|B| \leq \nu < \lambda$. V každém případě je $|B| < \lambda$.

Právě uvedený příklad je typický pro singulární kardinály a naznačuje, že v některých případech můžeme tvořit dvoustupňové Δ-systémy.

1.21 Kaktusové lemma. *Nechť λ je singulár s nespočetnou kofinalitou $\nu = \mathrm{cf}(\lambda)$ a nechť A je systém konečných množin takový, že $|A| = \lambda$. Potom existuje konečná množina r a pro každé $\alpha < \nu$ existují $B_\alpha \subseteq A$ a konečná množina r_α takové, že platí*

(i) *mohutnosti $|B_\alpha|$ pro $\alpha < \nu$ konvergují k λ,*

(ii) *pro každé $\alpha < \nu$ je B_α Δ-systém s jádrem r_α,*

(iii) *$\{r_\alpha : \alpha < \nu\}$ je Δ-systém s jádrem r,*

(iv) *je-li $\alpha < \beta < \nu$ a $x \in B_\alpha$, $y \in B_\beta$, pak $x \cap y = r$.*

Důkaz. Zvolme $\langle \lambda_\alpha : \alpha < \nu \rangle$ rostoucí posloupnost regulárních kardinálů konvergující k λ tak, že $\lambda_0 > \nu$. Nechť $\{A_\alpha : \alpha < \nu\}$ je rozklad množiny A takový, že $|A_\alpha| = \lambda_\alpha$ pro každé $\alpha < \nu$. Podle věty 1.19 existují Δ-systémy $B'_\alpha \subseteq A_\alpha$, $|B'_\alpha| = \lambda_\alpha$. Pro každé $\alpha < \nu$ zvolme pevně takovou množinu B'_α a položme $r_\alpha = \bigcap B'_\alpha$.

Soubor $\langle r_\alpha : \alpha < \nu \rangle$ sestává z jader systémů B'_α, tedy z konečných množin. Protože ν je nespočetný regulární kardinál, existuje podle věty 1.19 neomezená podmnožina $X \subseteq \nu$ a konečná množina r takové, že $\{r_x : x \in X\}$ je Δ-systém s jádrem r. Množina $X \subseteq \nu$ má ordinální typ ν a její prvky lze jednoznačně očíslovat všemi ordinálními čísly $\alpha < \nu$. Jednoduchou záměnou indexů systémů r_x, B_x a kardinálů λ_x, kdy místo x píšeme α, jakmile x je α-tý prvek X, dosáhneme toho, že indexová množina bude celé ν. Získali jsme tak Δ-systémy B'_α pro $\alpha < \nu$ a Δ-systém $\{r_\alpha : \alpha < \nu\}$, jejichž jádra jsou r_α pro $\alpha < \nu$ a r, pro které platí (i)–(iii).

Dalším prořezáním systémů B'_α zabezpečíme (iv). Pro $\alpha < \nu$ položme $C_\alpha = \bigcup\{\bigcup B'_\beta : \beta < \alpha\}$. Jelikož λ_α je regulární a $\lambda_\alpha > \nu$, je $|C_\alpha| < \lambda_\alpha$. Každé $x \in B'_\alpha$ protíná množinu C_α v konečné množině. Konečných podmnožin množiny C_α je méně než $|B'_\alpha| = \lambda_\alpha$, a proto existuje konečná množina $c_\alpha \subseteq C_\alpha$ a množina $B''_\alpha \subseteq B'_\alpha$ takové, že $|B''_\alpha| = \lambda_\alpha$ a pro každé $x \in B''_\alpha$ je $x \cap C_\alpha = c_\alpha$. Je zřejmé, že $c_\alpha \subseteq r_\alpha$. Nakonec položme

$$B_\alpha = B''_\alpha - \{x \in B''_\alpha : (\exists \beta < \nu)((x - r_\alpha) \cap r_\beta \neq 0)\}.$$

Protože B''_α je Δ-systém s jádrem r_α, zmenší se B_α oproti B''_α nejvýše o ν množin, tedy $|B_\alpha| = \lambda_\alpha$. Pro $\beta < \alpha < \nu$ zvolme $x \in B_\beta$ a $y \in B_\alpha$. Jelikož $y \in B''_\alpha$ a $x \subseteq C_\alpha$, je $y \cap x \subseteq c_\alpha \subseteq r_\alpha$. Z definice množiny B_β plyne, že $r_\alpha \cap x \subseteq r_\beta$, a jelikož $r_\alpha \subseteq y$, $r_\beta \subseteq x$, to dohromady znamená, že $r \subseteq y \cap x \subseteq r_\alpha \cap r_\beta = r$, neboli $y \cap x = r$. Dokázali jsme, že Δ-systémy B_α, $\alpha < \nu$ splňují i podmínku (iv).

Věta o Δ-systémech se používá pro výpočet Suslinova čísla uspořádaných množin a topologických prostorů.

1.22 Definice. Suslinovo číslo. Nechť $\langle P, \leq \rangle$ je uspořádaná množina.

(i) Říkáme, že prvky $x, y \in P$ jsou *disjunktní*, a píšeme $x \perp y$, jestliže žádný prvek z P není současně menší než x a y.

(ii) Říkáme, že $X \subseteq P$ je *disjunktní množina*, jestliže každé dva různé prvky $x, y \in X$ jsou disjunktní.

(iii) Kardinální číslo $c(P, \leq) = \sup\{|X| : X \subseteq P$ je disjunktní množina$\}$ se nazývá *Suslinovým číslem uspořádané množiny* $\langle P, \leq \rangle$.

(iv) *Suslinovo číslo topologického prostoru* S je kardinální číslo $c(S) = \sup\{|X| : X$ je disjunktní množina otevřených neprázdných podmnožin prostoru $S\}$.

Je zřejmé, že Suslinovo číslo neprázdné lineárně uspořádané množiny stejně jako uspořádané množiny s nejmenším prvkem je rovno 1. Pro topologické prostory je Suslinovo číslo reálné přímky a vůbec každého nekonečného separabilního Hausdorffova prostoru $\aleph_0$.

1.23 Lemma. *Nechť λ je nespočetný regulární kardinál a nechť $\langle A_i : i \in I \rangle$ je soubor množin takový, že každá množina A_i je mohutnosti $< \lambda$. Uvažujme množinu*

$$P = \{ f : f \text{ je konečná funkce a } f(i) \in A_i \text{ pro každé } i \in \mathrm{Dom}(f) \}$$

uspořádanou opačnou inkluzí, to znamená, že $f \leq g \leftrightarrow g \subseteq f$. Potom každá disjunktní množina $X \subseteq P$ má mohutnost $< \lambda$. Odtud plyne, že Suslinovo číslo $\mathrm{c}(P, \supseteq) \leq \lambda$.

Důkaz sporem. Nechť $X = \{ f_\alpha : \alpha < \lambda \} \subseteq P$ je disjunktní množina mohutnosti λ. Položme $a_\alpha = \mathrm{Dom}(f_\alpha)$. Soubor $\langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ sestává z konečných množin a má nespočetnou regulární délku λ. Z věty 1.19 plyne, že existuje množina $W \subseteq \lambda$ mohutnosti λ, pro kterou je soubor $\langle a_\alpha : \alpha \in W \rangle$ Δ-souborem s nějakým jádrem b. Jelikož X je disjunktní množina, žádné dvě různé funkce z X nemají společné prodloužení. Odtud plyne, že jádro b je neprázdná množina a pro různá $\xi, \eta \in W$ jsou funkce $f_\xi | b$ a $f_\eta | b$ různé. Předpokládali jsme, že $|A_i| < \lambda$, a víme, že b je konečná, proto $|\mathsf{X} \langle A_i : i \in b \rangle| < \lambda$. Jelikož množina $\{ f_\xi | b : \xi \in W \}$ má mohutnost λ, dostáváme spor. Důkaz je hotov.

1.24 Důsledek. *Suslinovo číslo Cantorova prostoru ${}^{\omega}2$ je $\aleph_0$. Totéž platí i pro zobecněné Cantorovy prostory ${}^{\alpha}2$, kde α je libovolný nekonečný ordinál.*

Označíme-li $O(S)$ množinu všech otevřených neprázdných množin topologického prostoru S, pak $O(S)$ je uspořádaná inkluzí a zřejmě platí $\mathrm{c}(S) = \mathrm{c}(O(S), \subseteq)$. V kapitole o Booleových algebrách uvidíme, že každá uspořádaná množina jednoznačně určuje Booleovu algebru a Stoneův prostor všech ultrafiltrů na této algebře. Suslinova čísla uspořádané množiny a odpovídajícího Stoneova prostoru jsou si rovna.

1.25 Příklad. *Suslinovo číslo součinu topologických prostorů.* Je-li $\langle S_i : i \in I \rangle$ soubor topologických prostorů takový, že Suslinovo číslo každého topologického součinu konečně mnoha prostorů S_i je $\leq \aleph_0$, potom $\mathrm{c}(\mathsf{X} \langle S_i : i \in I \rangle) \leq \aleph_0$.
Důkaz využívá 1.18. Předpokládejme, že V_α, $\alpha < \omega_1$ jsou vzájemně disjunktní neprázdné otevřené množiny prostoru $\mathsf{X} \langle S_i : i \in I \rangle$. Můžeme předpokládat, že každá množina je bázová. Pak V_α závisí pouze na konečné množině souřadnic $a_\alpha \subseteq I$. Nechť $\langle a_\alpha : \alpha \in W \rangle$ je Δ-soubor s jádrem b a $|W| = \aleph_1$. Všechny projekce $\pi(V_\alpha)$, $\alpha \in W$ na prostor $\mathsf{X} \langle S_i : i \in b \rangle$ tvoří nespočetný disjunktní systém otevřených množin v součinu konečně mnoha prostorů S_i a to je spor.

Problém, zda Suslinovo číslo součinu každých dvou prostorů se spočetným Suslinovým číslem je opět spočetné, není rozhodnutelný v ZFC. R. Laver ukázal, že z hypotézy kontinua plyne negativní odpověď. Martinův axiom MA_{ω_1} řeší problém pozitivně.

1.26 Definice. Volná množina. Nechť A je libovolná množina. *Množinovým zobrazením* na A nazýváme funkci

$$F : A \to \mathscr{P}(A)$$

takovou, že $a \notin F(a)$ pro každé $a \in A$. Říkáme, že podmnožina $B \subseteq A$ je *volnou množinou* pro F, jestliže pro každé $a \in B$ je $B \cap F(a) = 0$. Ekvivalentně, B je volná, jestliže pro každé dva prvky $a, b \in B$ platí $a \notin F(b)$.

Zajímají nás podmínky na množinové zobrazení, za kterých existuje velká volná množina. P. Turán byl první, který položil kolem roku 1930 problém tohoto typu. Ptal se, existuje-li volná nekonečná množina pro množinové zobrazení $F: \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$, když každá množina $F(r)$ je konečná. Odpověď je pozitivní, dokonce existuje volná množina mohutnosti $2^{\aleph_0}$.

Na druhé straně, množinové zobrazení F na $\varkappa$ definované předpisem $F(\alpha) = \{\beta : \beta < \alpha\}$ pro každé $\alpha < \varkappa$ je příkladem zobrazení, pro které platí

$$(\forall \alpha < \varkappa)(|F(\alpha)| < \varkappa),$$

a přesto neexistuje ani dvouprvková volná množina pro F.

Lze očekávat více, budeme-li předpokládat, že pro množinové zobrazení F na $\varkappa$ existuje kardinál $\nu < \varkappa$ takový, že pro každé $\alpha < \varkappa$ platí $|F(\alpha)| < \nu$.

Ruziewicz vyslovil 1936 hypotézu, že za těchto předpokladů existuje volná množina pro F plné mohutnosti $\varkappa$. Tato hypotéza byla zodpovězena kladně D. Lázárem (1937) pro regulární $\varkappa$ a A. Hajnalem (1961) pro singulární $\varkappa$.

1.27 Věta o volných množinách. *Nechť $\varkappa$ a ν jsou kardinály, $\varkappa$ nekonečné a $\nu < \varkappa$. Nechť A je množina mohutnosti $\varkappa$ a nechť F je množinové zobrazení na A takové, že $|F(a)| < \nu$ pro každé $a \in A$. Potom existuje množina $B \subseteq A$ mohutnosti $\varkappa$, která je volná pro zobrazení F.*

Důkaz. Všimněme si, že všechny volné množiny pro dané množinové zobrazení jsou uspořádány inkluzí a splňují podmínky principu maximality. Existují tedy maximální volné množiny.

Nejprve vyšetřujme případ, kdy je $\varkappa$ regulární. Rekurzí pro $\alpha < \nu$ vybereme množiny $A_\alpha \subseteq A$ takové, že pro každé $\alpha < \nu$ je A_α nějaká maximální volná podmnožina množiny $A - \bigcup\{A_\beta : \beta < \alpha\}$.

Pokud pro nějaké α je $|A_\alpha| = \varkappa$, jsme hotovi, protože množina A_α má požadované vlastnosti.

Předpokládejme, že tato situace nenastane, tedy že pro každé $\alpha < \nu$ je $|A_\alpha| < \varkappa$, a dojdeme ke sporu. Protože $|F(a)| < \nu < \varkappa$, pro každé $\alpha < \nu$ platí

$$\left|\bigcup\{F(a) : a \in A_\alpha\}\right| < \varkappa .$$

Odtud a z regularity $\varkappa$ plyne, že množina

$$B = \bigcup_{\alpha < \nu} A_\alpha \cup \bigcup\{F(a) : a \in \bigcup_{\alpha < \nu} A_\alpha\}$$

má mohutnost $< \varkappa$, a proto $A - B \neq 0$. Zvolme $x \in A - B$. Pro každé $\alpha < \nu$ platí

$$x \notin \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta \quad \text{i} \quad x \notin A_\alpha \cup \bigcup\{F(a) : a \in A_\alpha\},$$

a protože A_α je maximální volná množina, je $F(x) \cap A_\alpha \neq 0$. Množiny A_α, $\alpha < \nu$ jsou vzájemně disjunktní, $F(x)$ má s každou z nich neprázdný průnik, tedy nutně $|F(x)| \geq \nu$. To je však spor s tím, že $|F(a)| < \nu$ pro každé $a \in A$. Pro regulární $\varkappa$ je věta dokázána.

Předpokládejme nyní, že $\varkappa$ je singulár. Položme $\lambda = \mathrm{cf}(\varkappa)$ a zvolme rostoucí posloupnost $\langle \varkappa_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ kardinálů konvergující ke $\varkappa$ takovou, že $\varkappa_0 = \max(\lambda^+, \nu^+)$. Zvolme dále rozklad $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ množiny A takový, že pro každé $\alpha < \lambda$ je $|A_\alpha| = \varkappa_\alpha^+$. Kardinály $\varkappa_\alpha^+$ jsou nekonečné a regulární, $\nu < \varkappa_\alpha^+$, a proto z první části důkazu plyne, že pro $\alpha < \lambda$ existují množiny $B'_\alpha \subseteq A_\alpha$, $|B'_\alpha| = \varkappa_\alpha^+$, které jsou volné pro F.

Pro $\alpha < \lambda$ položme

$$B_\alpha = B'_\alpha - \bigcup \{F(a) : a \in \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta\}.$$

Od B'_α odečítáme množinu mohutnosti $\leq \varkappa_\alpha$, tedy $|B_\alpha| = \varkappa_\alpha^+$. Navíc pro libovolné $x \in B_\alpha$ platí

$$F(x) \cap \bigcup \{B_\beta : \alpha \leq \beta < \lambda\} = 0. \tag{4}$$

Dále rekurzí vybereme pro každé $\alpha < \lambda$ a každé $\xi < \varkappa_0$ množiny $B(\alpha, \xi) \subseteq B_\alpha$ tak, že platí

(i) $B(\alpha, \xi_1) \cap B(\alpha, \xi_2) = 0$, jakmile $\xi_1 < \xi_2 < \varkappa_0$,

(ii) je-li $x \in B(\alpha, \xi)$, pak $F(x)$ je disjunktní se $\bigcup \{B(\beta, \xi) : \beta < \alpha\}$,

(iii) je-li mohutnost množiny

$$\{x \in (B_\alpha - \bigcup_{\eta < \xi} B(\alpha, \eta)) : F(x) \cap \bigcup_{\beta < \alpha} B(\beta, \xi) = 0\} \tag{5}$$

nejvýše $\varkappa_\alpha$, pak $B(\alpha, \xi)$ je přímo množina (5), je-li mohutnost množiny (5) větší než $\varkappa_\alpha$, pak $B(\alpha, \xi)$ je nějaká její podmnožina mohutnosti $\varkappa_\alpha$.

Nyní, pokud pro nějaké $\xi < \varkappa_0$ má množina

$$X_\xi = \bigcup \{B(\alpha, \xi) : \alpha < \lambda\}$$

mohutnost $\varkappa$, jsme hotovi, protože z (4) a (ii) plyne, že X_ξ je volná množina pro F.

Dokazujeme sporem, že takové ξ existuje. Předpokládejme, že pro každé $\xi < \varkappa_0$ platí

$$|\bigcup B(\alpha, \xi) : \alpha < \lambda| < \varkappa.$$

To znamená, že pro každé $\xi < \varkappa_0$ existuje $\alpha(\xi) < \lambda$ takové, že

$$|\bigcup B(\alpha, \xi) : \alpha < \lambda| < \varkappa_{\alpha(\xi)}.$$

Jelikož $\varkappa_0$ je regulární kardinál a $\varkappa_0 > \lambda = \mathrm{cf}(\varkappa)$, existuje $\gamma < \lambda$ takové, že množina $Y = \{\xi < \varkappa_0 : \alpha(\xi) = \gamma\}$ má mohutnost $\varkappa_0$. Odtud plyne, že pro každé $\xi \in Y$ je $B(\gamma, \xi) < \varkappa_\gamma$.

Množina $B_\gamma - \bigcup\{B(\gamma,\xi): \xi < \varkappa_0\}$ je neprázdná, protože $|B_\gamma| = \varkappa_\gamma^+$ a $|B(\gamma,\xi)| \leq \leq \varkappa_\gamma$. Vezměme nějaký prvek $x \in B_\gamma - \bigcup\{B(\gamma,\xi): \xi < \varkappa_0\}$. Potom x neleží také v žádné množině $B(\gamma,\xi)$, $\xi \in Y$ a to znamená podle (iii), že pro každé $\xi \in Y$ platí $F(x) \cap \bigcup\{B(\beta,\xi): \beta < \gamma\} \neq 0$. Z toho a z (i) plyne, že $|F(x)| \geq \varkappa_0 > \nu$, a to je spor. Důkaz věty je kompletní.

Množinová zobrazení jednoznačně určují orientované grafy bez smyček. Je-li totiž $F: A \to \mathscr{P}(A)$ množinové zobrazení, pak odpovídající graf G_F sestává z množiny A jako množiny vrcholů a z vrcholu a vede hrana do vrcholu b, právě když $b \in F(a)$. Formálně $G_F = \langle A, H\rangle$, kde $H = \{\langle a, b\rangle : b \in F(a)\}$. Vidíme, že množina $B \subseteq A$ taková, že žádné dva vrcholy z B nejsou spojeny hranou v grafu G_F, je právě volnou množinou pro zobrazení F.

Naopak, je-li $G = \langle A, H\rangle$ nějaký orientovaný graf bez smyček a položíme-li $F(a) = \{b \in A: \langle a, b\rangle \in H\}$ pro každé $a \in A$, dostaneme množinové zobrazení F na A a je zřejmé, že $G = G_F$.

S množinovými zobrazeními a volnými množinami jsme se setkali již v kapitole I. Lemma o třech množinách I.8.24 neříká nic jiného, než že pro množinové zobrazení F na A takové, že pro každé $a \in A$ je $|F(a)| < 2$, existují tři volné množiny, jejichž sjednocení je A.

Stejným způsobem jako lemma o třech množinách, užitím principu kompaktnosti, lze dokázat obecnější tvrzení známé také de Bruijnovi a Erdösovi. Nechť n je kladné přirozené číslo. Je-li F množinové zobrazení na A takové, že pro každé $a \in A$ je $|F(a)| < n$, pak A je možno rozložit na $2n - 1$ volných množin.

Následující věta je alternativou zmíněného tvrzení pro případ nekonečného n.

1.28 Věta (Fodor). *Nechť λ a $\varkappa$ jsou nekonečné kardinály, $\lambda < \varkappa$. Nechť A je množina mohutnosti $\varkappa$. Je-li F množinové zobrazení na A takové, že pro každé $a \in A$ je $|F(a)| < \lambda$, pak existuje systém $S \subseteq \mathscr{P}(A)$ sestávající z volných množin a takový, že $|S| \leq \lambda$ a $\bigcup S = A$.*

Důkaz. Rekurzí pro libovolnou množinu $X \in [A]^\lambda$ definujeme množiny $X_n \subseteq A$, $n < \omega$ tak, že $X_0 = X$, $X_{n+1} = \bigcup F[X_n]$. Potom množina $X_\omega = \bigcup\{X_n : n < \omega\}$ má mohutnost λ a je uzavřená vůči F v tom smyslu, že pro každé $x \in X_\omega$ je $F(x) \subseteq X_\omega$.

Z toho plyne, že množinu A můžeme vyjádřit jako sjednocení $\varkappa$ množin $A = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, každá z nich má mohutnost λ a je uzavřená vůči F. Položíme-li pro každé $\alpha < \varkappa$

$$B_\alpha = A_\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta ,$$

je zřejmé, že množiny B_α, $\alpha < \varkappa$ pokrývají celou množinu A a jsou vzájemně disjunktní. Navíc z uzavřenosti množin A_α vůči F plyne, že pro libovolné $x \in B_\alpha$ je

$$F(x) \cap \bigcup\{B_\beta : \alpha < \beta < \varkappa\} = 0 . \tag{6}$$

Nejprve popíšeme konstrukci, jak pro libovolnou neprázdnou množinu $T \subseteq A$ získat systém $H(T)$ nejvýše λ volných podmnožin množiny T, pro který platí

$$x \in (T - \bigcup H(T)) \to (\exists y \in \bigcup H(T))(y \in F(x)). \tag{7}$$

To znamená, že systém $H(T)$ bude mít tuto vlastnost: pokud $H(T)$ nepokrývá celou množinu T, každý prvek, který nepatří do některé volné množiny z $H(T)$, je spojen s nějakým prvkem množiny $\bigcup H(T)$.

Položme $T_\alpha = T \cap B_\alpha$ pro každé $\alpha < \varkappa$. Nutně $|T_\alpha| \leq \lambda$, a proto, je-li $T_\alpha \neq 0$, všechny prvky z T_α můžeme očíslovat (případně s opakováním) tak, že

$$T_\alpha = \{a(\alpha, \xi) : \xi < \lambda\}.$$

Pro $\xi < \lambda$ zvolme maximální podmnožinu Y_ξ množiny

$$\{a(\alpha, \xi) : \alpha < \varkappa \,\&\, T_\alpha \neq 0\}$$

takovou, že

$$\beta < \alpha < \varkappa \to a(\beta, \xi) \notin F(a(\alpha, \xi)).$$

Podle (6) je Y_ξ volná množina.

Systém $H(T) = \{Y_\xi : \xi < \lambda\}$ splňuje podmínku (7), neboť je-li $x \in T - \bigcup\{Y_\xi : \xi < \lambda\}$, pak $x = a(\alpha, \xi)$ pro nějaké $\alpha < \varkappa$, $\xi < \lambda$, a protože $x \notin Y_\xi$, z maximality Y_ξ plyne, že $F(x)$ obsahuje nějaký prvek $a(\beta, \xi) \in Y_\xi$ pro $\beta < \alpha$.

Hledaný systém S nezávislých množin získáme opakovaným použitím konstrukce systému $H(T)$ pro $T \subseteq A$. Položme $T_0 = A$ a $S_0 = H(T_0)$. Dále rekurzí pro $\eta < \lambda$ získáme množiny T_η a systémy S_η volných podmnožin množiny T_η tak, že položíme

$$T_\eta = A - \bigcup\{\bigcup S_\xi : \xi < \eta\},$$
$$S_\eta = H(T_\eta), \quad \text{pokud } T_\eta \neq 0, \quad \text{jinak } S_\eta = 0.$$

Ověříme, že $S = \bigcup_{\eta < \lambda} S_\eta$ má požadované vlastnosti. Každá množina ze systému je volná pro F, $|S_\eta| \leq \lambda$ pro $\eta < \lambda$, tedy $|S| \leq \lambda$.

Zbývá ověřit, že $\bigcup S = A$. Všimněme si, že $A - \bigcup S = \bigcap\{T_\eta : \eta < \lambda\}$ a že T_η je disjunktní s množinou $\bigcup\{\bigcup S_\xi : \xi < \eta\}$. Kdyby existovalo nějaké $x \in A - \bigcup S$, pak $x \in T_\eta$ pro každé $\eta < \lambda$, proto podle (7) $F(x)$ má neprázdný průnik se všemi množinami $\bigcup S_\eta$, $\eta < \lambda$, které jsou vzájemně disjunktní, odtud plyne spor $|F(x)| \geq \lambda$. Tedy $\bigcup S = A$ a důkaz je hotov.

Dokázanou větu můžeme vyjádřit v řeči teorie grafů.

1.29 Věta. *Nechť λ je nekonečný kardinál. Je-li $G = \langle A, H \rangle$ orientovaný graf bez smyček a má-li každý jeho vrchol výstupní stupeň $<\lambda$, pak graf G je λ-obarvitelný.*

Důkaz. Jakmile $|A| \leq \lambda$, je tvrzení triviální, protože rozklad množiny A na jednoprvkové množiny zaručuje λ-obarvitelnost. Jakmile $\lambda < |A|$, pak v důsledku věty můžeme množinu A rozložit na λ volných množin. Takový rozklad určuje obarvení grafu G pomocí λ barev.

Ukážeme jednoduché použití věty 1.27 v uspořádaných množinách.

1.30 Lemma. *Nechť $\langle A, \leq \rangle$ je nekonečná uspořádaná množina. Nechť existuje kardinální číslo $v < |A|$ takové, že pro každé $a \in A$ má dolní množina $(\leftarrow, a) = \{x \in A : x < a\}$ mohutnost $< v$. Pak existuje množina $X \subseteq A$ vzájemně neporovnatelných prvků taková, že $|X| = |A|$.*

Důkaz. Položíme-li $F(a) = (\leftarrow, a)$ pro $a \in A$, získáme množinové zobrazení F na A, které spolu s v splňují předpoklady věty 1.27. Proto existuje velká volná množina X pro F. Je vidět, že různé prvky z X jsou neporovnatelné.

§ 2 Stacionární množiny

Seznámíme se s hlavními výsledky o stacionárních množinách, které úzce souvisí s ordinálními funkcemi a s filtry a ideály na ordinálech. Zavedeme pojmy uzavřená neomezená množina, stacionární a nestacionární množina, regresívní funkce, filtr uzavřených neomezených množin, normální filtr.

Dokážeme Fodorovu větu, která charakterizuje stacionární množiny pomocí regresívních funkcí. Seznámíme se s Ulamovými maticemi a větou o rozkladu stacionární množiny na stacionární podmnožiny. Dokážeme také Silverovu větu, jejíž speciální případ (bez stacionárních množin) jsme vyslovili v II.5.24.

V závěru zavedeme kombinatorické principy diamant $\diamond$ a čtvereček $\square$.

V celém oddílu $\varkappa$, λ značí nekonečná kardinální čísla, δ značí limitní ordinální číslo.

2.1 Definice. $\varkappa$-úplný filtr. Říkáme, že filtr $\mathscr{F}$ na množině X je *$\varkappa$-úplný*, jestliže libovolný průnik méně než $\varkappa$ množin z filtru $\mathscr{F}$ je opět v $\mathscr{F}$.

Ideál $\mathscr{I}$ na X je *$\varkappa$-úplný*, jestliže libovolné sjednocení méně než $\varkappa$ množin z $\mathscr{I}$ je opět v $\mathscr{I}$.

Každý filtr i ideál je podle definice ω-úplný, $\varkappa$-úplnost dává něco nového jen v případě, kdy $\varkappa$ je nespočetný kardinál. Místo ω_1-úplnosti se také mluví o *σ-úplnosti* filtru nebo ideálu. Je zřejmé, že filtr je $\varkappa$-úplný, právě když duální ideál je $\varkappa$-úplný. Hlavní filtr je charakterizován tím, že je $\varkappa$-úplným filtrem pro každý kardinál $\varkappa$.

2.2 Definice. Fréchétův filtr, ideál. Nechť X je nekonečná množina a $|X| = \varkappa$. Ideál $[X]^{<\varkappa}$ nazýváme *Fréchétovým ideálem* na X. Duální filtr k Fréchétovu ideálu nazýváme *Fréchétův filtr*.

Je-li $\mathscr{I}$ Fréchétův ideál na kardinálu λ, pak je $\mathrm{cf}(\lambda)$-úplný, není však $\mathrm{cf}(\lambda)^+$-úplný. Ideál všech spočetných podmnožin nespočetné množiny X je σ-úplným ideálem. Ideál všech množin Lebesgueovy míry nula a ideál všech hubených množin jsou známé příklady σ-úplných ideálů na reálné přímce.

Budeme se zabývat podmnožinami nějakého pevně zvoleného nekonečného kardinálního nebo limitního ordinálního čísla. Připomeňme, že každý ordinál je také topologický prostor s topologií danou dobrým uspořádáním. Má tedy své otevřené a uzavřené množiny. Ukážeme, že v některých případech uzavřené a neomezené množiny generují filtr.

2.3 Definice. Uzavřená neomezená množina. Nechť δ je limitní ordinál.

(i) Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je *neomezená* ($v\ \delta$), jestliže A je kofinální s δ, neboli $\sup A = \delta$.

(ii) Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je *uzavřená* ($v\ \delta$), jestliže pro každé limitní číslo $\alpha < \delta$ platí

$$\sup(A \cap \alpha) = \alpha \rightarrow \alpha \in A\,.$$

(iii) Říkáme, že množina $A \subseteq \delta$ je *uzavřená neomezená* ($v\ \delta$), má-li vlastnosti (i) a (ii).

Uzavřené množiny jsou právě množiny uzavřené v topologii uspořádání ordinálních čísel.

2.4 Příklady. (a) Pro každé $\alpha < \delta$ je $\delta - \alpha$ uzavřená neomezená množina v δ.

(b) Množina $\{\alpha < \delta : \alpha \text{ limitní}\}$ je uzavřená v δ a je-li δ limitou limitních ordinálů, pak je také neomezená. Množina $\{\alpha < \delta : \alpha \text{ nekonečný kardinál}\}$ je uzavřená a je neomezená, právě když δ je limitní kardinál, to znamená, že $\delta = \aleph_\beta$ pro nějaký limitní ordinál β.

2.5 Uzavřené množiny souvisejí s normálními funkcemi. Víme, že pro libovolnou množinu $A \subseteq On$ existuje jediné ordinální číslo α a jediný izomorfismus f ordinálu α a množiny A vzhledem k $<$. Říkáme také, že f je *číslující funkce množiny* A.

Pro uzavřenou množinu $A \subseteq \delta$ je číslující funkce množiny A rostoucí a spojitá, tedy normální.

Předpokládejme, že δ je regulární kardinál. Pak každá neomezená podmnožina $X \subseteq \delta$ je uspořádaná podle typu δ. Odtud je zřejmé, že uzavřené neomezené množiny v δ jsou právě obory hodnot normálních funkcí $f\colon \delta \rightarrow \delta$.

Předpokládejme nyní, že $\varkappa = \mathrm{cf}(\delta) < \delta$. Ukážeme, že existuje normální funkce definovaná na $\varkappa$, která konverguje k δ. Z definice kofinality víme, že existuje neomezená množina $X \subseteq \delta$ uspořádaná podle typu $\varkappa$. To znamená, že číslující funkce g množiny X je rostoucí, $g\colon \varkappa \rightarrow \delta$ a konverguje k δ. Položíme-li pro α limitní $f(\alpha) = \sup\{g(\beta) : \beta < \alpha\}$ a pro zbývající α $f(\alpha) = g(\alpha)$, získáme normální funkci $f\colon \varkappa \rightarrow \delta$ konvergující k δ. Obory hodnot normálních funkcí $f\colon \varkappa \rightarrow \delta$, které konvergují k δ, jsou typické příklady uzavřených neomezených množin v δ. Na rozdíl od regulárního kardinálu tím nejsou vyčerpány všechny uzavřené neomezené podmnožiny ordinálu δ.

2.6 Nechť $\mathrm{cf}(\delta) = \omega$. Pak každá množina $X \subseteq \delta$ kofinální s δ a typu ω je uzavřenou neomezenou množinou v δ. Snadno nalezneme dvě takové množiny, které jsou disjunktní, a tedy uzavřené neomezené množiny netvoří centrovaný systém.

2.7 Zajímavější a také důležitější je případ, kdy $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$. Za tohoto předpokladu je snadné ověřit, že pro neomezenou množinu $C \subseteq \delta$ je její *derivace*

$$C' = \{\alpha < \delta : \alpha \text{ je hromadný bod množiny } C\}$$

uzavřenou neomezenou množinou v δ.

Dále ukážeme, že uzavřené neomezené množiny tvoří centrovaný systém.

2.8 Definice. Je-li $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$, systém

$$\mathrm{Cub}(\delta) = \{X \subseteq \delta : (\exists A \subseteq X)(A \text{ je uzavřená neomezená v } \delta)\}$$

se nazývá filtr generovaný uzavřenými neomezenými množinami nebo stručněji *filtr uzavřených neomezených množin.*

Nadmnožina uzavřené množiny nemusí být sama uzavřená, proto každá množina v $\mathrm{Cub}(\delta)$ je neomezená, ale nemusí být uzavřená. Podstatné však je, že uzavřené neomezené množiny tvoří bázi filtru $\mathrm{Cub}(\delta)$, jak vyplývá z následujícího tvrzení.

2.9 Lemma. *Nechť* $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$. *Potom*

(i) *průnik libovolného systému méně než* $\mathrm{cf}(\delta)$ *uzavřených neomezených množin je opět uzavřená neomezená množina,*

(ii) $\mathrm{Cub}(\delta)$ *je* $\mathrm{cf}(\delta)$*-úplný filtr.*

Důkaz. (i) Nechť ν je kardinál $< \mathrm{cf}(\delta)$ a nechť A_i, $i < \nu$ jsou uzavřené neomezené množiny. Ověříme, že $A = \bigcap A_i$ je také uzavřená neomezená. Je zřejmé, že A je uzavřená, dokazujeme neomezenost. Nechť $\alpha_0 < \delta$. Rekurzí pro $n < \omega$ budeme definovat rostoucí posloupnost ordinálů $\alpha_n < \delta$ tak, že každý interval $[\alpha_n, \alpha_{n+1})$ má neprázdný průnik s každou množinou A_i. Odtud, z uzavřenosti množin A_i a nespočetné kofinality δ plyne, že $\alpha = \sup \alpha_n < \delta$, $\alpha \in A$, $\alpha > \alpha_0$, proto A je neomezená.

Mějme definováno α_n. Z neomezenosti množin A_i plyne, že množiny $A_i - \alpha_n$ jsou neprázdné. Nechť $X \subseteq \delta$ je nějaká množina, která vybírá alespoň jeden prvek z každé množiny $A_i - \alpha_n$, $i < \nu$, a $|X| \leq \nu$. Položíme-li $\alpha_{n+1} = \sup X + 1$, pak $\alpha_n < \alpha_{n+1} < \delta$, a jelikož $X \subseteq [\alpha_n, \alpha_{n+1})$, je splněna podmínka neprázdných průniků.

(ii) Z první části důkazu víme, že průnik libovolného konečného počtu uzavřených neomezených množin je opět množina uzavřená a neomezená, tedy neprázdná. To znamená, že $\mathrm{Cub}(\delta)$ je filtr. Nechť $X_\alpha \in \mathrm{Cub}(\delta)$ pro $\alpha < \nu$, kde $\nu < \mathrm{cf}(\delta)$. Vyberme uzavřené neomezené množiny $A_\alpha \subseteq X_\alpha$, pak $\bigcap A_\alpha \subseteq \bigcap X_\alpha$, a tedy podle (i) je $\bigcap X_\alpha \in \mathrm{Cub}(\delta)$. Ověřili jsme, že filtr $\mathrm{Cub}(\delta)$ je $\mathrm{cf}(\delta)$-úplný.

Podmnožiny ordinálu δ se dělí z hlediska filtru uzavřených neomezených množin na malé a velké, pro které zavedeme zvláštní pojmenování. Připomeňme, že $\mathrm{Cub}^*(\delta)$ značí duální ideál k filtru $\mathrm{Cub}(\delta)$.

2.10 Definice. Stacionární množiny. Nechť $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$.

(i) Říkáme, že množina $E \subseteq \delta$ je *stacionární* (*v* δ), jestliže $E \notin \mathrm{Cub}^*(\delta)$.

(ii) Množiny ležící v ideálu $\mathrm{Cub}^*(\delta)$ se nazývají *nestacionární*.

Je zřejmé, že množina $X \subseteq \delta$ je stacionární, právě když má neprázdný průnik s každou uzavřenou neomezenou množinou $C \subseteq \delta$. Tuto charakterizaci budeme často používat při důkazu, že daná množina je stacionární. Každá množina z $\mathrm{Cub}(\delta)$ je stacionární. Je-li $E \subseteq \delta$ stacionární a $A \in \mathrm{Cub}(\delta)$, pak průnik $E \cap A$ je stacionární množina. Sjednocení méně než $\mathrm{cf}(\delta)$ nestacionárních množin je nestacionární množina. Tedy, rozložíme-li nějakou stacionární množinu v δ na méně než $\mathrm{cf}(\delta)$ množin, pak alespoň jedna množina rozkladu je stacionární.

2.11 Příklad. Nechť $\mathrm{cf}(\delta) > \nu$, kde ν je nekonečný regulární kardinál. Ukážeme, že množina

$$E(\nu) = \{\alpha < \delta : \mathrm{cf}(\alpha) = \nu\}$$

je stacionární v δ.

Libovolná uzavřená neomezená množina C v δ má mohutnost $> \nu$. Pro ν-tý prvek c_ν množiny C z uzavřenosti C plyne $\mathrm{cf}(c_\nu) = \nu$. Tedy $E(\nu) \cap C \neq 0$ pro každou uzavřenou neomezenou množinu C a to znamená, že $E(\nu)$ je stacionární.

Speciálně $E(\omega) \subseteq \omega_2$ a $E(\omega_1) \subseteq \omega_2$ je příklad dvou disjunktních stacionárních množin v ω_2.

Normální funkce zprostředkují převod mezi stacionárními množinami v δ a stacionárními množinami v $\varkappa = \mathrm{cf}(\delta) > \omega$. Je-li $f: \varkappa \to \delta$ normální funkce, která konverguje k δ, pak zřejmě obraz uzavřené neomezené množiny v $\varkappa$ je uzavřená neomezená množina v δ. Na druhou stranu, je-li A uzavřená neomezená v δ, pak podle 2.5 je také $A \cap \mathrm{Rng}(f)$ uzavřená neomezená v δ, a proto množina

$$\{\alpha < \varkappa : f(\alpha) \in A\} = f^{-1}[\mathrm{Rng}(f) \cap A]$$

je uzavřená neomezená v $\varkappa$. Tím jsme dokázali:

2.12 Lemma. *Nechť* $\varkappa = \mathrm{cf}(\delta) > \omega$. *Je-li* $f: \varkappa \to \delta$ *normální funkce, která konverguje k* δ, *pak pro libovolné* $A \subseteq \delta$ *platí*:

(i) $A \in \mathrm{Cub}(\delta) \leftrightarrow \{\alpha < \varkappa : f(\alpha) \in A\} \in \mathrm{Cub}(\varkappa)$,

(ii) A *je stacionární v* $\delta \leftrightarrow \{\alpha < \varkappa : f(\alpha) \in A\}$ *je stacionární v* $\varkappa$.

Z předchozího vyplývá, že stačí zabývat se stacionárními množinami na regulárních kardinálech větších než ω.

2.13 Definice. Diagonální průnik, normální filtr.

(i) Nechť $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je soubor podmnožin kardinálu $\varkappa$. Množinu $\Delta A_\alpha = \{\gamma < \varkappa : (\forall \alpha < \gamma)(\gamma \in A_\alpha)\}$ nazýváme *diagonálním průnikem* množin A_α.

(ii) Filtr $\mathscr{F}$ na $\varkappa$, který rozšiřuje Fréchétův filtr a je uzavřený na diagonální průniky, se nazývá *normální filtr*. *Normální ideál* je ideál duální k normálnímu filtru.

Snadno se ověří, že

$$\Delta A_\alpha = \bigcap\{A_\alpha \cup \alpha : \alpha < \varkappa\}.$$

Normalita je zesílením $\varkappa$-úplnosti. Předpokládejme, že $\mathscr{F}$ je normální filtr na $\varkappa$, a nechť pro dané $\nu < \varkappa$ jsou B_α, $\alpha < \nu$ množiny z $\mathscr{F}$. Potom množina $B = \bigcap\{B_\alpha \cup \alpha : \alpha < \nu\}$ je diagonálním průnikem souboru $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa\rangle$, kde $A_\alpha = B_\alpha$ pro $\alpha < \nu$ a $A_\alpha = \varkappa$ pro $\nu \leq \alpha < \varkappa$, tedy $B \in \mathscr{F}$. Navíc $\bigcap\{B_\alpha : \alpha < \nu\} \supseteq B \cap (\varkappa - \nu)$ a $\varkappa - \nu \in \mathscr{F}$, protože $\mathscr{F}$ rozšiřuje Fréchétův filtr. To znamená, že $\bigcap_{\alpha<\nu} B_\alpha \in \mathscr{F}$, a tedy normální filtr na $\varkappa$ je $\varkappa$-úplný.

Odtud plyne, že na žádném singulárním kardinálu neexistuje normální filtr. Neexistuje ani na ω. Zbývají tedy nespočetné regulární kardinály. Je-li $\varkappa$ takový kardinál, pak množiny $\varkappa - \alpha$ pro $\alpha < \varkappa$ tvoří bázi Fréchétova filtru na $\varkappa$ a jsou současně uzavřené neomezené, proto $\mathrm{Cub}(\varkappa)$ rozšiřuje Fréchétův filtr.

2.14 Lemma. *Nechť $\varkappa > \omega$ je regulární kardinál. Jsou-li A_α, $\alpha < \varkappa$ uzavřené neomezené množiny, pak diagonální průnik ΔA_α je opět uzavřená neomezená množina. To znamená, že filtr* $\mathrm{Cub}(\varkappa)$ *je normální filtr na $\varkappa$.*

Důkaz. Ověříme neomezenost ΔA_α, uzavřenost je zřejmá. Zvolme $\xi_0 < \varkappa$. Podle 2.9 víme, že $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \leq \xi_0\}$ je neomezená množina. Nechť ξ_1 je nejmenší prvek této množiny $> \xi_0$. Rekurzí získáme rostoucí posloupnost ξ_n délky ω takovou, že $\xi_{n+1} \in \bigcap\{A_\alpha : \alpha \leq \xi_n\}$ a $\xi_{n+1} > \xi_n$ platí pro každé $n < \omega$. Pro $\xi = \sup \xi_n$ z uzavřenosti množin A_α plyne $\xi \in \bigcap\{A_\alpha : \alpha < \xi\}$, to znamená, že $\xi \in \Delta A_\alpha$. Dokázali jsme, že ΔA_α je uzavřená neomezená množina.

Nechť $\langle X_\alpha : \alpha < \varkappa\rangle$ je libovolný soubor množin z $\mathrm{Cub}(\varkappa)$. Vybereme uzavřené neomezené množiny $A_\alpha \subseteq X_\alpha$. Jelikož $\Delta A_\alpha \subseteq \Delta X$ a podle předchozího $\Delta A_\alpha \in \mathrm{Cub}(\varkappa)$, je také $\Delta X_\alpha \in \mathrm{Cub}(\varkappa)$. Ukázali jsme, že $\mathrm{Cub}(\varkappa)$ je uzavřený na diagonální průniky, a protože $\varkappa$ je regulární, rozšiřuje Fréchétův filtr. Tedy $\mathrm{Cub}(\varkappa)$ je normální filtr na $\varkappa$.

2.15 Definice. Regresívní funkce. Nechť A je množina ordinálních čísel. Říkáme, že funkce $f: A \longrightarrow On$ je *regresívní na A*, jestliže pro každé nenulové $\alpha \in A$ je $f(\alpha) < \alpha$.

Jinými slovy, funkce je regresívní, je-li všude, kromě nuly, menší než identické zobrazení.

Následující, často používané tvrzení charakterizuje stacionární množiny pomocí regresívních funkcí. Vysvětluje pojem stacionární množiny, protože každá regresívní funkce na takové množině nabývá stejné hodnoty v neomezeně mnoha bodech.

2.16 Věta (Fodor 1956). *Nechť $\varkappa > \omega$ je regulární kardinál. Pro množinu $E \subseteq \varkappa$ jsou následující vlastnosti ekvivalentní:*

(i) *E je stacionární,*

(ii) *pro každou regresívní funkci na E existuje $\alpha < \varkappa$ takové, že $f^{-1}\{\alpha\}$ je neomezená množina,*

(iii) *každá regresívní funkce na E je konstantní na nějaké stacionární množině.*
Důkaz. Postupně dokážeme (i) → (iii) → (ii) → (i).

(i) → (iii). Nechť E je stacionární množina. Předpokládejme naopak, že f je regresívní funkce na E taková, že pro každé $\alpha < \varkappa$ je $f^{-1}\{\alpha\}$ nestacionární množina. Pro každé $\alpha < \varkappa$ zvolme uzavřenou neomezenou množinu A_α takovou, že $A_\alpha \cap f^{-1}\{\alpha\} = 0$. Nechť $A = \Delta A_\alpha$. Víme, že A je uzavřená neomezená, a proto $A \cap E$ musí být neomezená množina. Vezměme libovolné $\gamma \in E$, $\gamma > 0$. Pro $\alpha = f(\gamma)$ platí $\alpha < \gamma$, protože f je regresívní, a $\gamma \in f^{-1}\{\alpha\}$. Odtud plyne, že $\gamma \notin A_\alpha$, a proto také $\gamma \notin A$. Ukázali jsme, že $A \cap E \subseteq \{0\}$, a to je spor.

(iii) → (ii) je zřejmé, protože stacionární množina je neomezená.

(ii) → (i). Pro nestacionární množinu $X \subseteq \varkappa$ nalezneme regresívní funkci f na X, jejíž všechny vzory jsou omezené množiny. Zvolme uzavřenou neomezenou množinu A disjunktní s X. Nechť ξ je nejmenší prvek v A. Pro $\beta \in X$ položme

$$f(\beta) = \begin{cases} \sup(A \cap \beta), & \text{jestliže } \beta > \xi, \\ 0, & \text{jestliže } \beta \leq \xi. \end{cases}$$

Je-li $\beta \in X$ a $\beta > \xi$, je $f(\beta) \in A$, protože $A \cap \beta \neq 0$ a A je uzavřená. Navíc, $f(\beta) \leq \beta$, $\beta \notin A$, a proto $f(\beta) < \beta$. Tedy f je regresívní na X. Funkce f nesplňuje (ii), protože pro libovolné $\alpha < \varkappa$ platí $f^{-1}[\alpha] = \{\beta \in X : f(\beta) < \alpha\} \subseteq \gamma$, jakmile $\gamma \in A$ a $\gamma > \alpha$. Důkaz je hotov.

2.17 Předpokládejme, že f je nějaká regresívní funkce na stacionární množině $E \subseteq \lambda$, kde λ je regulární kardinál $> \omega$. Zajímají nás vzory $f^{-1}\{\alpha\}$, které jsou stacionárními množinami. Nechť S je systém všech stacionárních vzorů funkce f. S je disjunktní systém množin a z 2.16(iii) plyne, že S pokrývá celou množinu E až na nestacionární množinu. Navíc S je maximální disjunktní systém stacionárních podmnožin množiny E v následujícím smyslu: pro každou stacionární podmnožinu $X \subseteq E$ existuje stacionární $X_1 \subseteq X$, která je podmnožinou nějaké $Y \in S$. To znamená, že $X \cap Y$ je také stacionární množina.

Ukážeme, že každou stacionární množinu $E \subseteq \lambda$ lze rozložit na λ stacionárních podmnožin, nebo ekvivalentně, že existuje λ vzájemně disjunktních stacionárních podmnožin množiny E. Zajímají nás v této souvislosti regulární kardinály $\lambda > \omega$. Pro takové λ může nastat jedna z možností: buď $\lambda = \varkappa^+$, to znamená, že λ je následník nekonečného kardinálu $\varkappa$, nebo λ je limitní regulární kardinál a to znamená, že λ je slabě nedosažitelný kardinál.

Nejprve se budeme zabývat kardinály, které jsou následníky nekonečného kardinálu.

2.18 Ulamovy matice. Popíšeme konstrukci matice sestávající z podmnožin kardinálu ω_1. Podstatně využijeme toho, že ω_1 je následník kardinálu ω, to znamená, že ω lze zobrazit na každé $\alpha < \omega_1$.

Pro každé γ, $\omega \leq \gamma < \omega_1$ zvolme vzájemně jednoznačné zobrazení f_γ kardinálu ω na γ. Systém $\{f_\gamma : \omega \leq \gamma < \omega_1\}$ určuje ω zobrazení $g_n : (\omega_1 - \omega) \to \omega_1$, kde $g_n(\gamma) = f_\gamma(n)$ pro každé $\omega \leq \gamma < \omega_1$. Nyní položme

$$X(n, \beta) = \{\gamma > \beta : g_n(\gamma) = \beta\}$$

pro každé $n < \omega$ a každé $\beta < \omega_1$. Dostáváme tak systém podmnožin kardinálu ω_1 indexovaný prvky $\omega \times \omega_1$ neboli (ω, ω_1)-matici

$$(1) \qquad \langle X(n, \beta) : n < \omega, \beta < \omega_1 \rangle .$$

Ověříme, že každý řádek i sloupec matice (1) je disjunktním systémem množin a že sjednocení každého řádku i každého sloupce je celé ω_1 až na spočetnou množinu. Množiny $X(n, \beta)$, $\beta < \omega_1$ jsou právě vzory funkce g_n, proto jsou vzájemně disjunktní a $\bigcup\{X(n, \beta) : \beta < \omega_1\} = \omega_1 - \omega$. Všechny funkce f_γ jsou prosté, a proto pro $n \neq m$ jsou funkce g_n a g_m všude různé. To znamená, že každý sloupec sestává ze vzájemně disjunktních množin. Protože f_γ je zobrazení ω na celé γ, je pro každé $\beta < \omega_1$

$$\bigcup\{X(n, \beta) : n < \omega\} = \omega_1 - (\beta + 1) .$$

Sjednocením libovolného sloupce nebo řádku matice (1) dostáváme celé ω_1 až na spočetnou podmnožinu.

Všimněme si, že všechny funkce g_n jsou regresívní na $\omega_1 - \omega$.

2.19 Definice. Říkáme, že soubor $\langle X(\alpha, \beta) : \alpha < \varkappa, \beta < \varkappa^+ \rangle$ podmnožin kardinálu $\varkappa^+$ je *Ulamovou maticí* na $\varkappa^+$, jestliže pro každé $\alpha < \varkappa$ a $\beta < \varkappa^+$ platí

(i) $\beta_1 \neq \beta_2 \to X(\alpha, \beta_1) \cap X(\alpha, \beta_2) = 0$,

(ii) $\alpha_1 \neq \alpha_2 \to X(\alpha_1, \beta) \cap X(\alpha_2, \beta) = 0$,

(iii) $|\varkappa^+ - \bigcup\{X(\alpha, \beta) : \beta < \varkappa^+\}| \leq \varkappa$,

(iv) $|\varkappa^+ - \bigcup\{X(\alpha, \beta) : \alpha < \varkappa| \leq \varkappa$.

Matice (1) je Ulamovou maticí na $\omega_1 = \omega^+$. Stejným postupem jako ve 2.18 se dokáže:

2.20 Věta (Ulam 1930). *Pro každý nekonečný kardinál $\varkappa$ existuje Ulamova matice na $\varkappa^+$.*

Tato věta má několik zajímavých důsledků.

2.21 Věta (Ulam). *Nechť $\lambda = \varkappa^+$ je následník nekonečného kardinálu. Je-li $\mathscr{I}$ λ-úplný ideál na λ rozšiřující Fréchétův ideál, pak existuje λ vzájemně disjunktních množin, žádná z nich neleží v $\mathscr{I}$.*

Důkaz. Pokud $\mathscr{I}$ je přímo Fréchétův ideál, tvrzení je snadné, protože stačí vzít rozklad kardinálu λ na λ množin, každou mohutnosti λ.

Pro obecný případ použijeme Ulamovu matici $\langle X(\alpha, \beta) : \alpha < \varkappa, \beta < \lambda \rangle$ na λ. Sjednocení každého sloupce matice leží v duálním filtru $\mathscr{I}^*$. Ideál $\mathscr{I}$ je λ-úplný a každý sloupec má méně než λ množin. Proto pro každé $\beta < \lambda$ existuje číslo

$h(\beta) < \varkappa$ takové, že $X(h(\beta), \beta) \notin \mathscr{I}$. Máme funkci h z regulárního $\lambda = \varkappa^+$ do $\varkappa$. Proto existuje $\alpha < \varkappa$, pro které $|h^{-1}\{h\}| = \lambda$. Pro takové α je $\{X(\alpha, \beta): h(\beta) = \alpha\}$ hledaným systémem množin.

2.22 Důsledek (Ulam). *Na $\lambda = \varkappa^+$ neexistuje λ-úplný uniformní ultrafiltr.*

Jinými slovy, následník kardinálu není měřitelným kardinálem, viz 5.26.

2.23 Důsledek (Fodor). (i) *Je-li $\lambda = \varkappa^+ > \omega$, každou stacionární množinu $E \subseteq \lambda$ lze rozložit na λ stacionárních podmnožin.*

(ii) *Pro každé regulární $\lambda > \omega$ existuje λ vzájemně disjunktních stacionárních podmnožin λ.*

Důkaz. (i) Ideál $\mathscr{I} = \{X \subseteq \lambda : X \cap E \in \mathrm{Cub}^*(\lambda)\}$ splňuje předpoklady věty 2.21, proto existuje λ vzájemně disjunktních množin $D_\alpha \subseteq \lambda$, které neleží v $\mathscr{I}$. To znamená, že pro každé $\alpha < \lambda$ je $E_\alpha = E \cap D_\alpha$ stacionární množina, a tedy $\{E_\alpha : \alpha < \lambda\}$ je disjunktní systém stacionárních podmnožin množiny E.

(ii) Je-li $\lambda = \varkappa^+$, jde o speciální případ tvrzení (i). Je-li λ limitní, tedy slabě nedosažitelné, pak existuje λ nekonečných regulárních kardinálů $\nu < \lambda$ a podle 2.11 pro každé takové ν je $E(\nu) = \{\alpha < \lambda : \mathrm{cf}(\alpha) = \nu\}$ stacionární množina v λ. Navíc, pro $\nu_1 \neq \nu_2$ je $E(\nu_1) \cap E(\nu_2) = 0$.

R. Solovay ukázal, že i v případě slabě nedosažitelného λ lze každou stacionární množinu rozložit na plnou mohutnost stacionárních podmnožin. K důkazu potřebujeme jemnější prostředky.

2.24 Definice. Nechť $A \subseteq On$. (i) Říkáme, že $\delta \in A$ je *stacionárním bodem* v A, jestliže $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$ a množina $A \cap \delta$ je stacionární v δ.

(ii) $\mathrm{nst}(A)$ značí množinu bodů v A, které nejsou stacionární v A. Speciálně každé $\alpha \in A$, které je izolované číslo nebo má spočetnou kofinalitu, leží v $\mathrm{nst}(A)$.

2.25 Lemma (Solovay). *Nechť λ je regulární nespočetný kardinál. Je-li $E \subseteq \lambda$ stacionární v λ, pak* $\mathrm{nst}(E)$ *je opět stacionární množina v λ.*

Důkaz. Nechť C je libovolná uzavřená neomezená množina v λ. Vezměme množinu C' všech hromadných bodů množiny C. C' je také uzavřená neomezená a $C' \subseteq C$. Množina E je stacionární, proto $E \cap C' \neq 0$, a nechť δ je nejmenší prvek tohoto průniku. Zřejmě δ je limitní ordinál a je-li $\mathrm{cf}(\delta) = \omega$, pak $\delta \in \mathrm{nst}(E)$. Je-li $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$, z definice C' plyne, že množina $\delta \cap C'$ je uzavřená neomezená v δ. Přitom $E \cap (\delta \cap C') = 0$. To znamená, že $E \cap \delta$ je nestacionární v δ, tedy opět $\delta \in \mathrm{nst}(E)$. Ukázali jsme, že $\delta \in \mathrm{nst}(E) \cap C$. Množina $\mathrm{nst}(E)$ má neprázdný průnik s každou uzavřenou neomezenou množinou, a proto je stacionární.

2.26 Příklady. (a) Nechť δ je limitní ordinál. Ptáme se, pro jaké množiny $X \subseteq \delta$ existuje regresívní funkce f na X, která je neklesající a konverguje k δ.

Všimněme si, že pro regresívní neklesající funkci f konvergující k δ platí

$$(2) \qquad (\forall \alpha < \delta)(f^{-1}[\alpha] \text{ je omezená v } \delta).$$

Z regresívnosti plyne, že množina X musí být neomezená. Předpokládejme $\mathrm{cf}(\delta) = \omega$ a vezměme rostoucí posloupnost ξ_n, $n < \omega$ konvergující k δ, pro kterou $\xi_0 = 0$. Položíme-li $f(0) = 0$ a $f(\alpha) = \max\{\xi_n : \xi_n < \alpha\}$ pro $0 < \alpha < \delta$, je f funkce definovaná na δ, která je neklesající regresívní a konverguje k δ. Tyto vlastnosti má i zúžení $f \mid X$ na libovolnou neomezenou množinu $X \subseteq \delta$.

Je-li $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$, pak z důkazu 2.16 a 2.12 plyne, že pro neomezenou množinu $X \subseteq \delta$ existuje regresívní neklesající funkce na X konvergující k δ, právě když X je nestacionární v δ.

(b) Je-li f regresívní a neklesající na stacionární podmnožině regulárního kardinálu $\lambda > \omega$, pak f má právě jeden stacionární vzor.

2.27 Věta (Solovay 1971). *Nechť $\lambda > \omega$ je regulární kardinál. Každou stacionární množinu $E \subseteq \lambda$ můžeme rozložit na λ vzájemně disjunktních stacionárních množin.*

Důkaz. Uvažujme množinu $A = \mathrm{nst}(E) \cap E'$. A je stacionární v λ, protože je průnikem stacionární a uzavřené neomezené množiny, $A \subseteq E$. Každé $\delta \in A$ je limitní, $E \cap \delta$ je neomezená v δ a je-li $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$, je navíc nestacionární v δ. Využijeme 2.26(a) a pro každé $\delta \in A$ zvolíme regresívní neklesající funkci f_δ definovanou na $E \cap \delta$, která konverguje k δ.

Pro libovolné $\xi \in E$ je zobrazení g_ξ definované na $A - (\xi + 1)$ předpisem

$$g_\xi(\delta) = f_\delta(\xi)$$

všude menší než ξ, to znamená, že je regresívní na stacionární množině, a má proto nějaký stacionární vzor.

Pro libovolné $\xi \in E$ položme

$$f(\xi) = \min\{\beta : g_\xi^{-1}\{\beta\} \text{ je stacionární v } \lambda\}.$$

Funkce f je regresívní na E a protože f_δ jsou neklesající, je neklesající také f. Podle 2.26(b) to však znamená, že f je všude menší nebo rovna α, kde α je jediné číslo, pro které je vzor $f^{-1}\{\alpha\}$ stacionární množina.

Konečně definujme funkci g na $A - (\alpha + 1)$ předpisem

$$g(\delta) = \sup\{\xi \in E \cap \delta : f_\delta(\xi) \leq \alpha\}. \tag{3}$$

Z vlastnosti (2) funkcí f_δ plyne, že množina na pravé straně rovnosti (3) je omezená v δ, tedy $g(\delta) < \delta$. To znamená, že g je regresívní funkce na stacionární množině.

Naším cílem je ukázat, že g má λ stacionárních vzorů. Tím bude dokázáno, že množinu A, ale také $E \supseteq A$, lze rozložit na λ stacionárních množin.

Předpokládejme, že g má méně než λ stacionárních vzorů. Z regularity λ plyne, že existují $\gamma < \lambda$ a nestacionární množina M (můžeme předpokládat $\alpha + 1 \subseteq M$) takové, že pro každé $\delta \in A - M$ je $g(\delta) < \gamma$. Podle definice funkce g to znamená, že pro každé $\xi \in E$, $\xi > \gamma$ a pro každé $\delta \in A - M$, $\delta > \xi$ je $f_\delta(\xi) > \alpha$. Zvolme nějaké $\xi \in E$, $\xi > \gamma$. Právě jsme ukázali, že množina $\{\delta \in A - (\xi + 1) : f_\delta(\xi) > \alpha\}$ je celé A až na nestacionární množinu. Současně množina

$$\{\delta \in A - (\xi + 1) : f_\delta(\xi) \le \alpha\} = g_\xi^{-1}[\alpha]$$

je stacionární podmnožinou množiny A — to je spor. Tedy g má λ stacionárních vzorů a důkaz je skončen.

2.28 Příklad. *Počet ultrafiltrů rozšiřujících daný filtr.*
(a) Je-li $\mathcal{F}$ filtr uzavřených neomezených množin na regulárním $\lambda > \omega$ nebo
(b) je-li $\mathcal{F}$ uniformní filtr na $\lambda \ge \omega$ a má charakter $\le \lambda$ nebo
(c) je-li $\mathcal{F}$ uniformní σ-úplný filtr na ω_1, pak počet všech ultrafiltrů rozšiřujících filtr $\mathcal{F}$ je stejný jako počet všech ultrafiltrů na uvažovaném kardinálu.

Ve všech třech případech se důkaz opírá o stejnou vlastnost filtru $\mathcal{F}$: existuje λ vzájemně disjunktních množin $A_\alpha \subseteq \lambda$, z nichž každá je kompatibilní s $\mathcal{F}$. To znamená, že $\mathcal{F} \cup \{A_\alpha\}$ tvoří centrovaný systém. V případě (a) plyne existence systému A_α, $\alpha < \lambda$ z existence rozkladu λ na λ stacionárních množin, v případě (b) plyne z 1.3 a 1.4(a) a v případě (c) z věty 2.21 pro $\lambda = \omega_1$.

Nyní pro každý ultrafiltr $\mathcal{U}$ na λ je

$$\mathcal{F} \cup \{\bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha : X \in \mathcal{U}\}$$

centrovaný systém. Pro různé ultrafiltry na λ jsou centrované systémy neslučitelné, a proto se rozšiřují do různých ultrafiltrů. To znamená, že existuje 2^{2^λ} ultrafiltrů na λ, které rozšiřují daný filtr $\mathcal{F}$.

2.29 Hypotéza kontinua a singulární kardinály. Dokážeme Silverovu větu II.5.24, ze které vyplývá, že singulární kardinál s nespočetnou kofinalitou nemůže být první, pro který se poruší zobecněná hypotéza kontinua. Stacionární množiny hrají důležitou roli v důkaze a umožňují obecnější formulaci: platí-li hypotéza kontinua pro dostatečně mnoho menších kardinálních čísel, platí i pro daný singulár. Proto je věta 5.24 z II. kapitoly speciálním případem následujícího tvrzení.

2.30 Věta (Silver 1974). *Nechť λ je singulár s nespočetnou kofinalitou. Je-li množina $\{\nu < \lambda : 2^\nu = \nu^+\}$ stacionární v λ, pak $2^\lambda = \lambda^+$.*

V dalším λ značí singulární kardinál s nespočetnou kofinalitou a $\varkappa = \mathrm{cf}(\lambda)$. Nejmenší takový kardinál je $\aleph_{\omega_1}$ s kofinalitou ω_1.

Důkaz Silverovy věty spočívá v odhadech mohutnosti systémů skoro všude různých funkcí.

2.31 Definice. Nechť $A \subseteq \varkappa$. Říkáme, že *funkce f, g* definované na $\varkappa$ jsou na A *skoro všude různé*, jestliže existuje $\alpha < \varkappa$ takové, že pro všechna $\beta \in A$ a $\beta \ge \alpha$ je $f(\beta) \ne g(\beta)$.

Podle předpokladu je λ singulár s kofinalitou $\varkappa$ a z 2.5 plyne, že existuje normální funkce $h: \varkappa \to \lambda$, která konverguje k λ a její hodnoty jsou nekonečná kardinální čísla. Zvolme jednu takovou funkci $\langle \lambda_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$.

Zajímají nás funkce z kartézského součinu

(4) $$\mathsf{X}\{\lambda_\alpha : \alpha < \varkappa\}.$$

Je podstatné, že systémy skoro všude různých funkcí z (4) mají, za jistých předpokladů, menší mohutnost než celý kartézský součin. Snadno se ukáže, že součin (4) má mohutnost $\lambda^\varkappa > \lambda$.

Následující lemma je klíčem k důkazu Silverovy věty.

2.32 Lemma. *Nechť pro každé $\alpha < \varkappa$ je $\lambda_\alpha^\varkappa < \lambda$ a nechť $A \subseteq \varkappa$ je stacionární množina v $\varkappa$.*

(i) *Každý systém $S \subseteq \mathsf{X}_{\alpha<\varkappa} \lambda_\alpha$ skoro všude na A různých funkcí má mohutnost $\leq \lambda$.*

(ii) *Každý systém $T \subseteq \mathsf{X}_{\alpha<\varkappa} \lambda_\alpha^+$ skoro všude na A různých funkcí má mohutnost $\leq \lambda^+$.*

Důkaz. Kardinály λ_α konvergují k λ, proto z předpokladu plyne, že pro každé $\nu < \lambda$ platí $\nu^\varkappa < \lambda$, speciálně $\varkappa^\varkappa = 2^\varkappa < \lambda$.

(i) Nechť B je množina všech limitních ordinálů z A. Je zřejmé, že $B \subseteq A$ je také stacionární v $\varkappa$. Pro libovolné $f \in \mathsf{X}_{\alpha<\varkappa} \lambda_\alpha$ definujme funkci $f_*: B \to \varkappa$ předpisem

$$f_*(\alpha) = \min\{\beta < \varkappa : f(\alpha) < \lambda_\beta\}.$$

Z normality posloupnosti $\langle \lambda_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ plyne, že f_* je regresívní na B, a tedy pro nějaké $\beta < \varkappa$ je vzor $B_f = f_*^{-1}\{\beta\}$ stacionární. Pro takové β je funkce $f \mid B_f$ omezená číslem λ_β.

Každému f přiřaďme funkci $\varphi(f) = f \mid B_f$. Pro různé $f, g \in S$ jsou $\varphi(f)$ a $\varphi(g)$ také různé, protože B_f a B_g jsou stacionární podmnožiny množiny A a podle předpokladu jsou f a g skoro všude na A různé. To znamená, že φ zobrazuje jednoznačně systém S do $D = \bigcup\{{}^X\lambda_\alpha : \alpha < \varkappa, X \subseteq \varkappa\}$. Odtud $|S| \leq |D| \leq 2^\varkappa \cdot \sum_{\alpha<\varkappa} \lambda_\alpha^\varkappa = 2^\varkappa \cdot \lambda = \lambda$. Tedy $|S| \leq \lambda$.

(ii) Na T zavedeme lineární uspořádání $\lhd$ a ukážeme, že pro každé $f \in T$ má dolní úsek $(\leftarrow, f)$ mohutnost $\leq \lambda$. Odtud již snadno plyne, že $|T| \leq \lambda^+$.

Zvolme ultrafiltr $\mathcal{U}$ na $\varkappa$, který rozšiřuje filtr $\mathrm{Cub}(\varkappa)$ takový, že $A \in \mathcal{U}$. To znamená, že každá množina $X \in \mathcal{U}$ je stacionární v $\varkappa$. Pro $f, g \in T$ definujme

$$f \lhd g \leftrightarrow \{\alpha < \varkappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U}.$$

Snadno se nahlédne, že $\lhd$ je antireflexivní a tranzitivní. Protože různá $f, g \in T$ mají skoro všude na A různé hodnoty, platí buď $g \lhd f$, nebo $f \lhd g$. Odtud plyne, že $\lhd$ je lineární uspořádání.

Vezměme $f \in T$ a označme $W = (\leftarrow, f)$. Odhadujeme mohutnost W. Pro $g \in W$ položme $B_g = \{\alpha \in A : g(\alpha) < f(\alpha)\}$. Jelikož $B_g \in \mathcal{U}$, je $B_g \subseteq A$ stacionární v $\varkappa$. Systém W prostě zobrazíme na systém $W' \subseteq \mathsf{X}_{\alpha<\varkappa} \lambda_\alpha$. Pro každé $\alpha < \varkappa$ je $f(\alpha) < \lambda_\alpha^+$, proto můžeme zvolit prosté zobrazení $\varphi_\alpha : f(\alpha) \to \lambda_\alpha$. Pomocí souboru zobrazení φ_α přiřadíme funkci $g \in W$ funkci $g' \in \mathsf{X}_{\alpha<\varkappa} \lambda_\alpha$ předpisem

$$g'(\alpha) = \begin{cases} \varphi_\alpha(g(\alpha)), & \text{je-li} \quad \alpha \in B_g, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jsou-li $g_1, g_2 \in W$ různé funkce, pak g'_1, g'_2 jsou skoro všude různé na $B_{g_1} \cap B_{g_2} \in \mathcal{U}$. To znamená, že $W' = \{g' : g \in W\}$ má stejnou mohutnost jako W. Je-li X stacionární podmnožina $\varkappa$, položme

$$W'(X) = \{g' \in W' : X \subseteq B_g\}.$$

Zřejmě $W' = \bigcup\{W'(X) : X \subseteq \varkappa \text{ stacionární}\}$ a každé $W'(X)$ splňuje předpoklady tvrzení (i). Odtud dostáváme $|W| = |W'| \leq 2^\varkappa . \lambda = \lambda$.

Dokázali jsme, že T je lineárně uspořádáno relací $\lhd$ a že pro každé $f \in T$ je $|(\leftarrow, f)| \leq \lambda$, proto $|T| \leq \lambda^+$.

2.33 *Důkaz Silverovy věty.* Předpoklad věty je podle 2.12 ekvivalentní s tím, že $A = \{\alpha < \varkappa : 2^{\lambda_\alpha} = \lambda_\alpha^+\}$ je stacionární v $\varkappa$. Odtud plyne, že $\lambda_\alpha^\varkappa < \lambda$ platí pro každé $\alpha < \varkappa$. Pro každé $\alpha \in A$ zvolme prosté zobrazení $\varphi_\alpha : \mathcal{P}(\lambda_\alpha) \to \lambda_\alpha^+$. Každé podmnožině $X \subseteq \lambda$ přiřadíme funkci $f_X \in \bigtimes_{\alpha < \varkappa} \lambda_\alpha^+$ předpisem

$$f_X(\alpha) = \begin{cases} \varphi_\alpha(X \cap \lambda_\alpha), & \text{pokud} \quad \alpha \in A, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro různá $X, Y \subseteq \lambda$ existuje $\alpha_0 < \varkappa$ takové, že $X \cap \lambda_\alpha \neq Y \cap \lambda_\alpha$ pro každé $\alpha > \alpha_0$. Přitom φ_α jsou prostá zobrazení, to znamená, že f_X a f_Y jsou na A skoro všude různé funkce. Získali jsme tak prosté zobrazení $\mathcal{P}(\lambda)$ na systém

$$\{f_X : X \subseteq \lambda\} \subseteq \bigtimes_{\alpha < \varkappa} \lambda_\alpha^+,$$

který splňuje předpoklady lemmatu 2.32(ii). Odtud dostáváme $|\mathcal{P}(\lambda)| = 2^\lambda = \lambda^+$. Důkaz je skončen.

Silverova věta, nebo spíše metoda důkazu, dává nové světlo na hypotézu singulárních kardinálů (SCH) diskutovanou ve II.5.33.

2.34 Důsledky. (i) *Platí-li hypotéza singulárních kardinálů pro singuláry se spočetnou kofinalitou, platí pro všechny singulární kardinály.*

(ii) (Erdös, Hajnal, Milner 1968). *Předpokládejme, že λ je singulár s nespočetnou kofinalitou $\varkappa$ a že pro každé $\nu < \lambda$ je $\nu^\varkappa < \lambda$. Potom každý systém množin $S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ takový, že množina $\{\beta < \lambda : |\{\beta \cap X : X \in S\}| \leq |\beta|\}$ je stacionární v λ, má mohutnost $\leq \lambda$.*

Důkaz. (i) Dokazujeme indukcí, že pro libovolný singulár λ platí

$$\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \max(2^{\mathrm{cf}(\lambda)}, \lambda^+), \tag{5}$$

pokud (5) platí pro všechny singuláry se spočetnou kofinalitou.

Nechť λ je singulár s nespočetnou kofinalitou $\varkappa = \mathrm{cf}(\lambda)$ takový, že pro všechny singuláry $\nu < \lambda$ platí (5). Odtud podle II.5.34(ii) plyne, že pro každý singulár $\nu < \lambda$ platí

(6) $$\nu^{\varkappa} = \max(2^{\varkappa}, \nu^{+}).$$

Je-li $2^{\varkappa} > \lambda$, pak $\lambda^{\varkappa} = 2^{\varkappa} > \lambda$, a tedy λ splňuje (5). Rovnost $2^{\varkappa} = \lambda$ nemůže nastat podle Königovy nerovnosti.

Předpokládejme, že $2^{\varkappa} < \lambda$. Potom množina $S = \{\nu < \lambda, \nu > 2^{\varkappa} \,\&\, \mathrm{cf}(\nu) = \omega\}$ je stacionární v λ a podle (6) pro každé $\nu \in S$ platí $\nu^{\varkappa} = \nu^{+}$. Vezměme spojitou rostoucí posloupnost kardinálů $\langle \lambda_{\alpha} : \alpha < \varkappa \rangle$ konvergující k λ. Množina $A = \{\alpha < \varkappa : \mathrm{cf}(\lambda_{\alpha}) = \omega \,\&\, \lambda_{\alpha}^{\varkappa} = \lambda_{\alpha}^{+}\}$ je stacionární v $\varkappa$. Pro každé $\alpha \in A$ vezměme prosté zobrazení φ_{α} množiny $[\lambda_{\alpha}]^{\leq \varkappa}$ do λ_{α}^{+}. Přiřadíme každé množině $X \subseteq \lambda$ mohutnosti $\leq \varkappa$ funkci f_X definovanou na $\varkappa$ předpisem $f_X(\alpha) = \varphi_{\alpha}(X \cap \lambda_{\alpha})$, pokud $\alpha \in A$, a jinak $f_X(\alpha) = 0$. Získali jsme tak prosté zobrazení množiny $[\lambda]^{\leq \varkappa}$ na systém na A skoro všude různých funkcí

$$\{f_X : X \in [\lambda]^{\leq \varkappa}\} \subseteq \bigtimes_{\alpha < \varkappa} \lambda_{\alpha}^{+}.$$

Tedy podle 2.32(ii) je $\lambda^{\varkappa} = \lambda^{+}$ a λ splňuje (5).

(ii) Důkaz je obdobou předchozího důkazu. Nechť $\langle \lambda_{\alpha} : \alpha < \varkappa \rangle$ je rostoucí spojitá posloupnost kardinálů konvergující k λ. Pro systém $S \subseteq \mathscr{P}(\lambda)$ položme $A = \{\alpha < \varkappa : |\{X \cap \lambda_{\alpha} : X \in S\}| \leq \lambda_{\alpha}\}$. Z předpokladu na systém S plyne, že A je stacionární v $\varkappa$. Zvolíme-li pro každé $\alpha \in A$ vzájemně jednoznačné zobrazení φ_{α} množiny $\{X \cap \lambda_{\alpha} : X \in S\}$ do λ_{α}, získáme, podobně jako v předchozím důkaze, systém na A skoro všude různých funkcí $\{f_X : X \in S\} \subseteq \bigtimes_{\alpha < \varkappa} \lambda_{\alpha}$. Tedy podle 2.32(i) je $|S| \leq \lambda$.

2.35 Diamantové kombinatorické principy. Silverova věta je příkladem, v jehož důkaze hrají stacionární množiny důležitou roli. Setkáme se ještě s jinými příklady použití stacionárních množin. Řešení otázek bezespornosti známých problémů (Suslinovy a Kuperovy hypotézy, viz § 3) vedlo k formulaci principů, týkajících se stacionárních množin, které nalezly širší použití.

R. Jensen vyslovil nejdůležitější z těchto principů ($\diamondsuit$, $\square$, morass) a ukázal, že platí v univerzu konstruovatelných množin. Uvedené principy nejsou dokazatelné v teorii množin, ale jsou relativně bezesporné. To znamená, že je lze přidat jako nový axiom. Řeší některé problémy, které jsou jinak nerozhodnutelné. Mají podobnou úlohu jako axiom výběru nebo hypotéza kontinua.

2.36 Množiny uzavřené na operace. Začneme jednoduchým pozorováním. Připomeňme, že operací na množině A se rozumí každé zobrazení $f: A^n \to A$, kde n je přirozené číslo, kterému se říká četnost operace f.

Nechť na A jsou dány operace f_i, $i \in I$ a nechť n_i je četnost operace f_i. Říkáme, že $Y \subseteq A$ je *uzavřená na operace*, jestliže pro každé $i \in I$ platí

$$f_i[Y^{n_i}] \subseteq Y.$$

Jinými slovy, Y je uzavřená na operace f_i, jestliže pro libovolné prvky $x_1, x_2, \ldots, x_{n_i} \in Y$ je výsledek operace $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$ opět prvkem množiny Y.

2.37 Uzávěr množiny na operace. Nechť f_i, $i \in I$ jsou operace na množině A. Ukážeme, že pro každé $X \subseteq A$ existuje množina $Y \subseteq A$ taková, že (i) obsahuje X, (ii) je uzavřená na operace a (iii) je to nejmenší množina (vzhledem k $\subseteq$), pro kterou platí (i) a (ii).

Množina Y se nazývá *uzávěr množiny* X *na operace* f_i, $i \in I$ a budeme ji značit $Cl(X)$.

Pro libovolné $Z \subseteq A$ položme

$$Op(Z) = Z \cup \bigcup_{i \in I} f_i[Z^{n_i}].$$

Iterováním zobrazení Op získáme uzávěr množiny X. Položme

$$Cl(X) = \bigcup_{n < \omega} X_n,$$

kde $X_0 = X$ a $X_{n+1} = Op(X_n)$ pro každé $n < \omega$. Je snadné ověřit, že množina $Cl(X)$ splňuje podmínky (i)–(iii).

Uvedená konstrukce umožňuje odhadnout mohutnost uzávěru $Cl(X)$. Speciálně, uvažujeme-li nejvýše spočetně mnoho operací na množině A, pak pro každou nekonečnou $X \subseteq A$ má uzávěr $Cl(X)$ stejnou mohutnost jako X, protože

$$|X| \leq |Cl(X)| \leq |X| + \sum_{n < \omega} |X| = |X|.$$

Jinými slovy, uzavřením nekonečné množiny na operace získáme množinu stejné mohutnosti.

Čtenář snadno nahlédne, že má-li množina X mohutnost $\geq \omega_1$, pak její uzávěr na ω_1 operací bude mít stejnou mohutnost jako X. Podobně i pro další mohutnosti.

Následující tvrzení je zobecněním předchozího pozorování.

2.38 Věta. *Nechť $\lambda > \omega$ je regulární kardinál a nechť f_i, $i \in I$ je méně než λ operací na λ. Potom množina*

$$C = \{\alpha < \lambda \colon \alpha \ \text{ je uzavřené na operace } f_i,\ i \in I\}$$

je uzavřená neomezená v λ.

Toto tvrzení je obdobou známé Löwenheimovy–Skolemovy–Tarského věty směrem dolů.

Důkaz. Uzavřenost množiny C je zřejmá. Dokazujeme neomezenost. Nechť $\alpha_0 < \lambda$. Protože $\lambda > \omega$ a regulární, je uzávěr $Cl(\alpha_0)$ na operace f_i menší mohutnosti než λ, a proto $Cl(\alpha_0)$ je omezená množina v λ. To znamená, že existuje $\alpha_1 < \lambda$ takové, že $Cl(\alpha_0) \subseteq \alpha_1$. Rekurzí získáme rostoucí posloupnost α_n, $n < \omega$, pro kterou $Cl(\alpha_n) \subseteq$ $\subseteq \alpha_{n+1}$. Je zřejmé, že pro $\alpha = \sup \alpha_n$ je

$$Cl(\alpha) = \bigcup_{n<\omega} Cl(\alpha_n) = \alpha\,,$$

tedy $\alpha > \alpha_0$ a je uzavřené na operace f_i.

Dokázali jsme, že C je také neomezená v λ.

2.39 Příklady. (a) Nechť f je vzájemně jednoznačné zobrazení ω_1 na $\omega_1 \times \omega_1$. Množina

$$C = \{\alpha < \omega_1 : f \text{ zobrazuje } \alpha \text{ na } \alpha \times \alpha\}$$

sestává právě z ordinálních čísel, která jsou uzavřená na operace f^{-1}, $\pi_1 f$ a $\pi_2 f$, proto je podle 2.38 uzavřená neomezená.

(b) Nechť $\langle f_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ je soubor operací na ω_1. Potom množina

$$D = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ je uzavřené na } f_\beta,\ \beta < \alpha\}$$

je uzavřená neomezená.

Pro každé $\alpha < \omega_1$ položme $A_\alpha = \{\beta < \omega_1 : \beta \text{ uzavřené na } f_\alpha\}$. Jelikož $D = \Delta A_\alpha$, podle 2.38 a 2.14 je D uzavřená neomezená.

2.40 Definice (Jensen 1968). *Diamantový princip* $\diamondsuit$ je následující tvrzení: Existuje posloupnost $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ taková, že pro každé $\alpha < \omega_1$ je $A_\alpha \subseteq \alpha$ a pro libovolné $X \subseteq \omega_1$ je množina $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ stacionární v ω_1.

Posloupnosti, která splňuje podmínky $\diamondsuit$, říkáme *$\diamondsuit$-posloupnost.*

2.41 Lemma $\diamondsuit \to$ CH.

Důkaz. Nechť $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ je $\diamondsuit$-posloupnost. Potom pro každé $X \subseteq \omega$ existuje α, $\omega \leq \alpha < \omega_1$ takové, že $X = X \cap \alpha = A_\alpha$. Odtud plyne, že existuje prosté zobrazení $\mathscr{P}(\omega)$ do ω_1, proto $2^\omega = \omega_1$.

Diamantový princip $\diamondsuit$ je zesilením hypotézy kontinua. $\diamondsuit$-posloupnost obsahuje všechny omezené podmnožiny ω_1 a navíc s libovolnou přesností aproximuje všechny podmnožiny ω_1.

2.42 Příklad. Víme, podle 1.15, že za předpokladu CH existuje skoro disjunktní systém množin na ω_1 mohutnosti 2^{ω_1}. Ukážeme, že za předpokladu $\diamondsuit$ existuje takový systém sestávající navíc ze stacionárních množin.

Nechť $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ je $\diamondsuit$-posloupnost. Pro $X \subseteq \omega_1$ položme

$$S(X) = \{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = A_\alpha\}\,.$$

Pro různé $X, Y \subseteq \omega_1$ je $S(X) \cap S(Y) \subseteq \alpha$, kde α je nejmenší prvek z $X \triangle Y$. Tedy $\{S(X) : X \subseteq \omega_1\}$ je AD systém plné mohutnosti 2^{ω_1} sestávající ze stacionárních množin.

Existuje přirozené zobecnění diamantového principu i pro větší kardinály.

2.43 Definice (Jensen). Nechť $\lambda > \omega$ je regulární kardinál a nechť $E \subseteq \lambda$. Princip $\diamondsuit_\lambda(E)$ označuje následující tvrzení:

Existuje posloupnost $\langle A_\alpha : \alpha \in E\rangle$ taková, že pro každé $\alpha \in E$ je $A_\alpha \subseteq \alpha$ a pro libovolné $X \subseteq \lambda$ je množina $\{\alpha \in E : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ stacionární.

Posloupnost $\langle A_\alpha : \alpha \in E\rangle$ splňující podmínky $\diamondsuit_\lambda(E)$ nazýváme $\diamondsuit_\lambda(E)$-*posloupností.*

Místo $\diamondsuit_\lambda(\lambda)$ píšeme stručněji $\diamondsuit_\lambda$ a jakmile $\lambda = \omega_1$, index λ vynecháváme.

Je zřejmé, že jakmile platí $\diamondsuit_\lambda(E)$, pak E je stacionární v λ. Je-li $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \lambda$, pak $\diamondsuit_\lambda(E_1) \to \diamondsuit_\lambda(E_2)$.

Podobně jako 2.41 se dokáže

(7) $$\diamondsuit_\lambda \to (\forall \nu < \lambda)(2^\nu \leq \lambda).$$

Diamantový princip má řadu ekvivalentů. Uvedeme jeden z nich.

2.44 Definice. Pro $E \subseteq \lambda$, $\lambda > \omega$ regulární $\diamondsuit'_\lambda(E)$ označuje následující tvrzení:

Existuje posloupnost $\langle W_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ taková, že pro každé $\alpha < \lambda$ je $W_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$, $|W_\alpha| \leq |\alpha|$ a pro libovolné $X \subseteq \lambda$ je množina $\{\alpha \in E : X \cap \alpha \in W_\alpha\}$ stacionární.

Povšimněme si, že posloupnosti zaručené v principech $\diamondsuit$, $\diamondsuit_\lambda(E)$, $\diamondsuit'_\lambda(E)$ můžeme pozměnit na nestacionární množině, aniž bychom porušili platnost odpovídajícího kombinatorickému principu.

2.45 Věta (Kunen). $\diamondsuit_\lambda(E) \leftrightarrow \diamondsuit'_\lambda(E)$.

Důkaz. Implikace $\to$ je zřejmá, stačí položit $W_\alpha = \{A_\alpha\}$. Dokazujeme opačnou implikaci. Nechť $\langle W_\alpha : \alpha \in E\rangle$ je $\diamondsuit'_\lambda(E)$-posloupnost. Potřebujeme nalézt $\diamondsuit_\lambda(E)$-posloupnost.

Zvolme vzájemně jednoznačné zobrazení f kardinálu λ na $\lambda \times \lambda$. Podle 2.39(a) víme, že množina $C = \{\alpha < \lambda : f[\alpha] = \alpha \times \alpha\}$ je uzavřená neomezená. Z posloupnosti $\langle W_\alpha : \alpha \in E\rangle$ a zobrazení f získáme novou posloupnost $\langle R_\alpha : \alpha \in E\rangle$, kde

$$R_\alpha = \{f[Y] : Y \in W_\alpha\}, \text{ pokud } \alpha \in C \cap E$$

a jinak

$$R_\alpha = 0.$$

Nejprve ověříme, že pro libovolné $X' \subseteq \lambda \times \lambda$ je množina

(8) $$S' = \{\alpha \in E : X' \cap (\alpha \times \alpha) \in R_\alpha\}$$

stacionární v λ. Pro dané $X' \subseteq \lambda \times \lambda$ vezměme množinu $X = f^{-1}[X'] \subseteq \lambda$. Z předpokladu $\diamondsuit'_\lambda(E)$ plyne, že množina $S = \{\alpha \in E : X \cap \alpha \in W_\alpha\}$ je stacionární. Pro $\alpha \in C \cap S$ platí $X \cap \alpha \in W_\alpha$ a $f[X \cap \alpha] = f[X] \cap f[\alpha] = X' \cap (\alpha \times \alpha)$, proto $X' \cap (\alpha \times \alpha) \in R_\alpha$. Ukázali jsme, že $C \cap S \subseteq S'$, tedy S' je stacionární množina.

Nyní ukážeme jak z posloupnosti $\langle R_\alpha : \alpha \in E\rangle$ získáme $\diamondsuit_\lambda(E)$-posloupnost.

Je-li $\alpha \in E$, je $|R_\alpha| \leq |\alpha|$ a $R_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha \times \alpha)$. Zvolíme očíslování $R_\alpha = \{r(\alpha, \beta) : \beta < \alpha\}$ pro každé $\alpha \in E$ a položíme pro $\alpha \in E$, $\beta < \alpha$

$$A(\alpha,\beta) = r(\alpha,\beta)''\{\beta\} = \{\gamma: \langle\beta,\gamma\rangle \in r(\alpha,\beta)\}.$$

Je zřejmé, že $A(\alpha,\beta) \subseteq \alpha$. Ukážeme, že pro nějaké $\beta_0 < \lambda$ je $\langle A(\alpha,\beta_0): \alpha \in E\rangle$ hledaná $\diamondsuit_\lambda(E)$-posloupnost. Předpokládejme, že to neplatí. Pro každé $\beta < \lambda$ zvolme $X_\beta \subseteq \lambda$ takové, že

$$\{\alpha \in E: X_\beta \cap \alpha = A(\alpha,\beta)\}$$

je nestacionární v λ. Položme $X' = \bigcup_{\beta<\lambda} (\{\beta\} \times X_\beta)$ a vezměme množinu S' definovanou vztahem (8). Pro $\alpha \in S'$ existuje číslo $g(\alpha) < \alpha$ takové, že

$$X' \cap (\alpha \times \alpha) = r(\alpha, g(\alpha)).$$

Získali jsme funkci g, která je definovaná a regresivní na stacionární množině S'. Podle Fodorovy věty existuje $\gamma < \lambda$ takové, že vzor $S_1 = g^{-1}\{\gamma\}$ je stacionární. Pro každé $\alpha \in S_1$ platí $X' \cap (\alpha \times \alpha) = r(\alpha,\gamma)$ a současně $(X' \cap (\alpha \times \alpha))''\{\gamma\} = X_\gamma \cap \alpha$, odtud dostáváme $X_\gamma \cap \alpha = A(\alpha,\gamma)$. To znamená, že množina

$$\{\alpha \in E: X_\gamma \cap \alpha = A(\alpha,\gamma)\} \supseteq S_1$$

je stacionární, to je spor s volbou množiny X_γ.

Dokázali jsme, že pro nějaké $\beta_0 < \lambda$ je $\langle A(\alpha,\beta_0): \alpha \in E\rangle$ $\diamondsuit_\lambda(E)$-posloupnost. Důkaz je hotov.

2.46 Princip $\diamondsuit$ je silnější než CH, neplyne ani z GCH. Pro $\lambda > \omega_1$ není $\diamondsuit_\lambda$ tak silné tvrzení. Za předpokladu GCH platí pro následníky nespočetného kardinálu dokonce silnější verze diamantového principu.

2.47 *Princip* $\diamondsuit^*_\lambda(E)$, kde λ je nespočetný regulární kardinál a E je jeho stacionární podmnožina, zaručuje existenci posloupnosti $\langle W_\alpha: \alpha \in E\rangle$ takové, že pro každé $\alpha \in E$ je $W_\alpha \subseteq \mathscr{P}(\alpha)$, $|W_\alpha| \leq |\alpha|$ a pro libovolné $X \subseteq \lambda$ existuje uzavřená neomezená množina $C \subseteq \lambda$ taková, že pro každé $\alpha \in C \cap E$ platí $X \cap \alpha \in W_\alpha$.

Je zřejmé, že z $\diamondsuit^*_\lambda(E)$ plyne $\diamondsuit'_\lambda(E)$, a tedy podle 2.45 také $\diamondsuit_\lambda(E)$. Navíc, z $\diamondsuit^*_\lambda(E)$ plyne $\diamondsuit_\lambda(D)$ pro každou stacionární množinu $D \subseteq E$, a také $\diamondsuit_\lambda$.

2.48 Věta (Gregory 1976, Shelah 1980). *Předpokládejme* GCH. *Je-li* $\lambda > \omega$, *pak pro každé regulární* $\varkappa < \lambda$ *takové, že* $\varkappa \neq \mathrm{cf}(\lambda)$, *platí* $\diamondsuit^*_{\lambda^+}(E(\varkappa))$.

Speciálně, je-li $2^\omega = \omega_1$ *a* $2^{\omega_1} = \omega_2$, *potom platí* $\diamondsuit_{\omega_2}(E(\omega))$.

Důkaz. Ukážeme, že když $2^\lambda = \lambda^+$ a pro nějaké regulární $\varkappa < \lambda$ platí buď

(i) $\lambda^\varkappa = \lambda$,

nebo

(ii) λ je singulár, $\varkappa \neq \mathrm{cf}(\lambda)$ a pro každé $\nu < \lambda$ je $\nu^\varkappa < \lambda$,

potom $\diamondsuit^*_{\lambda^+}(E(\varkappa))$.

Z předpokladu $2^\lambda = \lambda^+$ plyne, že všech omezených podmnožin kardinálu λ^+ je λ^+. Zvolme očíslování

$$(9) \qquad \langle A_\alpha: \alpha < \lambda^+\rangle$$

všech omezených množin v λ^+ s λ^+-násobným opakováním. Pro libovolnou množinu $X \subseteq \lambda^+$ sestrojíme funkci $f\colon \lambda^+ \to \lambda^+$ a uzavřenou neomezenou množinu $C \subseteq \lambda^+$. Podle předpokladu pro každé $\alpha < \lambda^+$ se množina $X \cap \alpha$ vyskytuje v souboru (9) λ^+-krát. Můžeme proto rekurzí sestrojit rostoucí funkci $f\colon \lambda^+ \to \lambda^+$ takovou, že pro každé $\alpha < \lambda^+$ je $X \cap \alpha = A_{f(\alpha)}$. Položme

$$C = \{\alpha < \lambda^+ : f[\alpha] \subseteq \alpha\} \quad \text{a} \quad E = \{\delta < \lambda^+ : \lambda \leq \delta \;\&\; \mathrm{cf}(\delta) = \varkappa\}.$$

Je zřejmé, že C je uzavřená neomezená v λ^+ a $\diamondsuit^*_{\lambda^+}(E) \leftrightarrow \diamondsuit^*_{\lambda^+}(E(\varkappa))$.

Nechť pro $\varkappa$, λ nastává případ (i). Pro každé $\delta \in E$ položme

$$W_\delta = \{\bigcup_{\beta \in Y} A_\beta : Y \in [\delta]^{\leq \varkappa} \;\&\; (\forall \beta \in Y)(A_\beta \subseteq \delta)\}.$$

Je zřejmé, že $W_\delta \subseteq \mathscr{P}(\delta)$ a $|W_\delta| \leq |\delta|^\varkappa = \lambda^\varkappa = \lambda$. Ověříme, že $\langle W_\delta : \delta \in E\rangle$ splňuje podmínky $\diamondsuit^*_{\lambda^+}(E)$. Nechť $X \subseteq \lambda^+$ a vezměme f a C sestrojené pro X v první části důkazu. Pro libovolné $\delta \in C \cap E$ zvolme množinu $Y \subseteq \delta$ kofinální s δ a $|Y| = \varkappa$. Jelikož $\delta \in C$, $f[Y]$ je kofinální podmnožina δ. Odtud plyne, že

$$X \cap \delta = \bigcup_{\beta \in Y} X \cap \beta = \bigcup_{\beta \in Y} A_{f(\beta)}.$$

To znamená, že $X \cap \delta \in W_\delta$. Dokázali jsme, že pro každé $\delta \in C \cap E$ je $X \cap \delta \in W_\delta$, tedy $\diamondsuit^*_{\lambda^+}(E)$.

Uvažujme případ (ii). Označme $\mu = \mathrm{cf}(\lambda)$ a vezměme rostoucí posloupnost kardinálů $\langle \lambda_\xi, \xi < \mu\rangle$ konvergující k λ. Předpokládáme, že $\varkappa > \mu$, protože $\varkappa < \mu$ spadá do případu (i). Pro každé $\alpha < \lambda^+$ zvolme neklesající posloupnost $\langle V(\alpha, \xi) : \xi < \mu\rangle$ podmnožin ordinálu α takovou, že $\alpha = \bigcup_{\xi < \mu} V(\alpha, \xi)$ a $|V(\alpha, \xi)| \leq \lambda_\xi$ pro každé $\xi < \mu$. Pro $\delta \in E$ definujeme

$$W_\delta = \{\bigcup_{\beta \in Y} A_\beta : (\exists \xi < \mu)(Y \in [V(\delta, \xi)]^{\leq \varkappa} \;\&\; \bigcup_{\beta \in Y} A_\beta \subseteq \delta\}.$$

Je zřejmé, že $W_\delta \subseteq \mathscr{P}(\delta)$, a podle předpokladu (ii) je $|W_\delta| \leq \sum_{\xi < \mu} |V(\delta, \xi)|^\varkappa \leq \lambda$. Ověříme, že $\langle W_\delta : \delta \in E\rangle$ je posloupnost pro $\diamondsuit^*_{\lambda^+}(E)$. Nechť $X \subseteq \lambda^+$ a vezměme f a C definované pro množinu X v první části důkazu. Pro $\delta \in E \cap C$ zvolme množinu $Y \subseteq \delta$ kofinální s δ a $|Y| = \varkappa$. Potom $f[Y]$ je kofinální podmnožina δ a $|f[Y]| = \varkappa > \mu$. Tedy existuje $Q \in [Y]^\varkappa$ takové, že $f[Q] \subseteq V(\delta, \xi)$ pro nějaké $\xi < \mu$. Potom $X \cap \delta \in W_\delta$, protože

$$X \cap \delta = \bigcup_{\beta \in Q} X \cap \beta = \bigcup_{\beta \in Q} A_{f(\beta)}$$

a

$$f[Q] \subseteq V(\delta, \xi).$$

Dokázali jsme, že i v tomto případě pro každé $\delta \in C \cap E$ je $X \cap \delta \in W_\delta$. Důkaz je hotov.

2.49 Zastavíme se u jednoduché otázky. Je-li E stacionární podmnožina regulárního kardinálu $\varkappa$, můžeme se ptát, zda existuje nějaké $\delta < \varkappa$ takové, že $E \cap \delta$ je stacionární v δ. Otázka má smysl pouze pro kardinály $\varkappa > \omega_1$, protože pojem stacionární množiny je zaveden pro ordinály δ s nespočetnou kofinalitou. Pokud takové $\delta < \varkappa$ existuje, říkáme, že δ reflektuje stacionárnost množiny E.

Podle 5.10 je pro nedosažitelný kardinál, který je slabě kompaktní, odpověď pozitivní. Co můžeme říci o této vlastnosti pro následníky nekonečného kardinálu?

Je-li $\varkappa$ regulární, pak $E(\varkappa) = \{\delta < \varkappa^+ : \mathrm{cf}(\delta) = \varkappa\}$ je stacionární množina v $\varkappa^+$, ale její stacionárnost není reflektována žádným ordinálem $\delta < \varkappa^+$ s nespočetnou kofinalitou. Pro limitní $\delta < \varkappa^+$ je $\mathrm{cf}(\delta) \leq \varkappa$ a zvolíme-li uzavřenou neomezenou podmnožinu $C \subseteq \delta$ uspořádanou podle typu $\mathrm{cf}(\delta)$, potom $E(\varkappa) \cap C' = 0$, a tedy $E(\varkappa) \cap \delta$ není stacionární v δ.

Seznámíme se s dalším Jensenovým principem $\Box_\lambda$, nazývaným prostě čtvereček.

2.50 Definice. Princip $\Box_\lambda$: Existuje posloupnost množin $\langle C_\delta : \delta < \lambda^+ \;\&\; \delta$ limitní$\rangle$ taková, že pro každé limitní $\delta < \lambda^+$ platí

(i) $C_\delta \subseteq \delta$ a je uzavřená neomezená v δ,

(ii) je-li $\mathrm{cf}(\delta) < \lambda$, pak $|C_\delta| < \lambda$,

(iii) je-li $\gamma < \delta$ limitní bod množiny C_δ, pak $C_\gamma = C_\delta \cap \gamma$.

Posloupnost $\langle C_\delta : \delta < \lambda \rangle$ splňující podmínky (i)–(iii) nazýváme $\Box_\lambda$-*posloupností.*

Všimněme si, že $\Box_\lambda$ zaručuje existenci množin C_δ pro ordinály až do následníku λ^+. Pro $\lambda = \omega$ čtvereček $\Box_\omega$ platí, stačí položit $C_\delta = \delta$. Jiným příkladem $\Box_\omega$-posloupnosti je posloupnost $\langle C_\delta : \delta < \omega_1 \;\&\; \delta$ limitní$\rangle$, kde pro každé δ je C_δ kofinální podmnožina δ typu ω sestávající z izolovaných čísel.

Pro $\lambda > \omega$ však princip $\Box_\lambda$ není dokazatelný v teorii množin. Místo $\Box_{\omega_1}$ budeme psát krátce $\Box$. Jensen (1972) ukázal, že z $V = L$ plyne $\Box_\lambda$ pro každé λ. To znamená, že tvrzení $(\forall \lambda)\, \Box_\lambda$ je bezesporné s teorií množin.

Nechť $\langle C_\delta : \delta < \lambda^+ \;\&\; \delta$ limitní$\rangle$ je $\Box_\lambda$-posloupnost pro $\lambda > \omega$. Potom z (ii) a (iii) plyne, že pro $\delta < \lambda^+$ takové, že $\mathrm{cf}(\delta) = \lambda$, je typ $(C_\delta) = \lambda$. Je-li λ singulár, pak pro každé $\delta < \lambda^+$ je typ $(C_\delta) < \lambda$. Odtud plyne, že typy uspořádání všech množin C_δ jsou nejvýše rovny λ.

Ukážeme, že $\Box_\lambda$ řeší negativně problém reflexe stacionárnosti pro kardinál λ^+.

2.51 Věta. *Předpokládejme $\lambda > \omega$ a $\Box_\lambda$. Potom pro každou množinu $X \subseteq \lambda^+$ stacionární v λ^+ existuje $Y \subseteq X$, která je také stacionární v λ^+, ale žádné $\delta < \lambda^+$ nereflektuje stacionárnost množiny Y.*

Důkaz. Nechť $\langle C_\delta : \delta < \lambda^+ \;\&\; \delta$ limitní$\rangle$ je $\Box_\lambda$-posloupnost. Limitní ordinály $<\lambda^+$ rozložíme na třídy podle typů uspořádání množin C_δ. Pro $\alpha \leq \lambda$ položme $T_\alpha = \{\delta < \lambda^+ : \mathrm{typ}\,(C_\delta) = \alpha\}$. Nejprve ukážeme, že každá množina T_α je nestacionární všude pod λ^+. Vezměme libovolné $\beta < \lambda^+$ takové, že $\mathrm{cf}(\beta) > \omega$. Nechť C'_β je množina hromadných bodů množiny C_β v β. Víme, že C'_β je uzavřená neomezená v β, a je-li $\delta \in C'_\beta \cap T_\alpha$, pak δ je limitní, $C_\delta = C_\beta \cap \delta$ a typ $(C_\delta) = \alpha$. To znamená, že množina $C'_\beta \cap T_\alpha$ je nejvýše jednoprvková, a proto $T_\alpha \cap \beta$ je nestacionární v β. Nechť X je stacionární podmnožina λ^+. Systém $\{T_\alpha \cap X \neq 0 : \alpha \leq \lambda\}$ je rozklad stacionární množiny $X \cap \{\delta < \lambda^+ : \delta$ limitní$\}$ na méně než λ^+ částí. Jelikož ideál nestacionárních množin v λ^+ je λ^+-úplný, existuje nějaké $\alpha \leq \lambda$ takové, že $X \cap T_\alpha$ je stacionární v λ^+. Pro jedno takové α položme $Y = X \cap T_\alpha$. Jelikož $Y \subseteq T_\alpha$, je také množina Y nestacionární všude pod λ^+. Důkaz je hotov.

2.52 Důsledek. *Předpokládejme* GCH *a* $\square_\lambda$ *pro* $\lambda > \omega$. *Potom existují stacionární množina* $E \subseteq \lambda^+$ *a* $\square_\lambda$*-posloupnost* $\langle D_\delta : \delta < \lambda^+ \ \&\ \delta$ *limitní*$\rangle$ *takové, že platí*

(i) $D_\delta \cap E = 0$ *pro každé* δ,

(ii) $\diamondsuit_{\lambda^+}(E)$.

$\square_\lambda$-posloupnost splňující (i) se nazývá $\square_\lambda(E)$-posloupností.

Důkaz. Podle věty 2.48 víme, že existuje regulární $\varkappa$ takové, že platí $\diamondsuit^*_{\lambda^+}(E(\varkappa))$. Odtud plyne, že pro každou stacionární množinu $E \subseteq E(\varkappa)$ platí $\diamondsuit_{\lambda^+}(E)$.

Nechť $\langle C_\delta : \delta < \lambda^+ \ \&\ \delta$ limitní$\rangle$ je nějaká $\square_\lambda$-posloupnost. Zvolme $\alpha \leq \lambda$ takové, že pro množinu T_α definovanou v předchozím důkaze je množina $E = T_\alpha \cap E(\varkappa)$ stacionární v λ^+. Platí $\diamondsuit_{\lambda^+}(E)$. Tím je dokázáno (ii), zbývá dokázat (i).

Buď $\delta < \lambda^+$ limitní. Existuje-li $\xi \in C_\delta$ takové, že množina $C_\delta \cap \xi$ má typ α, pak existuje jediné takové ξ, a v tomto případě položme $B_\delta = C_\delta - (\xi + 1)$. Jestliže žádné takové ξ neexistuje, položme $B_\delta = C_\delta$. Snadno se ověří, že množiny B_δ tvoří $\square_\lambda$-posloupnost. Navíc, žádný limitní bod množiny B_δ neleží v T_α. Proto uvažujme množiny B'_δ všech hromadných bodů $\xi < \delta$ množin B_δ. Je-li B'_δ neomezená v δ, a to je vždy, když $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$, položíme $D_\delta = B'_\delta$. Je-li B'_δ omezená v δ, pak $\mathrm{cf}(\delta) = \omega$ a D_δ získáme tak, že přidáme k množině B'_δ nějakou kofinální podmnožinu s δ, jejíž prvky jsou izolovaná čísla a větší než všechny prvky z B'_δ.

Posloupnost $\langle D_\delta : \delta < \lambda^+ \ \&\ \delta$ limitní$\rangle$ je hledaná $\square_{\lambda^+}(E)$ posloupnost.

2.53 Existence stacionární množiny $E \subseteq \lambda^+$ pro $\lambda > \omega$ takové, že platí $\diamondsuit_{\lambda^+}(E)$, spolu s existencí $\square_\lambda(E)$-posloupnosti je kombinatorický předpoklad, z kterého plyne existence λ^+-Suslinova stromu. Ukážeme to v následujícím oddílu.

2.54 Bezespornost kombinatorických principů $\diamondsuit$ a $\square$. Jensen (1972) ukázal, že principy $\diamondsuit_\lambda(E)$ pro každé stacionární $E \subseteq \lambda$ a λ regulární a $(\forall\lambda)\,\square_\lambda$ platí v univerzu konstruovatelných množin L. Jsou tedy bezesporné s teorií množin. Navíc ukázal, že $\diamondsuit$ není důsledkem CH.

Podle (7) (viz 2.43) $\diamondsuit_\lambda$ implikuje identitu $2^{<\lambda} = \lambda$, která není dokazatelná v teorii množin. To znamená, že není dokazatelný ani princip $\diamondsuit_\lambda$.

Porušení $\square_\lambda$ pro $\lambda > \omega$ je mnohem obtížnější. Jensen (1972) ukázal, že pokud neplatí $\square_\lambda$ pro nějaké $\lambda > \omega$, potom λ^+ je Mahlův kardinál v L. Speciálně z $\neg\square$ plyne, že existence Mahlova kardinálu je bezesporná s teorií množin.

Porušení $\square_\lambda$ pro nějaké singulární λ, například $\neg\square_{\aleph_\omega}$, má za důsledek bezespornost existence měřitelných kardinálů.

Jsme svědky situace, která není neobvyklá v teorii množin, kdy nějaké tvrzení o malém kardinálním čísle, například $\neg\Box$, dává bezespornost existence nějakého velkého kardinálu.

§ 3 Stromy a lineární uspořádání

Nejprve se budeme zabývat typy uspořádání množin reálných čísel. Ukážeme, že existuje plná mohutnost 2^{2^ω} množin reálných čísel, které mají navzájem neporovnatelné typy. Seznámíme se se Speckerovým uspořádáním a se Suslinovým problémem charakterizace uspořádání reálné přímky, který vede k Suslinově hypotéze. Budeme definovat Kurepův systém množin a vyslovíme Kurepovu hypotézu.

Zavedeme důležitý pojem stromu a dokážeme existenci Aronszajnova stromu. Ukážeme, jak za pomoci kombinatorických principů $\diamondsuit$ a $\square$ lze konstruovat Suslinovy stromy.

Popíšeme dualitu mezi lineárně uspořádanými množinami a stromy a ukážeme ji na vztahu mezi Speckerovým uspořádáním a Aronszajnovým stromem a mezi Suslinovou přímkou a Suslinovým stromem.

Mnohé základní otázky týkající se lineárních uspořádání a stromů (například Suslinova nebo Kurepova hypotéza) jsou nerozhodnutelné v teorii množin. V závěrečném odstavci je uveden stručný přehled výsledků týkajících se bezespornosti.

3.1 Typy lineárně uspořádaných množin. Jsou-li dvě lineárně uspořádané množiny izomorfní, říkáme, že jsou *stejného typu*. Připomeňme, že typ lineárně uspořádané množiny $\langle L, \leq \rangle$ je nějaká množina $\mathrm{tp}(L, \leq)$, která reprezentuje třídu všech uspořádaných množin izomorfních s $\langle L, \leq \rangle$.

Víme, že ordinální čísla jsou typy dobře uspořádaných množin. Stejně jednoduché typy pro všechna lineární uspořádání nejsou bohužel po ruce. Typy lineárních uspořádání však můžeme definovat pomocí axiomu fundovanosti způsobem, který je uveden v § 6 kapitoly II. Izomorfní vnoření pak dávají přirozenou možnost vzájemného porovnávání typů.

3.2 Porovnávání typů. Nechť $\varphi = \mathrm{tp}(L, \leq_L)$ a $\psi = \mathrm{tp}(K, \leq_K)$ jsou typy lineárně uspořádaných množin. Říkáme, že φ *lze vnořit do* ψ nebo že ψ *rozšiřuje* φ, a píšeme $\varphi \leq \psi$, jestliže existuje prosté zobrazení $f\colon L \to K$, které zachovává uspořádání. Tedy $\varphi \leq \psi$, právě když existuje izomorfní vnoření $\langle L, \leq_L \rangle$ do $\langle K, \leq_K \rangle$.

Je zřejmé, že $\leq$ je reflexivní a tranzitivní relace. Uspořádané množiny stejného typu mají nejen stejnou mohutnost, ale i izomorfní uspořádání. Relace $\leq$ není slabě antisymetrická, neplatí pro ni obdoba Cantorovy a Bernsteinovy věty.

3.3 Příklad. Reálnou přímku $\mathbb{R}$ s obvyklým uspořádáním lze izomorfně vnořit do její podmnožiny $R_0 = \mathbb{R} - \{0\}$. To znamená, že $\mathrm{tp}(\mathbb{R}) \leq \mathrm{tp}(R_0)$ a současně $\mathrm{tp}(R_0) \leq \mathrm{tp}(\mathbb{R})$. Přitom však množiny R_0 a $\mathbb{R}$ nejsou izomorfní, tedy $\mathrm{tp}(\mathbb{R}) \neq \mathrm{tp}(R_0)$.

3.4 Mohutnost typu. Inverzní typ. Nechť φ je typem lineárního uspořádání $\langle L, \leq_L \rangle$.

(i) *Mohutností typu* φ rozumíme mohutnost množiny L. Značíme ji $|\varphi|$.

(ii) Typ množiny L při inverzním uspořádání $\geq_L$ značíme φ^* a nazýváme jej *inverzním typem* k typu φ.

Je zřejmé, že $|\varphi| = |\varphi^*|$. Speciálně ω^* je spočetný typ inverzní k typu ω.

3.5 Typy ω, η, λ. Přirozená, racionální a reálná čísla s obvyklým uspořádáním jsou základní příklady lineárně uspořádaných množin. Jim odpovídající typy uspořádání se značí symboly ω, η, λ. Snadno se nahlédne, že $\omega^* \neq \omega$, $\eta^* = \eta$ a $\lambda^* = \lambda$.

3.6 Báze třídy typů. Je-li C třída typů, říkáme, že množina $B \subseteq C$ je *bází pro* C, jestliže pro každé $\psi \in C$ existuje $\varphi \in B$ takové, že $\varphi \leq \psi$.

3.7 Spočetné typy mají řadu hezkých vlastností. Uvidíme ve 4.9, že z Ramseyovy věty plyne, že pro každý spočetný typ φ platí $\omega \leq \varphi$ nebo $\omega^* \leq \varphi$. Jinými slovy, $\{\omega, \omega^*\}$ je bází pro množinu všech spočetných typů. Odtud plyne, že je to také báze pro třídu všech nekonečných typů.

Tvrzení 6.40 z kapitoly I říká, že η je univerzální spočetný typ. To znamená, že pro každý spočetný typ φ platí $\varphi \leq \eta$. Speciálně pro každý spočetný ordinál α je $\alpha \leq \eta$, neboli existuje podmnožina $X \subseteq \mathbb{Q}$, která je uspořádaná podle typu α.

Nespočetné typy již nemají tak hezké vlastnosti. Ukážeme, že $\{\omega_1, \omega_1^*\}$ netvoří bázi třídy nespočetných typů.

3.8 Lemma. *Žádná podmnožina reálné přímky není uspořádaná podle typu ω_1 ani podle typu ω_1^*, tedy*

$$\omega_1 \nleq \lambda, \qquad \omega_1^* \nleq \lambda .$$

Důkaz. Ukážeme, že neexistuje množina $X \subseteq \mathbb{R}$ typu ω_1. Stejné tvrzení pro typ ω_1^* se dokazuje podobně.

Předpokládejme, že existuje množina $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $\alpha < \beta$ je $x_\alpha < x_\beta$. Pro každé $\alpha < \omega_1$ vybereme jedno racionální číslo q_α takové, že $x_\alpha < q_\alpha < x_{\alpha+1}$. Dostáváme prosté zobrazení nespočetného kardinálu ω_1 do spočetné množiny racionálních čísel a to je spor.

3.9 Reálné typy. Říkáme, že φ je *reálným typem*, jestliže $\varphi \leq \lambda$. Reálné typy jsou právě typy podmnožin reálné přímky.

3.10 Speckerovy typy. Erdös a Rado (1956) položili otázku, zda ω_1, ω_1^* a nespočetné reálné typy tvoří bázi pro všechny nespočetné typy. Krátce nato dal E. Specker negativní odpověď. Ukázal, že existují nespočetné lineárně uspořádané množiny takové, že žádná jejich nespočetná podmnožina není typu ω_1, ani ω_1^*, ani není izomorfní s nějakou podmnožinou reálné přímky. Takovým lineárním uspořádáním říkáme *Speckerova uspořádání* a typy nazýváme Speckerovy. Speckerovými typy a jejich vztahem k Aronszajnovým stromům se zabýváme v 3.63.

Je zajímavé, že Speckerovy typy mají mohutnost právě ω_1, viz 3.63. Odtud plyne, že $\{\omega_1, \omega_1^*\}$, nespočetné reálné typy a Speckerovy typy tvoří množinu, která je bází pro třídu všech nespočetných typů.

Ukážeme, že za předpokladu hypotézy kontinua neexistuje konečná báze pro nespočetné typy. Je dosud otevřeným problémem, zda toto tvrzení platí i bez dodatečných množinových předpokladů.

3.11 Neslučitelné typy. Říkáme, že dva typy φ, ψ stejné mohutnosti jsou *neslučitelné*, jestliže pro žádný typ χ mohutnosti $|\varphi|$ neplatí současně $\chi \leq \varphi$ a $\chi \leq \psi$.

3.12 Věta (W. Sierpinski 1950, S. Ginsburg 1955, J. Baumgartner 1982). *Nechť φ je reálný typ mohutnosti 2^ω.*

(i) *Existuje systém $S \subseteq \{\psi : \psi \leq \varphi \,\&\, |\psi| = 2^\omega\}$ vzájemně neporovnatelných typů takový, že S má maximální možnou mohutnost 2^{2^ω}.*

(ii) *Existuje systém $T \subseteq \{\psi : \psi \leq \varphi \,\&\, |\psi| = 2^\omega\}$ vzájemně neslučitelných typů takový, že $|T| = (2^\omega)^+$.*

3.13 Důsledek. *Za předpokladu* CH *systém T sestává z neslučitelných typů mohutnosti ω_1. To znamená, že za předpokladu hypotézy kontinua nemůže existovat konečná báze dokonce ani pro nespočetné reálné typy.*

Dříve než tato tvrzení dokážeme, zavedeme pojem uzávěru izomorfismu a ukážeme, že existuje pouze 2^ω, v jistém smyslu maximálních, izomorfních zobrazení podmnožin reálné přímky do reálné přímky.

Je-li $f\colon A \to B$ izomorfismus množin $A, B \subseteq \mathbb{R}$, definujme uzávěr $\bar{f}$ izomorfismu f následujícím způsobem: Pro libovolná reálná čísla x, y

$$y = \bar{f}(x) \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists x_1, x_2 \in A)(x_1 \leq x \leq x_2 \,\&\, f(x_1) \leq y \leq f(x_2) \,\&$$
$$\& \,(x_2 - x_1) < \varepsilon \,\&\, (f(x_2) - f(x_1)) < \varepsilon).$$

Je zřejmé, že $f \subseteq \bar{f}$, proto $A \subseteq \mathrm{Dom}(\bar{f})$. Navíc $x \in \mathrm{Dom}(\bar{f}) - A$, právě když

$$x = \sup\{a \in A : a < x\} = \inf\{a \in A : a > x\},$$
$$\sup\{f(a) : a \in A \,\&\, a < x\} = \inf\{f(a) : a \in A \,\&\, a > x\}.$$

Pro každé takové x je $\bar{f}(x) = \sup f[A \cap (\leftarrow, x)]$.

Snadno se ověří, že $\bar{f}$ je také izomorfismus a že je to největší izomorfismus, jehož hodnoty jsou jednoznačně určeny zobrazením f.

3.14 Lemma. *Je-li f izomorfismus mezi podmnožinami reálné přímky, pak existuje nejvýše spočetné zobrazení $g \subseteq f$ takové, že $f \subseteq \bar{g}$.*

Důkaz. Nechť f je izomorfismus, který zobrazuje množinu A na B. Ukážeme, že existuje nejvýše spočetná množina $A_0 \subseteq A$ taková, že každé $x \in A - A_0$ je limitním bodem obou množin $\{a \in A_0 : a < x\}$ i $\{a \in A_0 : a > x\}$.

Množinu A_0 získáme tak, že vybereme nejvýše spočetnou množinu $A_1 \subseteq A$ hustou v A a k ní přidáme všechny body z A, které nejsou oboustranně hromadnými body množiny A_1. Nechť $B_0 \subseteq B$ je nejvýše spočetná množina s obdobnými vlastnostmi jako A_0. Vezměme $C = A_0 \cup f^{-1}[B_0]$ a položme $g = f | C$. Je snadné ověřit, že zobrazení g má požadované vlastnosti.

3.15 *Důkaz věty* 3.12. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ má mohutnost 2^ω a $\varphi = \operatorname{tp}(A)$. Nechť $\langle f_\alpha : \alpha < 2^\omega \rangle$ je očíslování všech spočetných izomorfismů mezi množinami reálných čísel.

Rekurzí sestrojíme množinu $Z = \{z_\alpha : \alpha < 2^\omega\} \subseteq A$, kterou použijeme k důkazu (i) a (ii). Předpokládejme, že $\alpha < 2^\omega$ a že jsme již sestrojili z_β pro $\beta < \alpha$. Nechť Z_α je uzávěr množiny $\{z_\beta : \beta < \alpha\}$ na všechna zobrazení $\bar{f}_\beta$ a $\bar{f}_\beta^{-1}$ pro $\beta < \alpha$. Přitom $|Z_\alpha| < 2^\omega$, můžeme tedy vybrat $z_\alpha \in A$ tak, že $z_\alpha \notin Z_\alpha$. Takto získáme množinu Z.

Nyní pro libovolné $X \subseteq 2^\omega$ položme $Z(X) = \{z_\alpha : \alpha \in X\}$. Ukážeme, že jsou-li $X, Y \subseteq 2^\omega$ takové, že $X - Y$ je kofinální podmnožina kardinálu 2^ω, pak $Z(X)$ se nedá izomorfně vnořit do $Z(Y)$.

Předpokládejme naopak, že $f : Z(X) \to Z(Y)$ je nějaké vnoření. Podle 3.14 je $f \subseteq \bar{f}_\alpha$ pro nějaké α. Zvolme $\beta \in X - Y$ takové, že $\beta > \alpha$. Pak $z_\beta \in Z(X)$ a $f(z_\beta) = \bar{f}_\alpha(z_\beta) \in Z_{\beta+1}$. Podle předpokladu je $f(z_\beta) = z_\gamma$ pro nějaké $\gamma \in Y$. Přitom $z_\gamma \in Z_{\beta+1}$, tedy $\gamma \leq \beta$, a $\beta \in X - Y$. To znamená, že $\gamma < \beta$, a z konstrukce množiny Z dostáváme $z_\beta = f^{-1}(z_\gamma) = \bar{f}_\alpha^{-1}(z_\gamma) \in Z_\beta$. To je spor, protože $z_\beta \notin Z_\beta$.

(i) Vezměme nezávislý systém $\{X(\alpha, i) : \alpha < 2^{2^\omega}, i < 2\}$ množin na 2^ω mohutnosti 2^{2^ω}. Takový systém existuje podle 1.7. Pro různá $\xi, \eta < 2^{2^\omega}$ má rozdíl $X(\xi, 0) - X(\eta, 0)$ mohutnost 2^ω, a je proto kofinální s 2^ω. To znamená, že typy množin $Z(X(\xi, 0))$ pro $\xi < 2^{2^\omega}$ jsou vzájemně neporovnatelné.

(ii) Vezměme systém S skoro disjunktních množin na 2^ω takový, že $|S| > 2^\omega$. Takový systém existuje podle 1.13(ii). Pro každé $X \in S$ nechť ψ_X je typ množiny $Z(X)$. Ukážeme, že pro různá $X, Y \in S$ jsou typy ψ_X a ψ_Y neslučitelné. Předpokládejme, že ψ je nějaký typ mohutnosti kontinua takový, že $\psi \leq \psi_X, \psi_Y$. Existuje tedy $E \subseteq X$ mohutnosti 2^ω takové, že $Z(E)$ má typ ψ. Přitom $E - Y$ je kofinální s 2^ω, a proto $Z(E)$ nelze vnořit do $Z(Y)$. To znamená, že $\psi \not\leq \psi_Y$ – spor. Systém $T = \{\psi_X : X \in S\}$ má všechny požadované vlastnosti. Tím je věta dokázána.

Uvědomme si, že každý systém vzájemně neslučitelných reálných typů ψ takových, že $|\psi| = 2^\omega$, určuje skoro disjunktní systém množin na 2^ω. To znamená, že bez dodatečných předpokladů nelze zvýšit mohutnost systému T v tvrzení (ii) věty 3.12.

3.16 $\aleph_1$-husté reálné typy. Spočetná hustá množina $X \subseteq \mathbb{R}$ má tu vlastnost, že pro každý neprázdný otevřený interval I je $I \cap X$ spočetný. Víme také, že všechny spočetné husté množiny v $\mathbb{R}$ jsou typu η. Pojem $\aleph_1$-husté množiny v $\mathbb{R}$ je přirozené zobecnění spočetné husté množiny.

Říkáme, že $D \subseteq R$ je $\aleph_1$-*hustá*, jestliže pro každý neprázdný otevřený interval I je $|I \cap D| = \aleph_1$. Je-li D $\aleph_1$-hustá množina, její typ se nazývá $\aleph_1$-*hustý typ*.

$\aleph_1$-hustá množina má mohutnost $\aleph_1$. Na druhou stranu, je-li $X \subseteq \mathbb{R}$ množina mohutnosti $\aleph_1$, pak množina

$$X_0 = \{x \in X : (\exists \varepsilon > 0)(|X \cap (\varepsilon - x, x)| \leq \omega \vee |X \cap (x, x + \varepsilon)| \leq \omega\}$$

je nejvýše spočetná. Snadno se nahlédne, že množina $X - X_0$ je izomorfní s nějakou $\aleph_1$-hustou množinou, takže její typ je $\aleph_1$-hustý. Odtud plyne, že $\aleph_1$-husté reálné typy tvoří bázi pro všechny nespočetné reálné typy.

Všechny spočetné husté neboli $\aleph_0$-husté množiny jsou izomorfní. Pro $\aleph_1$-husté množiny podobné tvrzení není dokazatelné.

Předpokládáme-li, že $2^\omega < 2^{\omega_1}$, pak již existují různé $\aleph_1$-husté typy. Podle 3.14 s každou $\aleph_1$-hustou množinou může být izomorfní nejvýše 2^ω podmnožin reálné přímky. Přitom je 2^{ω_1} různých $\aleph_1$-hustých množin. To znamená, že je 2^{ω_1} různých $\aleph_1$-hustých typů.

Předpokládáme-li CH, pak dokonce existuje 2^{ω_1} vzájemně neslučitelných $\aleph_1$-hustých typů. To plyne z 3.12(ii) a důkazu 3.15.

Na druhou stranu J. Baumgartner (1973) ukázal, že tvrzení „všechny $\aleph_1$-husté množiny jsou izomorfní“ je bezesporné s teorií množin. V takovém případě nutně $2^\omega = 2^{\omega_1}$, ale není to postačující podmínka.

3.17 Suslinův problém se týká vztahu Suslinova čísla a separability lineárně uspořádaného topologického prostoru.

Je-li nekonečný Hausdorffův topologický prostor X separabilní, to znamená, existuje-li spočetná hustá podmnožina $Y \subseteq X$, potom existuje nejvýše spočetně mnoho vzájemně disjunktních otevřených podmnožin prostoru X. Jinými slovy, Suslinovo číslo $c(X)$ prostoru X je ω.

Klasická Cantorova věta, která charakterizuje uspořádání reálné přímky $\mathbb{R}$, tvrdí, že každá lineárně uspořádaná množina $\langle X, \leq \rangle$ taková, že

(i) X je hustě uspořádaná a nemá nejmenší ani největší prvek,

(ii) je dedekindovsky úplná, to znamená, že každá neprázdná shora omezená podmnožina má supremum v X,

(iii) je separabilní,

musí být izomorfní s $\mathbb{R}$.

Suslin (1920) položil otázku, zda podmínka (iii) v Cantorově větě může být nahrazena slabší podmínkou

(iv) $c(X) = \omega$.

Kdyby to nebylo možné, pak musí existovat lineárně uspořádaná množina $\langle X, \leq \rangle$ taková, že X jako topologický prostor s intervalovou topologií má spočetné Suslinovo číslo, ale není separabilní. Takovou uspořádanou množinu nazýváme *Suslinovou přímkou.*

3.18 *Suslinova hypotéza* (SH) je tvrzení „neexistuje žádná Suslinova přímka".

Je zřejmé, že pokud platí Suslinova hypotéza, podmínky (i)–(iii) a (i), (ii), (iv) jsou ekvivalentní. Ukážeme, že i naopak z ekvivalence uvedených podmínek plyne Suslinova hypotéza. To znamená, že Suslinova hypotéza je ekvivalentní s tvrzením, že podmínky (i), (ii) a (iv) charakterizují uspořádání reálné přímky.

3.19 Věta. *Existuje-li Suslinova přímka, pak existuje Suslinova přímka $\langle L, \leq \rangle$, která je hustě uspořádaná, a v žádném neprázdném otevřeném intervalu neexistuje spočetná hustá podmnožina.*

Důkaz. Nechť X je nějaká Suslinova přímka. Definujme relaci ekvivalence na X tak, že $x \sim y$, právě když existuje nejvýše spočetná množina hustá v intervalu s koncovými body x a y.

Nechť $P \subseteq X$ je nějaká třída ekvivalence odpovídající relaci $\sim$. Je zřejmé, že P je konvexní množina. Ověříme, že P je separabilní prostor. Nechť M je nějaký maximální systém vzájemně disjunktních otevřených intervalů (x, y) takových, že $x, y \in P$. Jelikož Suslinovo číslo $c(X) = \omega$, je $|M| \leq \omega$. Pro každý interval $I \in M$ vyberme nějakou nejvýše spočetnou množinu $D_I \subseteq I$, která je hustá v I. Potom množina

$$D = \bigcup_{I \in M} D_I$$

je nejvýše spočetná a přidáme-li k ní nejmenší a největší prvek množiny P, pokud existují, dostaneme množinu hustou v P. Tedy P je separabilní prostor.

Položme $L = X/\!\sim$. Faktorovou množinu L lineárně uspořádáme relací $\leq$, kde $P \leq Q$ znamená, že buď $P = Q$, nebo nějaký (každý) prvek z P je menší než nějaký (každý) prvek z Q v uspořádání přímky X.

Postupně ověříme, že $\langle L, \leq \rangle$ je hustě uspořádaná množina, žádný neprázdný otevřený interval není separabilní a Suslinovo číslo $c(L) = \omega$. Pro každé $P \in L$ zvolíme nejvýše spočetnou množinu $H_P \subseteq P$, která je hustá v P v uspořádání přímky X.

Nechť $P < Q$. Kdyby interval (P, Q) byl prázdný, pak pro libovolné $x \in P$ a $y \in Q$ množina $H_P \cup H_Q$ je hustá v intervalu (x, y) a to znamená, že $x \sim y$ – spor. Tedy $\leq$ je husté uspořádání. Podobně se dokáže, že interval (P, Q) není také separabilní prostor.

Předpokládejme, že $c(L) > \omega$. Potom existují vzájemně disjunktní neprázdné intervaly (P_α, Q_α) pro $\alpha < \omega_1$. Pro každé α vybereme prvky $x_\alpha \in P_\alpha$ a $y_\alpha \in Q_\alpha$. Každý interval (x_α, y_α) přímky X je neprázdný, protože $P_\alpha < Q_\alpha$ a x_α není ekvivalentní s y_α. Tedy (x_α, y_α) pro $\alpha < \omega_1$ je nespočetně mnoho disjunktních otevřených intervalů na přímce X – spor. Dokázali jsme, že $c(L) = \omega$.

3.20 Předpokládejme, že neplatí Suslinova hypotéza. Podle předchozí věty existuje Suslinova přímka $\langle L, \leq \rangle$, která je hustě uspořádaná. Můžeme předpokládat, že L nemá nejmenší ani největší prvek. Potom dedekindovské zúplnění přímky L bude opět hustě uspořádaná množina se stejným Suslinovým číslem a také bez spočetné husté množiny. Získáme tím lineárně uspořádanou množinu, která splňuje podmínky (i), (ii) a (iv) z 3.17, ale nesplňuje podmínku (iii). Ukázali jsme, že pokud podmínky (i), (ii) a (iv) charakterizují reálnou přímku, potom platí Suslinova hypotéza.

3.21 Kurepova hypotéza. D. Kurepa (1936) se ptal, zda existuje systém množin $S \subseteq \mathscr{P}(\omega_1)$ takový, že $|S| \geq \omega_2$ a současně pro každé $\alpha < \omega_1$ je množina $\{A \cap \alpha : A \in S\}$ nejvýše spočetná.

3.22 Označení. Je-li F nějaký systém množin a X libovolná množina, potom zúžení F na X je systém

$$F \mid X = \{A \cap X : A \in F\}.$$

3.23 Kurepův systém. Říkáme, že $F \subseteq \mathscr{P}(\omega_1)$ je *Kurepův systém*, jestliže

(i) $|F| \geq \omega_2$,

ale

(ii) $|F \mid X| \leq \omega$ pro každé $X \subseteq \omega_1$ takové, že $|X| \leq \omega$.

Je zřejmé, že systém S z 3.21 je Kurepův systém.

3.24 *Kurepova hypotéza* (KH) je tvrzení „existuje Kurepův systém".

KH je nerozhodnutelná v teorii množin. Z negace Kurepovy hypotézy vyplývá, že ω_2 je nedosažitelný kardinál v **L**. Tedy z negace KH plyne bezespornost existence nedosažitelného kardinálu. Naopak Silver (1971) ukázal, že bezespornost existence nedosažitelného kardinálu implikuje bezespornost negace Kurepovy hypotézy.

3.25 *Kurepova přímka* je lineárně uspořádaná množina $\langle L, \leq \rangle$, pro kterou platí

(i) $|L| \geq \omega_2$,

(ii) existuje hustá množina $X \subseteq L$ mohutnosti ω_1,

(iii) žádnou nespočetnou množinu reálných čísel nelze izomorfně vnořit do L.

3.26 Věta. *Kurepův systém existuje, právě když existuje Kurepova přímka.*

Náznak důkazu. Nechť F je Kurepův systém. Vezmeme-li charakteristické funkce na ω_1 všech množin $A \in F$ spolu s jejich lexikografickým uspořádáním, dostaneme Kurepovu přímku.

Naopak, nechť $\langle L, \leq \rangle$ je Kurepova přímka a $M \subseteq L$ hustá množina mohutnosti ω_1. Pro každé $x \in L$ položme $D_x = \{y \in M : y \leq x\}$. Pak $F = \{D_x : x \in L\} \subseteq \mathscr{P}(M)$ a F je Kurepův systém na M.

3.27 Seznámili jsme se se Suslinovou a Kurepovou hypotézou. Každá z nich je nerozhodnutelná v teorii množin.

Uvažujeme-li souběžně o platnosti či neplatnosti hypotézy kontinua, Suslinovy hypotézy a Kurepovy hypotézy, je celkem osm možných případů. Je známo (Devlin 1978), že každý z nich je bezesporný s teorií množin, případně s teorií množin a existencí nedosažitelného kardinálu (jde-li o $\neg$KH).

3.28 Speckerovy typy lineárního uspořádání, Suslinova a Kurepova hypotéza mají ekvivalentní vyjádření v řeči stromů.

Pojem stromu je zobecněním pojmu ordinálu. Stromy reprezentují procesy, které se v jednotlivých krocích mohou větvit. U ordinálů se přechod od menšího k většímu děje pouze v jednom směru, od daného ordinálu k jeho následníku a na limitních krocích k nejbližšímu limitnímu ordinálu.

Zpočátku je nutné zavést několik pojmů o stromech. Jako obvykle $\varkappa$, λ značí nekonečné kardinály, ν je libovolný kardinál.

3.29 Definice. *Strom* je uspořádaná množina $\langle T, \leq \rangle$ taková, že pro každý *vrchol* $x \in T$ množina všech jeho *předchůdců* $\{y \in T: y < z\}$ je dobře uspořádaná relací $\leq$.

Podstrom stromu T je libovolná podmnožina $T' \subseteq T$ se stejným uspořádáním $\leq$. Je-li navíc T' dolní podmnožina, říkáme, že T' je *dolní podstrom* stromu T.

Pokud bude zřejmé, které uspořádání stromu máme na mysli, píšeme krátce T místo $\langle T, \leq \rangle$.

Připomeňme, že v libovolné uspořádané množině $\langle A, \leq \rangle$ se podmnožina $A' \subseteq A$, která je lineárně uspořádaná, nazývá řetězcem. Naopak, podmnožina, která sestává ze vzájemně neporovnatelných prvků, se nazývá antiřetězec.

Vzhledem k tomu, že ve stromu je množina předchůdců libovolného vrcholu dobře uspořádaná, každý řetězec je dobře uspořádaná množina. Přitom množina řetězců je také uspořádaná inkluzí a splňuje podmínky principu maximality. Proto každý řetězec je obsažen v nějakém maximálním řetězci.

3.30 Definice. *Větev* je maximální řetězec ve stromu.

Větev obsahuje s každým prvkem také všechny jeho předchůdce. Každá větev je tedy dolní podmnožinou stromu.

3.31 Definice. Nechť T je strom. (i) Je-li $x \in T$, ordinální číslo, které je typem dobře uspořádané množiny $(\leftarrow, x)$, nazýváme *výškou vrcholu* x ve stromu T a značíme $H_T(x)$ nebo krátce $H(x)$.

(ii) Množina $T_\alpha = \{x \in T: H(x) = \alpha\}$ se nazývá *α-tá hladina* stromu T.

Dolní podstrom sestávající ze všech hladin T_β pro $\beta < \alpha$ budeme označovat $T \restriction \alpha$.

(iii) *Výška stromu* T je nejmenší α takové, že $T_\alpha = 0$. Značíme ji $H(T)$. Jinými slovy $H(T) = \sup \{H_T(x) + 1 : x \in T\}$.

Mluvíme-li o hladinách stromu, máme na mysli jeho neprázdné hladiny, to znamená T_α pro $\alpha < H(T)$.

(iv) *Délkou větve* rozumíme typ jejího uspořádání. Je to vždy ordinální číslo $\leq H(T)$.

(v) Je-li délka větve $v \subseteq T$ rovna výšce stromu T, říkáme, že v je *kofinální větev* ve stromu T.

Přitom kofinální větev nemusí být kofinální podmnožinou vzhledem k uspořádání stromu T.

Nejprve si povšimneme jednoduchých souvislostí mezi zavedenými pojmy.

Je-li $x \in T_\alpha$ a $\beta < \alpha$, pak existuje jediný vrchol y výšky β takový, že $y < x$. To znamená, že řetězec $(\leftarrow, x]$ ve stromu T je selektorem na množině $\{T_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Každá kofinální větev (pokud existuje) je selektorem na množině všech hladin.

Dvě různé hladiny jsou disjunktní. Různé vrcholy z téže hladiny jsou neporovnatelné. Hladiny jsou příklady maximálních antiřetězců v T.

Jsou-li x, y neporovnatelné vrcholy, pak existuje nejmenší ordinál α takový, že se liší předchůdci x', y' vrcholů x, y v hladině T_α. Totéž platí pro každou hladinu T_β takovou, že $\alpha \leq \beta \leq \min(H(x), H(y))$. Pro neporovnatelné vrcholy x, y jsou množiny $[x, \rightarrow)$ a $[y, \rightarrow)$ jejich následníků disjunktní.

Je-li S dolní podstrom stromu T, pak výška každého vrcholu $x \in S$ ve stromu S je stejná jako jeho výška ve stromu T. Je-li S libovolný podstrom stromu T, pak pro každý vrchol $x \in S$ platí jen nerovnost $H_S(x) \leq H_T(x)$.

3.32 Příklady. (a) Každý ordinál α s obvyklým uspořádáním je strom. Jeho výška je α a pro každé $\beta < \alpha$ platí $H_\alpha(\beta) = \beta$.

(b) Je-li $A \neq 0$ a α ordinál, pak množina ${}^{<\alpha}A$ všech posloupností prvků z A délky $<\alpha$ uspořádaná inkluzí je strom. Tento strom má výšku α a pro každé $\beta < \alpha$ množina ${}^{\beta}A$ tvoří jeho β-tou hladinu. Nazývá se *úplným A-árním stromem* výšky α.

Speciálně, je-li $A = \{0, 1\}$, jde o *úplný binární strom* výšky α.

Úplný binární strom výšky ω nazýváme Cantorův strom.

(c) Nechť $\varrho(\mathbb{Q})$ je množina všech (i transfinitních) rostoucích omezených posloupností racionálních čísel. Jinými slovy, $\varrho(\mathbb{Q})$ je množina všech izomorfních vnoření ordinálních čísel na omezené podmnožiny racionálních čísel.

$\varrho(\mathbb{Q})$ s uspořádáním daným inkluzí je strom výšky ω_1, který nemá žádnou kofinální větev.

(d) Nechť $\varkappa$ je nekonečný kardinál. Uvažujme množinu T všech posloupností $p \in {}^{<\varkappa}2$ takových, že množina $\{\alpha \in \operatorname{Dom}(p) : p(\alpha) = 1\}$ je konečná. Potom T spolu s inkluzí je strom výšky $\varkappa$ a každá jeho hladina má méně než $\varkappa$ prvků.

Je-li $\operatorname{cf}(\varkappa) > \omega$, pak existuje právě $\varkappa$ kofinálních větví v T, protože každá kofinální větev je určena charakteristickou funkcí konečné podmnožiny kardinálu $\varkappa$.

Je-li $\operatorname{cf}(\varkappa) = \omega$, pak existuje $\varkappa^{\aleph_0}$ kofinálních podmnožin kardinálu $\varkappa$ uspořádaných dle typu ω. Každá charakteristická funkce takové množiny určuje kofinální větev stromu T. Existuje tedy alespoň $\varkappa^{\aleph_0}$, tedy více než $\varkappa$ různých kofinálních větví.

Výška stromu a mohutnost jeho hladin, existence a počet kofinálních větví jsou důležité charakteristiky nekonečných stromů.

V příkladu 3.32(c) je strom výšky ω_1, který nemá žádnou kofinální větev. Jeho hladiny mají pro všechna nekonečná $\alpha < \omega_1$ mohutnost 2^ω. Pro libovolný nekonečný kardinál $\varkappa$ snadno sestrojíme strom výšky $\varkappa$ bez kofinálních větví.

3.33 Příklad. Nechť $\varkappa$ je nekonečný kardinál, $\nu = \mathrm{cf}(\varkappa)$ a nechť $\langle \varkappa_\beta : \beta < \nu \rangle$ je rostoucí posloupnost, která konverguje ke $\varkappa$. Potom množina

$$T = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \alpha < \varkappa_\beta \;\&\; \beta < \nu\}$$

spolu s uspořádáním $\leq$, kde

$$\langle \alpha, \beta \rangle \leq \langle \alpha', \beta' \rangle \leftrightarrow \beta = \beta' \;\&\; \alpha \leq \alpha',$$

je strom výšky $\varkappa$, který nemá žádnou kofinální větev. Strom T je sjednocením ν větví, každá má délku $< \varkappa$. Všechny hladiny stromu T mají mohutnost $\mathrm{cf}(\varkappa)$.

Takový strom není příliš zajímavý, ale vede k otázce, zda existují kofinální větve v každém stromu výšky $\varkappa$, jehož hladiny mají mohutnost $< \mathrm{cf}(\varkappa)$. Odpověď závisí na tom, zda existuje Aronszajnův $\mathrm{cf}(\varkappa)$-strom (3.42).

3.34 Definice. Strom výšky $\varkappa$, jehož všechny hladiny mají mohutnost menší než kardinál ν, se nazývá $(\varkappa, \nu)$-*strom*. $(\varkappa, \varkappa)$-strom nazýváme krátce $\varkappa$-*stromem*.

Klasická věta D. Königa (1926) řeší základní případ ω-stromů.

3.35 Věta. *Každý ω-strom má kofinální větev.*

Důkaz. Nechť T je ω-strom. Pak T je nekonečný a každá hladina T_n je konečná. Zvolme $t_0 \in T_0$ takové, že množina $(t_0, \rightarrow)$ všech jeho následníků je nekonečná. Přitom T_1 je konečná a

$$(t_0, \rightarrow) \subseteq \bigcup_{x \in T_1} [x, \rightarrow).$$

Existuje tedy $t_1 \in T_1$ takové, že $t_1 > t_0$ a $(t_1, \rightarrow)$ je opět nekonečné. Užitím axiomu výběru můžeme pro každé n vybrat $t_n \in T_n$ tak, že $(t_n \rightarrow)$ je nekonečné a $t_n < t_{n+1}$. Potom $\{t_n : n < \omega\}$ je kofinální větev v T.

3.36 Příklady. (a) (D. König) Bude-li lidstvo žít neomezeně dlouho, dnes žije muž, jehož rod nikdy nevymře po meči.

(b) Nechť f je zobrazení množiny $B \subseteq A$ do A takové, že vzory všech $x \in A$ jsou konečné množiny. Nechť existuje $a \in A$ takové, že pro každé přirozené n existuje posloupnost $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ taková, že $f(x_0) = a$ a pro každé $i < n$ platí $f(x_{i+1}) = x_i$. Potom existuje nekonečná posloupnost $\langle x_i : i < \omega \rangle$ prvků z B se stejnými vlastnostmi.

Uvědomme si, že toto tvrzení zahrnuje i příklad (a).

3.37 Definice. Říkáme, že strom T *nemá krátké výhony*, jestliže pro libovolné ordinály $\alpha < \beta < H(T)$ a každé $x \in T_\alpha$ existuje $y \in T_\beta$ takové, že $y > x$.

Jinými slovy, strom nemá krátké výhony, jestliže z každého vrcholu do každé vyšší hladiny vede nějaká větev.

3.38 Lemma. *Nechť T je $(\varkappa, \mathrm{cf}(\varkappa))$-strom. Potom existuje dolní podstrom T' stromu T výšky $\varkappa$, který nemá krátké výhony.*

Důkaz. Vezměme množinu T' těch $x \in T$, pro které množina následníků $(x, \to)$ ve stromu T má mohutnost $\varkappa$. Je zřejmé, že T' je dolní podstrom stromu T.

Nechť $x \in T'_\alpha$. Pro libovolné β takové, že $\alpha < \beta < \varkappa$, má množina

$$\bigcup_{y \in T_\beta} [y, \to)$$

mohutnost $\varkappa$ a pokrývá celé $(x, \to)$ až na množinu mohutnosti $<\varkappa$. Přitom $|T_\beta| < \mathrm{cf}(\varkappa)$, proto existuje $y \in T_\beta$, takové, že $y > x$ a $|(y, \to)| = \varkappa$. To znamená, že $y \in T'$. Podobnou úvahou dokážeme, že nějaké $x \in T_0$ je v T', tedy $T' \neq 0$. Odtud plyne, že T' nemá krátké výhony a má výšku $\varkappa$.

Pro $(\varkappa, \mathrm{cf}(\varkappa))$-stromy je problém existence kofinálních větví převeden na $(\varkappa, \mathrm{cf}(\varkappa))$-stromy bez krátkých výhonů. Uvědomme si, že kofinální větev ve stromu T' z 3.38 je také kofinální větví v T.

Snadno dostáváme následující zobecnění Königovy věty.

3.39 Důsledek. *Pokud* $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$, *každý* $(\varkappa, \omega)$*-strom má kofinální větev.*

Důkaz. Nechť T' je podstrom bez krátkých výhonů z 3.38 $(\varkappa, \omega)$-stromu T. Nechť $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ je rostoucí posloupnost ordinálů, která konverguje ke $\varkappa$. Pro každé $n < \omega$ můžeme vybrat vrcholy $x_n \in T'_{\alpha_n}$ tak, že $x_n < x_{n+1}$. Řetězec $\{x_n : n < \omega\}$ určuje kofinální větev T.

Kofinální větev ve stromu lze zaručit i v dalších případech. Stačí, když strom je štíhlý a dostatečně vysoký.

3.40 Věta. *Předpokládejme, že* $\nu < \mathrm{cf}(\varkappa)$. *Potom každý* $(\varkappa, \nu)$*-strom má kofinální větev.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že stačí vyšetřovat případy, kdy $\varkappa$ je nespočetný regulární kardinál a ν je nekonečný regulární kardinál menší než $\varkappa$.

Pokud $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$, je věta speciálním případem 3.39. Je-li $\varkappa$ singulár a $\mathrm{cf}(\varkappa) > \omega$, vezměme kofinální podmnožinu $C \subseteq \varkappa$ typu $\mathrm{cf}(\varkappa)$. Potom

$$S = \bigcup_{\alpha \in C} T_\alpha$$

je podstrom stromu T, který je $(\mathrm{cf}(\varkappa), \nu)$-stromem. Kofinální větev v S určuje kofinální větev v původním stromu T. Stačí proto vyšetřovat stromy s regulární výškou.

Předpokládejme, že $\varkappa$ je nespočetný regulární kardinál, $\nu < \varkappa$ a T je $(\varkappa, \nu)$-strom bez krátkých výhonů. Odtud plyne, že $|T_\alpha| \leq |T_\beta| < \nu$ pro každé $\alpha < \beta < \varkappa$, a snadno se nahlédne, že také $\sup \{|T_\alpha| : \alpha < \varkappa\} < \nu$. Je-li ν singulár, pak existuje regulární kardinál $\nu' < \nu$ takový, že T je $(\varkappa, \nu')$-strom. Je-li ν konečné, pak $\omega < \varkappa$ a T je $(\varkappa, \omega)$-strom. Ukázali jsme, že stačí vyšetřovat případ, kdy ν je nekonečný regulární kardinál.

Uvažujme stacionární množinu $E = \{\alpha < \varkappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \nu\}$. Ukážeme, že pro každé $\alpha \in E$ existuje číslo $f(\alpha) < \alpha$ takové, že interval $[f(\alpha), \alpha)$ neobsahuje délku žádné větve stromu T.

V opačném případě pro nějaké $\alpha \in E$ existuje rostoucí posloupnost ordinálů $\langle \alpha_\xi : \xi < \nu \rangle$, která konverguje k α, a pro každé $\xi < \nu$ existuje větev v_ξ délky α_ξ. Potom množina $A = \{v_{\xi+1}(\alpha_\xi) : \xi < \nu\}$, kde $v_{\xi+1}(\alpha_\xi)$ je α_ξ-tý prvek větve $v_{\xi+1}$, obsahuje antiřetězec A' mohutnosti ν. Přitom každý vrchol z A' má výšku $< \alpha$ a má alespoň jednoho následníka v hladině T_α. Proto $|T_\alpha| \geq \nu$ — spor.

Získali jsme regresivní funkci f na stacionární množině E. Podle Fodorovy věty existuje neomezená množina $E' \subseteq E$, na které je f konstantní s nějakou hodnotou β. To ovšem znamená, že libovolná větev v T je buď kratší délky než β, nebo má délku $\varkappa$. Proto každá větev procházející nějakým vrcholem $x \in T_\beta$ je kofinální větví v T. Důkaz je hotov.

Pro nespočetný regulární kardinál $\varkappa$ však kofinální větev v $\varkappa$-stromu nemusí existovat.

3.41 Věta (Aronszajn — viz Kurepa 1937). *Existuje ω_1-strom bez kofinálních větví.*

Důkaz. Strom T konstruujeme jako dolní podstrom ω-árního stromu výšky ω_1. Každá jeho hladina T_α sestává z některých prostých funkcí $g : \alpha \to \omega$ takových, že ω-$\mathrm{Rng}(g)$ je nekonečná množina. Odtud plyne, že v T neexistuje větev délky ω_1, jinak by existovalo prosté zobrazení kardinálu ω_1 do ω. Potřebujeme pouze zajistit, aby $|T_\alpha| < \omega_1$ pro všechna $\alpha < \omega_1$.

Hladiny T_α konstruujeme rekurzí tak, aby platilo:

(*) pro každé $\gamma < \alpha$, $f \in T_\gamma$ a konečnou množinu $x \subseteq \omega$-$\mathrm{Rng}(f)$ existuje $g \in T_\alpha$ takové, že $f \subseteq g$ a $x \subseteq \omega$-$\mathrm{Rng}(g)$.

Položíme $T_0 = \{0\}$. Předpokládejme, že pro $\alpha > 0$ máme již sestrojeny T_γ, $\gamma < \alpha$. Pokud $\alpha = \beta + 1$, T_α sestává ze všech přípustných prodloužení funkcí z T_β.

Nechť α je limitní. Pro dané $\gamma < \alpha$, $f \in T_\gamma$ a konečné $x \subseteq \omega$-$\mathrm{Rng}(f)$ nalezneme funkci g, která bude splňovat (*).

Zvolme rostoucí posloupnost $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ konvergující k α takovou, že $\alpha_0 = \gamma$. Využitím indukčního předpokladu snadno současně zkonstruujeme posloupnost funkcí $\langle f_n : n < \omega \rangle$ a rostoucí posloupnost konečných množin $\langle x_n : n < \omega \rangle$ tak, že platí

$$\begin{aligned} &f_0 = f, && x_0 = x, \\ &f_n \in T_{\alpha_n}, && f_n \subseteq f_{n+1}, \\ &x_n \subset x_{n+1}, && x_n \subseteq \omega\text{-}\mathrm{Rng}(f_{n+1}). \end{aligned}$$

Položíme-li

$$g = \bigcup_{n<\omega} f_n,$$

g je prosté zobrazení α do ω.

$$\bigcup_{n<\omega} x_n \subseteq \omega\text{-Rng}(g) \quad \text{a} \quad f \subseteq g\,.$$

Funkce g bude prvkem T_α. Protože existuje pouze spočetně mnoho trojic γ, f, x, množina T_α je spočetná.

$$T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$$

spolu s inkluzí je ω_1-strom bez kofinálních větví.

3.42 Definice. *Aronszajnův $\varkappa$-strom* je $\varkappa$-strom, který nemá žádnou kofinální větev. Je-li $\varkappa = \omega_1$, mluvíme o *Aronszajnově stromu.*

V Aronszajnově $\varkappa$-stromu nejsou kofinální větve, tedy ani řetězce velikosti $\varkappa$. V následující definici budeme navíc požadovat, aby neexistoval ani antiřetězec velikosti $\varkappa$.

3.43 Definice. *Suslinův $\varkappa$-strom* je $\varkappa$-strom, který nemá řetězec ani antiřetězec mohutnosti $\varkappa$.
Je-li $\varkappa = \omega_1$, mluvíme o *Suslinově stromu.*

Pro každý singulár $\varkappa$ existuje Suslinův, tedy i Aronszajnův $\varkappa$-strom, jak je zřejmé z příkladu 3.33.

Podle Königovy věty nemůže existovat Aronszajnův ω-strom. Naproti tomu existuje Aronszajnův ω_1-strom, tvrzení 3.41. Zda existují Aronszajnovy ω_2-stromy, nelze rozhodnout v teorii množin. Za předpokladu GCH však existují Aronszajnovy $\varkappa^+$-stromy pro každé regulární $\varkappa$. Zůstává otevřeným problémem, platí-li to i pro následníky singulárních kardinálů.

Existence Aronszajnových $\varkappa$-stromů pro nedosažitelné $\varkappa$ souvisí s jemnější klasifikací velkých kardinálů.

3.44 Věta (Specker 1949). *Je-li $\varkappa^{<\varkappa} = \varkappa$, pak existuje Aronszajnův $\varkappa^+$-strom.*

3.45 Důsledek (GCH). *Pro každé regulární $\varkappa$ existuje Aronszajnův $\varkappa^+$-strom.*
Důkaz. Podmínka z věty 3.44 je ekvivalentní s tím, že $\varkappa$ je regulární kardinál a pro každé $\nu < \varkappa$ je $2^\nu \leq \varkappa$. Z GCH plyne, že tuto podmínku splňuje každý regulární kardinál.

K důkazu věty 3.44 použijeme Kunenovo (1977) kombinatorické tvrzení, které je samo o sobě zajímavé.

3.46 Lemma. *Je-li λ regulární kardinál, pak existují prostá zobrazení $f_\alpha\colon \alpha \to \lambda$ pro $\alpha < \lambda^+$ taková, že*

$$|\{\xi < \beta\colon f_\beta(\xi) \neq f_\alpha(\xi)\}| < \lambda\,,$$

jakmile $\beta < \alpha < \lambda^+$.

Důkaz. Nejprve dokážeme lemma pro regulární $\lambda > \omega$. Důkaz zobecňuje postup užitý ve větě 3.41 a opírá se o následující fakta o stacionárních množinách:

(i) Každá množina $M \subseteq \lambda$ mohutnosti λ má nestacionární podmnožinu $X \subseteq M$ stejné mohutnosti.

(ii) Je-li $Y \subseteq \lambda$ stacionární množina a $\{Y_\alpha : \alpha < \lambda\}$ je její rozklad na nestacionární podmnožiny, potom

$$Y' = \{\min(Y_\alpha) : \alpha < \lambda\} \subseteq Y$$

je stacionární množina a množina $Y - Y'$ není stacionární.

Obě tvrzení plynou z Fodorovy věty. Vezmeme-li za X množinu všech bodů z M, které mají v M bezprostředního předchůdce, dostáváme (i). Kdyby $Y - Y'$ byla stacionární množina, pak na ní můžeme definovat regresívní funkci, která každému $\xi \in Y_\alpha - Y'$ přiřazuje nejmenší prvek množiny Y_α. Podle Fodorovy věty by jedna z množin Y_α musela být stacionární.

Nechť $\mathscr{I}$ je ideál všech nestacionárních podmnožin λ. Pro každé $\alpha < \lambda^+$ uvažujme množinu

$$S(\alpha) = \{f : \alpha \to \lambda : f \text{ je prosté a } \operatorname{Rng}(f) \in \mathscr{I}\}.$$

Je zřejmé, že každé $S(\alpha) \neq 0$. Jestliže se funkce $f, g \in S(\alpha)$ liší v méně než λ bodech, píšeme $f \sim g$.

Rekurzí podle α vybíráme funkci $f_\alpha \in S(\alpha)$ tak, aby platilo:

(iii) pro každé $\gamma < \alpha$ a $g \in S(\gamma)$ takové, že $g \sim f_\gamma$, existuje $g' \in S(\alpha)$ takové, že $g \subseteq g'$ a $f_\alpha \sim g'$.

Položíme $f_0 = 0$. Předpokládáme, že $\alpha > 0$ a že již máme sestrojeny funkce f_γ, $\gamma < \alpha$. Pokud $\alpha = \beta + 1$, pak f_α je kterékoli přípustné prodloužení funkce f_β.

Je-li α limitní s kofinalitou ν, zvolíme normální posloupnost $\langle \alpha_\xi : \xi < \nu \rangle$, která konverguje k α, takovou, že $\alpha_0 = 0$. Jelikož $\nu \leq \lambda$ a ideál $\mathscr{I}$ je λ-úplný, z indukčního předpokladu plyne, že existuje posloupnost funkcí $\langle g_\xi : \xi < \nu \rangle$ taková, že $g_\xi \in S(\alpha_\xi)$, $g_\xi \sim f_{\alpha_\xi}$ a $g_\xi \subseteq g_\eta$ pro $\xi < \eta$.

Položme

$$g = \bigcup_{\xi < \nu} g_\xi \quad \text{a} \quad Y = \operatorname{Rng}(g).$$

Je-li $Y \in \mathscr{I}$, pak $g \in S(\alpha)$, a v takovém případě položíme $f_\alpha = g$.

Pokud $Y \notin \mathscr{I}$, pak nutně $\nu = \lambda$, a funkci f_α sestrojíme pozměněním funkce g. Množiny $Y_\xi = g_{\xi+1}[[\alpha_\xi, \alpha_{\xi+1})]$ pro $\xi < \lambda$ tvoří nestacionární rozklad stacionární množiny Y. Nechť $Y' \subseteq Y$ je stacionární množina z (ii) a nechť $X \subseteq Y'$ je nestacionární množina mohutnosti λ podle (i). Označme $A = g^{-1}[Y']$ a nechť h je nějaké prosté zobrazení A do X. Nyní položíme $f_\alpha = h \cup g \mid (\alpha - A)$. Funkce f_α je prostá, definovaná na α a $\operatorname{Rng}(f_\alpha) \subseteq (Y - Y') \cup X$ je nestacionární množina. Navíc z konstrukce Y' pro každé $\xi < \lambda$ dostáváme $|A \cap \alpha_\xi| < \lambda$. Proto $f_\alpha \mid \alpha_\xi \sim g_\xi$, a tedy také $f_\alpha \mid \alpha_\xi \sim f_{\alpha_\xi}$. Odtud plyne, že pro každé $\beta < \alpha$ je $f_\alpha \mid \beta \sim f_\beta$. Snadno se ověří, že pro f_α platí (iii).

Uvedený důkaz lze použít i pro $\lambda = \omega$, pokud místo ideálu nestacionárních množin uvažujeme systém všech podmnožin $X \subseteq \omega$, které mají nekonečný doplněk.

3.47 *Důkaz věty* 3.44. Vezměme zobrazení $\langle f_\alpha : \alpha < \varkappa^+ \rangle$, která zaručuje předchozí lemma, a pro každé $\alpha < \varkappa^+$ položme

$$T_\alpha = \{g : g \text{ je prosté zobrazení } \alpha \text{ do } \varkappa \,\&\, g \sim f_\alpha\}\,.$$

Z předpokladu $\varkappa^{<\varkappa} = \varkappa$ plyne, že $|T_\alpha| \leq \varkappa$. Navíc, pro $\beta < \alpha$ a každé $g \in T_\alpha$ je $g \,|\, \beta \in T_\beta$. To znamená, že $T = \bigcup\{T_\alpha : \alpha < \varkappa^+\}$ spolu s inkluzí je $\varkappa^+$-strom. Kofinální větev v T by určovala prosté zobrazení kardinálu $\varkappa^+$ do $\varkappa$. Proto T je Aronszajnův $\varkappa^+$-strom.

3.48 Speciální Aronszajnovy stromy. Aronszajnův $\varkappa^+$-strom sestrojený v 3.41 nebo 3.47 sestává z prostých funkcí s hodnotami v $\varkappa$ a je uspořádán inkluzí. Vezmeme-li podstrom $S = \bigcup\{T_{\alpha+1} : \alpha < \varkappa^+\}$, pak S je také Aronszajnův $\varkappa^+$-strom a navíc je sjednocením nejvýše $\varkappa$ antiřetězců, a to

$$A_\gamma = \{f \in S : \mathrm{Dom}(f) = \alpha + 1 \,\&\, f(\alpha) = \gamma\}$$

pro $\gamma < \varkappa$.

Takové stromy se nazývají *speciální Aronszajnovy* $\varkappa^+$-*stromy*.

Víme, že každý Suslinův $\varkappa^+$-strom je Aronszajnovým $\varkappa^+$-stromem, ale nemůže být speciálním stromem. Je-li T Suslinův $\varkappa^+$-strom, potom $|T| = \varkappa^+$ a každý antiřetězec v T má mohutnost nejvýše $\varkappa$. To znamená, že T nemůže být sjednocením $\varkappa$ antiřetězců.

Odtud plyne, že metodami, které jsme použili pro konstrukci Aronszajnových stromů, nemůžeme sestrojit žádný Suslinův strom. K tomu potřebujeme něco navíc.

Ukážeme, že Suslinův $\varkappa^+$-strom lze sestrojit, přidáme-li k předpokladu $\varkappa^{<\varkappa} = \varkappa$, který jsme použili ke konstrukci Aronszajnova stromu, ještě diamantový princip $\diamondsuit_{\varkappa^+}(E(\varkappa))$. Nejprve však zavedeme další pojem o stromech.

3.49 Definice. *Stupeň vrcholu* x ve stromu T je mohutnost množiny všech jeho bezprostředních následníků, to znamená

$$\mathrm{st}(x) = |\{y \in T : x < y \,\&\, H(y) = H(x) + 1\}|\,.$$

Je-li $\mathrm{st}(x) \geq 2$, říkáme, že vrchol x se *větví*.

3.50 Lemma. *Každý λ-strom, který nemá antiřetězec mohutnosti λ a jehož každý vrchol se větví, je Suslinův.*

Důkaz. Je potřeba ukázat, že takový strom nemá kofinální větev. Je-li b nějaká jeho kofinální větev, pro každé $x \in b$ nechť $y(x)$ je bezprostřední následník, který neleží v b. Potom $\{y(x) : x \in b\}$ je antiřetězec mohutnosti λ, spor.

Abychom získali Suslinův λ-strom, stačí sestrojit λ-strom, jehož každý vrchol se větví a každý antiřetězec má mohutnost menší než λ.

3.51 Lemma. *Nechť T je λ-strom a λ je nespočetný regulární kardinál. Je-li $A \subseteq T$ maximální antiřetězec, potom množina*

$$C = \{\alpha < \lambda : A \cap T \mid \alpha \text{ je maximální antiřetězec v } T \mid \alpha\}$$

je uzavřená neomezená v λ.

Důkaz. Množina A je maximální antiřetězec ve stromu T, proto ke každému $x \in T$ existuje $y \in A$, které je srovnatelné s x. Nechť $f: T \to A$ je nějaké zobrazení, které každému $x \in T$ přiřadí s ním srovnatelný prvek $f(x) \in A$. Je zřejmé, že pokud $T \mid \alpha$ je uzavřeno na zobrazení f, pak $A \cap (T \mid \alpha)$ je maximální antiřetězec v $T \mid \alpha$. Podobně jako ve větě 2.38 se ukáže, že C je uzavřená neomezená.

3.52 Věta (Jensen). *Platí-li $\varkappa^{<\varkappa} = \varkappa$ a $\diamondsuit_{\varkappa^+}(E(\varkappa))$, pak existuje Suslinův $\varkappa^+$-strom. Speciálně, je-li $\varkappa = \omega$, pak $\diamondsuit$ zaručuje existenci Suslinova stromu.*

Důkaz. Strom $\langle T, \leq_T \rangle$ sestrojíme rekurzí po hladinách T_α pro $\alpha < \varkappa^+$ spolu s uspořádáním $\leq_T$ množiny $T \mid \alpha + 1$. Vrcholy budou ordinální čísla $< \varkappa^+$, tedy $T \subseteq \varkappa^+$.

Nechť $\langle A_\alpha : \alpha \in E(\varkappa) \rangle$ je $\diamondsuit_{\varkappa^+}(E(\varkappa))$-posloupnost.

Hladiny T_α a uspořádání $\leq_T$ konstruujeme tak, aby platilo:

(i) každým vrcholem $x \in T \mid \alpha$ prochází alespoň jedna větev kofinální v $T \mid \alpha$, která má prodloužení do hladiny T_α a vrchol x se větví,

(ii) pokud α je limitní a $\mathrm{cf}(\alpha) < \varkappa$, pak každá kofinální větev v $T \mid \alpha$ má právě jedno prodloužení v T_α,

(iii) pokud $\mathrm{cf}(\alpha) = \varkappa$ a množina A_α z diamantové posloupnosti je maximální antiřetězec v $T \mid \alpha$, pak každá větev v $T \mid \alpha$, která má prodloužení do T_α, obsahuje nějaký prvek z A_α,

(iv) $|T_\alpha| \leq \varkappa$.

Strom T, který splňuje podmínky (i)–(iv), je $\varkappa^+$-strom, ukážeme, že je Suslinův. Podle lemmatu 3.50 stačí ukázat, že každý antiřetězec má mohutnost menší než $\varkappa^+$. Nechť $A \subseteq T$ je maximální antiřetězec. Z mohutnosti hladin plyne, že množina $C_1 = \{\alpha < \varkappa^+ : T \mid \alpha \subseteq \alpha\}$ je uzavřená neomezená v $\varkappa^+$. Nechť C je uzavřená neomezená množina z 3.51 sestávající z čísel α, pro která $A \cap T \mid \alpha$ je maximální antiřetězec v $T \mid \alpha$. Podle $\diamondsuit_{\varkappa^+}(E(\varkappa))$ je

$$S = \{\alpha < \varkappa^+ : \mathrm{cf}(\alpha) = \varkappa \;\&\; A_\alpha = A \cap \alpha\}$$

stacionární množina. Odtud plyne, že pro $\alpha \in S \cap C \cap C_1$ je A_α maximální antiřetězec v $T \mid \alpha$ a $\mathrm{cf}(\alpha) = \varkappa$. Podle (iii) je každý vrchol v T_α srovnatelný s nějakým $x \in A_\alpha$. To znamená, že A_α je maximální antiřetězec v celém T, tedy $A_\alpha = A$ a $|A| \leq \varkappa$.

Zbývá popsat konstrukci hladin T_α. Položíme $T_0 = \{0\}$ a $0 \leq_T 0$. Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a že již máme sestrojen strom $\langle T \mid \alpha, \leq_T \rangle$.

Je-li $\alpha = \beta + 1$, pro každý vrchol $x \in T_\beta$ do hladiny T_α dáme dva jeho bezprostřední následníky. Tím je sestrojena hladina T_α a rozšíření uspořádání $\leq_T$. Z indukčního předpokladu plyne $|T_\alpha| \leq \varkappa$.

Je-li α limitní s kofinalitou ν, ukážeme, že každým $x \in T \mid \alpha$ prochází alespoň jedna kofinální větev v $T \mid \alpha$. Nechť $x \in T \mid \alpha$, tedy $x \in T_\beta$ pro nějaké $\beta < \alpha$. Zvolme rostoucí posloupnost $\langle \alpha_\xi : \xi < \nu \rangle$, která konverguje k α, takovou, že $\alpha_0 > \beta$. Podle (i) existuje $x_0 \in T_{\alpha_0}$ takové, že $x \leq_T x_0$. Využijeme-li (i) a (ii), rekurzí sestrojíme řetězec $\langle x_\xi : \xi < \nu \rangle$ v $T \mid \alpha$ takový, že $x_\xi \in T_{\alpha_\xi}$, a ten určuje kofinální větev, která prochází vrcholem x.

Uvažujme dva případy. Je-li $\nu < \varkappa$, pak na hladině T_α připojíme jeden vrchol ke každé kofinální větvi v $T \mid \alpha$. Z předpokladu $\varkappa^{<\varkappa} = \varkappa$ plyne, že $|T_\alpha| \leq \varkappa$. Je-li $\nu = \varkappa$, vybereme nejvýše $\varkappa$ kofinálních větví v $T \mid \alpha$ tak, aby každý vrchol ležel v nějaké vybrané větvi, a pokud A_α je maximální antiřetězec v $T \mid \alpha$, aby každá větev obsahovala nějaké $y \in A_\alpha$. Takový výběr je možný, protože každým vrcholem prochází nějaká kofinální větev, mohutnost $T \mid \alpha$ je nejvýše $\varkappa$ a je-li $x \leq_T y$ a $y \in A_\alpha$, pak každá kofinální větev obsahující y obsahuje také x. Na hladině T_α připojíme jeden vrchol ke každé vybrané větvi, proto $|T_\alpha| \leq \varkappa$. Důkaz je hotov.

3.53 Stupeň větvení. V Aronszajnově $\varkappa^+$-stromu sestrojeném v 3.41 a 3.47 je stupeň každého vrcholu $\varkappa$, je tedy maximální možné velikosti. Naproti tomu jsme v 3.52 sestrojili Suslinův $\varkappa^+$-strom T, jehož každý vrchol má stupeň dva. Ukážeme, jak získat ze stromu T nový Suslinův $\varkappa^+$-strom T' takový, že stupeň každého jeho vrcholu je $\varkappa$. Konstrukce je obsažena v následující úvaze.

Předpokládejme, že $\lambda > \omega$ je regulární a ν je takové, že $2 \leq \nu < \lambda$. Pak každý Aronszajnův, tedy i Suslinův, λ-strom T obsahuje podstrom $T' \subseteq T$, který je také Aronszajnovým, případně Suslinovým, λ-stromem a každý jeho vrchol má v T' stupeň alespoň ν. Podle 3.38 můžeme předpokládat, že T nemá krátké výhony. Pro libovolné $x \in T$ podstrom $\{y \in T : x \leq y \vee y \leq x\}$ stromu T je λ-strom bez kofinálních větví, a proto nemůže být (λ, ν)-stromem podle 3.40. Navíc T nemá krátké výhony, proto existuje $\alpha < \lambda$ takové, že každá hladina T_β pro $\alpha \leq \beta < \lambda$ obsahuje alespoň ν následníků vrcholu x. Odtud s využitím regularity kardinálu λ můžeme rekurzí sestrojit uzavřenou neomezenou množinu $C = \{\alpha_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq \lambda$ takovou, že každý vrchol $x \in T_{\alpha_\xi}$ má alespoň ν následníků v hladině $T_{\alpha_{\xi+1}}$. To znamená, že každý vrchol ve stromu

$$T' = \bigcup_{\alpha \in C} T_\alpha$$

má stupeň alespoň ν. Je zřejmé, že je-li výchozí strom T Suslinův, pak sestrojený podstrom T' je také Suslinův.

3.54 Doposud jsme sestrojili (v některých případech za dodatečných předpokladů) Aronszajnovy a Suslinovy $\varkappa^+$-stromy pouze pro regulární $\varkappa$. Pro sestrojené stromy platí, že každý řetězec mohutnosti menší než $\varkappa$ je omezený. Ukážeme, že to platí i naopak.

Existuje-li nějaký Aronszajnův $\varkappa^+$-strom, ve kterém je každý řetězec mohutnosti menší než $\varkappa$ omezený, pak $\varkappa^{<\varkappa} = \varkappa$, a proto $\varkappa$ musí být regulární.

Předpokládejme, že T je Aronszajnův $\varkappa^+$-strom, který má uvedenou vlastnost.

Podle předchozího odstavce můžeme navíc předpokládat, že T nemá krátké výhony a že stupeň každého vrcholu je $\varkappa$. Pro libovolné $\alpha < \varkappa$ můžeme vnořit úplný $\varkappa$-ární strom výšky α do dolního podstromu $T \mid \alpha$. Odtud dostáváme $|{}^{\alpha}\varkappa| \leq |T_\alpha| \leq \varkappa$ pro každé $\alpha < \varkappa$, a tedy $\varkappa^{<\varkappa} = \varkappa$.

Ukážeme podmínky, za kterých je možno sestrojit Aronszajnovy a Suslinovy $\varkappa^+$-stromy i pro singulární $\varkappa$.

3.55 Příklad (Todorčevič 1981). Za předpokladu $\square_\varkappa$ (2.50) existuje speciální Aronszajnův $\varkappa^+$-strom.

Všimněme si, že pro $\varkappa = \omega$ nedostáváme nic nového. Je-li $\varkappa > \omega$, v porovnání s větou 3.44 nepotřebujeme žádné omezení kardinálních mocnin a $\varkappa$ může být singulár.

Přidáme-li k předpokladu $\square_\varkappa$ ještě GCH a $\varkappa > \omega$, pak můžeme sestrojit Suslinův $\varkappa^+$-strom. Podrobněji, je-li $\varkappa > \omega$ takové, že platí $\square_\varkappa$ a $2^\varkappa = \varkappa^+$ a $(\forall \nu < \varkappa)(2^\nu \leq \varkappa)$, podle 2.48 a 2.52 existuje stacionární množina $E \subseteq \varkappa^+$, pro kterou současně platí $\diamondsuit_{\varkappa^+}(E)$ a $\square_\varkappa(E)$.

Následující věta ukazuje, že to jsou postačující podmínky pro konstrukci Suslinova $\varkappa^+$-stromu, a navíc dovoluje sestrojit Suslinův λ-strom i pro některé nedosažitelné kardinály λ.

3.56 Věta (Jensen 1972). *Nechť λ je nespočetný kardinál, pro který existuje stacionární množina $E \subseteq \lambda$ a posloupnost $\langle C_\alpha : \alpha$ limitní a $\alpha < \lambda\rangle$ takové, že platí*

(i) $\diamondsuit_\lambda(E)$,
(ii) *$C_\alpha \subseteq \alpha$ je uzavřená neomezená v α,*
(iii) *je-li $\gamma < \alpha$ limitní bod množiny C_α, pak $\gamma \notin E$ a $C_\gamma = \gamma \cap C_\alpha$.*

Potom existuje Suslinův λ-strom.

Důkaz. Hledaný strom $\langle T, \leq_T\rangle$ konstruujeme podobně jako ve větě 3.52 po hladinách tak, že $T \subseteq \lambda$ a pro každé $\alpha < \lambda$ a $x \in T \mid \alpha$ existuje větev procházející vrcholem x, která je kofinální v $T \mid \alpha$. Nechť $\langle A_\alpha : \alpha \in E\rangle$ je zvolená $\diamondsuit_\lambda(E)$-posloupnost.

Položíme $T_0 = \{0\}$ a $0 \leq_T 0$. Je-li $\alpha = \beta + 1$, pak hladinu T_α sestrojíme tak, aby každý vrchol $x \in T_\beta$ měl v T_α právě dva bezprostřední následníky.

Předpokládejme, že α je limitní. Nechť $T \mid C_\alpha$ značí podstrom $\bigcup\{T_\beta : \beta \in C_\alpha\}$. Nejprve popíšeme, jak získat pro každé $x \in T \mid C_\alpha$ větev v_x ve stromu $T \mid \alpha$, která je kofinální a prochází vrcholem x. Nechť $\langle \gamma_\delta : \delta < \xi\rangle$ je normální očíslování množiny C_α. Pro dané $x \in T \mid C_\alpha$ nechť $\delta(x)$ je nejmenší $\delta < \xi$ takové, že $x \in T_{\gamma_\delta}$. Rekurzí definujeme řetěz $p^x_\alpha = \{p^x_\alpha(\delta) : \delta(x) \leq \delta < \xi\}$ v $T \mid C_\alpha$ tak, že $p^x_\alpha(\delta(x)) = x$ a pro $\delta > \delta(x)$ je $p^x_\alpha(\delta)$ nejmenší vrchol $y \in T_{\gamma_\delta}$ v uspořádání ordinálů takový, že pro každé δ' takové, že $\delta(x) \leq \delta' < \delta$, je $p^x_\alpha(\delta') \leq_T y$. Později ukážeme, že $p^x_\alpha(\delta)$ je definováno pro každé δ takové, že $\delta(x) \leq \delta < \xi$. Odtud plyne, že p^x_α určuje kofinální větev v_x ve stromu $T \mid \alpha$. Povšimněme si, že pro $y \in p^x_\alpha$ je $x \leq_T y$ a $p^y_\alpha \subseteq p^x_\alpha$, proto $v_y = v_x$. Dále uvažujme dvě možnosti.

Případ 1, je-li $\alpha \notin E$ nebo $\alpha \in E$ a současně množina A_α není maximální antiřetězec v $T \mid \alpha$. Potom hladina T_α sestává právě z jednoho prodloužení každé větve $\{v_x : x \in T \mid C_\alpha\}$.

Případ 2, $\alpha \in E$ a A_α je maximální antiřetězec v $T \mid \alpha$. Pro každé $x \in T \mid C_\alpha$ vybereme jeden vrchol $y(x) \in T \mid C_\alpha$ takový, že $x \leq_T y(x)$ a nějaký předchůdce vrcholu $y(x)$ ve stromu $T \mid \alpha$ leží v A_α. Potom hladina T_α sestává právě z jednoho prodloužení každé větve $\{v_{y(x)} : x \in T \mid C_\alpha\}$.

V obou případech platí, že každý vrchol $z \in T \mid \alpha$ je obsažen v nějaké větvi v_x nebo $v_{y(x)}$, proto má následovníka v hladině T_α. Navíc, ve druhém případě je $A_\alpha \cap v_{y(x)} \neq 0$. Jelikož $|T_\alpha| \leq |T \mid C_\alpha|$, je $|T_\alpha| < \lambda$. Stejně jako v 3.52 se dokáže, že λ-strom $T = \bigcup_{\alpha < \lambda} T_\alpha$ je Suslinův.

Zbývá ověřit, že $p_\alpha^x(\delta)$ je definované pro všechna δ taková, že $\delta(x) < \delta < \xi$. Předpokládáme, že pro všechna limitní $\beta < \alpha$ a všechna $y \in T \mid C_\beta$ jsou již řetězce p_β^y v $T \mid C_\beta$ definovány. Kdyby pro nějaké $\delta < \xi$ nebylo $p_\alpha^x(\delta)$ definováno, vezmeme nejmenší takové. Jelikož $T \mid \alpha$ nemá krátké výhony, δ je limitní. Odtud podle (ii) a (iii) plyne, že γ_δ je limitní bod množiny C_α, a podle (iii) je $C_{\gamma_\delta} = C_\alpha \cap \gamma_\delta = \langle \gamma_{\delta'} : \delta' < \delta \rangle$. Přitom $x \in T \mid C_{\gamma_\delta}$ a v kroku $\gamma_\delta < \alpha$ jsme konstruovali

$$\{p_{\gamma_\delta}^x(\delta') : \delta(x) \leq \delta' < \delta\}$$

tak, že pro každé $\delta' < \delta$ je $p_{\gamma_\delta}^x(\delta') = p_\alpha^x(\delta')$. Navíc podle (iii) $\gamma_\delta \notin E$, jde tedy o případ 1 a větev v_x ve stromu $T \mid \gamma_\delta$ určená řetězcem $\{p_\alpha^x(\delta') : \delta(x) \leq \delta' < \delta\}$ má jediné prodloužení $y \in T_{\gamma_\delta}$. Proto můžeme položit $p_\alpha^x(\delta) = y$. Ukázali jsme, že řetězec p_α^x určuje kofinální větev v $T \mid \alpha$. Důkaz je skončen.

3.57 Jensen (1972) ukázal, že v univerzu konstruovatelných množin všechny nespočetné regulární kardinály s výjimkou slabě kompaktních kardinálů splňují předpoklady předchozí věty. V § 5 ukážeme, že pro každý slabě kompaktní kardinál λ má každý λ-strom kofinální větev. To znamená, že v konstruktivním univerzu pro každý regulární kardinál $\lambda > \omega$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) existuje Suslinův λ-strom,
(ii) existuje Aronszajnův λ-strom,
(iii) λ není slabě kompaktní.

3.58 Lexikografické uspořádání stromu. Budeme se zabývat vztahem mezi stromy a lineárními uspořádáními. Nejprve uvedeme jednoduchou metodu, jak rozšířit uspořádání stromu do lineárního uspořádání.

Nechť $\langle T, \leq \rangle$ je strom. Každému vrcholu $x \in T$ jednoznačně odpovídá posloupnost p_x všech $y \in T$ takových, že $y \leq x$. To znamená, že $\mathrm{Dom}(p_x) = H_T(x) + 1$ a pro každé $\alpha < \mathrm{Dom}(p_x)$ je $p_x(\alpha)$ jediný předchůdce vrcholu x v hladině T_α. Je zřejmé, že $x \leq y$ je ekvivalentní s $p_x \subseteq p_y$.

Je-li pro každé $\alpha < H(T)$ dáno lineární uspořádání $\leq_\alpha$ hladiny T_α, definujeme uspořádání $\leq_L$ množiny T předpisem

$$x \leq_L y \leftrightarrow p_x \subseteq p_y$$

nebo pro

$$\alpha = \min\{\beta < \mathrm{Dom}(p_x) \cap \mathrm{Dom}(p_y) \colon p_x(\beta) \neq p_y(\beta)\}$$

$$p_x(\alpha) \leq_\alpha p_y(\alpha).$$

Snadno se ověří, že $\leq_L$ je lineární uspořádání. Říkáme, že $\leq_L$ je *lexikografické uspořádání stromu* T (určené uspořádáními $\leq_\alpha$).

Pro každý vrchol $x \in T$ množina $S_T(x) = \{y \in T \colon x < y\}$ je konvexní v libovolném lexikografickém uspořádání stromu T. Konvexní množina s každými dvěma srovnatelnými prvky obsahuje i všechny prvky, které leží mezi nimi.

Podobným způsobem, jako jsme definovali lexikografické uspořádání stromu, tedy jeho vrcholů, můžeme definovat lineární uspořádání množiny všech jeho větví. V takovém případě mluvíme o *lexikografickém uspořádání větví.*

3.59 Příklad (Kurepa 1968). Nechť $\varkappa$ je nekonečný kardinál. Připomeňme, že $\varkappa^*$ značí typ lineárního uspořádání, které je inverzní k uspořádání $\varkappa$. Nechť D je lineárně uspořádaná množina typu $\varkappa^* + \varkappa$. To znamená, že množinu $D = D_1 \cup D_2$ lze rozložit tak, že podmnožina D_1 je uspořádaná podle typu $\varkappa^*$, podmnožina D_2 je uspořádaná podle typu $\varkappa$ a všechny prvky z D_1 předcházejí všem prvkům z D_2.

Uvažujme množinu T všech konečných posloupností prvků z D uspořádanou inkluzí. Jinými slovy, T je úplný D-ární strom výšky ω. Položme $V(T) = {}^\omega D$. Množina $V(T)$ všech nekonečných posloupností prvků z D odpovídá jednoznačně všem větvím stromu T. Nechť $\leq$ značí lexikografické lineární uspořádání množiny $T \cup V(T)$, které je určené uspořádáním množiny D.

Za uvedených předpokladů platí:

(a) $\langle T, \leq \rangle$ je lineární husté uspořádání.

(b) Každý neprázdný interval v $\langle T, \leq \rangle$ obsahuje konvexní podmnožinu izomorfní s $\langle T, \leq \rangle$.

(c) Pro každý ordinál $\alpha < \varkappa^+$ v každém neprázdném intervalu $I \subseteq T$ existuje množina $C \subseteq I$, která je uspořádaná relací $\leq$ podle typu α. To znamená, že $(\forall \alpha < \varkappa^+)(\alpha < \mathrm{tp}(I, \leq))$. Přitom $|T| = \varkappa$, proto $\varkappa^+ \not\leq \mathrm{tp}(T, \leq)$.

(d) $\langle T \cup V(T), \leq \rangle$ je dedekindovské zúplnění lineárního uspořádání $\langle T, \leq \rangle$ a pro každé $v \in V(T)$ množina $\{x \in T \colon x < v\}$ má kofinální podmnožinu typu ω a množina $\{x \in T \colon v < x\}$ má koiniciální podmnožinu typu ω^*.

3.60 ω_1-stromy. Aronszajnovy a Suslinovy stromy jsou důležité příklady ω_1-stromů. Žádný z těchto stromů nemá kofinální větev. Požadavek, aby ω_1-strom měl mnoho kofinálních větví, vede k pojmu Kurepova stromu.

3.61 Definice. *Kurepův strom* je ω_1-strom, který má alespoň ω_2 kofinálních větví.

Z uvedených tří typů ω_1-stromů pouze Aronszajnovy stromy existují absolutně, bez dodatečných předpokladů (věta 3.41). Ukážeme však, že Aronszajnovy stromy, Suslinovy stromy a Kurepovy stromy úzce souvisí po řadě se Speckerovými typy, Suslinovou hypotézou a Kurepovou hypotézou.

Nejprve dokážeme, že Speckerova uspořádání (3.10) jsou právě lexikografická uspořádání Aronszajnových stromů.

3.62 Věta. *Je-li $\langle T, \leq \rangle$ Aronszajnův strom a jsou-li $\leq_\alpha$ libovolná lineární uspořádání hladin T_α, pak lexikografické uspořádání $\leq_L$ stromu T je Speckerovým uspořádáním.*

Odtud plyne, že existují Speckerovy typy.

Důkaz. Nechť $X \subseteq T$ je nespočetná množina. Ukážeme, že v lexikografickém uspořádání $\leq_L$ množina X není uspořádaná podle typu ω_1, ω_1^* ani podle žádného reálného typu.

Každá hladina T_α je nejvýše spočetná, proto pro každé $\alpha < \omega_1$ existuje $x_\alpha \in T_\alpha$ takové, že množina

$$(*) \qquad \{x \in X : x_\alpha \leq x\}$$

je nespočetná.

Předpokládejme, že X je uspořádaná relací $\leq_L$ podle typu ω_1. Potom pro každé α existuje právě jedno x_α, které splňuje $(*)$, jinak by existovala nespočetná vlastní dolní podmnožina množiny X. Ze stejných důvodů je $x_\alpha < x_\beta$ pro $\alpha < \beta$. To znamená, že $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ je kofinální větev v T — spor. Podobně se ukáže, že X není uspořádaná podle typu ω_1^*. Zbývá ukázat, že X nelze izomorfně vnořit do reálné přímky. V opačném případě existuje spočetná množina $Y \subseteq X$, která je hustá v prostoru X s intervalovou topologií. Odtud plyne, že $Y \subseteq T \upharpoonright \alpha$ pro nějaké $\alpha < \omega_1$ a pro $x_\alpha \in T_\alpha$, které splňuje $(*)$, množina $\{x \in X : x_\alpha \leq x\}$ je nespočetná konvexní podmnožina množiny X, která neobsahuje žádný prvek z Y. To je spor s tím, že Y je hustá v X. Tedy $\langle T, \leq_L \rangle$ je Speckerovo uspořádání.

Je překvapující, že platí také opačné tvrzení.

3.63 Věta. *Každé Speckerovo uspořádání je izomorfní s lexikografickým uspořádáním nějakého Aronszajnova stromu.*

Odtud plyne, že každé Speckerovo uspořádání má mohutnost ω_1.

Důkaz. Nechť $\langle S, \leq_S \rangle$ je Speckerovo uspořádání. Žádná podmnožina množiny S není uspořádaná podle typu ω_1^*, proto každá neprázdná konvexní množina $K \subseteq S$, která nemá nejmenší prvek, obsahuje klesající posloupnost $\langle s_n : n \in \omega \rangle$ koiniciální s K. To znamená, že K můžeme rozložit na spočetně mnoho vzájemně disjunktních zleva uzavřených intervalů $[s_{n+1}, s_n)$ pro $n > 0$ a $[s_1, \rightarrow)$. Takový rozklad nazýváme standardním rozkladem konvexní množiny K. Všimněme si, že je-li $\leq_S$ husté uspořádání, pak každá množina rozkladu je nekonečná.

Aronszajnův strom U konstruujeme po hladinách. Hladina U_α bude sestávat ze vzájemně disjunktních konvexních množin, které mají nejmenší prvek. Uspořádání stromu U bude dáno opačnou inkluzí.

Je-li I konvexní množina s nejmenším prvkem, $p(I)$ značí její nejmenší prvek (počátek).

Pokud má množina S nejmenší prvek, položíme $U_0 = \{S\}$. Jinak U_0 sestává ze zvoleného standardního rozkladu množiny S.

Případ 1, $\alpha = \beta + 1$. Nechť $I \in U_\beta$. Má-li množina $I - \{p(I)\}$ nejmenší prvek, dáme $I - \{p(I)\}$ do U_α. Je-li množina $I - \{p(I)\}$ neprázdná a nemá nejmenší prvek, zvolíme její standardní rozklad a všechny intervaly tohoto rozkladu dáme do U_α. Projdeme-li takto všechny intervaly $I \in U_\beta$, získáme hladinu U_α.

Případ 2, α je limitní. Nechť v je kofinální větev ve stromu $U|\alpha$ taková, že $\bigcap v \neq 0$. Je zřejmé, že $\bigcap v$ je konvexní množina. Má-li nejmenší prvek, dáme ji do U_α. V opačném případě dáme do U_α všechny intervaly zvoleného standardního rozkladu množiny $\bigcap v$. Tuto konstrukci provedeme pro každou kofinální větev v $U|\alpha$.

Ověříme, že U je Aronszajnův strom. Nechť v je větev v U. Protože strom U je uspořádán inkluzí, z $I <_U J$ plyne $p(I) <_S p(J)$ a množina $\{p(I): I \in v\} \subseteq S$ je dobře uspořádaná. Jelikož S je Speckerovo uspořádání, množina počátečních bodů i větev v je nejvýše spočetná. To také znamená, že výška stromu U je nejvýše ω_1. Kdyby nějaká hladina U_α byla nespočetná, vezměme nejmenší takové α. Z konstrukce U_α plyne, že α je limitní a že ve stromu $U|\alpha$ existuje nespočetně mnoho kofinálních větví v takových, že $\bigcap v \neq 0$. Pro každou takovou větev v vyberme $s_v \in \bigcap v$. Jsou-li větve v, v' různé, pak existuje $I \in U|\alpha$ takové, že $p(I)$ leží mezi s_v a $s_{v'}$. Odtud plyne, že spočetná množina $A = \{p(I): I \in U|\alpha\}$ je hustá v množině

$$B = A \cup \{s_v: v \text{ je kofinální větev v } U|\alpha\}.$$

To znamená, že množina $B \subseteq S$ je nespočetná a lze ji vnořit do reálné přímky – spor. Tedy každá hladina U_α je nejvýše spočetná. Jelikož S je nespočetná množina, pro každé $\alpha < \omega_1$ existuje $s \in S - \{p(I): I \in U|\alpha\}$. Proto existuje $J \in U_\alpha$ takové, že $s \in J$. Odtud plyne, že výška stromu U je ω_1 a U je Aronszajnův strom.

Položme $T = \{p(I): I \in U\}$. Množina T spolu s uspořádáním $p(I) \leq p(J) \leftrightarrow I \supseteq J$ je strom izomorfní s $\langle U, \supseteq\rangle$. Navíc $T = S$, protože $T \subseteq S$ a každý prvek $s \in S - T$ by určoval větev $\{I \in U: s \in I\}$ délky ω_1 ve stromu U. Vezmeme-li lineární uspořádání $\leq_\alpha$ hladiny T_α jako zúžení uspořádání $\leq_S$ na T_α, je zřejmé, že lexikografické uspořádání stromu T je totožné s uspořádáním $\leq_S$. Proto každé Speckerovo uspořádání má mohutnost ω_1.

3.64 Věta. *Suslinův strom existuje, právě když existuje Suslinova přímka.*

Suslinova hypotéza je tedy ekvivalentní s tvrzením „neexistuje žádný Suslinův strom“.

Důkaz. Nechť $\langle T, \leq\rangle$ je Suslinův strom. Můžeme předpokládat, že stupeň každého vrcholu je ω. Pro každé $\alpha < \omega_1$ zvolíme lineární uspořádání $\leq_\alpha$ hladiny T_α tak, aby pro každý vrchol $x \in T$ množina všech jeho bezprostředních následníků neměla nejmenší prvek. Nechť $\leq_L$ značí odpovídající lexikografické uspořádání.

Ukážeme, že $\langle T, \leq_L \rangle$ je Suslinova přímka. Potřebujeme ověřit, že T jako prostor s intervalovou topologií neobsahuje spočetnou hustou množinu a že jeho Suslinovo číslo $c(T) = \omega$. Jelikož $\langle T, \leq \rangle$ je také Aronszajnovým stromem, podle 3.62 $\langle T, \leq_L \rangle$ je Speckerovým uspořádáním, a proto T není separabilní prostor. Předpokládejme, že $c(T) > \omega$. Potom existují vzájemně disjunktní neprázdné intervaly $I_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ pro $\alpha < \omega_1$. Z každého intervalu I_α vybereme vnitřní bod z_α tak, aby platilo:

(i) jsou-li x_α a y_α neporovnatelné vrcholy ve stromu T, pak z_α je nějaký bezprostřední následník vrcholu x_α,

(ii) je-li $x_\alpha < y_\alpha$ a y'_α je předchůdce vrcholu y_α, který je bezprostředním následníkem vrcholu x_α, pak z_α je bezprostřední následník vrcholu x_α, který je menší než y'_α v uspořádání hladin.

Odtud plyne, že pro každé $\alpha < \omega_1$ je $\{z \in T: z_\alpha \leq z\} \subseteq I_\alpha$. Jelikož intervaly I_α jsou disjunktní, množina $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ je nespočetným antiřetězcem ve stromu T – spor. Tedy $c(T) = \omega$ a $\langle T, \leq_L \rangle$ je Suslinova přímka.

Na druhou stranu, předpokládejme, že existuje Suslinova přímka $\langle L, \leq_L \rangle$. Podle 3.19 můžeme předpokládat, že $\leq_L$ je husté uspořádání. Odtud plyne, že každá alespoň dvouprvková konvexní množina $K \subseteq L$ je již nekonečná. Podle předpokladu je $c(L) = \omega$, proto neexistuje žádná množina $X \subseteq L$ uspořádaná podle typu ω_1^*.

Suslinův strom $\langle U, \supseteq \rangle$ konstruujeme ze Suslinovy přímky $\langle L, \leq_L \rangle$ podobným způsobem, jako jsme ve větě 3.63 konstruovali Aronszajnův strom ze Speckerova uspořádání. Hladiny U_0 a $U_{\beta+1}$ se konstruují úplně stejně jako v 3.63. Pro α limitní je rozdíl pouze v tom, že uvažujeme jen takové kofinální větve v ve stromu $U \mid \alpha$, pro které je konvexní množina $\bigcap v$ nekonečná.

Ověřujeme, že U je Suslinův strom. Protože U sestává z nekonečných konvexních podmnožin přímky L a $c(L) = \omega$, je každý antiřetězec v U nejvýše spočetný. Kdyby výška stromu U byla spočetná, potom množina $\{p(I): I \in U\}$ by byla spočetnou hustou množinou v L – spor. Tedy U je nespočetný strom, nemá nespočetné antiřetězce a každý jeho vrchol se větví. To znamená, že $\langle U, \subseteq \rangle$ je Suslinův strom.

3.65 Věta. *Kurepův strom existuje, právě když existuje Kurepův systém.*

Tedy Kurepova hypotéza je ekvivalentní s tvrzením „existuje Kurepův strom“.

Důkaz. Předpokládejme, že $S \subseteq \mathscr{P}(\omega_1)$ je Kurepův systém. Pro $X \in S$ nechť f_X je charakteristická funkce množiny X definovaná na ω_1. Potom množina $T = \{f_X \mid \alpha : \alpha < \omega_1 \;\&\; X \in S\}$ uspořádaná inkluzí je Kurepův strom.

Na druhou stranu, nechť $\langle T, \leq_T \rangle$ je Kurepův strom. Jelikož $|T| = \omega_1$, můžeme předpokládat, že $T = \omega_1$. Potom množina $\{\beta < \omega_1 : T \mid \beta = \beta\}$ je uzavřená neomezená. Nechť B je množina všech kofinálních větví v T. Podle předpokladu je $|B| \geq \omega_2$ a $B \subseteq \mathscr{P}(\omega_1)$. Pro libovolné $\alpha < \omega_1$ zvolme β takové, že $\alpha \leq \beta < \omega_1$

a $T \mid \beta = \beta$. Potom $\{X \cap \alpha : X \in B\} \subseteq \{(\leftarrow, x) \cap \alpha : x \in T_\beta\}$ a jelikož hladina T_β je nejvýše spočetná, je nejvýše spočetná i množina $B \mid \alpha$. Dokázali jsme, že B je Kurepův systém na ω_1.

3.66 Poznamenejme, že libovolné lexikografické uspořádání všech kofinálních větví Kurepova stromu je Kurepovou přímkou.

Víme, že za předpokladu $\diamond$ existuje Suslinův strom. Je známo, že z $\diamond$ neplyne existence Kurepova stromu. Nicméně v univerzu konstruovatelných množin Kurepův strom existuje. Platí tam dokonce silnější tvrzení.

(V = L) Existuje Kurepův systém $S \subseteq \mathscr{P}(\omega_1)$ takový, že každá množina $X \in S$ má mohutnost ω_1 a pro libovolnou množinu $Y \subseteq \omega_1$ plné mohutnosti existuje $X \in S$ takové, že $X \subseteq Y$.

Na druhé straně, jak jsme již uvedli v 3.24, z neexistence Kurepova stromu plyne bezespornost existence nedosažitelného kardinálu.

3.67 *Slabá Kurepova hypotéza* wKH je tvrzení „existuje systém funkcí $F \subseteq {}^{\omega_1}\omega$ takový, že F má mohutnost alespoň ω_2 a různé funkce $f, g \in F$ jsou skoro všude různé".

3.68 Lemma. KH $\rightarrow$ wKH.

Důkaz. Z Kurepovy hypotézy plyne, že existuje nějaký Kurepův strom T. Pro každé $\alpha < \omega_1$ zvolme prosté zobrazení $\varphi_\alpha : T_\alpha \rightarrow \omega$. Každé kofinální větvi v odpovídá funkce $f_v : \omega_1 \rightarrow \omega$ taková, že $f_v(\alpha) = \varphi_\alpha(v(\alpha))$, kde $v(\alpha)$ je α-tý vrchol větve v. Jsou-li kofinální větve v, v' různé, potom f_v a $f_{v'}$ jsou skoro všude různé funkce. Systém $\{f_v : v \text{ kofinální větev v } T\}$ zabezpečuje slabou Kurepovu hypotézu.

Slabá Kurepova hypotéza také není dokazatelná v teorii množin. Ukážeme její použití na problému regulárních ultrafiltrů.

3.69 Definice. Regulární ultrafiltr. Říkáme, že ultrafiltr $\mathscr{U}$ na $\varkappa$ je *regulární*, jestliže existuje systém

$$\{A_\alpha : \alpha < \varkappa\} \subseteq \mathscr{U}$$

takový, že průnik každého nekonečného podsystému je prázdný. To znamená, že pro každé nekonečné $X \subseteq \varkappa$ je $\bigcap_{\alpha \in X} A_\alpha = 0$.

3.70 Lemma. *Ultrafiltr $\mathscr{U}$ na $\varkappa$ je regulární, právě když pro každý systém $S \subseteq {}^{\varkappa}On$ nejvýše $\varkappa$ funkcí existuje zobrazení $\varphi : \varkappa \rightarrow [On]^{<\omega}$ takové, že každá funkce $f \in S$ prochází skoro všude zobrazením φ, přesněji, jestliže $\{\alpha < \varkappa : f(\alpha) \in \varphi(\alpha)\} \in \mathscr{U}$.*

Můžeme říci, že φ je roura všude konečného průřezu, kterou skoro všude prochází každé zobrazení z S.

Důkaz. Nechť $\mathscr{U}$ je regulární ultrafiltr na $\varkappa$ a $\{A_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ systém zaručující jeho regularitu. Jsou-li dány funkce $\{f_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, položíme pro každé $\xi < \varkappa$

$$\varphi(\xi) = \{f_\alpha(\xi) : \xi \in A_\alpha \ \& \ \alpha < \varkappa\}.$$

Dostaneme tak zobrazení φ, které má požadované vlastnosti.

Naopak, je-li φ roura pro systém konstantních funkcí $\{k_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, kde k_α nabývá hodnoty α, množiny $A_\alpha = \{\xi < \varkappa : \alpha \in \varphi(\xi)\}$ pro $\alpha < \varkappa$ zaručují regularitu ultrafiltru $\mathcal{U}$.

Je-li ultrafiltr $\mathcal{U}$ na $\varkappa$ regulární, pak je uniformní. Na ω je každý uniformní ultrafiltr regulární, stačí vzít množiny $A_n = \{k < \omega : k \geq n\}$ pro $n < \omega$. Na každém nekonečném $\varkappa$ existuje regulární ultrafiltr. Stačí jej zkonstruovat na množině $X = [\varkappa]^{<\omega}$, která má mohutnost $\varkappa$. Pro každé $\alpha < \varkappa$ položme $A_\alpha = \{x \in X : \alpha \in x\}$. Podobně jako v 8.15(d) v kapitole I se ukáže, že $S = \{A_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ je centrovaný systém podmnožin množiny X a každý ultrafiltr na X rozšiřující S je regulární.

Na druhé straně, uniformní ultrafiltr na $\varkappa > \omega$, který je σ-úplný, nemůže být regulární. Takové ultrafiltry však souvisí s velkými kardinály (měřitelné kardinály) a podle 2.22 neexistují na ω_1. Problém, zda každý uniformní ultrafiltr na ω_1 je regulární, se nazývá problém regulárních ultrafiltrů. Je nerozhodnutelný v teorii množin. Ukážeme, že wKH dává pozitivní odpověď.

3.71 Věta. *Za předpokladu* wKH *je každý uniformní ultrafiltr na* ω_1 *regulární.*

Důkaz. Nechť $F \subseteq {}^{\omega_1}\omega$ je systém funkcí, který zabezpečuje wKH. Nechť $\mathcal{U}$ je libovolný uniformní ultrafiltr na ω_1. Pro $f, g \in F$ definujeme

$$f \lhd g \leftrightarrow \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U}\,.$$

Protože různá $f, g \in F$ mají od nějakého $\alpha < \omega_1$ počínaje různé hodnoty a protože $\mathcal{U}$ je uniformní, platí buď $f \lhd g$, nebo $g \lhd f$. Odtud plyne, že $\lhd$ je lineární uspořádání. Přitom $|F| \geq \omega_2$, a proto existuje $g \in F$, které má alespoň ω_1 předchůdců f_α pro $\alpha < \omega_1$ v uspořádání $\lhd$.

Funkce f_ξ jsou vzájemně skoro všude různé, tedy pro každé $\alpha < \omega_1$ existuje $\alpha' < \omega_1$ takové, že pro každé $\beta > \alpha'$ a každé $\xi < \alpha$ je $f_\alpha(\beta) \neq f_\xi(\beta)$. Položme

$$A_\alpha = \{\beta < \omega_1 : \beta > \alpha' \mathbin{\&} f_\alpha(\beta) < g(\beta)\}\,.$$

Pro každé $\alpha < \omega_1$ je $A_\alpha \in \mathcal{U}$ a ukážeme, že pro libovolné nekonečné $X \subseteq \omega_1$ je průnik $\bigcap_{\alpha \in X} A_\alpha$ prázdný. V opačném případě by pro $\beta \in \bigcap_{\alpha \in X} A_\alpha$ množina $\{f_\alpha(\beta) : \alpha \in X\}$ byla nekonečná a přitom každý její prvek by byl menší než přirozené číslo $g(\beta)$ — spor. Ukázali jsme, že systém $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ zaručuje regularitu ultrafiltru $\mathcal{U}$.

3.72 Závěrečné poznámky. Kurepova hypotéza má následující přirozené zobecnění pro libovolný nekonečný kardinál $\varkappa$.

$\mathrm{KH}_\varkappa$: Existuje systém $S \subseteq \mathcal{P}(\varkappa)$ takový, že $|S| > \varkappa$ a pro každé nekonečné $X \subseteq \varkappa$ takové, že $|X| < \varkappa$, je $|S \restriction X| \leq |X|$.

Je zřejmé, že KH_ω platí a KH_{ω_1} je právě Kurepova hypotéza.

Za předpokladu GCH, podle 2.34(ii), pro singulár $\varkappa$ s nespočetnou kofinalitou $\mathrm{KH}_\varkappa$

neplatí. Jensen a Kunen ukázali, že $KH_\varkappa$ neplatí, je-li $\varkappa$ velký kardinál nazývaný nevýslovný kardinál (5.13).

Za předpokladu axiomu konstruovatelnosti $V = L$ jsou to jediná omezení pro neplatnost $KH_\varkappa$ (Jensen, Prikry).

Uvedli jsme již, že negace Kurepovy hypotézy je bezesporná, právě když je bezesporná existence nedosažitelného kardinálu. Totéž platí o slabé Kurepově hypotéze (Mitchel 1972).

Podle 3.71 z wKH plyne, že každý ultrafiltr $\mathscr{U} \in \mathscr{U}(\omega_1)$ je regulární. Laver dokázal, že totéž plyne z Martinova axiomu MA_{ω_1}, který je důsledkem Martinova axiomu MA a negace hypotézy kontinua.

Na druhou stranu, Laver ukázal, že neregulární ultrafiltr na ω_1 existuje, pokud existuje ω_1-hustý ideál $\mathscr{I}$ na ω_1, to znamená, že:

(i) $\mathscr{I}$ je σ-úplný a rozšiřuje Frechétův ideál na ω_1,

(ii) existuje systém $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathscr{P}(\omega_1) - \mathscr{I}$ takový, že každá velká množina $A \subseteq \omega_1$ obsahuje modulo $\mathscr{I}$ nějakou množinu X_α.

Existence takového ideálu je bezesporná, je-li bezesporná silná forma axiomu determinovanosti (Woodin).

Víme, že za předpokladu $V = L$ existuje Suslinův strom, a tedy neplatí Suslinova hypotéza. V tomto případě existují Suslinovy $\varkappa$-stromy pro každý nespočetný kardinál $\varkappa$, který není slabě kompaktní. V kapitole IV ukážeme, že z MA_{ω_1} plyne Suslinova hypotéza, tedy neexistuje Suslinův strom.

Laver a Shelah (1981) ukázali, že za předpokladu slabě kompaktního kardinálu je bezesporná teorie

$$\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH} + \text{neexistuje Suslinův } \omega_2\text{-strom} + 2^{\omega_1} > \omega_2 \,.$$

Zůstává otevřeným problémem, zda z GCH neplyne existence Suslinova ω_2-stromu.

Říkáme, že kardinál $\varkappa$ má stromovou vlastnost, jestliže neexistuje Aronszajnův $\varkappa$-strom. V 5.9 dokážeme, že nedosažitelný kardinál $\varkappa$ má stromovou vlastnost, právě když je slabě kompaktní. Za předpokladu $V = L$ je stromová vlastnost ekvivalentní slabé kompaktnosti. Obecně však nikoliv. Silver a Mitchel (1972) ukázali, že z předpokladu existence slabě kompaktního kardinálu je bezesporné předpokládat, že ω_2 má stromovou vlastnost. Výsledek lze zobecnit i pro libovolný následník regulárního nespočetného kardinálu namísto ω_2.

Naproti tomu není známo, zda existence Aronszajnova $\aleph_{\omega+1}$-stromu neplyne již z GCH, případně zda není dokazatelná jen v ZFC.

§ 4 Ramseyova věta a rozklady

„Je mnoho matematických vět, které – zhruba řečeno – tvrdí, že každý systém z jisté třídy obsahuje velký podsystém, který má vyšší stupeň organizovanosti než původní systém." Tuto poznámku vyslovili H. Burkill a L. Mirsky (1973) a lze s ní plně souhlasit. Klasickým příkladem je věta Bolzanova–Weierstrassova o tom, že z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní posloupnost. Jiným příkladem je věta 1.19 o Δ-systémech.

Nyní dokážeme jeden z nejdůležitějších výsledků nekonečné kombinatoriky, fascinující Ramseyovu větu. Vyplývá z ní mimo jiné, že každý nekonečný graf obsahuje nekonečný úplný podgraf nebo nekonečnou nezávislou podmnožinu vrcholů. Uvidíme také, že v každé nekonečné uspořádané množině existuje nekonečný řetězec nebo nekonečný antiřetězec.

Kromě Ramseyovy věty se seznámíme s její konečnou a kanonickou verzí. Analogií Ramseyovy věty pro rozklady systému nekonečných množin přirozených čísel je věta Galvinova–Prikryho. Je ukázáno použití těchto tvrzení v teorii dobrých a lepších kvaziuspořádání, vrcholící v Laverově důkazu známé Fraissého domněnky. V závěru je uvedena věta Erdöse a Rado pro rozklady na nespočetných kardinálech.

4.1 Budeme se zabývat různými, převážně nekonečnými verzemi známého zásuvkového principu, nazývaného také Dirichletovým principem. S nejjednodušším příkladem jsme se setkali již v kapitole I.

Rozložíme-li nekonečnou množinu na konečně mnoho částí, pak alespoň jedna část je nekonečná.

Pro množinu $\mathbb{Q}$ racionálních čísel dokonce platí: Rozložíme-li racionální čísla na konečně mnoho částí, $\mathbb{Q} = X_0 \cup \ldots \cup X_{n-1}$, pak alespoň jedna množina rozkladu obsahuje izomorfní kopii množiny $\mathbb{Q}$. Tedy jedna z množin rozkladu kromě toho, že je nekonečná, odráží celou strukturu uspořádání množiny $\mathbb{Q}$. Pro důkaz uvedeného tvrzení stačí si uvědomit, že existuje otevřený interval $I \neq 0$ a číslo $i < n$ takové, že množina $X_i \cap I$ je hustá v I. Odtud plyne, že $\mathbb{Q}$ lze izomorfně vnořit do X_i.

Nebudeme se omezovat jen na rozklady množiny X, ale budeme pracovat i s rozklady množiny $[X]^n$ všech n-prvkových podmnožin množiny X. Přitom rozklady jsou velmi často definovány pomocí zobrazení.

Každé zobrazení f s definičním oborem $[X]^n$ určuje rozklad množiny $[X]^n$ na $|\mathrm{Rng}(f)|$ částí. Přitom $x, y \in [X]^n$ leží v téže třídě rozkladu, právě když $f(x) = f(y)$. Můžeme si představit, že takové zobrazení přiřazuje každé n-prvkové množině nějakou barvu. Proto se také mluví o obarveních místo o rozkladech a zobrazeních.

4.2 Definice. Homogenní množina. (i) Nechť X je množina a Q je rozklad množiny $[X]^n$ všech n-prvkových podmnožin množiny X. Říkáme, že množina $A \subseteq X$ je *homogenní* (pro Q), jestliže všechny n-prvkové podmnožiny množiny A leží ve stejné třídě rozkladu. To znamená, že $[A]^n \subseteq q$ pro nějaké $q \in Q$.

(ii) Nechť f je funkce definovaná na $[X]^n$. Říkáme, že $A \subseteq X$ je *homogenní* (pro f), jestliže f je konstantní na $[A]^n$.

Všimněme si, že $A \subseteq X$ je homogenní pro f, právě když je homogenní pro rozklad určený zobrazením f.

Tvrzení, která nás budou zajímat, lze elegantně vyjádřit pomocí rozkladové šipky, kterou zavedli Erdös a Rado.

4.3 Definice. Rozkladová šipka. Nechť $\varkappa$, λ, μ jsou kardinální čísla, r je přirozené. Symbol

(1) $$\varkappa \to (\lambda)^r_\mu$$

znamená, že pro každou množinu X mohutnosti $\varkappa$ a pro každé zobrazení $f\colon [X]^r \to \mu$ existuje množina $A \subseteq X$ mohutnosti λ, která je homogenní pro f.

Neplatí-li (1) píšeme $\varkappa \not\to (\lambda)^r_\mu$. Pokud $\mu = 2$, index μ u šipky se vypouští.

4.4 Příklad. (a) *Známá hříčka.* Sejde-li se kolektiv šesti lidí, najdou se mezi nimi alespoň tři, kteří se buď navzájem znají, nebo žádný z nich se nezná s ostatními.

Ukážeme, že v řeči šipek se jedná o tvrzení

(2) $$6 \to (3)^2 .$$

Nechť X je množina o 6 prvcích. Předpokládáme, že „znáti se“ je symetrický vztah. Pro každou dvojici $\{x, y\} \in [X]^2$ položíme $f(\{x, y\}) = 0$, jestliže x a y se znají, jinak položíme $f(\{x, y\}) = 1$. Získáme tak funkci $f\colon [X]^2 \to 2$. Nechť $A \subseteq X$ je homogenní pro f. Nabývá-li f na $[A]^2$ hodnoty 0, pak všechny dvojice z A se znají, nabývá-li hodnoty 1, pak žádná dvojice z A se nezná. Protože nám jde o libovolnou skupinu, musíme uvažovat všechny funkce $f\colon [X]^2 \to \{0, 1\}$. Existuje-li pro každou z nich tříprvková homogenní množina, dostáváme (2), odkud plyne i řešení hříčky, a naopak. Není těžké ověřit (2), stejně jako $5 \not\to (3)^2$.

(b) Obecně každé zobrazení $f\colon [X]^2 \to \{0, 1\}$ určuje graf $\langle X, H\rangle$, kde H je množina těch hran $\{x, y\}$, pro které $f(\{x, y\}) = 0$. Množina $A \subseteq X$ je homogenní pro f, právě když buď každé dva vrcholy z A jsou spojeny hranou (A určuje úplný podgraf), nebo žádné dva vrcholy z A nejsou spojeny hranou (A je nezávislá množina vrcholů).

V řeči grafů (2) znamená, že každý graf o 6 vrcholech obsahuje buď nezávislou tříprvkovou množinu, nebo úplný podgraf K_3. Vztah $5 \nrightarrow (3)^2$ znamená, že existuje graf o 5 vrcholech neobsahující K_3 ani nezávislou tříprvkovou množinu vrcholů.

4.5 Jednoduché vlastnosti šipek. Vztah (1) je zajímavý, pokud $\varkappa \geq \lambda \geq r > 0$ a $\mu \geq 2$. V ostatních (degenerovaných) případech je snadné zjistit, zda vztah (1) platí či nikoliv.

(i) *Monotónnost.* Pro $\varkappa_1 \geq \varkappa$ nebo $\lambda_1 \leq \lambda$ nebo $\mu_1 \leq \mu$ z $\varkappa \to (\lambda)^r_\mu$ plyne $\varkappa_1 \to (\lambda_1)^r_{\mu_1}$.

(ii) *Monotónnost v exponentu.* Předpokládejme, že λ je nekonečný kardinál a platí $\varkappa \to (\lambda)^r_\mu$. Potom pro každé $n < r$ platí

$$\varkappa \to (\lambda)^n_\mu . \tag{3}$$

Důkaz. Kdyby pro nějaké $n < r$ neplatila šipka (3), existuje zobrazení $f: [\varkappa]^n \to \mu$, které nemá homogenní množinu mohutnosti λ. Pro každé $x \in [\varkappa]^n$ a $y \in [\varkappa]^{r-n}$ takové, že $\max x < \min y$, položme $g(x \cup y) = f(x)$. Potom ani zobrazení $g: [\varkappa]^r \to \mu$ nemá homogenní množinu mohutnosti λ — spor.

(iii) *Tranzitivnost.* Předpokládejme $\varkappa \to (\lambda)^r_\mu$ a $\lambda \to (\tau)^r_\nu$. Potom platí $\varkappa \to (\tau)^r_{\mu.\nu}$, kde $\mu . \nu$ je součin kardinálních čísel. Odtud indukcí a využitím monotónnosti šipky v dolním parametru snadno dostaneme, že z $\omega \to (\omega)^r_2$ plyne $\omega \to (\omega)^r_k$ pro každé $k < \omega$.

Důkaz. Nechť $f: [\varkappa]^r \to (\mu \times \nu)$. Pro libovolné $x \in [\varkappa]^r$ nechť $g(x)$ je první číslo dvojice $f(x)$. Potom $g: [\varkappa]^r \to \mu$, a proto existuje homogenní množina $A \subseteq \varkappa$ pro g, která má mohutnost λ. Označme $\alpha_0 < \mu$ hodnotu, které g nabývá na množině $[A]^r$. Nyní pro $x \in [A]^r$ je první číslo dvojice $f(x)$ rovno α_0 a nechť $h(x)$ je druhá složka dvojice $f(x)$. Potom $h: [A]^r \to \nu$ a množina $B \subseteq A$ mohutnosti τ, která je homogenní pro h, je také homogenní pro výchozí zobrazení f.

(iv) Pro $r = 1$ ztotožňujeme množinu $[X]^1$ s množinou X a $\varkappa \to (\lambda)^1_\mu$ znamená, že v každém rozkladu množiny $\varkappa$ na $\leq \mu$ částí je nějaká množina mohutnosti alespoň λ. To je ekvivalentní s tvrzením, že $\sum_{\alpha < \mu} \lambda_\alpha < \varkappa$ pro každou posloupnost $\langle \lambda_\alpha, \alpha < \mu \rangle$ kardinálních čísel menších než λ.

4.6 Ramseyova věta řeší důležitý případ šipky (1) pro $\varkappa = \lambda = \omega$ a konečné μ. Dokázal ji F. P. Ramsey (1930) původně jako technický prostředek pro matematickou logiku.

4.7 Ramseyova věta. *Pro každé přirozené r a každý rozklad Q množiny $[\omega]^r$ na konečně mnoho částí existuje nekonečná množina A přirozených čísel taková, že $[A]^r \subseteq q$ pro nějaké $q \in Q$.*
Stručněji, pro každé přirozené r a k platí $\omega \to (\omega)^r_k$.

Předvedeme důkaz pomocí ultrafiltrů, který se dá použít i pro velké kardinály. Podobný stupeň obecnosti má i metoda rozkladových stromů, se kterou se seznámíme později při důkaze věty 4.73.

Důkaz. V degenerovaných případech $r = 0$ nebo $k \leq 1$ věta triviálně platí, jakmile $r = 1$ a k je libovolné konečné, jde o Dirichletův princip.

Větu dokazujeme indukcí podle $r \geq 1$ pro libovolné $k \geq 1$. Předpokládejme, že pro dané $r \geq 1$ a libovolné k platí

$$\omega \to (\omega)^r_k, \tag{4}$$

a dokazujeme $\omega \to (\omega)^{r+1}_k$.

Nechť $\mathcal{U}$ je nějaký uniformní ultrafiltr na ω. Mějme dáno zobrazení $f\colon [\omega]^{r+1} \to k$. Pro libovolné $u \in [\omega]^r$ a $i < k$ položme

$$X(u, i) = \{x \in \omega - u : f(u \cup \{x\}) = i\}.$$

Množiny $X(u, i)$ pro $i < k$ tvoří konečný rozklad množiny $\omega - u \in \mathcal{U}$, právě jedna z nich je prvkem ultrafiltru $\mathcal{U}$. Označme $g(u)$ jediné $i < k$, pro které $X(u, i) \in \mathcal{U}$. Získali jsme tak zobrazení

$$g\colon [\omega]^r \to k. \tag{5}$$

S jeho pomocí sestrojíme nekonečnou množinu $Y = \{y_i : i < \omega\} \subseteq \omega$, která bude obsahovat hledanou homogenní množinu. Prvních r členů množiny Y můžeme zvolit libovolně, například $y_0 = 0$, $y_1 = 1, \ldots, y_{r-1} = r - 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \geq r$ již máme sestrojenu množinu $Y_n = \{y_j : j < n\}$. Pro každé $u \in [Y_n]^r$ je $X(u, g(u)) \in \mathcal{U}$ a množina $[Y_n]^r$ je konečná. To znamená, že

$$X_n = \bigcap \{X(u, g(u)) : u \in [Y_n]^r\}$$

je také prvkem $\mathcal{U}$ a je nekonečná. Proto je množina $X_n - \{p : p \leq y_{n-1}\}$ neprázdná. Za y_n zvolíme nejmenší prvek této množiny. Tím je popsána konstrukce nekonečné množiny Y.

Nyní uvažujme funkci g z (5) jen na množině $[Y]^r$. Podle indukčního předpokladu (4) existuje nekonečná množina $A \subseteq Y$ homogenní pro g. Předpokládejme, že g nabývá na $[A]^r$ hodnoty 0 (ostatní případy se dokazují stejně). Ověříme, že také původní funkce f nabývá na $[A]^{r+1}$ hodnoty 0, to znamená, že A je homogenní pro f.

Nechť v je libovolný prvek množiny $[A]^{r+1}$. Víme, že $A \subseteq Y$. Nechť y je největší prvek množiny v a $u = v - \{y\}$. Potom $g(u) = 0$ a $y \in X(u, 0)$, to znamená, že $f(v) = f(u \cup \{y\}) = 0$. Ukázali jsme, že A je nekonečná množina homogenní pro f. Důkaz je hotov.

Z Ramseyovy věty a monotónnosti šipky plyne, že pro každé nekonečné $\varkappa$ platí

$$\varkappa \to (\omega)^r_k. \tag{6}$$

Dříve než se budeme zabývat důsledky Ramseyovy věty, trochu odbočíme.

4.8 Sierpinského uspořádání. Předpokládejme, že množina X je lineárně uspořádaná relací $\preccurlyeq$. Zvolme navíc nějaké dobré uspořádání $\leq$ množiny X. Pro $x, y \in X$ položme

$$x \leq_S y \leftrightarrow x \preccurlyeq y \,\&\, x \leq y\,.$$

Relace $\leq_S$ je uspořádáním na množině X, které se nazývá *Sierpinského uspořádání* (určené relacemi $\preccurlyeq$ a $\leq$). Je-li $A \subseteq X$ řetězec vůči $\leq_S$, snadno se nahlédne, že A je dobře uspořádaná relací $\preccurlyeq$. Je-li A antiřetězec $(\leq_S)$, pak A je dobře uspořádaná inverzní relací k $\preccurlyeq$.

4.9 Věta. (i) *Nekonečná uspořádaná množina obsahuje nekonečný řetězec nebo antiřetězec.*

(ii) *V každé nekonečné lineárně uspořádané množině existuje podmnožina, která je uspořádaná podle typu ω nebo typu ω^*.*

Jinými slovy (3.7), typy ω a ω^* tvoří bázi pro třídu všech typů nekonečných lineárně uspořádaných množin.

Důkaz. (i) Je-li X nekonečná uspořádaná množina, pro každé $u = \{x, y\} \in [X]^2$ položme $f(u) = 0$, jestliže x a y jsou srovnatelné, jinak $f(u) = 1$. Podle (6) existuje nekonečná množina $A \subseteq X$ homogenní pro f. Nabývá-li f na $[A]^2$ hodnoty 0, je A řetězec, nabývá-li f hodnoty 1, je A antiřetězec.

(ii) Nechť $\langle X, \preccurlyeq \rangle$ je nekonečná lineárně uspořádaná množina. Zvolme Sierpinského uspořádání $\leq_S$ na X, které je určeno relací $\preccurlyeq$ a nějakým dobrým uspořádáním na X. Podle (i) existuje nekonečná množina $A \subseteq X$, která je buď řetězcem, nebo antiřetězcem vzhledem k $\leq_S$. Je-li A řetězcem, podle 4.8 je A dobře uspořádaná relací $\preccurlyeq$, a proto existuje dolní podmnožina $B \subseteq A$ uspořádaná podle typu ω. Je-li A antiřetězec, pak A je dobře uspořádaná inverzní relací k $\preccurlyeq$, a proto existuje horní podmnožina $B \subseteq A$ uspořádaná podle typu ω^*.

4.10 Zúžení systému množin do podmnožiny. Chceme-li dát vskutku jednoduché příklady nekonečných systémů množin přirozených čísel, systémy $A = \{\{n\} : n < \omega\}$ jednoprvkových podmnožin přirozených čísel nebo $B = \{n + 1 : n < \omega\}$ neprázdných dolních podmnožin budou z prvních, které nás napadnou. Stejně jednoduché systémy získáme přechodem k doplňkům množin z A nebo z B, tedy $C = \{\omega - \{n\} : n < \omega\}$ a $D = \{\omega - (n + 1) : n < \omega\}$.

Připomeňme, že je-li $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ systém podmnožin množiny X, potom pro libovolné $Y \subseteq X$ je $S \mid Y = \{Y \cap A : A \in S\}$ zúžení systému S na množinu Y.

4.11 Věta (Shelah). *Pro každý nekonečný systém $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ existují prostá posloupnost $\langle x_n : n < \omega \rangle$ prvků z X a podsystém $\{A_n : n < \omega\} \subseteq S$ tak, že*

$$\{\{m < \omega : x_m \in A_n\} : n < \omega\}$$

je právě jeden ze systémů A, B, C, D.

Jinými slovy, existuje spočetná množina $Y \subseteq X$ a spočetné $S' \subseteq S$ tak, že zúžení $S' \mid Y$ je podobné jednomu ze systémů A až D.

Důkaz. Nejprve rekurzí podle $n < \omega$ sestrojíme klesající posloupnost nekonečných podsystémů $S_n \subseteq S$ a posloupnost prvků $\langle x_n : n < \omega \rangle$ z X. Položme $S_0 = S$ a $x_0 \in X$ zvolíme tak, aby systémy $S_0(0) = \{A \in S_0 : x_0 \notin A\}$ a $S_0(1) = \{A \in S_0 : x_0 \in A\}$ byly oba neprázdné. Je zřejmé, že systémy $S_0(0)$ a $S_0(1)$ tvoří rozklad množiny S_0, proto je alespoň jeden z nich nekonečný a ten označíme S_1. V dalším kroku si počínáme stejně. Vybereme $x_1 \in X$ tak, že oba systémy

$$S_1(0) = \{A \in S_1 : x_1 \notin A\},$$
$$S_1(1) = \{A \in S_1 : x_1 \in A\}$$

jsou neprázdné a za S_2 zvolíme ten, který je nekonečný. Prvek $x_1 \in X$ lze vybrat, protože $|S_1| \geq 2$ a navíc je $x_1 \neq x_0$. Takto sestrojíme $\langle S_n : n < \omega \rangle$ a prostou posloupnost $\langle x_n : n < \omega \rangle$.

Pro každé n vybereme $A_n \in S_n - S_{n+1}$. Všimněme si, že při této volbě pro každé $i < \omega$ platí: Je-li $x_i \notin A_i$, pak $x_i \in A_j$ pro každé $j > i$, a je-li $x_i \in A_i$, pak $x_i \notin A_j$ pro každé $j > i$.

Pro $i < j$ položme

$$f(\{i,j\}) = \begin{cases} 0, & \\ 1, & \text{jestliže} \\ 2, & \\ 3, & \end{cases} \begin{array}{l} x_i \notin A_j \mathbin{\&} x_j \notin A_i, \\ x_i \in A_j \mathbin{\&} x_j \notin A_i, \\ x_i \in A_j \mathbin{\&} x_j \in A_i, \\ x_i \notin A_j \mathbin{\&} x_j \in A_i. \end{array}$$

Máme tak definované zobrazení $f: [\omega]^2 \to 4$. Podle Ramseyovy věty existuje nekonečná množina $M \subseteq \omega$ homogenní pro f. Je snadné ověřit, že zúžení systému $S' = \{A_n : n \in M\}$ na množinu $Y = \{x_n : n \in M\}$ je podobné právě jednomu ze systémů A, B, C, D, podle toho, je-li M homogenní pro barvu 0, 1, 2, 3.

F. P. Ramsey (1930) dokázal také obdobu věty 4.7 pro konečné množiny.

4.12 Konečná Ramseyova věta. *Pro libovolná přirozená čísla k, m, r existuje přirozené n tak, že platí*

$$n \to (m)^r_k. \tag{7}$$

Odtud plyne, že pro každé r existuje Ramseyova funkce R_r definovaná všude na $\omega \times \omega$ vztahem R_r

$$R_r(m, k) = \min\{n < \omega : n \to (m)^r_k\}. \tag{8}$$

Důkaz. Použijeme princip kompaktnosti (I. 8.36). Předpokládejme, že pro každé $n \geq r$ existuje obarvení $f_n : [n]^r \to k$, pro které neexistuje žádná homogenní množina o m prvcích. Množina $S = \{f_n : n \geq r\}$ je systém konečných funkcí s hodnotami v konečné množině k. Navíc S vykrývá všechny konečné podmnožiny množiny $[\omega]^r$, protože konečné $X \subseteq [\omega]^r$ je podmnožinou každé množiny $[n]^r = \mathrm{Dom}(f_n)$ pro libovolné $n > \max \bigcup X$. Podle principu kompaktnosti existuje zobrazení $f\colon [\omega]^r \to k$ filtrující systém S. Odtud plyne, že pro každou konečnou množinu $A \subseteq \omega$ existuje $n > \max(A)$ takové, že platí

$$f \mid [A]^r = f_n \mid [A]^r. \tag{9}$$

Z Ramseyovy věty 4.7 víme, že existuje nekonečná množina $B \subseteq \omega$ homogenní pro f. Vezmeme-li libovolnou podmnožinu $A \subseteq B$ o m prvcích, pak z (9) plyne, že A je také homogenní pro nějaké obarvení f_n — spor. Důkaz je hotov.

4.13 Příklady. (a) Ukazuje se, že výpočet hodnot Ramseyových funkcí (8) je velice obtížný a přesných hodnot je známo jen málo. Příklad 4.4(a) říká, že $R_2(3,2) = 6$. Je také známo, že $R_2(4,2) = 18$, ale již pro $R_2(5,2)$ je znám pouze odhad $42 \leq R_2(5,2) \leq 55$. Pro funkci R_3 je situace ještě složitější. Pro nejjednodušší případ $R_3(4,2)$ je znám jeno odhad $13 \leq R_3(4,2) \leq 15$.

(b) K popularitě Ramseyovy věty rozhodným způsobem přispěly výsledky Erdöse a Szekerese z roku 1935, které uvádíme v příkladech (b) a (e). Erdös a Szekeres v téže práci podali nezávislý důkaz konečné Ramseyovy věty. První jejich výsledek se týká množin bodů v rovině.

Uvažujeme jen takové množiny bodů v rovině, že žádná jejich trojice bodů neleží na přímce. Pro každé přirozené m existuje přirozené číslo n takové, že z libovolné n-bodové množiny v rovině lze vybrat m bodů, které tvoří vrcholy konvexního m-úhelníku.

Uvedeme elegantní důkaz této věty, který pochází od M. Tarsyho. Stačí vzít n takové, že platí

$$n \to (m)^3_2. \tag{10}$$

Množinu Y o n bodech v rovině očíslujeme $0, 1, \ldots, n-1$. Každou tříprvkovou množinu $\{i, j, k\}$ budeme zapisovat ve vzestupném uspořádání, tedy $i < j < k$. Trojici $\{i, j, k\}$ obarvíme bíle, jestliže přechod v rovině od i do j a dále přes k zpátky do i se děje proti směru hodinových ručiček, a černě, je-li přechod po směru hodinových ručiček. Podle (10) existuje podmnožina $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ o m bodech uspořádaná tak, že každá její trojice má stejnou orientaci. Vezmeme-li libovolnou přímku p procházející body x_i, x_{i+1}, kde $i + 1 < m$, nebo procházející body x_{m-1} a x_0, pak v důsledku stejné orientace trojic leží celá množina X v jedné z polorovin vymezených přímkou p. To ovšem znamená, že body $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ jsou vrcholy konvexního m-úhelníku.

(c) Jako důsledek konečné Ramseyovy věty dostaneme tvrzení o řetězcích a antiřetězcích v konečných uspořádaných množinách, které je obdobou 4.9(i). Pro dané přirozené m existuje n takové, že každá uspořádaná množina o n prvcích obsahuje buď řetězec, nebo antiřetězec o m prvcích.

Je však známa přímá metoda, která dává přesný dolní odhad čísla n v závislosti na m.

Nechť P je konečná uspořádaná množina. Označme $r(P)$ a $a(P)$ po řadě největší délku řetězce a největší mohutnost antiřetězce v P. Ukážeme, že

$$r(P) \,.\, a(P) \geq |P| \,. \tag{11}$$

Nechť P_0 je množina všech maximálních prvků v P. Dále vezměme množinu P_1 všech maximálních prvků v $P - P_0$. Takto po konečném počtu kroků získáme rozklad $\{P_i : i < n\}$ množiny P. Je zřejmé, že každé P_i je antiřetězec, tedy $|P_i| \leq a(P)$, a navíc $n = r(P)$. Odtud plyne (11).

(d) Libovolná uspořádaná množina, která má alespoň $r \,.\, a + 1$ prvků, obsahuje buď řetězec délky $r + 1$, nebo antiřetězec mohutnosti $a + 1$.

(e) (Erdös, Szekeres 1935). *Z každé prosté posloupnosti reálných čísel délky* $n^2 + 1$ *lze vybrat buď rostoucí, nebo klesající podposloupnost délky* $n + 1$.

Na množině indexů posloupnosti, kterou ztotožníme s přirozeným číslem $n^2 + 1$, jsou dána dvě lineární uspořádání: první je obvyklé uspořádání přirozených čísel a druhé je uspořádání indexů podle velikosti členů posloupnosti. Uvažujeme-li odpovídající Sierpinského uspořádání (4.8) na $n^2 + 1$, pak každý řetězec určuje rostoucí podposloupnost a každý antiřetězec určuje klesající podposloupnost. Z (11) plyne, že alespoň jeden z nich musí mít mohutnost $n + 1$. Není těžké sestrojit příklad ukazující, že odhad $n^2 + 1$ je nejlepší možný.

(f) Z věty 4.9(i) plyne, že (11) platí i pro spočetné uspořádané množiny. Ukážeme, že ve větě 4.9(i) nelze slovo „nekonečný“ nahradit slovem „nespočetný“, a tedy pro nespočetná uspořádání vztah (11) nemusí platit.

Víme, že reálná přímka $\mathbb{R}$ neobsahuje podmnožinu typu ω_1 ani ω_1^*. To znamená, že pro Sierpinského uspořádání množiny $\mathbb{R}$, odpovídající uspořádání reálných čísel a nějakému jejímu dobrému uspořádání, neexistuje ani nespočetný řetězec, ani nespočetný antiřetězec. Dostáváme známé Sierpinského tvrzení

$$2^\omega \nrightarrow (\omega_1)^2 \,. \tag{12}$$

Všimněme si, že pro strom T mohutnosti ω_1 neplatí (11), právě když T je Suslinův strom.

4.14 Kanonické rozklady. Doposud jsme se zabývali jen konečnými rozklady. Nyní nás budou zajímat všechny rozklady. Předpokládáme, že X je lineárně uspořádaná množina. Zapisujeme-li n-prvkovou množinu $a \subseteq X$ výčtem jejích prvků $a = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, vždy předpokládáme, že prvky a_i jsou uspořádány vzestupně.

Zvolme přirozené n a uvažujme rozklady množiny $[X]^n$. Pro každé $\Delta \subseteq \subseteq \{0, 1, \ldots, n - 1\} = n$ definujeme relaci ekvivalence $\sim_\Delta$ na množině $[X]^n$ tak, že

$$a \sim_\Delta b \leftrightarrow \text{pro každé } i \in \Delta \text{ platí } a_i = b_i \,.$$

Nechť Q_Δ je rozklad množiny $[X]^n$ sestávající ze tříd ekvivalence relace $\sim_\Delta$.

Rozklady Q_Δ pro $\Delta \subseteq n$ se nazývají kanonickými rozklady na X (pro dané n).

Je-li X nekonečná množina a $n > 0$, pak existuje nekonečně mnoho (alespoň 2^{ω}) rozkladů množiny $[X]^n$, ale jen 2^n kanonických rozkladů. Ptáme se, zda pro libovolný rozklad Q existuje nekonečná podmnožina $A \subseteq X$ taková, že zúžení Q na $[A]^n$ je již kanonickým rozkladem na A. Pozitivní odpověď dává kanonická Ramseyova věta.

4.15 Definice. Nechť X je lineárně uspořádaná množina a n přirozené.

(i) Říkáme, že *rozklad* Q množiny $[X]^n$ je *kanonický* na množině $A \subseteq X$, jestliže existuje množina $\Delta(Q, A) \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}$ taková, že libovolná $a, b \in [A]^n$ leží ve stejné množině rozkladu, právě když pro každé $i \in \Delta(Q, A)$ platí $a_i = b_i$. To znamená, že $Q \mid [A]^n = Q_{\Delta(Q,A)}$.

(ii) Je-li f zobrazení definované na $[X]^n$, říkáme, že f je *kanonické* na $A \subseteq X$, jestliže rozklad Q určený zobrazením f je kanonický na A. V tomto případě píšeme $\Delta(f, A)$ namísto $\Delta(Q, A)$.

Všimněme si dvou mezních případů množiny $\Delta(f, A)$. Je-li $\Delta(f, A) = 0$, potom $f(a) = f(b)$ pro všechna $a, b \in [A]^n$. To ovšem znamená, že množina A je homogenní pro f. Na druhé straně, je-li $\Delta(f, A) = \{0, 1, \ldots, n-1\} = n$, potom pro $a \neq b$ je $f(a) \neq f(b)$, tedy f je prosté zobrazení na množině $[A]^n$.

V případě $n = 1$, kdy ztotožňujeme $[X]^1$ s X, je funkce f kanonická na podmnožině A, jestliže f je buď konstantní na A (v případě $\Delta = 0$), nebo prostá na A (v případě $\Delta = \{0\}$). Je-li X nekonečné, je zřejmé, že pro libovolnou funkci f definovanou na X nalezneme nekonečnou množinu $A \subseteq X$ uvedených vlastností.

4.16 Kanonická Ramseyova věta (Erdös a Rado 1950). *Pro libovolné přirozené n a každý rozklad Q množiny $[\omega]^n$ existuje nekonečná množina $A \subseteq \omega$, na které je rozklad Q kanonický.*

4.17 Nejprve ukážeme, že kanonická Ramseyova věta je zobecněním Ramseyovy věty. Předpokládejme, že Q je konečný rozklad množiny $[\omega]^n$. Nechť $A \subseteq \omega$ je nekonečná množina, na které je rozklad Q kanonický. Dokazujeme, že A je homogenní pro Q, neboli $\Delta(Q, A) = 0$. Předpokládejme, že existuje nějaké $i \in \Delta(Q, A)$. Pro libovolné $x \in A$, které není mezi prvními i prvky množiny A, existuje $a(x) = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \in [A]^n$ takové, že $a_i = x$. Je-li $x \neq x'$, pak $a(x)$ a $a(x')$ leží v různých množinách rozkladu Q, a protože A je nekonečná, Q musí být nekonečný rozklad — spor.

K důkazu věty 4.16 použijeme následující charakterizace kanonických rozkladů, která je sama o sobě zajímavá.

4.18 Invariantní rozklady. Předpokládáme, že X je lineárně uspořádaná množina. Jsou-li a, b, c, d její n-prvkové podmnožiny, píšeme

$$a : b = c : d, \tag{13}$$

jestliže existuje rostoucí zobrazení $\varphi : a \cup b \to X$ takové, že $\varphi[a] = c$ a $\varphi[b] = d$. Jinými slovy, (13) je ekvivalentní s tím, že pro každé $i, j < n$ platí

$$a_i \leq b_j, \quad \text{právě když} \quad c_i \leq d_j.$$

Je-li Q rozklad množiny $[X]^n$, pak píšeme $a \equiv b(Q)$, jestliže a i b leží ve stejné množině rozkladu. Pokud je zřejmé, který rozklad máme na mysli, píšeme krátce $a \equiv b$.

Říkáme, že *rozklad* Q množiny $[X]^n$ je *invariantní*, jestliže pro libovolné $a, b, c, d \in [X]^n$ platí:

$$\text{je-li} \quad a:b = c:d \quad \text{a} \quad a \equiv b, \quad \text{potom} \quad c \equiv d.$$

4.19 Lemma. *Je-li X nekonečná lineárně uspořádaná množina, potom libovolný rozklad množiny $[X]^n$ je kanonický, právě když je invariantní.*

Důkaz. Nechť Q je kanonický rozklad a $Q = Q_\Delta$ pro nějaké $\Delta \subseteq n$. Je-li $a \equiv b$, pak pro každé $i \in \Delta$ je $a_i = b_i$, a z $a:b = c:d$ dostáváme, že také $c_i = d_i$ pro každé $i \in \Delta$. Odtud $c \equiv d$ a Q je invariantní.

Důkaz opačné implikace je složitější. Předpokládejme, že Q je invariantní rozklad množiny $[X]^n$ a $n > 0$. Zvolme libovolně množinu $S = \{x_0, \ldots, x_{2n}\} \subseteq X$ o $2n + 1$ prvcích uspořádaných vzestupně.

Nejprve použijeme prvních $n + 1$ prvků množiny S a pro každé $i \leq n$ položíme

$$H_i = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}.$$

Je zřejmé, že každé H_i je n-prvková množina. Pro rozklad Q definujeme množinu

$$\Delta = \{i < n : H_i \not\equiv H_{i+1}\}. \tag{14}$$

Dokazujeme, že $Q = Q_\Delta$. Vezměme libovolné $a, b \in [X]^n$ takové, že $a_i = b_i$ pro $i \in \Delta$. Položme

$$\varrho(a, b) = |\{i < n : a_i \neq b_i\}|.$$

Indukcí podle ϱ dokážeme, že $a \equiv b$. Je-li $\varrho(a, b) = 0$, pak $a = b$ a triviálně $a \equiv b$. Je-li $\varrho(a, b) > 0$, nechť j je nejmenší index, pro který $a_j \neq b_j$. Víme, že $j \notin \Delta$. Můžeme předpokládat $a_j < b_j$ a položme

$$b' = \{b_0, \ldots, b_{j-1}, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_{n-1}\}.$$

Je zřejmé, že $a_i = b_i$ pro každé $i \in \Delta$ a současně $\varrho(a, b') < \varrho(a, b)$. Podle indukčního předpokladu dostáváme $a \equiv b'$. Navíc platí

$$b : b' = H_j : H_{j+1}$$

a protože $j \notin \Delta$, je $H_j \equiv H_{j+1}$. Z invariantnosti rozkladu Q plyne $b \equiv b'$, odkud také $a \equiv b$.

Potřebujeme ještě ukázat, že také naopak z $a \equiv b$ plyne $a_i = b_i$ pro všechna $i \in \Delta$. Dokazujeme to sporem. Předpokládejme, že $a \equiv b$ a existuje $i \in \Delta$, pro které je $a_i \neq b_i$. Označme $j \in \Delta$ nejmenší takový index. Je-li $j = 0$ položme $c = a$, $d = b$. Je-li $j > 0$, položme

$$c = \{\min(a_0, b_0), \ldots, \min(a_{j-1}, b_{j-1}), a_j, \ldots, a_{n-1}\},$$
$$d = \{\min(a_0, b_0), \ldots, \min(a_{j-1}, b_{j-1}), b_j, \ldots, b_{n-1}\}.$$

Z invariantnosti rozkladu Q a z (14) dostáváme $c \equiv a$, $d \equiv b$, odkud $c \equiv d$. Je zřejmé, že pro $i < j$ je $c_i = d_i$ a $c_j \neq d_j$. Můžeme předpokládat, že $c_j < d_j$.

Nyní využijeme toho, že S má $2n + 1$ prvků. Můžeme vybrat n-prvkové množiny e, f z prvních $2n$ prvků množiny S tak, že platí

$$c : d = e : f.$$

Nutně $e_j < f_j$ a $e_i = f_i$ pro $i < j$. Z invariantnosti Q máme $e \equiv f$.

Uvažujme zobrazení $\varphi : S - \{x_{2n}\} \to S$ takové, že pro $x \leq e_j$ je $\varphi(x) = x$ a pro $x > e_j$ je $\varphi(x)$ následník prvku x v množině S. Označíme-li $e' = \varphi[e]$ a $f' = \varphi[f]$, platí $e : f = e' : f'$, a proto $e' \equiv f'$.

Podobně uvažujme zobrazení $\psi : S - \{x_{2n}\} \to S$ takové, že pro $x < e_j$ je $\psi(x) = x$ a pro $x \geq e_j$ je $\psi(x)$ následník prvku x v množině S. Položme $e'' = \psi[e]$. Je zřejmé, že $f' = \psi[f]$, a proto $e : f = e'' : f'$. Odtud $e'' \equiv f'$. Nyní víme, že $e' \equiv f' \equiv e''$. Všimněme si, že

$$e'' : e' = H_j : H_{j+1},$$

a tedy $H_j \equiv H_{j+1}$. To ovšem znamená, že $j \notin \Delta$, spor. Dokázali jsme, že Q je kanonický rozklad.

Pro konečné množiny lemma 4.19 neplatí.

4.20 Příklad. Nechť $n > 1$. Uvažujme množinu $X = \{0, 1, \ldots, p\}$ pro nějaké p takové, že $n \leq p < 2n$. To znamená, že $n < |X| \leq 2n$. Definujme rozklad Q množiny $[X]^n$ tak, že jedna jeho množina sestává z množin $\{0, \ldots, n - 1\}$ a $\{p - n + 1, \ldots, p\}$ a zbývající množiny rozkladu jsou jednoprvkové. Q je invariantní rozklad, ale není kanonický. Připomeňme, že v důkazu 4.19 jsme použili množinu o $2n + 1$ prvcích.

4.21 *Důkaz kanonické Ramseyovy věty.* Předpokládáme $n > 0$, případ $n = 0$ je triviální. Použijeme Ramseyovu větu $\omega \to (\omega)_k^{2n}$ pro exponent $2n$ a číslo k, které udává počet všech relací ekvivalence (rozkladů) na množině mohutnosti $\binom{2n}{n}$. Důležité je, že k je přirozené číslo. Vezměme množinu $I = \{0, 1, \ldots, 2n - 1\}$ a nechť E sestává ze všech rozkladů množiny $[I]^n$. Je zřejmé, že $|E| = k$.

Nechť Q je libovolný rozklad množiny $[\omega]^n$. Pro každou $2n$-prvkovou množinu $p = \{p_0, p_1, \ldots, p_{2n-1}\} \subseteq \omega$ existuje jediný rozklad $f(p) \in E$ takový, že pro libovolné $x, y \in [I]^n$ platí

$$x \equiv y\,(f(p)) \leftrightarrow \{p_i : i \in x\} \equiv \{p_j : j \in y\}\,(Q).$$

Získali jsme tak zobrazení $f : [\omega]^{2n} \to E$. Podle Ramseyovy věty existuje nekonečná množina $A \subseteq \omega$ homogenní pro f. Ověříme, že rozklad Q je invariantní na $[A]^n$.

Nechť $a, b, c, d \in [A]^n$ a platí

$$a : b = c : d. \tag{15}$$

Doplníme, je-li třeba, množinu $a \cup b$ na $2n$-prvkovou množinu $p \subseteq A$ přidáním prvků z A, které jsou za všemi prvky z $a \cup b$. Podobně doplníme množinu $c \cup d$ na množinu $q \in [A]^{2n}$. Jelikož $f(p) = f(q)$, v důsledku (15) platí $a \equiv b(Q)$, právě když $c \equiv d(Q)$. Rozklad Q je tedy invariantní na $[A]^n$ a je kanonický podle 4.19. Důkaz je ukončen.

4.22 Rozklady systémů nekonečných množin. Zajímají nás konečné rozklady systému $[X]^\omega$, tedy rozklady systému všech spočetných podmnožin nekonečné množiny X, pro které existují nekonečné homogenní množiny. Klasický výsledek Erdöse a Rado (1954), viz lemma 4.23, říká, že pro exponent ω neplatí přímá analogie Ramseyovy věty. Ovšem konstrukce rozkladu množiny $[X]^\omega$, pro který neexistuje nekonečná homogenní množina, podstatně používá axiom výběru. Na druhé straně Galvin a Prikry (1973) ukázali, že analogie Ramseyovy věty platí, pokud se omezíme na vhodně definované rozklady. Seznámíme se s jejich větou a ukážeme její použití. Nejdříve slíbený protipříklad.

4.23 Lemma. *Pro každou nekonečnou množinu M existuje rozklad*

$$[M]^\omega = Q_1 \cup Q_2$$

množiny $[M]^\omega$ na dvě části takový, že pro každou nekonečnou množinu $A \subseteq M$ je $[A]^\omega \cap Q_1 \neq 0$ i $[A]^\omega \cap Q_2 \neq 0$.

Stručněji, pro každé nekonečné $\varkappa$ platí

$$\varkappa \not\to (\omega)_2^\omega . \tag{16}$$

Důkaz. Na množině $[M]^\omega$ definujeme relaci ekvivalence tak, že

$$X \sim Y \leftrightarrow \text{symetrická diference } X \triangle Y \text{ je konečná.}$$

Z axiomu výběru plyne, že z každé třídy ekvivalence lze vybrat jeden prvek. Existuje tedy zobrazení f takové, že $f(X) \sim X$ a $X \sim Y \to f(X) = f(Y)$ platí pro každé $X, Y \in [M]^\omega$. Položme

$$Q_0 = \{X \in [M]^\omega : |X \triangle f(X)| \text{ je sudé číslo}\},$$
$$Q_1 = [M]^\omega - Q_0 .$$

Ověříme, že Q_0, Q_1 mají požadované vlastnosti. Je-li $A \subseteq M$ nekonečná, vezměme libovolnou spočetnou množinu $X \subseteq A$. Odebereme z X jeden prvek, dostaneme množinu Y. Je zřejmé, že $f(X) = f(Y)$, a proto jedno z čísel $|X \triangle f(X)|$, $|Y \triangle f(X)|$ je sudé a druhé liché. To znamená, že jedna z množin X, Y patří do Q_0 a zbývající do Q_1. Dokázali jsme, že žádná nekonečná množina $A \subseteq M$ není homogenní pro rozklad $\{Q_0, Q_1\}$.

4.24 Borelovské rozklady. Podle (16) platí $\omega \nrightarrow (\omega)_2^\omega$. Přesto existují zajímavé rozklady množiny $[\omega]^\omega$, které mají nekonečné homogenní množiny. Ukazuje se, že k popisu takových rozkladů jsou vhodné topologické prostředky. Budeme používat borelovské množiny a množiny s Baireovou vlastností, které jsou typickými příklady σ-úplných algeber množin a jsou popsány ve IV. 1.

Na množině $[\omega]^\omega$ zavedeme nejprve topologii odvozenou z topologie Cantorova diskontinua, kterou budeme nazývat *klasickou topologií* na $[\omega]^\omega$. Ztotožníme-li podmnožiny přirozených čísel s jejich charakteristickými funkcemi, stává se $[\omega]^\omega$ podmnožinou, a tedy také topologickým podprostorem Cantorova diskontinua. Báze topologie Cantorova diskontinua je určena konečnými funkcemi a odpovídající báze topologie na $[\omega]^\omega$ bude určena konečnými množinami.

Položme $[0] = [\omega]^\omega$ a $[s] = \{X \in [\omega]^\omega : X \cap (\max(s) + 1) = s\}$ pro libovolnou neprázdnou množinu $s \in [\omega]^{<\omega}$. Jinými slovy, $X \in [s]$, právě když s je dolní podmnožinou množiny X v uspořádání přirozených čísel.

Pro libovolné $K \subseteq [\omega]^{<\omega}$ je

$$o(K) = \bigcup_{s \in K} [s] \tag{17}$$

otevřenou množinou v klasické topologii.

Dále uvažujeme $[\omega]^\omega$ jako prostor s touto topologií. Rozklady množiny $[\omega]^\omega$, které sestávají z borelovských množin, nazýváme borelovskými rozklady.

4.25 Věta (Galvin, Prikry 1973). *Pro každý konečný borelovský rozklad*

$$[\omega]^\omega = S_0 \cup \ldots \cup S_{k-1}$$

existuje nekonečná množina $A \subseteq \omega$ *taková, že* $[A]^\omega \subseteq S_i$ *pro nějaké* $i < k$.

Nejprve uvedeme některé jednoduché důsledky této věty.

4.26 Definice. Říkáme, že systém $K \subseteq [\omega]^{<\omega}$ je

(i) *hustý*, jestliže pro každé $X \in [\omega]^\omega$ je $K \cap [X]^{<\omega} \neq 0$,

(ii) *spernerovský*, jestliže žádná množina z K není v uspořádání přirozených čísel dolní podmnožinou jiné množiny z K.

Všimněme si, že pro každé přirozené r je $[\omega]^r$ spernerovský systém.

4.27 Lemma. *Je-li* $K \subseteq [\omega]^{<\omega}$ *hustý systém, potom existuje* $A \in [\omega]^\omega$ *takové, že každé nekonečné* $B \subseteq A$ *má nějakou dolní podmnožinu v* K.

Důkaz. Vezměme otevřenou množinu $o(K)$ definovanou v (17). Potom $o(K)$ a $[\omega]^\omega - o(K)$ tvoří borelovský rozklad, a proto podle věty 4.25 existuje nekonečná množina $A \subseteq \omega$ taková, že buď $[A]^\omega \subseteq o(K)$, nebo $[A]^\omega \cap o(K) = 0$.

Druhá alternativa není možná, protože z ní plyne $[A]^{<\omega} \cap K = 0$, a to je spor s hustotou systému K. Tedy $[A]^\omega \subseteq o(K)$, a to je právě to, co jsme chtěli dokázat.

4.28 Věta (Nash–Williams). *Nechť* K *je spernerovský systém. Potom pro každý jeho konečný rozklad*

$$K = K_0 \cup \ldots \cup K_{k-1}$$

existuje nekonečná množina $A \subseteq \omega$ taková, že

$$[A]^{<\omega} \cap K \subseteq K_i \text{ pro nějaké } i < k.$$

Ramseyova věta je speciálním případem tohoto tvrzení, protože $[\omega]^r$ je spernerovský systém.

Důkaz. Ukážeme podstatný případ $k = 2$, pro $k > 2$ pokračujeme indukcí. Předpokládáme, že $K = K_0 \cup K_1$. Pokud systém K_0 není hustý, existuje $A \in [\omega]^\omega$ takové, že $[A]^{<\omega} \cap K_0 = 0$, a tedy $[A]^{<\omega} \cap K \subseteq K_1$.

Je-li systém K_0 hustý, vezměme množinu $A \in [\omega]^\omega$ z důsledku 4.27. Ověříme, že $[A]^{<\omega} \cap K \subseteq K_0$. Je-li $s \in [A]^{<\omega} \cap K$, potom $B = s \cup \{n \in A : (\forall i \in s)(i < n)\}$ je nekonečná a $B \subseteq A$. Ze 4.27 plyne, že B má nějakou dolní podmnožinu $t \in K_0$. Jelikož t i s jsou dolní podmnožiny B, jedna je dolní podmnožinou druhé. Navíc $s, t \in K$ a protože K je spernerovský systém, platí $s = t$. Tedy $s \in K_0$ a věta je dokázána.

4.29 Galvinovu–Prikryho větu dokážeme pomocí série lemmat, ve kterých použijeme následující označení. Konečné množiny přirozených čísel značíme s, t a nekonečné množiny přirozených čísel značíme A, B, X, Y. Podmnožiny prostoru $[\omega]^\omega$ značíme S.

Píšeme $s < A$, jestliže všechny prvky z s jsou menší než všechny prvky z A. Je-li $s < A$, potom definujeme

$$[s, A] = \{X \in [\omega]^\omega : s \subseteq X \subseteq s \cup A\}.$$

Jinými slovy, $X \in [s, A]$, právě když s je dolní podmnožina X a $X - s \subseteq A$.

Všimněme si, že $[0, A] = [A]^\omega$ a že každou množinu $[s]$ báze klasické topologie na $[\omega]^\omega$ lze vyjádřit jako množinu $[s, \omega - (\max(s) + 1)]$.

4.30 Definice. Ramseyovské množiny. (i) Systém

$$\mathscr{E} = \{[s, A] : s \in [\omega]^{<\omega} \;\&\; A \in [\omega]^\omega \;\&\; s < A\}$$

nazýváme *Ellentuckovým systémem*.

(ii) Říkáme, že množina $S \subseteq [\omega]^\omega$ je *ramseyovská*, jestliže platí

$$(18) \qquad (\forall [s, A] \in \mathscr{E})(\exists B \in [A]^\omega)([s, B] \subseteq S \vee [s, B] \cap S = 0).$$

Systém všech ramseyovských množin značíme $\mathscr{R}$.

Zajímají nás vlastnosti systému $\mathscr{R}$. Je zřejmé, že $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}([\omega]^\omega)$, $0 \in \mathscr{R}$ a že doplněk každé ramseyovské množiny je také ramseyovská množina. Ukážeme, že $\mathscr{R}$ je σ-úplná algebra množin, která obsahuje všechny otevřené množiny prostoru $[\omega]^\omega$. Odtud pak plyne, že $\mathscr{R}$ obsahuje také všechny borelovské množiny tohoto prostoru.

4.31 Příklad. Každá množina $[t, X] \in \mathscr{E}$ je ramseyovská, neboli $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{R}$.

Nechť $[s, A]$ je libovolná množina z $\mathscr{E}$. Hledáme B, které splňuje podmínku (18) pro $S = [t, X]$. Mohou nastat dva případy: buď je průnik $[s, A] \cap [t, X]$ prázdný, pak položíme $B = A$. Nebo je neprázdný, a potom $B = A \cap X$ je nekonečné a s je dolní podmnožinou t nebo naopak. Ukážeme, že B také splňuje (18). Je-li $t \subseteq s$, pak $[s, B] \subseteq [t, X]$. Není-li t dolní podmnožinou s, potom existuje prvek $z \in t$, který je větší než všechny prvky z s. Je zřejmé, že $z \notin s \cup B$, ale z je prvkem každého $Y \in [t, X]$. Odtud plyne, že $[s, B]$ má prázdný průnik s $[t, X]$.

4.32 Přijímání a odmítání. Uvažujme libovolnou množinu $S \subseteq [\omega]^\omega$ a libovolné $[s, A] \in \mathscr{E}$. Říkáme, že $[s, A]$ *přijímá* S, jestliže existuje nekonečné $B \subseteq A$ takové, že

$$[s, B] \subseteq S.$$

Pokud taková množina B neexistuje, říkáme, že $[s, A]$ *nepřijímá* množinu S. Říkáme, že $[s, A]$ *odmítá* S, jestliže pro každé konečné $t \subseteq A$ množina $[s \cup t, A(>t)]$ nepřijímá S, kde $A(>t) = \{n \in A : (\forall i \in t)(i < n)\}$.

(19) Je zřejmé, že pokud $[s, A]$ nepřijímá S, pak pro každé $B \subseteq A$ také $[s, B]$ nepřijímá S.

Všimněme si, že platí:

(20) $[t, B] \subseteq [s, A]$, právě když s je dolní podmnožina t, $B \subseteq A$ a $t - s \subseteq A$.

Odtud plyne, že $[s, A]$ odmítá S, právě když každé $[t, B] \subseteq [s, A]$ nepřijímá S. Pokud $[s, A]$ odmítá S, pak také každé $[t, B] \subseteq [s, A]$ odmítá S.

4.33 Lemma. *Jestliže $[s, A]$ nepřijímá S, pak existuje nekonečné $B \subseteq A$ takové, že $[s, B]$ odmítá S.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pokud množina $[s, A]$ nepřijímá S, pak existuje nekonečné $X \subseteq A$ takové, že pro každé $n \in X$

(21) množina $[s \cup \{n\}, X(>n)]$ nepřijímá S.

V takovém případě říkáme, že $[s, X]$ *slabě odmítá* S.

Předpokládejme, že množina X uvedených vlastností neexistuje, to znamená, že platí:

($*$) pro každé $X' \in [A]^\omega$ existují $x \in X'$ a nekonečné $Y' \subseteq X'(>x)$ tak, že $[s \cup \{x\}, Y'] \subseteq S$.

Položme $X_0 = A$. Podle ($*$) existují $x_0 \in X_0$ a $X_1 \subseteq X_0(>x_0)$ tak, že $[s \cup \{x_0\}, X_1] \subseteq S$. Pro X_1 opět použijeme ($*$) a získáme $x_1 \in X_1$ a X_2 takové, že $\{x_0, x_1\} < X_2 \subseteq X_1$ a $[s \cup \{x_1\}, X_2] \subseteq S$. Rekurzí sestrojíme rostoucí nekonečnou posloupnost $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ přirozených čísel a klesající systém množin $\langle X_i : i < \omega \rangle$. Položíme-li $X = \{x_i : i < \omega\}$, potom $X \subseteq A$ a $s < X$. Ověříme, že $[s, X] \subseteq S$, a to je spor s předpokladem, že $[s, A]$ nepřijímá S. Nechť $Y \in$

$\in [s, X]$ a nechť i je nejmenší index takový, že $x_i \in Y$. Potom $Y \in [s \cup \{x_i\}, X_{i+1}] \subseteq S$, to znamená, že $[s, X] \subseteq S$. Dokázali jsme, že platí (21).

Nyní konstruujeme množinu B. Předpokládáme, že $[s, A]$ nepřijímá S, a víme, že existuje $X_0 \subseteq A$ tak, že $[s, X_0]$ slabě odmítá S. Položme $b_0 = \min X_0$ a $Y_0 = X_0(>b_0)$. Potom $[s \cup \{b_0\}, Y_0]$ nepřijímá S podle (21) a $[s, Y_0]$ také nepřijímá S podle (19). Předpokládejme, že jsme již sestrojili prvky $b_0 < b_1 < \ldots < b_m$ a množiny $X_0 \supset Y_0 \supseteq X_1 \supset Y_1 \supseteq \ldots \supset Y_{m-1} \supseteq X_m \supset Y_m$ tak, že $b_i = \min X_i$ a $Y_i = X_i - \{b_i\}$ a pro každé $t \subseteq \{b_0, \ldots, b_m\}$ množina $[s \cup t, Y_m]$ nepřijímá S. Nyní sestrojíme množinu X_{m+1}, která určuje $b_{m+1} = \min X_{m+1}$ a $Y_{m+1} = X_{m+1} - \{b_{m+1}\}$.

Víme, že ke každému $t \subseteq \{b_0, \ldots, b_m\}$ existuje podmnožina $Z_t \subseteq Y_m$ tak, že $[s \cup t, Z_t]$ slabě odmítá S. Postupně probíráme všechny množiny t, je jich 2^{m+1}, a konstruujeme nerostoucí posloupnost množin $Z_t \subseteq Y_m$. Využíváme přitom indukčního předpokladu a toho, že nepřijímání a slabé odmítání se zachovává při přechodu k menší množině. Poslední z množin Z_t označíme X_{m+1}. Máme zaručeno, že pro libovolné $t \subseteq \{b_0, \ldots, b_m\}$ množina $[s \cup t, X_{m+1}]$ slabě odmítá S. Odtud plyne, že pro kterékoli $r \subseteq \{b_0, \ldots, b_{m+1}\}$ množina $[s \cup r, Y_{m+1}]$ nepřijímá S.

Takto získáme nekonečnou množinu $B = \{b_i : i < \omega\}$. Je zřejmé, že $s < B$ a $B \subseteq A$. Ověříme, že $[s, B]$ odmítá S. Nechť t je libovolná konečná podmnožina B. Je-li $t = 0$, pak $[s, B]$ nepřijímá S, protože $[s, A]$ nepřijímá S. Předpokládejme $t \neq 0$ a nechť b_m je největší prvek v t. Potom $t \subseteq \{b_0, \ldots, b_m\}$ a z předchozí konstrukce plyne, že $[s \cup t, X_{m+1}]$ nepřijímá S. To znamená, že $[s \cup t, (B > t)]$ také nepřijímá S, protože $B(>t) \subseteq X_{m+1}$. Dokázali jsme, že $[s, B]$ odmítá S.

Následující tvrzení zesiluje pozorování z příkladu 4.31.

4.34 Lemma. *Pro libovolný podsystém $E_0 \subseteq \mathscr{E}$ Ellentuckova systému je množina $S = \bigcup\{[t, x] : [t, x] \in E_0\}$ ramseyovská.*

Speciálně, každá otevřená množina prostoru $[\omega]^\omega$ leží v $\mathscr{R}$.

Důkaz. Vezměme libovolnou množinu $[s, A] \in \mathscr{E}$. Pokud $[s, A]$ přijímá S, je dobře. Předpokládejme, že $[s, A]$ nepřijímá S. Podle 4.33 existuje $B \subseteq A$ takové, že $[s, B]$ odmítá S. Ukážeme, že $[s, B] \cap S = 0$. Předpokládejme naopak, že průnik je neprázdný. Pak je neprázdný průnik $[s, B] \cap [t, X]$ pro nějaké $[t, X] \in E_0$. To ovšem znamená, že $C = X \cap B$ je nekonečné a $t - s \subseteq B$. Odtud plyne $[s \cup t, C] \subseteq [t, X]$ a to je ve sporu s předpokladem, že $[s, B]$ odmítá S a $[t, X] \subseteq S$. Průnik je tedy prázdný a S je ramseyovská množina.

Víme, že každá otevřená množina $[s]$ z báze klasické topologie je v $\mathscr{E}$. Libovolná otevřená množina prostoru $[\omega]^\omega$ je sjednocením nějakého systému množin z báze a z dokázaného lemmatu plyne, že je ramseyovská.

4.35 Lemma. *Ramseyovské množiny tvoří σ-úplnou algebru množin.*

Důkaz. Víme, že systém $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}([\omega]^\omega)$ je uzavřený na doplňky, proto stačí ověřit, že je uzavřený na sjednocení spočetných podsystémů. Nechť $\{S_i : i < \omega\} \subseteq \mathscr{R}$ a položme

$$S = \bigcup_{i<\omega} S_i .$$

Uvažujme libovolné $[s, A] \in \mathscr{E}$. Pokud $[s, A]$ přijímá S, není co dokazovat. Předpokládejme, že $[s, A]$ nepřijímá S, a vezměme $X \subseteq A$ podle 4.33 takové, že $[s, X]$ odmítá S.

Chceme sestrojit množinu $B \subseteq X$ takovou, že $[s, B] \cap S = 0$. Postupujeme podobně jako v důkazu 4.33. Víme, že $[s, X]$ odmítá S_0. Protože S_0 je ramseyovská, existuje $B_0 \subseteq X$ takové, že $[s, B_0] \cap S_0 = 0$. Položme $b_0 = \min B_0$ a $X_1 = B_0 - \{b_0\}$. Je zřejmé, že $[s, X_1]$ a $[s \cup \{b_0\}, X_1]$ jsou podmnožiny množiny $[s, X]$, a proto obě odmítají S_1.

Máme-li zkonstruovány prvky $b_0 < b_1 < \ldots < b_m$ a množiny $B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_m$ a $X_{m+1} = B_m - \{b_m\}$, pak pro každé $t \subseteq \{b_0, \ldots, b_m\}$ množina $[s \cup t, X_{m+1}]$ odmítá S, a tedy také odmítá S_{m+1}. Podobně jako ve 4.33 nalezneme $B_{m+1} \subseteq X_{m+1}$ takové, že platí

$$[s \cup t, B_{m+1}] \cap S_{m+1} = 0$$

pro každé $t \subseteq \{b_0, \ldots, b_m\}$, a položíme $b_{m+1} = \min B_{m+1}$. Tímto způsobem získáme množinu $B = \{b_i : i < \omega\}$ a klesající systém množin $\{B_i : i < \omega\}$. Zbývá ověřit $[s, B] \cap S = 0$. Kdyby pro nějaké m existovalo $Y \in [s, B] \cap S_m$, potom pro $t = Y \cap \{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$ platí

$$Y \in [s \cup t : B(> b_{m-1})] \subseteq [s \cup t, B_m],$$

ale na pravé straně inkluze je množina disjunktní s S_m — spor.

4.36 Důsledek. *Každá borelovská množina prostoru $[\omega]^\omega$ s klasickou topologií je ramseyovská.*

4.37 *Důkaz Galvinovy–Prikryho věty.* Předpokládejme, že

$$[\omega]^\omega = S_0 \cup \ldots \cup S_{k-1}$$

je rozklad sestávající z ramseyovských množin. Hledáme nekonečnou množinu $A \subseteq \omega$ takovou, že pro nějaké $i < k$ je $[A]^\omega \subseteq S_i$.

Vezměme libovolné nekonečné $B_0 \subseteq \omega$. Pokud $[0, B_0]$ přijímá S_0, A bude taková podmnožina B_0, pro kterou platí $[0, A] \subseteq S_0$. Přitom $[0, A] = [A]^\omega$, tedy $[A]^\omega \subseteq S_0$. Jestliže $[0, B_0]$ nepřijímá S_0, potom existuje $B_1 \subseteq B_0$ takové, že $[0, B_1] \cap S_0 = 0$, protože S_0 je ramseyovská. To znamená, že $[0, B_1] \subseteq S_1 \cup \ldots \cup S_{k-1}$, a můžeme opakovat úvahu s B_1 a S_1 namísto B_0 a S_0. Nakonec nalezneme $i < k$ takové, že $[0, B_i]$ přijímá S_i, a tedy pro nějaké $A \subseteq B_i$ je $[A]^\omega \subseteq S_i$.

Následující tvrzení využijeme, až se budeme zabývat Fraissého domněnkou.

4.38 Věta. *Pro libovolné $A \in [\omega]^\omega$ a pro libovolný spočetný soubor $\langle S_i : i < \omega \rangle$ ramseyovských množin, který pokrývá množinu $[A]^\omega$, tedy takový, že*

$$[A]^\omega \subseteq \bigcup_{i<\omega} S_i,$$

existuje nekonečná množina $B \subseteq A$ taková, že pro každé $i < \omega$ je $[B]^\omega \cap S_i$ otevřená množina (dokonce sjednocení konečně mnoha bázových množin) podprostoru $[B]^\omega$.
Důkaz je obdobou důkazu lemmatu 4.35. Množinu B konstruujeme rekurzí. Položíme $B_0 = A$. Předpokládejme, že jsme již definovali B_i. Potom položíme $b_i = \min B_i$ a B_{i+1} zvolíme tak, že $B_{i+1} \subseteq B_i(>b_i)$ a pro každé $t \subseteq \{b_0, \dots, b_i\}$ platí buď $[t, B_{i+1}] \subseteq S_i$, nebo $[t, B_{i+1}] \cap S_i = 0$. Potom $B = \{b_i : i < \omega\}$ je hledaná množina, protože pro libovolné $X \in [B]^\omega$ platí $X \in S_i$, právě když $[t, B_{i+1}] \subseteq S_i$ pro $t = X \cap \{b_0, \dots, b_i\}$.

4.39 Ellentuckova topologie. Víme, že každá borelovská množina prostoru $[\omega]^\omega$ s klasickou topologií je ramseyovská. Opačná implikace neplatí, systém ramseyovských množin je větší.

Nejprve ukážeme topologickou charakterizaci ramseyovských množin. Množiny z Ellentuckova systému $\mathscr{E}$ jsou základními příklady ramseyovských množin. Navíc, průnik dvou množin z Ellentuckova systému je buď prázdný, nebo obsahuje nějakou množinu z $\mathscr{E}$. To znamená, že $\mathscr{E}$ tvoří bázi nějaké topologie na množině $[\omega]^\omega$, kterou budeme nazývat *Ellentuckovou topologií.* Je zřejmé, že Ellentuckova topologie je jemnější než klasická topologie.

Budeme používat pojmy řídké a hubené množiny a množiny s Baireovou vlastností, které jsou zavedeny v 1.29 IV. kapitoly.

4.40 Věta (Ellentuck 1974). *Předpokládáme, že $[\omega]^\omega$ je prostor s Ellentuckovou topologií. Množina $S \subseteq [\omega]^\omega$ je ramseyovská, právě když má Baireovu vlastnost.*
Důkaz. Nejprve ověříme, že množina, která má Baireovu vlastnost, je ramseyovská. Z lemmatu 4.34 plyne, že každá otevřená množina v Ellentuckově topologii je ramseyovská. Nechť S je řídká množina. Potom množina $[\omega]^\omega - \mathrm{cl}(S)$ je otevřená a hustá, tedy ramseyovská. Systém $\mathscr{R}$ je uzavřen na doplňky, proto také $\mathrm{cl}(S) \in \mathscr{R}$. Jelikož $\mathrm{cl}(S)$ je řídká a ramseyovská množina, pro každé $[s, A] \in \mathscr{E}$ existuje $B \subseteq A$ takové, že $[s, B] \cap \mathrm{cl}(S) = 0$. Pro stejné B platí také $[s, B] \cap S = 0$, tedy $S \in \mathscr{R}$. Podle 4.35 je $\mathscr{R}$ σ-úplná algebra množin, proto i každá hubená množina je v $\mathscr{R}$. Odtud plyne, že každá množina $S = U \triangle H$, která je symetrickým rozdílem otevřené a hubené množiny, je ramseyovská. Tím jsme dokázali, že každá množina s Baireovou vlastností leží v $\mathscr{R}$.

Na druhou stranu předpokládejme, že S je ramseyovská množina. Potom $S_1 = S - \mathrm{Int}(S) \in \mathscr{R}$, protože $\mathscr{R}$ je algebra množin a otevřená množina $\mathrm{Int}(S) \in \mathscr{R}$. Tedy pro libovolné $[s, A] \in \mathscr{E}$ existuje $B \subseteq A$ takové, že $[s, B] \cap S_1 = 0$ nebo $[s, B] \subseteq S_1$. Druhá možnost nemůže nastat, protože $S_1 \subseteq S$ a S_1 je disjunktní s $\mathrm{Int}(S)$. Odtud plyne, že S_1 je řídká množina, a tedy $S = \mathrm{Int}(S) \cup S_1$ má Baireovu vlastnost.

4.41 Ramseyovské množiny a projektivní hierarchie. Povšimneme si vztahu mezi klasickou topologií a projektivní hierarchií množin Cantorova diskontinua a ramseyovskými množinami. Připomeňme dva klasické výsledky deskriptivní teorie množin, které lze nalézt v knize K. Kuratowského Topologie (1958).

(i) Množiny s Baireovou vlastností libovolného topologického prostoru jsou uzavřeny na Suslinovu operaci.

(ii) Každou analytickou podmnožinu Cantorova diskontinua získáme Suslinovou operací z nějakého systému uzavřených množin.

Podle (i) a věty 4.40 jsou ramseyovské množiny uzavřeny na Suslinovu operaci, a proto každá analytická množina je ramseyovská.

4.42 Důsledek (Silver). *σ-úplná algebra množin Cantorova diskontinua generovaná analytickými množinami je obsažena v $\mathcal{R}$.*

Silver ukázal, že za dodatečných množinových předpokladů (Martinův axiom a $2^{\omega} > \omega_1$) lze uvedený výsledek rozšířit na další dva stupně projektivní hierarchie: všechny spojité obrazy doplňků analytických množin, tedy všechny PCA $(=\Sigma_2^1)$ množiny, jsou ramseyovské.

Podle 4.23 nemohou být všechny podmnožiny $[\omega]^{\omega}$ ramseyovské, platí-li axiom výběru. Mathias (1977) ukázal, že v Solovayově modelu ZF, ve kterém platí slabší forma axiomu výběru (axiom závislých výběrů) a ve kterém je každá množina reálných čísel lebesgueovsky měřitelná, jsou všechny podmnožiny prostoru $[\omega]^{\omega}$ ramseyovské.

4.43 Kvaziuspořádání třídy lineárně uspořádaných množin. Znovu se vrátíme k porovnávání lineárně uspořádaných množin. Připomeňme označení z § 3. Jsou-li L, M lineárně uspořádané množiny, píšeme $L \leq M$, jestliže L lze izomorfně vnořit do M. Jestliže $L \leq M$ a M nelze vnořit do L, píšeme $L < M$. Je zřejmé, že $\leq$ je reflexivní a tranzitivní relace na třídě všech lineárně uspořádaných množin. Z § 3 víme, že tato relace není uspořádaním, protože není slabě antisymetrická. Každou reflexivní a tranzitivní relaci nazveme *kvaziuspořádáním*. Relace vnořitelnosti $\leq$ je tedy kvaziuspořádaní na třídě všech lineárně uspořádaných množin. V roce 1948 vyslovil R. Fraissé následující domněnku o spočetných lineárně uspořádaných množinách.

4.44 Fraissého domněnka. *Mezi spočetnými lineárně uspořádanými množinami se nenalezne nekonečně mnoho takových, které by byly vzájemně neporovnatelné vzhledem k relaci vnořitelnosti nebo tvořily ostře klesající řetězec.*

Třída všech nespočetných lineárních uspořádání nemůže mít stejnou vlastnost, jak plyne z 3.12.

Každou spočetnou lineárně uspořádanou množinu lze vnořit do množiny racionálních čísel. Pro Fraissého domněnku jsou proto podstatné jen spočetné lineárně uspořádané množiny, které neobsahují kopii množiny racionálních čísel.

4.45 Definice. Rozptýlené lineární uspořádání. Říkáme, že lineárně uspořádaná množina je rozptýlená, jestliže neobsahuje hustě uspořádanou podmnožinu.

Všechny dobře uspořádané množiny jsou rozptýlené.

Fraissého domněnka nás vede k pojmu dobrého kvaziuspořádání, které je zobecněním dobrého uspořádání.

4.46 Definice. Dobré kvaziuspořádání. Říkáme, že *kvaziuspořádání* na třídě Q je *dobré*, jestliže v Q neexistuje spočetný ostře klesající řetězec ani spočetný antiřetězec.

Fraissého domněnka je ekvivalentní s tvrzením, že relace vnořitelnosti je dobré kvaziuspořádání na třídě všech spočetných lineárně uspořádaných množin. Fraissého domněnku dokázal R. Laver v roce 1969. Navíc ukázal, že domněnka platí pro třídu všech rozptýlených lineárních uspořádání.

4.47 Věta (Laver 1971). *Relace vnořitelnosti je dobré kvaziuspořádání na třídě všech rozptýlených lineárně uspořádaných množin.*

Dříve než dokážeme Laverovu větu, seznámíme se blíže s pojmy a vlastnostmi dobrého a lepšího kvaziuspořádání. Zda je kvaziuspořádání na nějaké třídě dobré, se pozná na jejích nekonečných podmnožinách. Není proto na úkor obecnosti, když se omezíme na dobře kvaziuspořádané množiny.

Z Ramseyovy věty dostaneme následující charakterizaci dobře kvaziuspořádaných množin.

4.48 Lemma. *Pro kvaziuspořádanou množinu* $\langle Q, \leq \rangle$ *jsou následující podmínky ekvivalentní*:

(i) $\leq$ *je dobré kvaziuspořádání,*

(ii) *v* Q *neexistuje nekonečný antiřetězec a odvozená relace* $<$ *je fundovaná na* Q, *přitom* $x < y \leftrightarrow x \leq y \,\&\, \neg\, y \leq x$,

(iii) *každá podmnožina* $X \subseteq Q$ *má konečnou bázi* $Y \subseteq X$, *to znamená, že pro každé* $x \in X$ *existuje* $y \in Y$ *takové, že* $y \leq x$,

(iv) *pro každou posloupnost* $f\colon \omega \to Q$ *existují přirozená* i, j *tak, že* $i < j$ *a* $f(i) \leq f(j)$,

(v) *pro každou posloupnost* $f\colon \omega \to Q$ *existuje nekonečná množina* $A \subseteq \omega$ *taková, že pro každé* $i, j \in A$, *jakmile* $i < j$, *pak* $f(i) \leq f(j)$.

Důkaz. Z (i) plyne (ii), stačí si uvědomit, že relace je fundovaná, právě když neexistuje nekonečný klesající řetězec.

Platí-li (ii), pro $X \subseteq Q$ vezměme množinu Y' všech prvků z X minimálních vzhledem k relaci $<$. Z fundovanosti relace $<$ plyne, že Y' je báze pro X. Nechť množina $Y \subseteq Y'$ je libovolný maximální antiřetězec vzhledem k $\leq$, proto je konečná. Dokázali jsme (ii) $\to$ (iii). Pro nekonečný antiřetězec ani nekonečný klesající řetězec nemůže platit (iii), tedy z (iii) plyne (i).

Je zřejmé, že z (v) plyne (iv) a z (iv) plyne (i). Zbývá dokázat (i) → (v).

Nechť $f\colon \omega \to Q$. Definujme obarvení $\varphi\colon [\omega]^2 \to 3$ tak, že pro $i < j$ položíme

$$\varphi(\{i,j\}) = \begin{cases} 0, & f(i) \le f(j), \\ 1, & \text{je-li } f(i) \text{ a } f(j) \text{ neporovnatelné}, \\ 2, & f(i) > f(j). \end{cases}$$

Nechť A je nekonečná homogenní množina pro φ. Podle (i) množina $[A]^2$ musí mít barvu 0.

4.49 Důsledek. (i) *Každá podmnožina a každý homomorfní obraz dobře kvaziuspořádané množiny je dobře kvaziuspořádaná množina.*

(ii) *Jsou-li* $\langle Q_1, \le_1\rangle$, $\langle Q_2, \le_2\rangle$ *dobře kvaziuspořádané množiny, potom jejich kartézský součin* $\langle Q_1 \times Q_2, \le\rangle$, *kde*

$$\langle x, u\rangle \le \langle y, v\rangle \leftrightarrow x \le_1 y \;\&\; u \le_2 v,$$

je dobře kvaziuspořádaný.

4.50 Špatné posloupnosti. Uvažujeme kvaziuspořádanou množinu Q. Říkáme, že *posloupnost* $f\colon \omega \to Q$ je *špatná*, jestliže pro libovolná přirozená i, j platí

$$i < j \to f(i) \not\le f(j).$$

V opačném případě říkáme, že *posloupnost* je *dobrá*. Tedy Q je dobře kvaziuspořádaná množina, právě když v Q neexistuje špatná posloupnost. Je proto užitečné seznámit se s chováním špatných posloupností.

Říkáme, že špatná posloupnost f je *minimální*, jestliže každá posloupnost g, pro kterou platí

$$(22) \qquad (\forall i)(\exists j)(g(i) \le f(j)) \quad \text{a} \quad (\exists i)(\exists j)(g(i) < f(j)),$$

je dobrá.

Je-li f špatná posloupnost, je zřejmé, že každá její nekonečná podposloupnost je také špatná. Je-li f minimální, totéž platí pro každou její podposloupnost. Navíc všechny členy špatné minimální posloupnosti jsou vzájemně neporovnatelné.

4.51 Lemma. *Je-li f minimální špatná posloupnost v Q, potom podmnožina* $Q_0 = \{q \in Q\colon (\exists i)(q < f(i))\}$ *je dobře kvaziuspořádaná.*

Důkaz. Je-li g libovolná posloupnost v Q_0, pak g splňuje (22), a proto je dobrá.

4.52 Lemma. *Předpokládejme, že Q není dobře kvaziuspořádaná a že odvozená relace $<$ je fundovaná. Potom v Q existuje minimální špatná posloupnost.*

Důkaz. Rekurzí sestrojíme minimální špatnou posloupnost. Nechť $f(0)$ je (vzhledem k $<$) minimální prvek z množiny všech počátečních členů špatných posloupností. Dále uvažujme všechny špatné posloupnosti, které začínají s $f(0)$. Nechť $f(1)$ je minimální ze všech druhých členů takových posloupností. Je zřejmé, že $f(1)$ je nesrovnatelné s $f(0)$. Takto sestrojíme celou posloupnost f, která je špatná, protože každý její počáteční úsek je částí nějaké špatné posloupnosti. Navíc členy posloupnosti f jsou vzájemně nesrovnatelné.

Ukážeme, že f je minimální. Předpokládejme, že existuje špatná posloupnost g, pro kterou platí (22). Můžeme hned předpokládat, že $g(0) < f(j)$ pro nějaké j, jinak vynecháme vhodný počáteční úsek posloupnosti g. Ukážeme, že existuje špatná posloupnost h taková, že $h \mid j = f \mid j$ a $h(j) = g(0) < f(j)$. To je ve sporu s volbou $f(j)$.

Nejprve si všimněme, že jen konečně mnoho členů posloupnosti g splňuje nerovnosti $f(i) \leq g(k) \leq f(i)$ pro nějaké $i < j$ a že $g(0)$ k nim nepatří. Všechny takové členy z g vypustíme a položíme

$$h = f(0), f(1), \ldots, f(j-1), g(0), g(1), \ldots$$

Kdyby pro nějaké $i < j$ a k platilo $f(i) \leq g(k)$, z (22) dostáváme $f(i) \leq g(k) \leq f(l)$ pro nějaké l. Odtud $i = l$, protože různé členy posloupnosti f jsou nesrovnatelné. Taková $g(k)$ jsme z g vypustili. Tedy h je špatná posloupnost. Dokázali jsme, že posloupnost f je minimální.

4.53 Kvaziuspořádání konečných posloupností. Nechť Q je kvaziuspořádaná množina. Na množině ${}^{<\omega}Q$ všech konečných posloupností prvků z Q definujeme kvaziuspořádání $\leq$ předpisem

(23) $s \leq t$, právě když t má alespoň takovou délku jako s, tedy $\mathrm{Dom}(s) \leq \mathrm{Dom}(t)$, a existuje prosté rostoucí zobrazení $H\colon \mathrm{Dom}(s) \to \mathrm{Dom}(t)$ takové, že pro každé $i < \mathrm{Dom}(s)$ platí $s(i) \leq t(H(i))$.

4.54 Věta (Higman 1952). *Je-li Q dobře kvaziuspořádaná množina, potom relace* (23) *je dobré kvaziuspořádání množiny ${}^{<\omega}Q$.*

Důkaz. Podle 4.49(ii) je kartézský součin konečně mnoha dobře kvaziuspořádaných množin opět dobře kvaziuspořádaná množina. Odtud plyne, že relace $<$ odvozená z (23) je fundovaná na ${}^{<\omega}Q$. Předpokládejme, že $\leq$ není dobrým kvaziuspořádáním. Podle 4.52 existuje minimální špatná posloupnost f. Je zřejmé, že pro každé i je $f(i)$ neprázdná posloupnost v Q. Můžeme proto každou konečnou posloupnost $f(i)$ jednoznačně vyjádřit jako zřetězení $f(i) = g(i)\,x_i$, kde $g(i)$ je počáteční úsek a x_i poslední prvek posloupnosti $f(i)$. Je zřejmé, že každé $g(i)$ patří do množiny $Q' = \{a \in {}^{<\omega}Q : (\exists i)(a < f(i))\}$. Podle 4.51 je Q' dobře kvaziuspořádaná relací $\leq$, a proto i kartézský součin $Q' \times Q$ je dobře kvaziuspořádaný. Přitom f je posloupnost v $Q' \times Q$ a je špatná – spor.

4.55 Příklady. (a) Uvažujme všechna konečná slova nad konečnou abecedou A, to znamená množinu všech konečných posloupností prvků z A. Uvědomme si, že identita je dobré kvaziuspořádání množiny A. Podle Higmanovy věty má každá množina slov S konečnou bázi $S_0 \subseteq S$ vzhledem k relaci (23). To znamená, že pro každé slovo $s \in S$ existuje $t \in S_0$ takové, že všechny symboly slova t najdeme v s ve stejném pořadí (nemusí však být bezprostředně za sebou).

(b) Dělitelnost je kvaziuspořádání. Relace dělitelnosti je (kvazi)uspořádání na ω. Není dobré, protože prvočísla tvoří nekonečný antiřetězec.

Je-li $X \subseteq \omega$ dobře kvaziuspořádaná relací dělitelnosti, podle Higmanovy věty je množina $S(X)$ všech konečných součinů přirozených čísel z X také dobře kvaziuspořádaná.

(c) Na množině

$$K = \bigcup_{n<\omega} {}^n n$$

uvažujme *Kruskalovo kvaziuspořádání* definované předpisem $f \leq_K g$, právě když existuje rostoucí zobrazení $H: \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Dom}(g)$ takové, že pro každé $i, j < \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$f(i) < f(j) \leftrightarrow g(H(i)) < g(H(j)) .$$

Toto není dobré kvaziuspořádání ani na K, ani na podmnožině

$$S = \bigcup_{n<\omega} S_n$$

konečných permutací, kde S_n je grupa všech permutací na n.

Definujeme-li pro každé m permutaci $f_m \in S_{2m+2}$ tak, že

$$\begin{aligned} f_m(2j) &= 2j + 1 && \text{pro } 0 \leq j \leq m, \\ f_m(2j+1) &= 2j - 2 && \text{pro } 1 \leq j \leq m, \\ f_m(1) &= 2m, \end{aligned}$$

pak $\langle f_m : m < \omega \rangle$ je špatná posloupnost v S.

(d) (Laver 1976). Nechť C_n je množina všech zobrazení $f: n \to n$ takových, že pro každé $i < n$ je $f(i) \equiv m \,.\, i (\mathrm{mod}\, n)$, kde $m \leq n$ je nějaké pevné číslo.

Uvědomme si, že pro $n > 0$ je $|C_n| = n$ a $f \in C_n$ je permutace, právě když m a n jsou nesoudělná.

Kruskalovo kvaziuspořádání množiny $\bigcup_{n<\omega} C_n$ je dobré.

4.56 Lepší kvaziuspořádání. Ukázali jsme, že dobré kvaziuspořádání na nějaké třídě Q určuje dobré kvaziuspořádání (23) všech konečných posloupností prvků z Q. Podobným způsobem však nemusíme získat dobré kvaziuspořádání nekonečných posloupností. K tomu je třeba, aby Q mělo lepší vlastnosti, které se nejlépe vysloví pomocí topologických pojmů. V dalším uvažujeme kvaziuspořádanou třídu Q jako topologický prostor s diskrétní topologií a množinu $[A]^\omega$, pro nekonečné $A \subseteq \omega$, jako topologický podprostor prostoru $[\omega]^\omega$ s klasickou topologií.

Místo posloupností v Q budeme pracovat se zobrazeními $b: [A]^\omega \to Q$, kterým budeme říkat bloky.

4.57 Definice. Každé spojité zobrazen $b\colon [A]^{\omega} \to Q$ nazýváme *blokem* v Q.
Říkáme, že b je *špatný blok*, jestliže pro každé $X \in [A]^{\omega}$ platí

$$b(X) \nleq b(X - \{\min X\}).$$

4.58 Bloky a posloupnosti. Všimněme si, že každý blok s definičním oborem $[A]^{\omega}$ určuje nejvýše spočetný rozklad množiny $[A]^{\omega}$ na otevřené množiny. Snadno se nahlédne, že libovolná posloupnost $f\colon \omega \to Q$ určuje blok $b\colon [\omega]^{\omega} \to Q$ takový, že $b(X) = f(\min X)$ pro každé nekonečné $X \subseteq \omega$.

Stejnou úlohu, jakou měla Ramseyova věta pro posloupnosti, bude mít Galvinova–Prikryho věta pro bloky: je-li $b\colon [A]^{\omega} \to Q$ blok, pak existuje nekonečná podmnožina $B \subseteq A$ taková, že buď zúžení b na $[B]^{\omega}$ je špatný blok, nebo pro každé $X \in [B]^{\omega}$ platí $b(X) \leq b(X - \{\min X\})$.

4.59 Definice. Lepší kvaziuspořádání. Říkáme, že *kvaziuspořádání* $\leq$ třídy Q je *lepší*, jestliže žádný blok v Q není špatný.

Pojem lepšího kvaziuspořádání zavedl Nash-Williams (1965). Ukážeme, že je zesílením pojmu dobrého kvaziuspořádání.

4.60 Lemma. *Každé lepší kvaziuspořádání je dobré.*

Důkaz. Nechť $\leq$ je lepší kvaziuspořádání na Q a nechť f je libovolná posloupnost v Q. Definujeme blok b tak, že pro každé nekonečné $X \subseteq \omega$ položíme $b(X) = f(\min X)$. Podle předpokladu existuje nekonečné $Y \subseteq \omega$ takové, že $b(Y) \leq b(Y - \{\min Y\})$, tedy pro $i = \min Y$ a $j = \min(Y - \min\{Y\})$ platí $i < j$ a $f(i) \leq f(j)$, proto f je dobrá posloupnost.

4.61 Příklady. (a) Každé dobré uspořádání je lepší kvaziuspořádání.

(b) *Dobré kvaziuspořádání, které není lepší.* Nechť $Q_0 = \{\langle i,j\rangle\colon i < j < \omega\}$ a nechť $\leq$ je uspořádání na Q_0 definované vztahem

$$\langle i,j\rangle \leq \langle k,l\rangle \leftrightarrow (i = k \quad \text{a} \quad j \leq l) \text{ nebo } j < k\,.$$

Ověříme, že $\leq$ je dobré kvaziuspořádání. Nechť $\langle a_n\colon n < \omega\rangle$ je prostá posloupnost v Q_0. Pokud existuje nekonečně mnoho a_n se stejnou první složkou, pak mezi nimi nalezneme a_m, a_n taková, že $m < n$ a $a_m \leq a_n$. Existuje-li pouze konečně mnoho a_n se stejnou první složkou, pak pro nějaká $m < n$ platí $(a_m)_2 < (a_n)_1$, kde $(a_m)_2$ je druhý a $(a_n)_1$ je první člen uspořádané dvojice. Odtud dostáváme opět $a_m \leq a_n$.

Pro libovolné nekonečné $X \subseteq \omega$ položme $b(X) = \langle x_0, x_1\rangle$, kde x_0, x_1 jsou první dva prvky množiny X. Je zřejmé, že b je špatný blok v Q_0. Tedy $\leq$ není lepší kvaziuspořádání.

Snadno se ověří, že kvaziuspořádání (24) množiny nekonečných posloupností ${}^{\omega}Q_0$ není dobré.

4.62 Kvaziuspořádání transfinitních posloupností. Pro kvaziuspořádanou třídu Q označme

$$\mathrm{Seq}(Q) = \bigcup_{\alpha \in On} {}^{\alpha}Q$$

třídu všech transfinitních posloupností prvků z Q. Podobně jako na konečných posloupnostech definujeme kvaziuspořádání $\leq$ na třídě $\mathrm{Seq}(Q)$ tak, že

(24) $s \leq t$, právě když existuje rostoucí zobrazení $H: \mathrm{Dom}(s) \to \mathrm{Dom}(t)$ takové, že pro každé $\xi \in \mathrm{Dom}(s)$ platí $s(\xi) \leq t(H(\xi))$ v Q.

Chceme dokázat, že kvaziuspořádání (24) třídy $\mathrm{Seq}(Q)$ je dobré, je-li výchozí kvaziuspořádání na Q lepší. K tomu použijeme minimální špatné bloky.

4.63 Lemma (Simpson 1984). *Nechť $\leq$ je kvaziuspořádání na Q. Předpokládejme, že $\prec$ je uspořádání na Q, které je fundované a pro libovolné $x, y \in Q$ z $x \prec y$ plyne $x \leq y$. Potom pro libovolný špatný blok $b: [B]^{\omega} \to Q$ existuje špatný blok $c: [C]^{\omega} \to Q$ takový, že*

(i) *$C \subseteq B$ a $c(X) \preccurlyeq b(X)$ pro každé $X \in [C]^{\omega}$,*

(ii) *neexistuje špatný blok d definovaný na $[D]^{\omega}$ takový, že $D \subseteq C$ a pro každé $Y \subseteq D$ je $d(Y) \prec c(Y)$.*

Říkáme, že c je minimální špatný blok pod b vzhledem k uspořádání $\prec$.

Důkaz. Předpokládejme, že pod špatným blokem b neexistuje žádný minimální špatný blok. Za tohoto předpokladu sestrojíme nespočetnou posloupnost špatných bloků $b_{\alpha}: [B_{\alpha}]^{\omega} \to Q$ pro $\alpha < \omega_1$ tak, že pro $\beta < \gamma < \omega_1$ platí

(25) $B_{\beta} \subseteq B$ a $B_{\gamma} - B_{\beta}$ je konečné, to znamená, že B_{γ} je až na konečně mnoho prvků podmnožinou B_{β},

(26) pro všechna $X \in [B_{\beta} \cap B_{\gamma}]^{\omega}$ je $b_{\gamma}(X) \prec b_{\beta}(X)$.

Z (25) plyne, že $\langle B_{\alpha}: \alpha < \omega_1 \rangle$ je nespočetný uniformně centrovaný systém na ω. V závěru důkazu ukážeme, že existuje rostoucí posloupnost $\langle \alpha_n: n < \omega \rangle$ spočetných ordinálních čísel taková, že množina $Z = \bigcap \{B_{\alpha_n}: n \in \omega\}$ je nekonečná. Odtud podle (26) plyne, že $\langle b_{\alpha_n}(Z): n < \omega \rangle$ je klesající posloupnost vzhledem k fundované relaci $\prec$, a tak dostáváme spor.

Konstruujeme rekurzí bloky b_{α}. Položíme $b_0 = b$, $B_0 = B$ a předpokládáme, že již byly sestrojeny b_{β}, B_{β} pro $\beta < \alpha$ splňující (25) a (26). Je-li $\alpha = \beta + 1$, podle předpokladu b_{β} není minimální špatný blok, a proto existuje $B_{\alpha} \subseteq B_{\beta}$ a špatný blok $b_{\alpha}: [B_{\beta}]^{\omega} \to Q$ takový, že pro každé $X \in [B_{\alpha}]^{\omega}$ je $b_{\alpha}(X) \prec b_{\beta}(X)$.

Předpokládejme, že α je limitní. Nejprve ověříme, že existuje nekonečná množina $A \subseteq B$ taková, že rozdíl $A - B_{\beta}$ je konečný pro všechna $\beta < \alpha$. Jelikož α je spočetné, soubor $\langle B_{\beta}: \beta < \alpha \rangle$ můžeme indexovat přirozenými čísly, získáme tak soubor $\langle B'_n: n < \omega \rangle$. Vybereme rostoucí posloupnost $\langle n_k: k \in \omega \rangle \subseteq B$ tak, aby pro každé k platilo $n_k \in \bigcap \{B'_i: i \leq k\}$. Potom $A = \{n_k: k \in \omega\}$ je hledaná množina. Navíc pro libovolné $X \in [A]^{\omega}$ je $\{\beta < \alpha: X \subseteq B_{\beta}\}$ konečná množina, neboť v opačném případě dostaneme spor s (26) a fundovaností relace $\prec$.

Nyní definujme $g: [A]^{\omega} \to Q$ předpisem

$$g(X) = b_\beta(X), \quad \text{kde} \quad \beta = \max\{\gamma < \alpha : X \subseteq B_\gamma\}.$$

Je zřejmé, že g nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot. Navíc, pro každé $q \in Q$ je $g^{-1}(q)$ borelovská množina v $[A]^\omega$, protože

$$X \in g^{-1}(q) \leftrightarrow (\exists \beta < \alpha)\left[X \subseteq B_\beta \mathbin{\&} X \in b_\beta^{-1}(q) \mathbin{\&} (\forall \gamma)(\beta < \gamma < \alpha \rightarrow X \notin [B_\gamma]^\omega)\right].$$

Ověříme, že pro každé $X \in [A]^\omega$ platí $g(X) \nleq g(X - \{\min X\})$. Předpokládejme, že pro nějaké X je $g(X) \leq g(X - \{\min X\})$. Potom pro nějaká $\beta, \gamma < \alpha$ je $g(X) = b_\beta(X)$ a $g(X - \{\min X\}) = b_\gamma(X - \{\min X\})$. Jelikož $X - \{\min X\} \subseteq X$ a b_β je špatný blok, platí $\beta < \gamma$. Odtud a z (26) dostáváme

$$b_\beta(X) \leq b_\gamma(X - \{\min X\}) \prec b_\beta(X - \{\min X\}),$$

neboli $b_\beta(X) \leq b_\beta(X - \{\min X\})$, a to je spor.

Můžeme říci, že g je špatné borelovské zobrazení. Je zřejmé, že pro každé $\beta < \alpha$ a každé $X \in [A \cap B_\beta]^\omega$ je $g(X) = b_\beta(X)$ nebo $g(X) \prec b_\beta(X)$. Jelikož g nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot, podle 4.38 existuje množina $A' \in [A]^\omega$ taková, že $g' = g \mid [A']^\omega$ je spojité zobrazení, a tedy špatný blok. Blok g' není minimální, proto existuje $B_\alpha \in [A']^\omega$ a špatný blok $b_\alpha : [B_\alpha]^\omega \rightarrow Q$ takový, že pro všechna $X \in [B_\alpha]^\omega$ je $b_\alpha(X) \prec g'(X) = g(X)$. Ukázali jsme jak sestrojit špatný blok b_α pro každé $\alpha < \omega_1$.

Zbývá ověřit, že pro každý uniformně centrovaný systém F na ω mohutnosti ω_1 existuje spočetný podsystém $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq F$ s nekonečným průnikem. Buď $n_0 \in \omega$ první takové n, že $|\{A \in F : n \in A\}| = \omega_1$. Zvolme $A_0 \in \{A \in F : n_0 \in \omega\} = F_0$. Dále postupujeme indukcí; buď $n_k \in A_0 \cap \ldots \cap A_{k-1}$ první takové, že $n_k > n_{k-1}$ a $|\{A \in F_{k-1} : n_k \in A\}| = \omega_1$. Položme $F_k = \{A \in F_{k-1} : n_k \in A\}$ a vybereme $A_k \in F_k$ různé od $A_0, \ldots, A_{k-1}$. Je zřejmé, že $\{n_k : k \in \omega\} \subseteq \bigcap\{A_k : k \in \omega\}$. Důkaz je úplný.

Následující tvrzení je analogie Higmanovy věty pro nekonečné posloupnosti. Použijeme ho k důkazu Laverovy věty.

4.64 Věta (Nash–Williams 1968). *Je-li třída Q lépe kvaziuspořádaná, potom třída* $\mathrm{Seq}(Q)$ *je lépe kvaziuspořádaná relací* (24).

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pokud pro $s, t \in \mathrm{Seq}(Q)$ platí $s \nleq t$, potom existuje jediný ordinál $\alpha \in \mathrm{Dom}(s)$ takový, že

(27) $$s \mid \alpha \leq t \quad \text{a} \quad s \mid (\alpha + 1) \nleq t.$$

Nechť $s \nleq t$. Rekurzí sestrojíme rostoucí ordinální funkci h tak, že $h(\xi)$ bude nejmenší $\eta < \mathrm{Dom}(t)$, pro které platí $s(\xi) \leq t(\eta)$ v Q a $h(\xi') < \eta$ pro libovolné $\xi' < \xi$. Je zřejmé, že pro nejmenší α takové, že $h(\alpha)$ není definováno, platí (27).

Předpokládejme, že kvaziuspořádání $\leq$ na $\mathrm{Seq}(Q)$ není lepší. To znamená, že existuje nějaký špatný blok b v $\mathrm{Seq}(Q)$. S pomocí lemmatu 4.63 chceme získat vhodný minimální špatný blok. K tomu definujeme uspořádání $\prec$ na $\mathrm{Seq}(Q)$ tak, že

$$s \prec t \leftrightarrow (\exists \gamma < \mathrm{Dom}(t))(s = t \mid \gamma).$$

Je zřejmé, že relace $\prec$ je fundovaná a že je částí kvaziuspořádání $\leq$. Tedy podle 4.63 pod b existuje minimální špatný blok $c\colon [A]^{\omega} \to \mathrm{Seq}(Q)$ vzhledem k $\prec$. Připomeňme, že $c(X)$ je posloupnost prvků z Q a je počátečním úsekem posloupnosti $b(X)$. Jelikož c je špatný blok, pro libovolné $X \in [A]^{\omega}$ a $Y = X - \{\min X\}$ je $c(X) \nleq c(Y)$, a proto existuje ordinál α_X takový, že platí $c(X) \mid \alpha_X \leq c(Y)$ a $c(X) \mid \alpha_X + 1 \nleq c(Y)$.

Uvažujme zobrazení $c' = \langle c(X) \mid \alpha_X \colon X \in [A]^{\omega} \rangle$. Ověříme, že c' je spojité, odtud plyne, že c' je blok. Zvolme $X \in [A]^{\omega}$. Ze spojitosti bloku c víme, že existuje konečná dolní podmnožina $x \subseteq X$ taková, že $c(X) = c(Z)$ platí pro každé $Z \in [x, A(>x)]$. Podobně pro $Y = X - \{\min X\}$ existuje dolní podmnožina $y \subseteq Y$ taková, že $c(Y) = c(T)$ pro každé $T \in [y, A(>y)]$. Označíme-li $v = x \cup y$ a $V = [v, A(>v)]$, potom V je okolí množiny X a pro každé $Z \in V$ je $c(X) = c(Z)$ a $\alpha_X = \alpha_Z$, tedy $c(X) \mid \alpha_X = c(Z) \mid \alpha_Z$. To znamená, že c' je spojité zobrazení.

Blok c' je pod c, to znamená, že $c(X) \mid \alpha_X \prec c(X)$ pro každé $X \in [A]^{\omega}$. Jelikož c je minimální, blok c' nemůže být špatný. Proto existuje nekonečné $B \subseteq A$ takové, že pro každé $X \in [B]^{\omega}$ a $Y = X - \{\min X\}$ platí $c(X) \mid \alpha_X \leq c(Y) \mid \alpha_Y$. Přitom $c(X) \mid \alpha_X + 1 \nleq c(Y)$, a tedy také $c(X) \mid \alpha_X + 1 \nleq c(Y) \mid \alpha_Y + 1$. To znamená, že $c(X)(\alpha_X) \nleq c(Y)(\alpha_Y)$ v Q. Potom zobrazení $g\colon [B]^{\omega} \to Q$, kde $q(X)$ je α_X-tý člen posloupnosti $c(X)$, je špatný blok v Q, spor. Všimněme si, že α_X-tý člen posloupnosti $c(X)$ je také členem posloupnosti $b(X)$, kde b je výchozí špatný blok v $\mathrm{Seq}(Q)$.

4.65 Rozptýlená lineární uspořádání. Podle 4.45 víme, že lineárně uspořádaná množina je rozptýlená, jestliže neobsahuje podmnožinu izomorfní s racionálními čísly. Již v roce 1908 F. Hausdorff popsal způsob, jak lze získat všechny rozptýlené lineárně uspořádané množiny. Použijeme ho v důkaze Laverovy věty.

Nechť R_0 je třída všech nejvýš jednoprvkových lineárně uspořádaných množin. Máme-li definovány třídy R_γ pro $\gamma < \beta$, pak R_β je třída všech lineárně uspořádaných množin, které jsou pro nějaké $\alpha \in On$ izomorfní buď součtu

$$L_0 + L_1 + \ldots + L_\xi + \ldots \qquad \text{pro} \quad \xi < \alpha\,,$$

nebo součtu

$$\ldots + L_\xi + \ldots + L_1 + L_0 \qquad \text{pro} \quad \xi < \alpha\,,$$

kde L_ξ jsou lineárně uspořádané množiny ze sjednocení tříd R_γ, $\gamma < \beta$. Nakonec třída R je sjednocením všech tříd R_γ pro $\gamma \in On$.

Indukcí podle γ lze ověřit, že s každým prvkem obsahuje třída R i všechny jeho podmnožiny.

4.66 Věta *R je třída všech rozptýlených lineárně uspořádaných množin.*

Důkaz. Každá dobře uspořádaná nebo inverzně dobře uspořádaná množina je rozptýlená. Odtud indukcí podle β plyne, že každé $L \in R_\beta$ je rozptýlené.

Naopak, nechť L je libovolná rozptýlená lineárně uspořádaná množina. Dokazujeme, že $L \in R$. Na L definujeme ekvivalenci $\sim$ tak, že $x \sim y$, právě když uzavřený interval s koncovými body x, y patří do R. Je-li $X \subseteq L$ třída ekvivalence, pak X je konvexní. Ověříme, že $X \in R$. Pokud v X je největší i nejmenší prvek, pak $X \in R$ podle definice relace $\sim$. Předpokládejme, že v X neexistuje největší prvek. Potom pro nějaké limitní α existuje rostoucí posloupnost $\langle x_\xi : \xi < \alpha \rangle$ prvků z X kofinální v X. Množina

$$X_1 = \bigcup \{I_\xi : \xi < \alpha\},$$

kde

$$I_\xi = \begin{cases} [x_\xi, x_{\xi+1}), & \text{je-li } \xi \text{ izolované} \\ [x_0, x_{\xi+1}) - \bigcup\{I_\eta : \eta < \xi\}, & \text{je-li } \xi \text{ limitní} \end{cases}$$

je dobře uspořádaným součtem množin z R, proto je také prvkem R. Pokud v X existuje nejmenší prvek, můžeme položit $x_0 = \min(X)$ a máme $X = X_1$. V opačném případě existuje klesající posloupnost $\langle y_\xi : \xi < \beta \rangle$ prvků z X koiniciální s X. Navíc můžeme zvolit $y_0 = x_0$. Potom $X_0 = \{x \in X : x < x_0\}$ je inverzně dobře uspořádaným součtem množin z R. Proto $X_0 \in R$ a $X = X_0 + X_1$ je také prvkem třídy R.

Ukážeme-li, že v L existuje jediná třída ekvivalence, důkaz je hotov. Snadno se ověří, že mezi různými třídami ekvivalence musí existovat ještě jiná třída ekvivalence, jinak by bylo možné obě třídy spojit. To znamená, že množina, která vybírá po jednom prvku z každé třídy ekvivalence, je hustě uspořádaná část L, a to je spor.

4.67 *Důkaz Laverovy věty* 4.47. Dokážeme silnější tvrzení: třída R je lépe kvaziuspořádaná relací vnořitelnosti, kterou budeme značit $\leq$.

Je-li $L \in R$, stupeň rozptýlení množiny L definujeme jako nejmenší β takové, že $L \in R_\beta$, a značíme ho $\mathrm{st}(L)$. Na třídě R zavedeme uspořádání $\prec$ vztahem

$$L \prec M \leftrightarrow L \leq M \ \& \ \mathrm{st}(L) < \mathrm{st}(M).$$

Předpokládejme, že třída R není lépe kvaziuspořádaná relací vnořitelnosti. Podle 4.63 existuje minimální špatný blok

$$\langle L_X : X \in [A]^\omega \rangle \tag{28}$$

vzhledem k $\prec$. Každé L_X je rozptýlená lineárně uspořádaná množina jednoho z následujících typů:

(i) dobře uspořádaný součet množin menšího stupně,
(ii) inverzně dobře uspořádaný součet množin menšího stupně,
(iii) jednobodová množina.

Podle Galvinovy–Prikryho věty můžeme předpokládat, že všechny množiny L_X jsou stejného typu. Jelikož blok (28) je špatný, typ (iii) je vyloučen. Budeme předpokládat, že všechna L_X jsou typu (i). Jsou-li typu (ii), důkaz je podobný. Tedy pro každé $X \in [A]^\omega$ je

$$L_X = \sum_{\xi < \alpha_X} L_X^\xi,$$

kde $\mathrm{st}(L_X^\xi) < \mathrm{st}(L_X)$. To znamená, že pro každé $\xi < \alpha_X$ je $L_X^\xi \prec L_X$.

Uvažujme transfinitní posloupnosti $s_X = \langle L_X^\xi : \xi < \alpha_X \rangle$. Je zřejmé, že $s = \langle s_X : X \in [A]^\omega \rangle$ je blok ve třídě $\mathrm{Seq}(R)$. Ověříme, že je špatný. V opačném případě pro nějaké $X \in [A]^\omega$ a $Y = X - \{\min X\}$ platí $s_X \leq s_Y$. To znamená, že existuje rostoucí zobrazení $H : \alpha_X \to \alpha_Y$ takové, že $L_X^\xi \leq L_Y^{H(\xi)}$ pro všechna $\xi < \alpha_X$. Odtud dostáváme $L_X \leq L_Y$ a to je spor, protože (28) je špatný blok. Dokázali jsme, že s je špatný blok.

Z důkazu věty 4.64 vyplývá, že existuje nekonečné $B \subseteq A$ a špatný blok $b : [B]^\omega \to R$ takový, že každé $b(X)$ je členem posloupnosti s_X. Jinými slovy, $b(X) = L_X^{\gamma(X)}$ pro nějaké $\gamma(X) < \alpha_X$. To znamená, že pro každé $X \in [B]^\omega$ je $L_X^{\gamma(X)} \prec L_X$, to je spor s minimalitou bloku (28). Důkaz je hotov.

4.68 Důsledek (Laver). *Třída spočetných lineárně uspořádaných množin je lépe kvaziuspořádaná relací vnořitelnosti. Tedy platí Fraissého domněnka.*

4.69 Rozklady množiny $[\varkappa]^r$ pro nespočetné $\varkappa$. Z Ramseyovy věty plyne, že pro každý konečný rozklad existuje nekonečná homogenní množina. Na druhé straně Sierpinského výsledek (12) ukazuje, že Ramseyova věta nemá přímé zobecnění pro nespočetné mohutnosti, a to ani v nejjednodušším případě, kdy barvíme dvouprvkové podmnožiny dvěma barvami. Následující tvrzení má nejblíže k zobecnění Ramseyovy věty pro nespočetné $\varkappa$ a $r = 2$.

4.70 Věta (Erdös, Dushnik a Miller 1941). *Pro každý nekonečný kardinál $\varkappa$ platí*

$$\varkappa \to (\varkappa, \omega)^2 . \tag{29}$$

Šipka (29) říká, že pro libovolné obarvení $f : [\varkappa]^2 \to \{0, 1\}$ existuje buď podmnožina $B \subseteq \varkappa$ mohutnosti $\varkappa$ homogenní v barvě 0, nebo existuje nekonečná podmnožina homogenní v barvě 1.

Důkaz. Mějme obarvení $f : [\varkappa]^2 \to 2$. Dohodneme se, že 0 je barva bílá a 1 barva černá. Pro $x \in \varkappa$ položme

$$C(x) = \{y \in \varkappa : y \neq x \;\&\; f(\{x, y\}) = 1\} .$$

To znamená, že $C(x)$ je množina těch bodů, které jsou spojeny s x černou barvou.

Nejprve ukážeme, že pokud pro každé $B \subseteq \varkappa$ mohutnosti $\varkappa$ existuje $x \in B$ takové, že $|C(x) \cap B| = \varkappa$, pak existuje spočetná množina $X \subseteq \varkappa$ homogenní pro černou barvu. Množinu $X = \{x_n : n < \omega\}$ konstruujeme rekurzí. Podle předpokladu existuje $x_0 \in \varkappa$ takové, že $B_1 = C(x_0)$ má mohutnost $\varkappa$. Dále existuje $x_1 \in B_1$, pro které má množina $B_2 = C(x_1) \cap B_1$ plnou mohutnost. Můžeme pokračovat, a tak získáme spočetnou množinu X. Je zřejmé, že X je homogenní v černé barvě.

Pokud pro obarvení f existuje spočetná homogenní množina černé barvy, není co dokazovat. V opačném případě existuje množina $B \subseteq \varkappa$ mohutnosti $\varkappa$ taková, že pro každé $x \in B$ je

(30) $$|C(x) \cap B| < \varkappa .$$

Pomocí množiny B zkonstruujeme množinu $X \subseteq B$ mohutnosti $\varkappa$ a homogenní pro bílou barvu. Je-li $\varkappa$ regulární, rekurzí pro $\alpha < \varkappa$ vybíráme prvky x_α tak, že

$$x_\alpha \in B - \bigcup_{\beta<\alpha} C(x_\beta) \cup \{x_\beta\}.$$

Z regularity $\varkappa$ a z (30) plyne, že pro každé α je

$$\left|\bigcup_{\beta<\alpha} C(x_\beta)\right| < \varkappa, \qquad \text{tedy} \quad B - \bigcup_{\beta<\alpha} C(x_\beta) \cup \{x_\beta\} \neq 0$$

a je z čeho vybírat. Takto sestrojená množina $X = \{x_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ má plnou mohutnost a je homogenní pro bílou barvu. Pro regulární $\varkappa$ je šipka (29) dokázána.

Zbývá singulární $\varkappa$. Označme $\lambda = \mathrm{cf}(\varkappa)$ a zvolme rostoucí posloupnost $\langle \varkappa(\alpha) : \alpha < \lambda \rangle$ regulárních kardinálů, která konverguje ke $\varkappa$ a $\varkappa(0) > \lambda$. Rekurzí pro $\xi < \lambda$ konstruujeme vzájemně disjunktní množiny $X_\xi \subseteq B$, $|X_\xi| = \varkappa(\xi)$ homogenní pro bílou barvu. Zvolme libovolně podmnožinu $Y_0 \subseteq B$ mohutnosti $\varkappa(0)$. Pro $\alpha < \lambda$ položme $Y_0(\alpha) = \{x \in Y_0 : |C(x) \cap B| \leq \varkappa(\alpha)\}$. Z (30) plyne

$$Y_0 = \bigcup_{\alpha<\lambda} Y_0(\alpha)$$

a jelikož $\varkappa(0)$ je regulární a větší než λ, existuje $\alpha_0 < \lambda$, pro které $|Y_0(\alpha_0)| = \varkappa(0)$. Zúžíme-li obarvení f na množinu $[Y_0(\alpha_0)]^2$, potom podle šipky (29) pro regulární kardinály existuje $X_0 \subseteq Y_0(\alpha_0)$ homogenní pro bílou barvu a $|X_0| = \varkappa(0)$. Máme-li pro nějaké $\eta < \lambda$ zkonstruovány disjunktní množiny X_ξ, $\xi < \eta$, kde $|X_\xi| = \varkappa(\xi)$, a současně ordinály $\alpha_\xi < \lambda$ takové, že pro každé $x \in X_\xi$ je $|C(x) \cap B| \leq \varkappa(\alpha_\xi)$, potom množina

$$Z_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} \bigcup_{x \in X_\xi} C(x) \cap B$$

je sjednocením méně než λ množin, které mají mohutnost menší než $\varkappa$. To znamená, že rozdíl $B - Z_\eta$ má opět mohutnost $\varkappa$ a můžeme zvolit množinu $Y_\eta \subseteq B - Z_\eta$ takovou, že $|Y_\eta| = \varkappa(\eta)$. Z množiny Y_η získáme podmnožinu $X_\eta \subseteq Y_\eta$ a ordinál α_η stejnou úvahou, jako jsme získali X_0 z Y_0. Je zřejmé, že množina

$$X = \bigcup_{\xi<\lambda} X_\xi$$

má mohutnost $\varkappa$ a je homogenní pro bílou barvu. Důkaz je hotov.

4.71 Důsledek. *Jsou-li $\leq$ a $\preccurlyeq$ dvě dobrá uspořádání nekonečné množiny X, potom existuje podmnožina $Y \subseteq X$ stejné mohutnosti jako X, na které se obě uspořádání shodují.*

Důkaz. Je-li $x, y \in X$ a $x < y$, položme

$$f(\{x, y\}) = \begin{cases} 0, & \text{jakmile} \quad x \prec y, \\ 1, & \phantom{\text{jakmile}} \quad y \prec x. \end{cases}$$

Podle (29) může pro obarvení f nastat jedna ze dvou možností. Buď existuje množina $Y \subseteq X$ stejné mohutnosti jako X, která je homogenní v barvě 0. Potom Y je hledaná množina, protože obě uspořádání jsou totožná na množině Y. Druhý případ, kdy existuje nekonečná množina $A \subseteq X$ homogenní v barvě 1, nemůže nastat. Prvních ω členů $\{a_n : n < \omega\}$ množiny A v uspořádání $\leq$ je ostře klesající nekonečná posloupnost v uspořádání $\preccurlyeq$ a to dobré uspořádání nepřipouští.

Poznamenejme, že pro $r = 3$ již šipka (29) neplatí. Je přirozené se ptát, zdali pro daný kardinál λ a přirozené číslo r existuje $\varkappa$ takové, že

$$\varkappa \to (\lambda)^r_2 .$$

Kladná odpověď plyne z věty 4.73.

4.72 Značení. Pro kardinál $\varkappa$ a přirozené číslo n definujeme $\exp^n \varkappa$ rekurzí:

$$\begin{aligned} \exp^0 \varkappa &= \varkappa , \\ \exp^{n+1} \varkappa &= 2^{\exp^n \varkappa} . \end{aligned}$$

4.73 Věta (Erdös, Rado 1956). *Pro každý nekonečný kardinál $\varkappa$ a libovolné přirozené n platí*

(31) $$(\exp^n \varkappa)^+ \to (\varkappa^+)^{n+1}_\varkappa .$$

Pro $n = 1$ dostáváme

(32) $$(2^\varkappa)^+ \to (\varkappa^+)^2_\varkappa .$$

Důkaz. Postupujeme indukcí podle n. Pro $n = 0$ jde o šipku $\varkappa^+ \to (\varkappa^+)^1_\varkappa$, která je zřejmá.

Předpokládáme, že vztah (31) platí pro n, a dokazujeme, že platí i pro $m = n + 1$. Uvažujme množinu X mohutnosti $(\exp^m \varkappa)^+$ a rozklad

$$[X]^{m+1} = \bigcup_{\alpha < \varkappa} S_\alpha .$$

Hledáme homogenní množinu $B \subseteq X$ mohutnosti $\varkappa^+$.

Zvolíme dobré uspořádání $\leq$ množiny X a sestrojíme $Z \subseteq X$, pro které platí
(i) $|Z| = (\exp^n \varkappa)^+$,
(ii) pro libovolné $u \in [Z]^m$ a libovolné prvky $b, b' \in Z$, které neleží v u, platí

$$u \cup \{b\} \in S_\alpha \leftrightarrow u \cup \{b'\} \in S_\alpha .$$

Nejprve ukážeme, jak pomocí takové množiny Z nalezneme hledanou homogenní množinu B. Položíme-li

$$S'_\alpha = \{u \in [Z]^m : (\exists b \in (Z - u))(u \cup \{b\} \in S_\alpha)\} ,$$

z (ii) plyne, že každé $u \in [Z]^m$ leží v jediném S'_α. Navíc

$$[Z]^m = \bigcup_{\alpha < \varkappa} S'_\alpha .$$

Podle indukčního předpokladu existuje homogenní množina $B \subseteq Z$ pro rozklad $\{S'_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, která má mohutnost $\varkappa^+$. Je zřejmé, že B je také homogenní pro původní rozklad $\{S_\alpha : \alpha < \varkappa\}$.

Zbývá nalézt množinu Z. Nejprve pro každé $x \in X$ zkonstruujeme prostou (konečnou nebo transfinitní) posloupnost f_x prvků z X. Má-li $x \in X$ v množině X nejvýše m předchůdců, je to nezajímavý případ a položíme $f_x = 0$. Pokud má x více než m předchůdců, prvních m členů posloupnosti f_x je právě prvních m členů množiny X. Máme-li definovány všechny členy $f_x(\xi)$ pro $\xi < \eta$, $f_x(\eta)$ bude nejmenší $y \in X$ takové, že $y < x$, y je různé od všech $f_x(\xi)$ a pro každé $u \in [\xi]^m$ množina $f_x[u] \cup \{y\}$ o $m + 1$ prvcích patří do stejné množiny S_α jako množina $f_x[u] \cup \{x\}$. Pokud takové y neexistuje, $f_x(\eta)$ není definováno a posloupnost končí. Tím jsou definovány všechny posloupnosti f_x pro $x \in X$. Uvědomme si, že x samo není členem posloupnosti f_x a navíc, je-li nějaké y členem posloupnosti f_x, potom $f_y \subset f_x$.

Je-li definiční obor nějaké posloupnosti f_x alespoň $(\exp^n \varkappa)^+$, pak

$$Z = \{f_x(\xi) : \xi < (\exp^n \varkappa)^+\}$$

je hledaná množina. Zbývá dokázat, že taková posloupnost f_x existuje. Pro každé $x \in X$ uvažujme zobrazení

$$g_x : [\mathrm{Dom}\,(f_x)]^m \to \varkappa$$

takové, že $g_x(u) = \alpha$, jestliže $f_x[u] \cup \{x\} \in S_\alpha$. Kdyby definiční obor každé posloupnosti f_x byl ordinál menší než $(\exp^n \varkappa)^+$, existovalo by nejvýše

$$\varkappa^{\exp^n \varkappa} = 2^{\exp^n \varkappa} = \exp^{n+1} \varkappa$$

různých funkcí g_x. V tom případě by existovaly dva různé prvky $x, y \in X$ takové, že $g_x = g_y$, které mají oba více než m předchůdců v X. Můžeme předpokládat, že $y < x$, a to znamená, že k posloupnosti f_x je možné přidat ještě jeden prvek, spor. Důkaz je skončen.

4.74 Příklady. (a) *Odhad mohutnosti Hausdorffova prostoru* (Hajnal, Juhász 1967). Pro každý Hausdorffův topologický prostor platí

$$|X| \leq 2^{c(X) \cdot \chi(X)}.$$

Připomeňme, že $c(X)$ je Suslinovo číslo prostoru X a $\chi(X) = \sup \{\chi(x) : x \in X\}$, kde $\chi(x)$ je nejmenší mohutnost báze filtru okolí bodu x.

Pro konečný prostor X je odhad nezajímavý, protože X je diskrétní a $|X| = c(X)$. Předpokládáme, že X je nekonečný, a položíme $\varkappa = c(X) \cdot \chi(X)$. Potom také $\varkappa$ je nekonečné a potřebujeme ověřit, že $|X| \leq 2^\varkappa$. Pro každý bod $x \in X$ zvolme soubor $\langle V_\alpha(x) : \alpha < \varkappa \rangle$ otevřených množin, které tvoří bázi okolí bodu x. Dále zvolme lineární uspořádání $\leq$ množiny X. Protože X je Hausdorffův prostor, pro libovolné $x, y \in X$ takové, že $x < y$, můžeme vybrat čísla $\alpha, \beta < \varkappa$ tak, že $V_\alpha(x) \cap V_\beta(y) = 0$. Položíme-li $f(\{x, y\}) = \langle \alpha, \beta \rangle$, získáme zobrazení $f : [X]^2 \to \varkappa \times \varkappa$, tedy obarvení množiny $[X]^2$ pomocí $\varkappa$ barev.

Předpokládejme, že $|X| > 2^{\varkappa}$. Potom z (32) plyne, že existuje dvojice $\langle\alpha, \beta\rangle$ a množina $Y \subseteq X$ mohutnosti $\varkappa^+$, která je homogenní v barvě $\langle\alpha, \beta\rangle$. Pro $x \in Y$ položme $U(x) = V_\alpha(x) \cap V_\beta(x)$. Jelikož $x \in U(x)$, je $U(x)$ neprázdná otevřená množina. Navíc pro různá $x, y \in Y$ jsou množiny $U(x)$ a $U(y)$ disjunktní. Tedy $\{U(x): x \in Y\}$ je disjunktní systém otevřených množin, který má mohutnost $\varkappa^+$. To je ve sporu s předpokladem $c(X) \leq \varkappa$.

(b) Archangelskij (1969) dokázal, že pro nekonečné kompaktní Hausdorffovy prostory platí dokonce

$$|X| \leq 2^{\chi(X)}.$$

(c) *Odhad Suslinova čísla topologického součinu.* Mějme soubor $\langle P_i : i \in I\rangle$ topologických prostorů. Připomeňme, že obvyklá topologie na součinu $P = \bigtimes\{P_i : i \in I\}$ je určena bází, která je tvořena konečnými průniky vzorů otevřených množin v prostorech P_i při projekcích na i-tou složku kartézského součinu. Každá otevřená množina z báze je tvaru $A = \bigtimes A_i$, kde $A_i = P_i$ až na konečně mnoho indexů $i \in I$, pro které A_i je nějaká otevřená podmnožina P_i. Zobecněním topologického součinu je takzvaný $\varkappa$-součin ($\varkappa$-box produkt), kde $\varkappa$ je nějaký nekonečný kardinál. Bázi $\varkappa$-součinu prostorů P_i, který budeme označovat $\bigtimes^{(\varkappa)} P_i$, tvoří všechny množiny $A = \bigtimes A_i$, kde A_i je otevřená podmnožina P_i pro každé $i \in I$, ale jen pro méně než $\varkappa$ indexů může platit $A_i \neq P_i$. Je zřejmé, že ω-součin je totéž co obvyklý topologický součin.

Je-li $\varkappa$ nekonečné kardinální číslo a Suslinovo číslo $c(P_i)$ každého prostoru je nejvýše $\varkappa$, Kurepa (1962) ukázal, že Suslinovo číslo $c(P)$ $\varkappa^+$-součinu $P = \bigtimes^{(\varkappa^+)} P_i$ je nejvýš $2^{\varkappa}$. Tvrzení lze dokázat pomocí šipky (32) z věty Erdöse a Rado.

Předpokládejme, že $c(P_i) \leq \varkappa$ pro každé $i \in I$, ale $c(P) > 2^{\varkappa}$. Existuje tedy systém S po dvou disjunktních otevřených množin prostoru P takový, že $|S| = (2^{\varkappa})^+$. Můžeme předpokládat, že všechny otevřené množiny $A \in S$ jsou z báze $\varkappa^+$-součinu P a pro každou z nich definujme množinu $I_A \subseteq I$, která sestává ze všech indexů, pro které $A_i \neq P_i$. Dostáváme soubor $\langle I_A : A \in S\rangle$ sestávající z množin mohutnosti nejvýše $\varkappa$. Podle věty 1.19 o Δ-systémech existuje množina $R \subseteq I$ mohutnosti nejvýše $\varkappa$ a podmnožina $S_0 \subseteq S$ taková, že $|S_0| = |S|$ a pro libovolné dvě různé množiny $A, B \in S_0$ platí $I_A \cap I_B = R$. Je-li $B = \bigtimes B_i$, z disjunktnosti množin A, B vyplyne, že pro nějaké $i \in R$ musí být množiny A_i a B_i disjunktní. Tedy R je neprázdná množina a $|R| \leq \varkappa$. Uvažujme obarvení $f: [S_0]^2 \to R$ takové, že $f(\{A, B\})$ je nějaký index $i \in R$, pro který $A_i \cap B_i = 0$. Podle (32) existuje podmnožina $S_1 \subseteq S_0$ mohutnosti $\varkappa^+$, která je homogenní pro f. To znamená, že existuje index $i \in R$ takový, že $f(\{A, B\}) = i$ pro všechny dvojice z $[S_1]^2$. Je zřejmé, že množiny $\{A_i : A \in S_1\}$ tvoří po dvou disjunktní systém otevřených podmnožin prostoru P_i. Dostáváme spor s předpokladem $c(P_i) \leq \varkappa$ a tvrzení je dokázáno.

4.75 Věta (Sierpinski). *Pro každý nekonečný kardinál platí*

$$2^{\varkappa} \not\to (\varkappa^+)^2,$$

tedy $(2^{\varkappa})^+$ *je nejmenší možná hodnota ve vztahu* (32).

Důkaz. Tvrzení je zobecnění vztahu (12) a má i podobný důkaz. Stačí ukázat, že pro každé $\varkappa$ existuje lineárně uspořádaná množina mohutnosti $2^\varkappa$, která nemá podmnožinu uspořádanou podle typu $\varkappa^+$ ani podmnožinu uspořádanou podle inverzního typu $(\varkappa^+)^*$. Uvažujme množinu ${}^\varkappa 2$ všech zobrazení $g: \varkappa \to 2$ s lexikografickým uspořádáním. Předpokládejme, že $\langle g_\alpha : \alpha < \varkappa^+ \rangle$ je rostoucí posloupnost délky $\varkappa^+$ v lexikografickém uspořádání. Rekurzí sestrojíme funkci $h: \varkappa \to 2$ a neklesající posloupnost $\alpha_\xi < \varkappa^+$ pro $\xi < \varkappa$ tak, že pro každé $\xi < \varkappa$ a $\beta \geq \alpha_\xi$ platí $h \mid (\xi + 1) = g_\beta \mid (\xi + 1)$. Položíme $h(0) = 0$, jestliže pro každé $\alpha < \varkappa^+$ je $g_\alpha(0) = 0$. V tom případě $\alpha_0 = 0$. Je-li $g_\alpha(0) = 1$ pro nějaké $\alpha < \varkappa^+$, pak α_0 bude nejmenší s touto vlastností a položíme $h(0) = 1$. Je zřejmé, že pro každé $\beta \geq \alpha_0$ je $g_\beta(0) = h(0)$. Předpokládejme, že již jsou sestrojeny hodnoty $h(\eta)$ a čísla α_η pro $\eta < \xi$. Nechť $\beta = \sup \{\alpha_\eta : \eta < \xi\}$. Položíme $h(\xi) = 0$, jestliže pro libovolné $\alpha \geq \beta$ je $g_\alpha(\xi) = 0$. V tom případě $\alpha_\xi = \beta$. Je-li $g_\alpha(\xi) = 1$ pro nějaké $\alpha \geq \beta$, nechť α_ξ je nejmenší s touto vlastností a $h(\xi) = 1$. Z konstrukce funkce h a regularity kardinálu $\varkappa^+$ plyne, že pro každé $\alpha > \sup \{\alpha_\xi : \xi < \varkappa\}$ je $g_\alpha = h$, spor.

Pro klesající posloupnost je důkaz stejný, pouze se vymění úloha 0 a 1.

4.76 Kanonická verze věty Erdöse a Rado. Větu 4.73 můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$(\exp^n \varkappa)^+ \to (\varkappa^+)^{n+1}_{<\varkappa^+},$$

kde dolní index $<\varkappa^+$ znamená, že připouštíme každé obarvení pomocí méně než $\varkappa^+$ barev. Z této formulace a monotónnosti šipky plyne, že pro každý nekonečný kardinál λ a přirozené $n \geq 1$ existuje kardinál $\varkappa$ takový, že platí

$$\varkappa \to (\lambda)^n_{<\lambda}. \tag{33}$$

Je-li dáno n a λ, můžeme se ptát, pro jaké nejmenší $\varkappa$ platí (33). Pro $\lambda = \omega$ máme odpověď z Ramseyovy věty $\omega \to (\omega)^n_{<\omega}$ pro každé n.

4.77 Značení. Pro nekonečný kardinál λ a nenulové n definujeme $\sigma(\lambda, n)$ tak, že

$$\sigma(\lambda, 1) = \lambda, \qquad \sigma(\lambda, 2) = 2^{<\lambda},$$
$$\sigma(\lambda, n+1) = 2^{\sigma(\lambda,n)}, \qquad \text{je-li} \quad n \geq 2.$$

Je zřejmé, že pro následník λ^+ a $n \geq 2$ platí $\sigma(\lambda^+, n) = \exp^{n-1}(\lambda)$.

4.78 Věta (Erdös, Hajnal, Rado 1965). *Pro každé nenulové n platí:*

(i) *Je-li* $\lambda = \omega$ *nebo je-li* λ *slabě kompaktní kardinál, pak* $\varkappa = \lambda$.

(ii) *Je-li* λ *nespočetný regulární kardinál, který není slabě kompaktní, pak*

$$\varkappa = \lambda \qquad \textit{pro} \quad n = 1,$$
$$\varkappa = (\sigma(\lambda, n))^+ \qquad \textit{pro} \quad n > 1.$$

(iii) *Je-li* λ *singulární kardinál, pak*

$$\varkappa = \lambda^+ \qquad \textit{pro} \quad n = 1,$$
$$\varkappa = (\sigma(\lambda^+, n))^+ \qquad \textit{pro} \quad n > 1.$$

To znamená, že $(\exp^n \varkappa)^+$ *je nejmenší možná hodnota pro* (31).

Následuje kanonická podoba věty Erdöse a Rado. Povšimněme si, že případ $\lambda = \omega$ pro libovolné n je obsažen v kanonické Ramseyově větě 4.16.

4.79 Věta (Baumgartner 1975). *Nechť $n > 0$ a nechť platí $\varkappa \to (\lambda)^n_{<\lambda}$. Nechť τ je kardinál takový, že pro každé $\mu < \lambda$ je $\tau^\mu < \lambda$ (τ může být i konečné). Potom pro libovolný soubor funkcí $\langle f_\alpha : \alpha < \tau \rangle$, z nichž každá je definovaná na množině $[\varkappa]^n$, existuje podmnožina $A \subseteq \varkappa$ taková, že*

(i) $|A| = \lambda$,

(ii) *každá funkce f_α je kanonická na A.*

Důkazy těchto vět pro jejich délku neuvádíme, i když se opírají jen o prostředky vyložené v této kapitole. Další výsledky o rozkladových šipkách jsou obsaženy v monografii Erdöse, Hajnala, Mátého a Rado (1984).

§ 5 Velké kardinály

S nedosažitelným kardinálem, který je vstupním prahem do světa velkých kardinálů, jsme se seznámili ve druhé kapitole. Ve III. kapitole jsme byli vícekrát svědky toho, že přirozené kombinatorické otázky vedou k dalším, často podstatně větším, kardinálům. Existenci takových kardinálních čísel nelze dokázat. Přijmeme-li existenci nedosažitelného nebo jiného velkého kardinálu jako dodatečný axiom, získáme podstatné zesílení teorie množin. Studium velkých kardinálů tvoří samostatnou partii teorie množin, kterou nelze odtrhnout od ostatních částí právě proto, že se stále setkáváme s problémy, které se týkají malých množin (často mohutnosti ω_1 nebo ω_2), jejichž řešitelnost je podmíněná existencí nějakého velkého kardinálu. Problematika velkých kardinálů je zevrubně studována od 50. let zásluhou A. Tarského a jeho školy. Do dnešní doby bylo nashromážděno velké množství poznatků, které odhalily zajímavou skutečnost: různé třídy velkých kardinálních čísel, i když byly motivovány problémy často ze vzdálených oblastí matematiky, jsou téměř lineárně uspořádány inkluzí.

Stručný přehled velkých kardinálů a jejich vzájemných vztahů je obsahem tohoto oddílu.

5.1 Kdo je kdo mezi velkými kardinály. Číslo u názvu kardinálu odkazuje na definici. Symbol $\Rightarrow$ značí relativní bezespornost a $\rightarrow$ značí implikaci (inkluzi). Začínáme od slabě nedosažitelných kardinálů, které tvoří největší třídu velkých kardinálů. *(Schéma na následující straně.)*

5.2 Slabě nedosažitelný kardinál jsme zavedli ve 4.30, kapitola II. Připomeňme, že je to regulární kardinál, který je současně pevným bodem funkce $\aleph$. Ukázali jsme, že $\varkappa$ je slabě nedosažitelný kardinál, právě když $\varkappa$ je nespočetný, regulární a limitní kardinál. To nevylučuje možnost, že existuje kardinál $\lambda < \varkappa$ takový, že $2^\lambda \geq \varkappa$. Může se stát, že existuje slabě nedosažitelný kardinál menší než 2^ω nebo že samo kontinuum je slabě nedosažitelný kardinál.

slabě nedosažitelný kardinál (II.4.30)		
↖		
↑ nedosažitelný (5.3)	$\Leftrightarrow$	$\neg$KH, neplatí Kurepova hypotéza
slabě Mahlův (5.5) ↑		
↖		
Mahlův (5.5)	$\Leftrightarrow$	(a) neexistuje speciální Aronszajnův ω_2-strom (b) $\neg\square\omega_1$
↑		
slabě kompaktní (5.7)	$\Leftrightarrow$	ω_2 má stromovou vlastnost
subtilní (5.12)		subtilní nemusí být slabě kompaktní kardinál,
↑		ale pod ním existuje slabě kompaktní
nevýslovný kardinál (5.13)		$\varkappa$-nevýslovný $\to \neg$KH$_\varkappa$
Erdösovy kardinály $\varkappa(\alpha)$ (5.21)		existuje-li $\varkappa(\omega_1)$, pak neplatí Jensenova věta
↑		o pokrytí
Ramseyův kardinál (5.23)		
↑		
měřitelný (5.26)	$\Leftrightarrow$	2^ω je reálně měřitelné
↑		
silně kompaktní (5.33)	$\Rightarrow$	Fisherův axióm (5.34)
↑		
superkompaktní (5.40)	$\Rightarrow$	$\neg\square\aleph_\omega$
obří (5.43)	$\Rightarrow$	$\aleph_\omega$ je první kardinál, který poruší GCH

5.3 Nedosažitelný kardinál. Říkáme, že $\varkappa$ je *nedosažitelný kardinál*, jestliže $\varkappa$ je nespočetný, regulární a silně limitní kardinál. Připomeňme, že $\varkappa$ je silně limitní, jestliže pro každé $\lambda < \varkappa$ platí $2^\lambda < \varkappa$.

Je zřejmé, že každý nedosažitelný kardinál je slabě nedosažitelný a větší než 2^ω. Pojmy slabě nedosažitelného a nedosažitelného kardinálu splývají, předpokládáme-li GCH.

Definujeme-li ordinální funkci Γ tak, že položíme $\Gamma(\alpha) = 2^{<\aleph_\alpha}$ pro každý ordinál α, potom Γ je spojitá neklesající funkce a $\Gamma(\alpha) \geq \aleph_\alpha$. Snadno se nahlédne, že $\varkappa$ je nedosažitelný kardinál, právě když $\varkappa$ je regulární a je současně pevným bodem funkce Γ.

5.4 Nedosažitelné kardinály a stacionární množiny. Je-li $\varkappa$ slabě nedosažitelný kardinál, potom množina

$$\{\lambda < \varkappa : \lambda \text{ je pevný bod funkce } \aleph\}$$

je uzavřená neomezená v $\varkappa$.

Podobně, je-li $\varkappa$ nedosažitelný kardinál, potom množina

$$F = \{\lambda < \varkappa : \lambda \text{ je pevný bod funkce } \Gamma\}$$

je uzavřená neomezená v $\varkappa$.

5.5 Mahlův kardinál (Mahlo 1911). (i) Říkáme, že kardinál $\varkappa$ je *slabě Mahlův*, jestliže je slabě nedosažitelný a množina

$$\{\lambda < \varkappa : \lambda \text{ regulární kardinál}\}$$

je stacionární v $\varkappa$.

(ii) Slabě Mahlův kardinál, který je nedosažitelný, nazýváme *Mahlovým kardinálem.*

Je zřejmé, že oba pojmy splývají, předpokládáme-li GCH.

5.6 Věta. (i) *Je-li $\varkappa$ slabě Mahlův kardinál, potom množina všech slabě nedosažitelných kardinálů menších než $\varkappa$ je stacionární v $\varkappa$.*

(ii) *Je-li $\varkappa$ Mahlův kardinál, potom množina všech nedosažitelných kardinálů menších než $\varkappa$ je stacionární v $\varkappa$. Odtud plyne, že Mahlův kardinál $\varkappa$ je $\varkappa$-tý nedosažitelný kardinál.*

Důkaz. (ii) Podle 5.4 je množina F uzavřená a neomezená v $\varkappa$. Podle definice Mahlova kardinálu je množina $S = \{\lambda < \varkappa : \lambda \text{ regulární}\}$ stacionární. Tedy $F \cap S$ je také stacionární množina a každý její prvek je nedosažitelný kardinál. To znamená, že před $\varkappa$ existuje $\varkappa$ nedosažitelných kardinálů.

5.7 Slabě kompaktní kardinál. Říkáme, že kardinál $\varkappa$ je *slabě kompaktní*, je-li nespočetný a $\varkappa \to (\varkappa)^2_2$.

Slabě kompaktní kardinály jsou definovány přenesením speciálního případu $\omega \to (\omega)^2_2$ Ramseyovy věty na nespočetné kardinály. Proto nepřekvapuje, že mnohá další tvrzení, například Königova věta (3.25), mají analogické verze i pro slabě kompaktní kardinály.

Podle věty 3.62 v lexikografickém uspořádání libovolného Aronszajnova ω_1-stromu neexistuje podmnožina uspořádaná podle typu ω_1 nebo ω_1^*. Stejným způsobem se dokáže:

5.8 Věta. *Nechť $\varkappa$ je regulární a nechť T je Aronszajnův $\varkappa$-strom. Žádné lexikografické uspořádání stromu T neobsahuje podmnožinu uspořádanou podle typu $\varkappa$ nebo $\varkappa^*$.*

5.9 Věta. *Pro nespočetný kardinál $\varkappa$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *$\varkappa$ je slabě kompaktní,*

(ii) *každá lineárně uspořádaná množina mohutnosti $\varkappa$ obsahuje buď podmnožinu uspořádanou podle typu $\varkappa$, nebo podmnožinu uspořádanou podle typu $\varkappa^*$,*

(iii) *(stromová vlastnost) $\varkappa$ je nedosažitelné a každý $\varkappa$-strom má kofinální větev,*

(iv) *$\varkappa$ je nedosažitelné a v každé $\varkappa$-úplné algebře množin $B \subseteq \mathscr{P}(\varkappa)$, která má mohutnost $\varkappa$ a obsahuje všechna $\alpha < \varkappa$, existuje $\varkappa$-úplný ultrafiltr rozšiřující Fréchétův filtr na $\varkappa$,*

(v) *pro každé přirozené r platí $\varkappa \to (\varkappa)^r_{<\varkappa}$.*

Důkaz. Implikace (i) → (ii) je snadná, dokáže se stejným způsobem jako věta 3.9(ii). Předpokládejme, že $\varkappa > \omega$ splňuje (ii). Nejprve ukážeme, že $\varkappa$ je regulární a silně limitní. Kdyby $\varkappa$ byl singulár, pak existuje rozklad $\{A_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\varkappa)\}$ kardinálu $\varkappa$ na množiny menší mohutnosti. V tomto případě definujme lineární uspořádání $\lhd$ na $\varkappa$ tak, že položíme $\alpha \lhd \beta$, jestliže buď $\alpha < \beta$ a α, β leží ve stejné množině A_ξ, nebo $\alpha \in A_\xi$, $\beta \in A_\eta$ a $\eta < \xi$. V lineárně uspořádané množině $\langle \varkappa, \lhd \rangle$ neexistuje ani ostře rostoucí, ani ostře klesající posloupnost délky $\varkappa$, spor. Tedy $\varkappa$ je regulární. Kdyby $\varkappa$ nebylo silně limitní, pak pro nějaké $\lambda < \varkappa$ je $2^\lambda \geq \varkappa$. Podle 4.75 v lexikografickém uspořádání množiny všech funkcí $f: \lambda \to \{0, 1\}$ neexistuje rostoucí ani klesající posloupnost délky $\lambda^+ \leq \varkappa$. Odtud dostáváme spor s (ii), tedy $\varkappa$ je nedosažitelný kardinál.

Důkaz (ii) → (iii) nyní plyne z věty 5.8.

(iii) → (iv). Mějme $\varkappa$-úplnou algebru množin $B \subseteq P(\varkappa)$ mohutnosti $\varkappa$ takovou, že $\varkappa \subseteq B$. Z $\varkappa$-úplnosti plyne, že $[\varkappa]^{<\varkappa} \subseteq B$, tedy i Fréchétův filtr $\mathscr{F}$ na $\varkappa$ je podmnožinou algebry B. Všech dvouprvkových rozkladů kardinálu $\varkappa$, které sestávají z prvků algebry B, je $\varkappa$. Nechť $p_\alpha = \{b(\alpha, 0), b(\alpha, 1)\}$ pro $\alpha < \varkappa$ je zvolené očíslování takových rozkladů. Nyní sestrojíme vhodný dolní podstrom T úplného binárního stromu výšky $\varkappa$. To znamená, že $T \subseteq {}^{<\varkappa}2$ a uspořádání stromu T je dáno inkluzí.

Pro každé $\xi < \varkappa$ posloupnost $f: \xi \to \{0, 1\}$ bude v T, právě když

$$\left|\bigcap\{b(\alpha, f(\alpha)) : \alpha < \xi\}\right| = \varkappa .$$

Je zřejmé, že s každou posloupností $f \in T$ je v T také každé její zúžení. Tedy $|T_\xi| \leq 2^{|\xi|} < \varkappa$ a T je dolní podstrom úplného binárního stromu výšky $\varkappa$. Pro každé $\xi < \varkappa$ systém množin

$$S = \{\bigcap_{\alpha < \xi} b(\alpha, g(\alpha)) : g \in {}^{\xi}\{0, 1\}\}$$

pokrývá $\varkappa$ a má mohutnost menší než $\varkappa$. Z regularity kardinálu $\varkappa$ plyne, že alespoň jedna z množin systému S má mohutnost $\varkappa$. Dokázali jsme, že každá hladina T_ξ

je neprázdná, a tedy T je $\varkappa$-strom. Podle předpokladu (iii) ve stromu T existuje kofinální větev. To znamená, že existuje $g: \varkappa \to \{0, 1\}$ taková, že $g \mid \xi \in T$ pro každé $\xi < \varkappa$. Položme

$$U = \{b(\alpha, g(\alpha)): \alpha < \varkappa\}.$$

Je zřejmé, že pro libovolné $b \in B$ je buď $b \in U$, nebo doplněk $(\varkappa - b) \in U$. Pro libovolné $\xi < \varkappa$ má množina $c = \bigcap\{b(\alpha, g(\alpha)): \alpha < \xi\}$ mohutnost $\varkappa$ a leží v B. Odtud plyne, že $c \in U$. Dokázali jsme, že U je $\varkappa$-úplný ultrafiltr v B a každý jeho prvek má mohutnost $\varkappa$.

(iv) $\to$ (v). Postupujeme stejným způsobem jako v důkazu Ramseyovy věty 4.7. Předpokládáme, že platí (iv), a indukcí podle r dokazujeme (v). Případ $r \leq 1$ je jednoduchý. Předpokládejme, že pro nějaké $r \geq 1$ platí $\varkappa \to (\varkappa)^r_{<\varkappa}$, a dokazujeme $\varkappa \to (\varkappa)^{r+1}_{<\varkappa}$. Nechť $f: [\varkappa]^{r+1} \to \lambda$, kde $\lambda < \varkappa$, je libovolné obarvení. Pro každé $\alpha < \lambda$ a $u \in [\varkappa]^r$ položme

$$X(u, \alpha) = \{x \in \varkappa - u: f(u \cup \{x\}) = \alpha\}.$$

Nechť $B \subseteq P(\varkappa)$ je nejmenší $\varkappa$-úplná algebra množin obsahující všechny množiny $X(u, \alpha)$ pro $\alpha < \lambda$ a $u \in [\varkappa]^r$ a všechny ordinály $\alpha < \varkappa$. Algebra B má mohutnost $\varkappa$, protože $\varkappa$ je nedosažitelný kardinál. Podle předpokladu (iv) existuje $\varkappa$-úplný ultrafiltr U v B takový, že každý jeho prvek má mohutnost $\varkappa$. Stejně jako v důkazu 4.7 nalezneme homogenní množinu mohutnosti $\varkappa$ pro obarvení f.

Poslední implikace (v) $\to$ (i) je zřejmá.

Dále uvedeme základní fakta bez důkazů. Důkazy a další výsledky lze nalézt v přehledovém článku A. Kanamoriho a M. Magidora (1978).

5.10 Reflexe stacionárnosti. *Je-li $\varkappa$ slabě kompaktní kardinál, potom pro každou stacionární množinu $S \subseteq \varkappa$ existuje nespočetný regulární kardinál $\lambda < \varkappa$ takový, že množina $S \cap \lambda$ je stacionární v λ.*

Z axiomu konstruovatelnosti V = L plyne i obrácená implikace (Jensen 1972). Reflexe stacionárnosti tedy charakterizuje slabě kompaktní kardinály v univerzu konstruovatelných množin. V obecném případě však obrácená implikace neplatí (Kunen 1978).

5.11 Věta. *Každý slabě kompaktní kardinál je Mahlův. Navíc, množina všech Mahlových kardinálů menších než slabě kompaktní kardinál $\varkappa$ je stacionární v $\varkappa$.*

5.12 Subtilní kardinál. Říkáme, že nespočetný regulární kardinál $\varkappa$ je *subtilní*, jestliže pro každý soubor

(1) $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$, kde $A_\alpha \subseteq \alpha$ pro každé $\alpha < \varkappa$,

a každou uzavřenou neomezenou množinu $C \subseteq \varkappa$ existují ordinály $\alpha, \beta \in C$ takové, že $\alpha < \beta$ a $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$.

5.13 Nevýslovný kardinál. Říkáme, že nespočetný regulární kardinál $\varkappa$ je *nevýslovný*, jestliže pro každý soubor (1) existuje stacionární množina $S \subseteq \varkappa$ taková, že pro každé $\alpha, \beta \in S$ z $\alpha < \beta$ plyne $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$.

Je zřejmé, že každý nevýslovný kardinál je subtilní.

5.14 Věta. (i) *Subtilní kardinál je nedosažitelný.*

(ii) *Nevýslovný kardinál $\varkappa$ je slabě kompaktní a množina všech slabě kompaktních kardinálů menších než $\varkappa$ je stacionární v $\varkappa$.*

Subtilní kardinál nemusí být slabě kompaktní, ale nejmenší subtilní kardinál (pokud existuje) je větší než nejmenší slabě kompaktní kardinál. Jinými slovy, z existence subtilního kardinálu plyne, že existuje menší kardinál, který je slabě kompaktní. Nejmenší subtilní kardinál je menší než nejmenší nevýslovný kardinál.

5.15 Věta (Kunen). *Kardinál $\varkappa$ je nevýslovný, právě když $\varkappa$ je nespočetný, regulární a platí*

$$\varkappa \to (\mathrm{Stac})^2_{<\varkappa},$$

kde Stac *znamená, že homogenní množiny zaručené šipkou jsou stacionární v $\varkappa$.*

Baumgartner (1973) ukázal, že $\varkappa \to (\mathrm{Stac})^3_2$ neplatí pro všechny nevýslovné kardinály.

5.16 Věta. *Je-li ordinál α menší než nejmenší subtilní kardinál, potom existuje binární strom $T \subseteq {}^{<\alpha}2$ výšky α takový, že pro každé nekonečné $\xi < \alpha$ v hladině T_ξ existuje list, tedy vrchol, který nemá žádného následníka ve stromu T.*

5.17 Věta. (i) (Kunen) *Je-li $\varkappa$ subtilní kardinál, potom platí diamantový princip $\diamondsuit_\varkappa$.*

(ii) (Jensen a Kunen) *Je-li $\varkappa$ nevýslovný kardinál, potom neplatí Kurepova hypotéza* $\mathrm{KH}_\varkappa$ (3.72).

5.18 Erdösovy kardinály. Ještě jednou se vrátíme k Ramseyově větě. Pro každé přirozené r mějme jedno obarvení

$$f_r : [\omega]^r \to \{0, 1\}.$$

Víme, že pro pevné r existuje nekonečná množina homogenní pro zobrazení f_r. Ptáme se, zda vždy existuje nekonečná množina $A \subseteq \omega$, která je homogenní současně pro všechna zobrazení f_r. Odpověď je negativní, jak ukazuje následující příklad. Všimněme si, že každá posloupnost obarvení f_r určuje jedno zobrazení $f: [\omega]^{<\omega} \to \{0, 1\}$ a naopak.

5.19 Příklad. Definujme zobrazení $f: [\omega]^{<\omega} \to \{0, 1\}$ tak, že pro libovolnou konečnou množinu $b \subseteq \omega$ položíme $f(b) = 0$, jestliže $|b| \in b$ a $f(b) = 1$ v opačném případě.

Uvažujme libovolnou nekonečnou množinu $A \subseteq \omega$. Je zřejmé, že pro každé $r \in A$ existuje množina $b \in [A]^r$ obsahující r, tedy $f(b) = 0$, a současně existuje množina $c \in [A]^r$, která neobsahuje r, tedy $f(c) = 1$. Ukázali jsme, že žádná nekonečná množina přirozených čísel není současně homogenní pro všechna zobrazení $f_r = f \mid [\omega]^r$.

5.20 Pro libovolné kardinály $\varkappa$, μ a ordinál α rozkladová šipka

$$\varkappa \to (\alpha)_\mu^{<\omega} \tag{2}$$

znamená, že pro každé zobrazení $f\colon [\varkappa]^{<\omega} \to \mu$ existuje množina $A \subseteq \varkappa$ uspořádaná podle typu α a homogenní pro f, což znamená, že pro každé přirozené r je $f \mid [A]^r$ konstantní zobrazení.

Jestliže pro každé $\mu < \lambda$ platí (2), píšeme $\varkappa \to (\alpha)_{<\lambda}^{<\omega}$.

Z příkladu 5.19 víme, že $\omega \nrightarrow (\omega)_2^{<\omega}$. P. Erdös (1950) se ptal, zdali existuje kardinál $\varkappa$, pro který platí $\varkappa \to (\omega)_2^{<\omega}$. Ukázalo se, že je to otázka po existenci velkého kardinálu.

5.21 Definice. Pro ordinální číslo α *Erdösův kardinál* $\varkappa(\alpha)$ je nejmenší kardinál $\varkappa$ takový, že

$$\varkappa \to (\alpha)_2^{<\omega}.$$

5.22 Věta. (i) (Erdös, Hajnal 1958) *Je-li* $\omega \leq \alpha < \beta$, *potom* $\varkappa(\alpha)$ *je regulární kardinál a* $\varkappa(\alpha) < \varkappa(\beta)$.

(ii) *Je-li* α *limitní, pak* $\varkappa(\alpha)$ *je subtilní kardinál a pro každé* $\mu < \varkappa(\alpha)$ *platí* $\varkappa(\alpha) \to (\alpha)_\mu^{<\omega}$.

Erdösovy kardinály nemusí být slabě kompaktní, ale existuje-li Erdösův kardinál $\varkappa(\omega)$, pak existuje menší kardinál, který je nevýslovný.

5.23 Ramseyův kardinál. Platí-li

$$\varkappa \to (\varkappa)_2^{<\omega},$$

říkáme, že $\varkappa$ je *Ramseyův kardinál.*

Je zřejmé, že Ramseyovy kardinály jsou právě pevné body posloupnosti Erdösových kardinálů.

Nejmenší Ramseyův kardinál je slabě kompaktní a subtilní, ale není nevýslovný. Je však větší než $\varkappa(\omega)$, a tedy je větší než nejmenší nevýslovný kardinál.

5.24 Velké kardinály a L. Ve II. kapitole § 7 jsme konstatovali, že univerzum konstruovatelných množin se špatně snáší s velkými kardinály. Většina z těch, se kterými jsme se dosud seznámili, však může koexistovat s $\mathbf{V} = \mathbf{L}$.

Dá se ukázat, že je-li $\varkappa$ nedosažitelný, Mahlův, subtilní, slabě kompaktní nebo nevýslovný kardinál, pak $\varkappa$ je velký kardinál stejného druhu i v univerzu $\mathbf{L}$. Totéž již neplatí pro Erdösovy kardinály. Silver ukázal, že pro každý ordinál α, který je spočetný v $\mathbf{L}$, Erdösův kardinál $\varkappa(\alpha)$ je stejného druhu v univerzu $\mathbf{L}$, to znamená, že v $\mathbf{L}$ platí $\varkappa(\alpha) \to (\alpha)^{<\omega}$. Na druhé straně Rowbottom (1971) dokázal, v $\mathbf{L}$ neplatí tvrzení $(\exists\varkappa)(\varkappa = \varkappa(\omega_1))$. To znamená, že z existence Erdösova kardinálu $\varkappa(\omega_1)$ plyne $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$. Navíc neplatí ani Jensenova věta o pokrytí (II.7.14).

5.25 Měřitelné kardinály. V kapitole I.8.31 jsme ukázali, že každá dvouhodnotová konečně aditivní míra na $\mathscr{P}(\omega)$ je určena nějakým ultrafiltrem na ω. Přitom netriviální ultrafiltry určují difúzní míry, to znamená míry, pro které všechny konečné podmnožiny mají míru nula. Měřitelné kardinály jsou motivovány otázkou, zda na potenci nějakého nespočetného kardinálu $\varkappa$ může existovat $\varkappa$-aditivní dvouhodnotová difúzní míra. To je ekvivalentní s tím, že na $\varkappa$ existuje netriviální $\varkappa$-úplný ultrafiltr. Je zřejmé, že takový ultrafiltr musí být uniformní.

Je-li $\varkappa$ nespočetný regulární kardinál, potom Fréchétův filtr a filtr uzavřených neomezených množin na $\varkappa$ jsou $\varkappa$-úplné uniformní filtry. Podle 2.23 to však nejsou ultrafiltry. Pokus o jejich rozšíření do $\varkappa$-úplného ultrafiltru pomocí principu maximality selže, protože množina σ-úplných filtrů nesplňuje podmínku omezenosti řetězců vzhledem k inkluzi.

5.26 Měřitelný kardinál. Říkáme, že nespočetný kardinál $\varkappa$ je *měřitelný*, jestliže na $\varkappa$ existuje netriviální $\varkappa$-úplný ultrafiltr.

Ulam (1930) zkoumal existenci netriviálních σ-úplných ultrafiltrů. Ukázal, že je-li $\varkappa$ nejmenší kardinál, na kterém takový ultrafiltr existuje, potom každý σ-úplný netriviální ultrafiltr na $\varkappa$ je $\varkappa$-úplný.

5.27 Věta (Ulam). *Každý měřitelný kardinál je nedosažitelný.*

Je zřejmé, že měřitelný kardinál musí být regulární, protože pro singulární $\varkappa$ z $\varkappa$-úplnosti plyne $\varkappa^+$-úplnost filtru. Podle 2.22 je měřitelný kardinál slabě nedosažitelný a je snadné ověřit, že je silně limitní.

5.28 Věta o normální míře (Scott 1961). *Na každém měřitelném kardinálu $\varkappa$ existuje normální ultrafiltr. Odpovídající dvouhodnotová míra na $\mathscr{P}(\varkappa)$ se nazývá normální míra.*

Z vět o normálních filtrech z § 2 není těžké dokázat následující charakterizaci normálních ultrafiltrů.

5.29 Lemma. *Pro $\varkappa$-úplný uniformní ultrafiltr $\mathscr{U}$ na regulárním nespočetném $\varkappa$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *$\mathscr{U}$ je normální ultrafiltr,*

(ii) *každá regresívní funkce na $\varkappa$ je konstantní na nějaké množině z $\mathscr{U}$,*

(iii) *pro každý soubor* (1) *existuje množina $S \in \mathscr{U}$ taková, že pro libovolné $\alpha, \beta \in S$ z $\alpha < \beta$ plyne $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$.*

5.30 *Důkaz věty* 5.28. Nechť $\varkappa$ je měřitelný kardinál a $\mathscr{U}$ je nějaký $\varkappa$-úplný uniformní ultrafiltr na $\varkappa$. Říkáme, že funkce $f\colon \varkappa \to \varkappa$ je nestlačitelná modulo $\mathscr{U}$, jestliže není konstantní na žádné množině z ultrafiltru $\mathscr{U}$ a současně každá funkce $g\colon \varkappa \to \varkappa$ taková, že

$$\{\alpha < \varkappa : g(\alpha) < f(\alpha)\} \in \mathscr{U},$$

je již konstantní na nějaké množině z $\mathscr{U}$. Podle 5.29(ii) je normální ultrafiltr charakterizován tím, že identická funkce na $\varkappa$ je nestlačitelná.

Nejprve ukážeme, že existuje nestlačitelná funkce modulo $\mathcal{U}$. Definujeme relaci $\prec$ na množině ${}^{\varkappa}\varkappa$ tak, že

$$f \prec g \leftrightarrow \{\alpha < \varkappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{U}.$$

Ověříme, že relace $\prec$ je fundovaná. K tomu stačí ukázat, že neexistuje posloupnost funkcí $\langle f_n : n < \omega \rangle$ taková, že pro každé n je $f_{n+1} \prec f_n$. V opačném případě by pro každé $n < \omega$ množina

$$B_n = \{\alpha < \varkappa : f_{n+1}(\alpha) < f(\alpha)\}$$

ležela v ultrafiltru $\mathcal{U}$. Z $\varkappa$-úplnosti plyne, že

$$B = \bigcap_{n<\omega} B_n \in \mathcal{U},$$

a proto $B \neq 0$. Pro libovolné $\alpha \in B$ by $\langle f_n(\alpha) : n < \omega \rangle$ byla nekonečná klesající posloupnost ordinálních čísel, to je spor. Tedy $\prec$ je fundovaná relace.

Vezměme množinu $A \subseteq {}^{\varkappa}\varkappa$ všech funkcí, které nejsou konstantní na žádné množině z $\mathcal{U}$. Je zřejmé, že $A \neq 0$, protože identická funkce patří do A. Z fundovanosti relace $\prec$ plyne, že existuje minimální $f \in A$ vzhledem k $\prec$. Potom f je nestlačitelná funkce modulo $\mathcal{U}$.

Máme-li nestlačitelnou funkci $f : \varkappa \to \varkappa$ modulo $\mathcal{U}$, potom

$$\beta f(\mathcal{U}) = \{X \subseteq \varkappa : f^{-1}[X] \in \mathcal{U}\}$$

je $\varkappa$-úplný netriviální ultrafiltr na $\varkappa$, pro který platí 5.29(ii). To znamená, že $\beta f(\mathcal{U})$ je hledaný normální ultrafiltr. Důkaz je skončen.

Každý normální ultrafiltr $\mathcal{U}$ na $\varkappa$ rozšiřuje filtr $\mathrm{Cub}_{\varkappa}$ uzavřených neomezených množin v $\varkappa$, a proto libovolná množina z $\mathcal{U}$ je stacionární. Stejnou metodou, jakou se dokazuje Ramseyova věta 4.7, použijeme-li normální ultrafiltr, můžeme dokázat následující tvrzení.

5.31 Věta (Rowbottom 1971). *Je-li $\mathcal{U}$ normální ultrafiltr na měřitelném kardinálu $\varkappa$, potom:*

(i) *pro každé zobrazení $f : [A]^r \to \tau$, kde r je přirozené, $\tau < \varkappa$ a $A \in \mathcal{U}$, existuje množina $H \in \mathcal{U}$, která je homogenní pro f,*

(ii) $\varkappa \to (\mathcal{U})^{<\omega}_{<\varkappa}$,

tedy $\varkappa$ je Ramseyův i nevýslovný kardinál.

Navíc, množina $\{\lambda < \varkappa : \lambda$ regulární a $\lambda \to (\mathrm{Stac})^{<\omega}_{<\lambda}\} \in \mathcal{U}$.

S pojmem měřitelného kardinálu je spojen pojem reálně měřitelného kardinálu.

5.32 Reálně měřitelný kardinál. Říkáme, že nespočetný kardinál $\varkappa$ je *reálně měřitelný*, jestliže existuje $\varkappa$-aditivní difúzní reálná míra $\mu : P(\varkappa) \to [0, 1]$ s hodnotami v jednotkovém intervalu taková, že $\mu(\varkappa) = 1$.

Ulam (1930) ukázal, že reálně měřitelný kardinál $\varkappa$ je buď $\leq 2^{\omega}$, a pak je slabě nedosažitelný, nebo je měřitelný.

Je-li bezesporný předpoklad existence reálně měřitelného kardinálu, je bezesporný předpoklad existence měřitelného kardinálu a naopak (Solovay 1971).

Zesílením pojmu měřitelného kardinálu je:

5.33 Silně kompaktní kardinál. Říkáme, že nespočetný kardinál $\varkappa$ je *silně kompaktní*, jestliže na libovolné množině X každý $\varkappa$-úplný filtr lze rozšířit do $\varkappa$-úplného ultrafiltru.

Povšimněme si, že silně kompaktní kardinály jsou definovány přenesením základní věty o ultrafiltrech (každý ω-úplný filtr lze rozšířit do ω-úplného ultrafiltru) na nespočetné kardinály. Je zřejmé, že silně kompaktní kardinál $\varkappa$ je regulární a rozšíření Fréchétova filtru na $\varkappa$ do $\varkappa$-úplného ultrafiltru je $\varkappa$-úplný netriviální ultrafiltr. To znamená, že každý silně kompaktní kardinál je měřitelný.

Kunen ukázal, že pokud je bezesporná existence silně kompaktního kardinálu, potom je bezesporná teorie množin a

5.34 Fisherův axiom. Je-li $(X, \mathscr{A}, \mu)$ libovolný pravděpodobnostní prostor a $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ je 2^ω-úplná algebra množin a μ je 2^ω-aditivní míra na $\mathscr{A}$, potom míra μ může být rozšířena do 2^ω-aditivní míry definované na celé potenční algebře $\mathscr{P}(X)$.

Z Fisherova axiomu plyne reálná měřitelnost kardinálu 2^ω, pokud 2^ω je regulární.

5.35 Silně kompaktní kardinál a L. Vopěnka a Hrbáček (1966) ukázali, že existuje-li silně kompaktní kardinál, potom je veliká propast mezi univerzální třídou **V** a **L**. Přesněji řečeno, třídu **V** nelze získat adjungováním žádné množiny k univerzu konstruovatelných množin, tedy pro každou množinu a platí $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}[a]$.

5.36 Superkompaktní kardinály jsou opravdovými obry ve světě velkých kardinálů. Jejich definice vychází ze zobecnění pojmu stacionarity z ordinálních čísel na systémy množin. Zobecněný pojem stacionarity je důležitý i mimo kontext velkých kardinálů.

Pro libovolný regulární nespočetný kardinál $\varkappa$ a kardinál $\lambda \geq \varkappa$ uvažujeme množinu $S = [\lambda]^{<\varkappa}$ uspořádanou inkluzí, která nyní bude zastupovat regulární kardinál z definice stacionárních množin. Ukážeme, že řada pojmů se zcela přirozeně přenáší na S. Pro libovolné $s \in S$ nechť $s^\Delta = \{t \in S: s \subseteq t\}$. Snadno se nahlédne, že systém množin $\{s^\Delta: s \in S\}$ je bází $\varkappa$-úplného filtru na množině S, který je obdobou Fréchétova filtru.

5.37 Definice. Filtr uzavřených neomezených množin na $[\lambda]^{<\varkappa}$.

(i) Říkáme, že množina $A \subseteq S = [\lambda]^{<\varkappa}$ je *neomezená*, jestliže pro každé $s \in S$ existuje $t \in A$ takové, že $s \subseteq t$.

(ii) Říkáme, že množina $A \subseteq S$ je *uzavřená*, jestliže sjednocení každého řetězce $C \subseteq A$ (vzhledem k inkluzi), který má mohutnost $< \varkappa$, náleží do A.

(iii) Uzavřené neomezené podmnožiny množiny S tvoří bázi filtru, který nazýváme *filtr uzavřených neomezených* množin na $[\lambda]^{<\varkappa}$ a značíme $\mathrm{Cub}(\varkappa, \lambda)$.

Cub$(\varkappa, \lambda)$ je $\varkappa$-úplný filtr, ve kterém leží každá množina s^{Δ}.

5.38 Stacionární množiny a normální filtry na $[\lambda]^{<\varkappa}$.

(i) Říkáme, že $A \subseteq S = [\lambda]^{<\varkappa}$ je *stacionární množina*, jestliže A má neprázdný průnik s každou množinou z Cub$(\varkappa, \lambda)$.

(ii) Filtr $\mathscr{F}$ na S se nazývá normální, jestliže obsahuje všechny množiny s^{Δ} a je uzavřený na diagonální průniky, to znamená, že pro každou posloupnost $\langle A_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ množin z filtru $\mathscr{F}$ také množina

$$\Delta A_\alpha = \{s \in S : s \in A_\alpha \quad \text{pro všechna } \alpha \in s\}$$

leží v $\mathscr{F}$.

Platí analogie Fodorovy věty.

5.39 Věta (Jech 1973). (i) Cub$(\varkappa, \lambda)$ *je normální filtr.*

(ii) *Je-li $A \subseteq S$ stacionární množina a f je zobrazení definované na A takové, že $f(s) \in s$ pro každé neprázdné $s \in A$, potom f je konstantní na nějaké stacionární množině.*

5.40 Superkompaktní kardinál. Říkáme, že regulární nespočetný kardinál $\varkappa$ je *superkompaktní*, jestliže pro každý kardinál $\lambda \geq \varkappa$ existuje normální ultrafiltr na $[\lambda]^{<\varkappa}$.

Není těžké ověřit, že kardinál $\varkappa$ je silně kompaktní, právě když pro každé $\lambda \geq \varkappa$ existuje $\varkappa$-úplný ultrafiltr na $[\lambda]^{<\varkappa}$ obsahující všechny množiny s^{Δ}. Odtud plyne, že superkompaktní kardinál je silně kompaktní, protože každý normální ultrafiltr na $[\lambda]^{<\varkappa}$ je $\varkappa$-úplný.

Magidor (1977) ukázal, že je bezesporný předpoklad $\neg \square_{\aleph_\omega}$, pokud je bezesporné, že existuje superkompaktní kardinál.

5.41 Elementární vnoření a velké kardinály. Říkáme, že zobrazení $j : \mathbf{V} \to M$ je elementární vnoření univerzální třídy $\mathbf{V}$ do třídy M, jestliže pro libovolnou formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ platí

$$(\forall x_1, \ldots, x_n) [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^M(j(x_1), \ldots, j(x_n))],$$

kde φ^M je formule, která vznikne z φ relativizací kvantifikátorů do třídy M (viz II.7.11).

Měřitelný kardinál je nejmenší z velkých kardinálů, který zaručuje existenci elementárního vnoření univerzální třídy do nějaké tranzitivní třídy, které není identické.

5.42 Věta. (i) *Kardinál $\varkappa$ je měřitelný, právě když existuje elementární vnoření $j : \mathbf{V} \to M$ univerzální třídy do tranzitivní třídy M takové, že j je identické na $\varkappa$, $j(\varkappa) > \varkappa$ a každá posloupnost $\langle m_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ prvků z M leží v M, zkráceně ${}^{\varkappa}M \subseteq M$.*

(ii) *$\varkappa$ je superkompaktní kardinál, právě když pro každé $\lambda \geq \varkappa$ existuje elementární vnoření $j : \mathbf{V} \to M$ univerzální třídy $\mathbf{V}$ do tranzitivní třídy M takové, že j je identické na $\varkappa$, $j(\varkappa) > \varkappa$ a ${}^{\lambda}M \subseteq M$.*

5.43 Obří kardinál. Říkáme, že kardinál $\varkappa$ je *obří*, jestliže existuje elementární vnoření $j: \mathrm{V} \to M$ univerzální třídy do nějaké tranzitivní třídy M takové, že j je identické na $\varkappa$, $j(\varkappa) > \varkappa$ a ${}^{j(\varkappa)}M \subseteq M$.

Existuje-li obří kardinál, potom je bezesporná existence superkompaktního kardinálu. Magidor (1977) ukázal, že za předpokladu, který je o málo silnější než existence obřího kardinálu, je bezesporné, že $\aleph_\omega$ je první kardinál, na kterém se poruší GCH.

5.44 Kunenova bariéra je definitivním stropem pro škálu velkých kardinálů v teorii množin s axiomem výběru. Jde o následující tvrzení:

Existence elementárního vnoření $j: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ univerzální třídy do univerzální třídy, které není identitou, je ve sporu s teorií množin s axiomem výběru. To znamená, že jakákoliv definice velkého kardinálu, která implikuje existenci neidentického elementárního vnoření univerzální třídy do ní samé, je ve sporu s axiomy ZFC.

KAPITOLA IV

Těžištěm kapitoly je závěrečný § 3, věnovaný metodě generických rozšíření modelů teorie množin. Výklad se opírá o teorii Booleových algeber, která je vyložena v prvních dvou paragrafech. Po úvodním § 1, obsahujícím základní pojmy, tvrzení a příklady, se v § 2 zabýváme strukturálními vlastnostmi Booleových algeber. Klademe důraz na úplné Booleovy algebry a ty jejich vlastnosti, které jsou relevantní pro zkoumání generických rozšíření, například husté podmnožiny, rozklady jednotky, saturovanost a distributivnost. Jsou zde též uvedeny konstrukce nových algeber pomocí volného součinu a faktorizace a Stoneova věta o dualitě. V § 3 motivujeme pojem generické množiny, vyslovíme větu o generickém rozšíření, na několika příkladech ukážeme její použití a v závěru ji dokážeme.

§ 1 Booleovské operace

Budeme definovat Booleovy algebry a algebry množin. Dokážeme základní tvrzení a seznámíme se s důležitými typy Booleových algeber, zejména s $\varkappa$-úplnými a úplnými Booleovými algebrami, algebrami obojetných množin, regulárních otevřených množin a množin s Baireovou vlastností.

1.1 Definice. *Booleova algebra* je struktura $\langle B, \wedge, \vee, -, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ sestávající z množiny B, ze dvou binárních operací průseku $\wedge$ a spojení $\vee$, unární operace komplementu $-$ a dvou prvků $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in B$, ve které platí následující axiomy. Pro každé $x, y, z \in B$

(1) komutativita průseku a spojení

$$x \wedge y = y \wedge x, \qquad x \vee y = y \vee x,$$

(2) distributivní zákony

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \qquad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

(3) neutralita nulového a jednotkového prvku

$x \vee \mathbf{0} = x, \qquad x \wedge \mathbf{1} = x,$

(4) axiomy komplementu

$x \wedge (-x) = \mathbf{0}, \qquad x \vee (-x) = \mathbf{1},$

(5) podmínka nedegenerovanosti

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{1}.$$

Jinými slovy, Booleova algebra je každá struktura jazyka $\{\wedge, \vee, -, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, v které jsou pravdivé všechny formule (1)–(5).

Operace průseku, spojení a komplementu nazýváme *booleovské operace*. Dohodneme se, že Booleovy algebry budeme značit stejným symbolem jako jejich nosné množiny.

Mohutností Booleovy algebry se rozumí mohutnost její nosné množiny. Algebra B je konečná (spočetná), je-li její nosná množina konečná (spočetná).

1.2 Příklady. (a) *Dvouprvkové algebry*. V libovolné Booleově algebře B uvažujme vyčleněné konstanty $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$. Axiomy (2),(3) a (4) zaručují, že všechny booleovské operace z nich dávají opět hodnotu $\mathbf{0}$ nebo $\mathbf{1}$ podle následující tabulky:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$-x$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

To znamená, že nejjednodušší typ Booleových algeber, které nazýváme triviální nebo dvouprvkové, jsou algebry sestávající z prvků $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$. Je zřejmé, že všechny dvouprvkové Booleovy algebry jsou navzájem izomorfní. Nejznámější interpretace takové Booleovy algebry reprezentují nulu a jedničku jako pravdivostní hodnoty: $\mathbf{0}$ nepravdu a $\mathbf{1}$ pravdu. Booleovské operace pak odpovídají pravdivostním hodnotám konjunkce, disjunkce a negace v závislosti na pravdivostních hodnotách jednotlivých komponent.

(b) Pro neprázdnou množinu X je potenční algebra $\mathscr{P}(X)$ spolu s množinovými operacemi průniku a sjednocení dvou množin, operací doplňku do množiny X a vyznačenými prvky 0 a X Booleovou algebrou. V této algebře je pro libovolné $Y, Z \subseteq X$

$$Y \wedge Z = Y \cap Z\,, \qquad Y \vee Z = Y \cup Z\,,$$
$$-Y = X - Y\,,$$
$$\mathbf{0} = 0\,, \qquad \mathbf{1} = X\,.$$

(c) *Intervalové algebry.* Buď $\langle X, \leq \rangle$ lineární uspořádání, $X \neq 0$ a uvažujme všechny polouzavřené intervaly $[a, b)$, $[a, \rightarrow)$ a intervaly $(\leftarrow, a)$, $(\leftarrow\ \rightarrow)$, kde $a < b$. Systém všech konečných sjednocení polouzavřených intervalů s množinovými operacemi je Booleovou algebrou, kterou nazýváme intervalovou algebrou lineárního uspořádání $\langle X, \leq \rangle$. Intervalová algebra racionálních čísel je příkladem spočetné Booleovy algebry.

(d) Nechť $\mathscr{I}$ je ideál na množině X a nechť $\mathscr{I}^*$ je duální filtr. Potom $\mathscr{I} \cup \mathscr{I}^*$ spolu s množinovými operacemi je Booleova algebra. Speciálně, je-li $\mathscr{I} = [X]^{<\omega}$, pak $\mathscr{I} \cup \mathscr{I}^*$ je algebra konečných podmnožin a doplňků konečných podmnožin množiny X. Algebra konečných podmnožin a doplňků konečných podmnožin přirozených čísel je také intervalovou algebrou uspořádání $(\omega, <)$.

(e) *Algebra obojetných množin. Totálně nesouvislý topologický prostor.* Buď X neprázdný topologický prostor. Množina $A \subseteq X$ se nazývá *obojetná*, jestliže A je současně otevřená i uzavřená. Nechť $\mathrm{CO}(X)$ je systém všech obojetných množin prostoru X. $\mathrm{CO}(X)$ s množinovými operacemi je Booleovou algebrou a nazývá se *algebrou obojetných množin prostoru* X.

V hezkých metrických prostorech, jako jsou Eukleidovský n-rozměrný prostor $\mathbb{R}^n$ a Hilbertův kvádr $\mathbb{I}^\omega$, jsou pouze dvě obojetné množiny – prázdná množina a celý prostor. Takové prostory se nazývají *souvislé.* Algebra obojetných množin je potom triviální.

Z hlediska Booleových algeber jsou zajímavé nesouvislé prostory, v kterých lze libovolné dva různé body oddělit obojetnými množinami. Tato podmínka je ekvivalentní s tím, že pro různé body x, y existuje obojetné okolí bodu x, v kterém neleží bod y. Topologické prostory s touto vlastností se nazývají *totálně nesouvislé.*

(f) Nejjednodušším příkladem totálně nesouvislého prostoru je diskrétní topologický prostor X. Není příliš zajímavý, protože $\mathrm{CO}(X) = \mathscr{P}(X)$. Cantorovo diskontinuum D, které jsme zavedli v I.6.44, je netriviálním příkladem totálně nesouvislého prostoru. Je to kompaktní metrický prostor bez izolovaných bodů. Připomeňme, že Cantorovo diskontinuum je homeomorfní s topologickým součinem ${}^{\omega}2$ spočetně mnoha dvouprvkových diskrétních prostorů.

Je-li $\varkappa$ nekonečné kardinální číslo, topologický součin ${}^{\varkappa}2$ $\varkappa$ dvouprvkových diskrétních prostorů se nazývá zobecněné Cantorovo diskontinuum a označuje se $D(\varkappa)$. Je to kompaktní totálně nesouvislý prostor bez izolovaných bodů a je-li $\varkappa > \omega$, pak $D(\varkappa)$ není metrizovatelný.

Ukážeme, že $|\mathrm{CO}(D(\varkappa))| = \varkappa$. Pro konečnou množinu $K \subseteq \omega$ a funkci $f\colon K \to 2$ označme $V(f)$ množinu všech funkcí z ${}^{\varkappa}2$, které prodlužují f. $V(f)$ je obojetná množina a navíc systém $S = \{V(f)\colon K \in [\varkappa]^{<\omega} \,\&\, f\colon K \to 2\}$ je bází topologie prostoru $D(\varkappa)$. Libovolná obojetná množina je jednak otevřená, a proto je sjednocením některých množin z báze, jednak uzavřená, tedy kompaktní, a to znamená, že je sjednocením jen konečně mnoha bázových množin. Proto platí

$$\varkappa \leq |S| \leq |\mathrm{CO}(D(\varkappa))| \leq |[S]^{<\omega}| = \varkappa$$

neboli

$$|\mathrm{CO}(D(\varkappa))| = \varkappa .$$

Tím jsme také ukázali, že existují Booleovy algebry libovolné nekonečné mohutnosti.

1.3 Booleovy algebry z příkladů (b)–(f) mají jedno společné, jsou podalgebrami nějaké potenční algebry $\mathscr{P}(X)$ a booleovské operace těchto algeber jsou totožné s množinovými operacemi.

1.4 Definice. Podalgebra. Podalgebrou Booleovy algebry B nazýváme libovolnou neprázdnou podmnožinu C, která je uzavřená na booleovské operace algebry B.

Booleovské operace podalgebry C jsou tedy zúžením na množinu C operací algebry B.

Je zřejmé, že každá podalgebra algebry B obsahuje $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$ a že každá algebra obsahuje triviální algebru a samu sebe jako své podalgebry.

1.5 Definice. Algebra množin. Nechť X je neprázdná množina. Podalgebra potenční algebry $\mathscr{P}(X)$ se nazývá algebrou podmnožin množiny X nebo stručněji algebrou množin.

Algebra množin je jednoznačně určena neprázdným systémem S podmnožin nějaké neprázdné nosné množiny X, který obsahuje s každými dvěma množinami Y, Z také sjednocení $Y \cup Z$ a doplněk $X - Y$.

Z de Morganových pravidel plyne, že podmínka uzavřenosti systému S na sjednocení může být nahrazena uzavřeností na průnik.

Algebry množin jsou speciálními případy Booleových algeber (existují Booleovy algebry, které nejsou algebrami množin, například algebra $\mathrm{RO}(\mathbb{R}^2)$ z 1.25), jsou však reprezentativním typem. Později ukážeme, že každá Booleova algebra je izomorfní s nějakou algebrou množin.

1.6 Algebraická dualita. Podíváme-li se na axiomy Booleovy algebry, vidíme, že každá formule z dvojice axiomů vznikne z druhé tím, že nahradíme operaci průseku spojením, spojení průsekem a vyměníme úlohu konstant, $\mathbf{0}$ přejde na $\mathbf{1}$ a naopak. Říkáme, že formule uvedené v jedné řádce jsou duální jedna k druhé. V případě posledního axiomu dostaneme $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$, což je s původním axiomem ekvivalentní.

Jinými slovy, je-li $\langle B, \wedge, \vee, -, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ Booleova algebra, potom také struktura $\langle B, \vee, \wedge, -, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$ je Booleovou algebrou.

To znamená, že platí následující princip algebraické duality: je-li φ formule dokazatelná z axiomů (1)–(5), pak i k ní duální formule je z nich dokazatelná. Praktický význam spočívá v tom, že stačí dokazovat polovinu vět, druhou polovinu dostaneme zdarma odkazem na princip duality.

Setkáme se ještě s jiným, důležitějším pojmem duality, s tak zvanou Stoneovou dualitou, která dává do souvislosti Booleovy algebry a kompaktní totálně nesouvislé topologické prostory.

1.7 Lemma. *Pro libovolné prvky x, y Booleovy algebry platí*

(i) *zákony idempotence*

$$x \wedge x = x, \qquad x \vee x = x,$$

(ii) $x \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad x \vee \mathbf{1} = \mathbf{1},$

(iii) *zákony pohlcení*

$$x \wedge (x \vee y) = x, \qquad x \vee (x \wedge y) = x.$$

Důkaz. Vztahy uvedené ve stejném řádku jsou duální, stačí proto dokázat první z nich.

(i) Užitím axiómů v pořadí (3), (4), (2), (4), (3) postupně dostáváme

$$x = x \wedge \mathbf{1} = x \wedge (x \vee -x) = (x \wedge x) \vee (x \wedge -x) = (x \wedge x) \vee \mathbf{0} = x \wedge x.$$

(ii) Použijeme-li axiómy (3), (4), (2), (1) a (3), (1), dostáváme

$$x \wedge \mathbf{0} = (x \wedge \mathbf{0}) \vee \mathbf{0} = (x \wedge \mathbf{0}) \vee (x \wedge -x) = x \wedge (\mathbf{0} \vee -x) = x \wedge -x = \mathbf{0}.$$

(iii) Užijeme-li postupně axióm (3), vztah (ii) dokazovaného lemmatu a dvakrát axiom (2), dostaneme

$$x = x \wedge \mathbf{1} = x \wedge (\mathbf{1} \vee y) = (x \wedge \mathbf{1}) \vee (x \wedge y) = x \vee (x \wedge y).$$

1.8 Definice. Rozdíl a symetrický rozdíl. Rozdíl $x - y$ a symetrický rozdíl $x \triangle y$ libovolných dvou prvků Booleovy algebry definujeme vztahy

$$x - y = x \wedge (-y),$$
$$x \triangle y = (x - y) \vee (y - x).$$

Z axiomu (3) a komutativity je zřejmé, že

$$-x = \mathbf{1} - x.$$

Přepsáním distributivního zákona získáme

$$(x \vee y) - z = (x - z) \vee (y - z).$$

V algebře množin je booleovský (symetrický) rozdíl totožný se (symetrickým) rozdílem množin. Proto jsme si dovolili použít stejné značení pro obě operace.

1.9 Lemma. *Následující podmínky jsou ekvivalentní pro libovolné x, y:*

(i) $x \wedge y = x$,

(ii) $x \vee y = y$,

(iii) $x - y = \mathbf{0}$.

Důkaz. (i) → (ii). Podle zákona pohlcení je $y = y \vee (x \wedge y)$. Podle předpokladu je $x \wedge y = x$ a dosadíme-li x za $x \wedge y$, dostaneme $y = y \vee x$, a to je (ii).

(ii) → (iii). Předpokládáme-li $x \vee y = y$, pak platí $\mathbf{0} = y - y = (x \vee y) - y = (x - y) \vee \mathbf{0} = x - y$, a tedy (iii).

(iii) → (i). Předpokládáme-li $x - y = \mathbf{0}$, pak $x = x \wedge \mathbf{1} = x \wedge (y \vee -y) = (x \wedge y) \vee (x - y) = (x \wedge y) \vee \mathbf{0} = x \wedge y$, a tedy platí (i).

1.10 Pro dvě množiny A, B je rovnost $A \cap B = A$ ekvivalentní s inkluzí $A \subseteq B$ a tento fakt motivuje definici uspořádání Booleovy algebry s podobnými vlastnostmi, jako má množinová inkluze.

1.11 Definice. Kanonické uspořádání. Buď B Booleova algebra. Pro libovolné $x, y \in B$ položme

$$x \leq y \leftrightarrow x \wedge y = x .$$

Relaci $\leq$ na B nazýváme *kanonické uspořádání* algebry B. Pokud bude zřejmé, o jaké uspořádání jde, budeme slovo kanonické vynechávat.

V algebře množin je kanonické uspořádání totožné s inkluzí. V každé algebře je $\mathbf{0} < \mathbf{1}$.

Kanonické uspořádání Booleových algeber úzce spojuje jejich studium se studiem uspořádaných množin. Navíc uspořádání umožňuje rozšířit operace průseku a spojení i na některé nekonečné množiny a soubory prvků Booleovy algebry.

1.12 Věta. *Nechť B je Booleova algebra. Pak*

(i) *$\leq$ je uspořádání na B,*

(ii) *$\mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}$ pro každé $x \in B$,*

(iii) *$x \wedge y = \inf\{x, y\}$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$,*

(iv) *pro každé $x \in B$ má soustava rovnic $x \wedge u = \mathbf{0}$, $x \vee u = \mathbf{1}$ právě jedno řešení $u = -x$.*

Vlastnosti (i)–(iii) říkají, že $(B, \leq)$ je svaz s nejmenším a největším prvkem.

Důkaz. (i) Podle 1.9 víme, že $x \leq y$ je ekvivalentní s $x - y = \mathbf{0}$ i s $x \vee y = y$. Ověříme postupně, že relace $\leq$ je reflexivní, tranzitivní a slabě symetrická. Reflexivita $x \leq x$ není nic jiného než idempotence $x \wedge x = x$. Pro tranzitivitu předpokládejme $x \leq y$ a $y \leq z$. To znamená, že platí $x \vee y = y$ a $y - z = \mathbf{0}$ a z těchto vztahů dostáváme $\mathbf{0} = y - z = (x \vee y) - z = (x - z) \vee \mathbf{0} = x - z$ neboli $x \leq z$. Slabá antisymetrie plyne okamžitě z komutativity, neboť z $x \wedge y = x$ a $y \wedge x = y$ plyne $x = y$.

(ii) Nerovnosti $\mathbf{0} \leq x$ a $x \leq \mathbf{1}$ jsou pouze přepisem axiómů (3) podle definice.

(iii) Zákony pohlcení $x \wedge (x \vee y) = x$, $y \vee (x \wedge y) = y$ implikují $x \wedge y \leq x$ a $x \wedge y \leq y$, tedy prvek $x \wedge y$ je dolní mezí množiny $\{x, y\}$. Nechť z je jiná dolní mez, to znamená, že $z \vee x = x$ a $z \vee y = y$. Potom $z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge \wedge (z \vee y) = x \wedge y$ neboli $z \leq x \wedge y$. Tím jsme dokázali, že $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. Přechod k duálním vztahům dokazuje $x \vee y = \sup\{x, y\}$.

(iv) Axiomy komplementu zaručují, že soustava má řešení $u = -x$. Chceme ukázat, že jiné řešení neexistuje. Připojme k oběma stranám první rovnice $-x$ a dostaneme $-x = -x \vee (x \wedge u) = -x \vee u$ neboli $u \leq -x$. Druhou rovnici prosekneme s $-x$ a dostaneme $-x = -x \wedge (x \vee u) = -x \wedge u$ neboli $-x \leq u$. Tedy nutně $u = -x$.

1.13 Důsledek. (i) *Operace průseku a spojení jsou monotónní; je-li*

$$x \leq y \quad a \quad u \leq v,$$

pak

$$x \wedge u \leq y \wedge v \quad a \quad x \vee u \leq y \vee v,$$

(ii) $-(-x) = x$,

(iii) $x \leq y \leftrightarrow -y \leq -x$, *to znamená, že operace komplementu je prosté antimonotónní zobrazení B na B.*

Důkaz. (i) Monotónnost operací plyne ze vztahu mezi operacemi $\wedge$, $\vee$ a infimemem a supremem ve svazu $(B, \leq)$.

(ii) Soustava $-x \wedge u = \mathbf{0}$, $-x \vee u = \mathbf{1}$ má jediné řešení pro u. Řešeními jsou x i $-(-x)$, jak plyne z komutativity a axiomů komplementu, tedy $x = -(-x)$.

(iii) Z (ii) plyne okamžitě, že pro $x \neq y$ je $-x \neq -y$, tedy komplementace je prosté zobrazení B na B. Vztah $x \leq y$ je ekvivalentní s $x - y = \mathbf{0}$ podle (ii) a to je totéž jako $-y - (-x) = \mathbf{0}$ a tento vztah je ekvivalentní s $-y \leq -x$.

1.14 Nekonečné operace. Booleova algebra B spolu s kanonickým uspořádáním je svaz $\langle B, \leq \rangle$, a tedy pro konečně mnoho prvků z B je

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \inf\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Infimum nekonečné podmnožiny Booleovy algebry může, ale také nemusí existovat. Totéž platí pro supremum.

1.15 Příklad. Nechť C je algebra všech konečných množin přirozených čísel a jejich doplňků. Potom

$$A = \{\{n\} : n \text{ je sudé}\}$$

je nekonečná podmnožina algebry C, která nemá supremum.

1.16 Definice. Nekonečná spojení a průseky. Je-li u infimum množiny $A \subseteq B$, píšeme

$$u = \bigwedge A$$

a prvek u nazýváme *průsekem množiny* A. Jinými slovy, $\bigwedge$ je operace průseku, která je definovaná pro některé podmnožiny algebry. Podobně, je-li v supremum množiny $A \subseteq B$, píšeme

$$v = \bigvee A$$

a $\bigvee$ nazýváme *operací spojení*. Je zřejmé, že $\bigwedge$, $\bigvee$ jsou rozšíření operací $\wedge$, $\vee$ na všechny konečné a některé nekonečné podmnožiny algebry B. Uvědomme si, že platí $\bigvee 0 = \mathbf{0}$, $\bigwedge 0 = \mathbf{1}$, $\bigvee\{x\} = \bigwedge\{x\} = x$, $\bigwedge\{x, y\} = x \wedge y$. Je-li $\langle a_i : i \in I\rangle$ soubor prvků algebry B, pak

$$\bigwedge_{i \in I} a_i \quad \text{a} \quad \bigvee_{i \in I} a_i$$

značí

$$\bigwedge\{a_i : i \in I\} \quad \text{a} \quad \bigvee\{a_i : i \in I\}.$$

V dalším textu budeme pracovat s podmnožinami i se soubory prvků Booleovy algebry.

Podle 1.13(iii) je přechod ke komplementům antimonotónní prosté zobrazení svazu $(B, \leq)$ na sebe. Odtud a z definice suprema a infima okamžitě plyne, že $\bigwedge A$ existuje, právě když existuje $\bigvee\{-x : x \in A\}$, a platí:

1.17 De Morganova pravidla. Pro $A \subseteq B$ je

$$-\bigwedge A = \bigvee\{-x : x \in A\},$$
$$-\bigvee A = \bigwedge\{-x : x \in A\},$$

pokud alespoň jedna strana z rovnosti je definovaná. Speciálně

$$x \wedge y = -(-x \vee -y), \qquad x \vee y = -(-x \wedge -y).$$

Vidíme, že operace vystupující v definici Booleovy algebry jsou nadbytečné. Průsek (spojení) je možno definovat pomocí spojení (průseku) a operace komplementu, a to i pro nekonečné operace.

1.18 Asociativní zákony pro průsek a spojení nebyly uvedeny mezi axiomy (1)–(5). Jsou odvoditelné bezprostředně z vlastností suprema a infima i pro nekonečné operace.

Nechť $\langle J_k : k \in K\rangle$ je soubor množin a

$$I = \bigcup_{k \in K} J_k .$$

Platí

$$\bigwedge_{i \in I} a_i = \bigwedge\{\bigwedge_{i \in J_k} a_i : k \in K\},$$
$$\bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee\{\bigvee_{i \in J_k} a_i : k \in K\},$$

s následující interpretací: mají-li výrazy na pravé straně smysl, pak má smysl i výraz na levé straně a oba výrazy se rovnají. Speciálně

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \qquad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$$

a tedy výrazy

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n, \qquad x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$$

mají jednoznačný význam.

Zajímavější a důležitější jsou vztahy, ve kterých se vyskytují obě operace, průseku i spojení.

1.19 Nekonečné distributivní zákony. Existují-li

$$\bigvee_{i \in I} a_i \quad \text{a} \quad \bigvee_{j \in J} b_j,$$

respektive

$$\bigwedge_{i \in I} a_i \quad \text{a} \quad \bigwedge_{j \in J} b_j,$$

pak pro libovolné $c \in B$ platí

(i) $c \wedge \bigvee a_i = \bigvee \{c \wedge a_i : i \in I\}$,

(ii) $c \vee \bigwedge a_i = \bigwedge \{c \vee a_i : i \in I\}$,

(iii) $\bigvee_{i \in I} a_i \wedge \bigvee_{j \in J} b_j = \bigvee \{a_i \wedge b_j : \langle i, j \rangle \in I \times J\}$,

(iv) $\bigwedge_{i \in I} a_i \vee \bigwedge_{j \in J} b_j = \bigwedge \{a_i \vee b_j : \langle i, j \rangle \in I \times J\}$.

Důkaz. Dokážeme postupně vztahy (i) a (iii), zbývající jsou duální.

(i) Položme $a = \bigvee a_i$. Jelikož $a \geq a_i$, je také

$$c \wedge a \geq c \wedge a_i,$$

a tedy $c \wedge a$ je majorantou množiny $\{c \wedge a_i : i \in I\}$. K důkazu rovnosti stačí ukázat, že pro každou majorantu d platí $d \geq c \wedge a$. Nechť tedy $d \geq c \wedge a_i$ pro každé $i \in I$. Potom platí

$$a_i = (c \wedge a_i) \vee (-c \wedge a_i) \leq d \vee -c$$

pro každé $i \in I$ a z toho plyne, že

$$a \leq d \vee -c.$$

Pronikneme-li obě strany prvkem c, dostaneme požadovanou nerovnost

$$c \wedge a \leq c \wedge d \leq d.$$

(iii) Položme $a = \bigvee a_i$, $b = \bigvee b_j$. Využijeme již dokázaného vztahu (i), z kterého plyne

$$a \wedge b = \bigvee \{a \wedge b_j : j \in J\}$$

a také

$$a \wedge b_j = b_j \wedge a = \bigvee\{b_j \wedge a_i : i \in I\}$$

pro každé $j \in J$. Dosadíme-li, pak z asociativního zákona 1.18 dostaneme

$$a \wedge b = \bigvee\{\bigvee_{i \in I} a_i \wedge b_j : j \in J\} = \bigvee\{a_i \wedge b_j : \langle i, j \rangle \in I \times J\}.$$

Nekonečné operace dovolují klasifikovat Booleovy algebry podle úplnosti.

1.20 Definice. Úplná Booleova algebra. Buď $\varkappa$ nekonečné kardinální číslo.

(i) Booleova algebra B se nazývá *$\varkappa$-úplná*, jestliže pro každou množinu $X \subseteq B$ mohutnosti menší než $\varkappa$ existuje průsek $\bigwedge X$.

(ii) Algebra B se nazývá *úplnou Booleovou algebrou*, jestliže existuje průsek pro každou podmnožinu algebry B.

(iii) Říkáme, že podalgebra C úplné Booleovy algebry B je *úplná* (*$\varkappa$-úplná*) *podalgebra*, jestliže pro každou množinu $X \subseteq C$ ($|X| < \varkappa$) průsek $\bigwedge_B X \in C$.

Z de Morganových pravidel plyne, že v $\varkappa$-úplné algebře jsou obě operace $\bigwedge$ i $\bigvee$ definovány pro všechny podmnožiny mohutnosti menší než $\varkappa$. V úplné algebře B je definiční obor operací $\bigwedge$ a $\bigvee$ celá potence množiny B. Každá algebra je ω-úplná, a tedy konečné algebry jsou úplné.

V algebrách množin booleovské operace souhlasí s množinovými. Pro algebry množin definujeme silnější pojem $\varkappa$-úplnosti tak, aby i nekonečné booleovské operace souhlasily s množinovými.

1.21 Definice. $\varkappa$-algebra množin. Říkáme, že algebra množin A je $\varkappa$-algebrou, jestliže pro každý systém $S \in [A]^{<\varkappa}$ je $\bigcap S \in A$.

To znamená, že průsek systému S existuje a je totožný s průnikem $\bigcap S$.

Pojem $\varkappa$-algebry je víc než to, že algebra množin je $\varkappa$-úplnou Booleovou algebrou. Později uvidíme, že existují algebry množin, které nejsou uzavřeny na průniky spočetných podsystémů, tedy nejsou ω_1-algebrami množin, ale přesto jsou ω_1-úplnými Booleovými algebrami.

1.22 Matematicky nejzajímavější jsou ω_1-algebry množin a ω_1-úplné Booleovy algebry, které mají přímý vztah k teorii míry a k teorii pravděpodobnosti. Je pro ně vžitý starší název σ-algebry množin a σ-úplné Booleovy algebry. Pro teorii množin mají velký význam úplné Booleovy algebry.

1.23 Booleova algebra regulárních otevřených množin. Připomeneme nejprve základní topologické pojmy a fakta. Buď X topologický prostor. Je-li $A \subseteq X$, $\mathrm{cl}(A)$ bude označovat uzávěr a $\mathrm{int}(A)$ bude označovat vnitřek množiny A v prostoru X. Připomeňme, že $\mathrm{cl}(A)$ je nejmenší uzavřená nadmnožina a $\mathrm{int}(A)$ je největší otevřená podmnožina množiny A. Pro $A \subseteq X$ položíme $\mathrm{r}(A) = \mathrm{int\,cl}(A)$ a $\mathrm{r}(A)$ budeme nazývat *regularizací množiny A*.

Množina $A \subseteq X$ se nazývá řídká v X, jestliže $\mathrm{r}(A) = 0$. Je-li $\mathrm{cl}(A) = X$, to znamená, že také $\mathrm{r}(A) = X$, říkáme, že A je *hustá* v X.

Množina A je hustá, právě když má neprázdný průnik s každou neprázdnou otevřenou množinou. Množina A je *řídká*, právě když pro každou neprázdnou otevřenou množinu U existuje neprázdná otevřená $V \subseteq U$, která je s A disjunktní.

Je zřejmé, že $\mathrm{r}(0) = 0$, $\mathrm{r}(X) = X$ a pro každou otevřenou množinu A je $A \cup \mathrm{int}(X - A)$ hustá množina v X.

1.24 Definice (Kuratowski). Říkáme, že A je *regulární otevřená množina*, jestliže $\mathrm{r}(A) = A$.

Systém všech regulárních otevřených množin prostoru X označíme $\mathrm{RO}(X)$.

1.25 Volně řečeno, otevřená množina je regulární, nemá-li žádné praskliny. Rovina $\mathbb{R}^2$ bez osy x je otevřená množina v $\mathbb{R}^2$, ale není regulární. Její uzávěr i regularizace je celý prostor. Naproti tomu obě otevřené poloroviny jsou regulární otevřené množiny. Sjednocení dvou regulárních otevřených množin nemusí být regulární otevřená množina. To znamená, že $\mathrm{RO}(X)$ nemusí být algebrou množin.

Množina je regulární otevřená, právě když je vnitřkem nějaké uzavřené množiny. Speciálně pro otevřenou množinu A je $\mathrm{r}(X - A) = \mathrm{int}(X - A)$. Je-li $A \subseteq B \subseteq X$, z monotónnosti operací uzávěru a vnitřku dostáváme $\mathrm{r}(A) \subseteq \mathrm{r}(B)$. To znamená, že regularizace je také monotónní. Snadno nahlédneme, že pro otevřenou množinu A je $A \subseteq \mathrm{r}(A)$ a že pro každou množinu A je $\mathrm{r}(\mathrm{r}(A)) = \mathrm{r}(A)$, tedy $\mathrm{r}(A) \in \mathrm{RO}(X)$.

1.26 Ukážeme, že regulární otevřené množiny s vhodně zvolenými operacemi tvoří úplnou Booleovu algebru, kterou budeme nazývat *Booleovu algebrou regulárních otevřených množin.*

Nejprve ověříme, že pro otevřené množiny A, B platí

$$\mathrm{r}(A \cap B) = \mathrm{r}(A) \cap \mathrm{r}(B). \tag{6}$$

Průnik $A \cap B$ je částí A i B a z monotónnosti regularizace plyne, že v (6) je levá strana podmnožinou pravé.

Uvědomme si, že pro otevřenou množinu P a libovolnou množinu Q topologického prostoru platí

$$P \cap \mathrm{cl}(Q) \subseteq \mathrm{cl}(P \cap Q). \tag{7}$$

Proto v našem případě je

$$A \cap \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cap B),$$

a tedy

$$A \cap \mathrm{r}(B) \subseteq \mathrm{r}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cap B).$$

$\mathrm{r}(B)$ je otevřená množina a opakovaným užitím (7) dostaneme $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{r}(B) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{cl}(A \cap \mathrm{r}(B)) \subseteq \mathrm{cl}(A \cap B)$, odkud plyne

$$\mathrm{r}(A) \cap \mathrm{r}(B) \subseteq \mathrm{r}(A \cap B).$$

Z právě dokázané rovnosti (6) plyne, že průnik konečného počtu regulárních otevřených množin je opět regulární otevřená množina. Naproti tomu průnik nekonečného systému regulárních otevřených množin nemusí být regulární otevřená množina. Každý otevřený interval na reálné přímce je regulární otevřená množina, ale průnik všech otevřených intervalů obsahujících nulu nepatří do $\mathrm{RO}(\mathbb{R})$.

1.27 Věta. *Regulární otevřené množiny* $\mathrm{RO}(X)$ *neprázdného topologického prostoru* X *s operacemi*

$$A \wedge B = A \cap B, \qquad A \vee B = \mathrm{r}(A \cup B),$$
$$-A = \mathrm{int}(X - A)$$

a konstantami $\mathbf{0} = 0$, $\mathbf{1} = X$ *tvoří úplnou Booleovu algebru. Navíc, je-li* $S \subseteq \mathrm{RO}(X)$, *pak*

$$\bigwedge S = \mathrm{r}\left(\bigcap S\right), \qquad \bigvee S = \mathrm{r}\left(\bigcup S\right).$$

Důkaz. Víme, že zvolené operace dávají z regulárních otevřených množin opět regulární otevřené množiny. Komutativita průseku a spojení plyne z komutativity množinových operací. Je zřejmé, že $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ a že $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ jsou neutrální. Je-li $A \in \mathrm{RO}(X)$, potom

$$A \wedge -A = A \cap \mathrm{int}(X - A) = 0$$

a

$$A \vee -A = \mathrm{r}(A \cup \mathrm{int}(X - A)) = X,$$

protože na pravé straně je regularizace husté množiny.

Ověříme distributivní zákony. Nechť $A, B, C \in \mathrm{RO}(X)$. Pro množinové operace platí

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Na obě strany rovnosti aplikujeme regularizaci a užijeme (6). Pro levou stranu dostaneme

$$\mathrm{r}(A \cap (B \cup C)) = \mathrm{r}(A) \cap \mathrm{r}(B \cup C) = A \wedge (B \vee C)$$

a pro pravou stranu

$$\mathrm{r}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

tedy platí

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Druhý distributivní zákon lze ověřit stejným způsobem.

Zbývá ověřit úplnost. Víme, že průsek je totožný s průnikem, to znamená, že kanonické uspořádání je množinová inkluze. Nechť $S \subseteq \mathrm{RO}(X)$ a položme $A = \mathrm{r}\left(\bigcap S\right)$. Množina A je regulární otevřená a pro každé $B \in S$ je $A \subseteq \mathrm{r}(B) = B$,

A je tedy minorantou systému S. Nechť $C \in \mathrm{RO}(X)$ je libovolná minoranta systému S. Potom $C \subseteq \bigcap S$ a z monotónnosti regularizace plyne $C \subseteq A$. Tedy A je největší minorantou množiny S, to znamená, že $A = \bigwedge S$. Podobně se ukáže, že $\bigvee S = \mathrm{r}(\bigcup S)$. $\mathrm{RO}(X)$ je tedy úplná Booleova algebra.

Všimněme si, že pro každý topologický prostor platí $\mathrm{CO}(X) \subseteq \mathrm{RO}(X)$ a navíc je algebra obojetných množin podalgebrou algebry $\mathrm{RO}(X)$.

1.28 Definice. Topologický prostor X se nazývá *extremálně nesouvislý*, jestliže $\mathrm{CO}(X) = \mathrm{RO}(X)$.

Prostor je extremálně nesouvislý, právě když uzávěr libovolné otevřené množiny je otevřená, tedy obojetná množina. V extremálně nesouvislých prostorech je Booleova algebra regulárních otevřených množin algebrou množin.

V § 2 uvidíme, že každá úplná Booleova algebra je izomorfní s algebrou regulárních otevřených množin nějakého topologického prostoru. Prostor $\beta\omega$ všech ultrafiltrů na přirozených číslech je nejjednodušším příkladem nekonečného kompaktního extremálně nesouvislého Hausdorffova prostoru.

1.29 Příklady. V následujících příkladech předpokládáme, že X je neprázdný topologický prostor.

(a) *Borelovské množiny.* Nejmenší σ-algebra podmnožin prostoru X obsahující všechny otevřené množiny se nazývá σ-algebra borelovských množin a značíme ji $\mathrm{Borel}(X)$. Její prvky nazýváme borelovské množiny.

To znamená, že borelovské množiny získáme z otevřených množin použitím libovolného počtu operací doplňku, sjednocení spočetně mnoha a průniku spočetně mnoha množin.

Všechny uzavřené množiny jsou borelovské a $\mathrm{Borel}(X)$ je také nejmenší σ-algebrou, která je obsahuje.

Hierarchie borelovských množin (Lebesgue, 1905). Definujeme podmnožiny Σ_α a Π_α potence $\mathscr{P}(X)$ prostoru X:

Σ_0 je množina všech otevřených množin,

Π_0 je množina všech uzavřených množin, tedy doplňků množin ze Σ_0,

pro $\alpha > 0$

Σ_α je množina všech sjednocení nejvýše spočetných podsystémů množiny $\bigcup_{\beta<\alpha} \Pi_\beta$,

Π_α je množina všech průniků nejvýše spočetných podsystémů množiny $\bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_\beta$.

Prvky ze Σ_α a Π_α se nazývají Σ_α-množiny a Π_α-množiny. Místo Σ_1, Π_1 se používá také značení F_σ, G_δ. Tedy G_δ-množina je průnikem spočetně mnoha otevřených množin.

Základní inkluze mezi borelovskými třídami znázorňují šipky v následujícím diagramu:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_0 \arrow[dr] & \Sigma_1 \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_2 \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_3 \arrow[r] & \dots \\
\Pi_0 \arrow[ur] & \Pi_1 \arrow[r] \arrow[ur] & \Pi_2 \arrow[r] \arrow[ur] & \Pi_3 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Je-li X metrický prostor, platí také $\Pi_0 \subseteq \Pi_1$ a $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$, protože každou uzavřenou množinu A získáme jako průnik otevřených $1/n$-okolí množiny A.

První nespočetné ordinální číslo ω_1 je regulární kardinál. Proto pro libovolný spočetný systém

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha$$

existuje $\beta < \omega_1$ takové, že $S \subseteq \Pi_\beta$. To znamená, že

$$\operatorname{Borel}(X) = \bigcup_{\beta < \omega_1} \Pi_\beta = \bigcup_{\beta < \omega_1} \Sigma_\beta .$$

σ-algebra borelovských množin slouží jako přirozený definiční obor σ-aditivních měr na topologickém prostoru. Takovým mírám se říká borelovské míry.

Triviálním příkladem borelovské míry je dvouhodnotová míra určená bodem z příkladu I.8.22. Důležitým příkladem je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$.

(b) *Hubené množiny, množiny s Baireovou vlastností.* Každá podmnožina řídké množiny i sjednocení dvou řídkých množin jsou řídké množiny. Řídké množiny tvoří ideál na X, protože celý prostor X není řídká množina v X.

Říkáme, že $A \subseteq X$ je *hubená* množina (podle staršího názvu množina první kategorie), jestliže je sjednocením nejvýše spočetně mnoha řídkých množin.

Je zřejmé, že každá řídká množina je hubená a že sjednocení spočetně mnoha hubených množin je opět hubená množina. Pokud celý prostor není sjednocením spočetně mnoha řídkých množin, tvoří hubené množiny σ-úplný ideál na X.

Říkáme, že $A \subseteq X$ má *Baireovu vlastnost*, jestliže existuje otevřená množina G taková, že množiny $A - G$ i $G - A$ jsou hubené. Tedy množina má Baireovu vlastnost, liší-li se od otevřené množiny o hubenou množinu.

Ukážeme, že množiny s Baireovou vlastností tvoří σ-algebru podmnožin prostoru X. Budeme ji značit $\operatorname{Baire}(X)$. Nejprve dokážeme, že doplněk $X - A$ má Baireovu vlastnost, jakmile $A \in \operatorname{Baire}(X)$. Nechť G je otevřená množina, která se liší od A o hubenou množinu. Položme $G_0 = \operatorname{int}(X - G) = X - \operatorname{cl} G$. Protože

$$(X - A) - G_0 \subseteq \operatorname{cl}(G) - A \subseteq (G - A) \cup (\operatorname{cl}(G) - G),$$
$$G_0 - (X - A) \subseteq A - \operatorname{cl}(G) \subseteq A - G$$

a $\operatorname{cl}(G) - G$ je řídká množina, $X - A$ se liší od G_0 o hubenou množinu. Tedy $X - A \in \operatorname{Baire}(X)$.

Zbývá ukázat, že množiny s Baireovou vlastností jsou uzavřeny na sjednocení spočetných systémů. Předpokládejme, že pro každé přirozené n se A_n liší od otevřené množiny G_n o hubenou množinu. Položme $A = \bigcup A_n$, $G = \bigcup G_n$. Protože

$$A - G \subseteq \bigcup (A_n - G_n),$$
$$G - A \subseteq \bigcup (G_n - A_n)$$

a na pravých stranách jsou spočetná sjednocení hubených množin, tedy také hubené množiny, má množina A Baireovu vlastnost.

Tím jsme dokázali, že systém $\mathrm{Baire}(X)$ je σ-algebrou množin. Navíc $\mathrm{Baire}(X)$ je nejmenší σ-algebrou podmnožin prostoru X, která obsahuje všechny otevřené a hubené množiny v X. To znamená, že

$$\mathrm{Borel}(X) \subseteq \mathrm{Baire}(X). \tag{8}$$

(c) *Baireovské prostory, Baireova věta.* Prostor X se nazývá baireovský, jestliže žádná neprázdná otevřená množina $A \subseteq X$ není hubená.

Ekvivalentní podmínka: průnik spočetně mnoha otevřených hustých množin prostoru X je hustý v X.

Baireova věta. *Úplné metrické prostory i kompaktní topologické prostory jsou baireovské.*

Baireova věta patří do zlatého fondu matematiky a její důkaz čtenář nalezne v každé učebnici funkcionální analýzy nebo topologie. Poznamenejme, že důkaz Baireovy věty pro separabilní úplné metrické prostory nepotřebuje žádnou formu axiomu výběru.

(d) *Ultrafiltry na ω a borelovské množiny.* Ztotožníme-li podmnožiny přirozených čísel s jejich charakteristickými funkcemi, ztotožníme $\mathscr{P}(\omega)$ a ${}^{\omega}2$. Tím na množinu $\mathscr{P}(\omega)$ přeneseme topologii Cantorova diskontinua D. Každý ultrafiltr na ω je nějaká podmnožina prostoru D a ptáme se, kdy má Baireovu vlastnost.

Je-li $\mathscr{U}$ triviální ultrafiltr nad $n \in \omega$, pak $\mathscr{U} = \{f \in {}^{\omega}2 : f(n) = 1\}$ je obojetná množina báze S z příkladu 1.2(f). Vidíme, že nejmenší σ-algebra podmnožin prostoru D, která obsahuje všechny triviální ultrafiltry, obsahuje všechny otevřené množiny, a je proto rovna algebře borelovských množin.

Použijeme Baireovu větu a ukážeme, že žádný netriviální ultrafiltr na ω nemá Baireovu vlastnost. Z toho plyne podle (8), že není také borelovskou množinou. Uvažujme libovolnou obojetnou množinu $V(f)$ z báze S určenou zobrazením f konečné množiny $K \subseteq \omega$ do $\{0, 1\}$. Definujme zobrazení $\varphi_f : D \to D$ tak, že pokud $h \notin V(f)$, pak $\varphi_f(h) = h$, a pokud $h \in V(f)$, pak $\varphi_f(h)(n)$ je opačná hodnota k $h(n)$ pro $n \in \omega - K$ a $\varphi_f(h)(n) = h(n)$ pro $n \in K$.

Je zřejmé, že φ_f je homeomorfismus prostoru D, a protože $\mathscr{U}$ je uniformní, pro duální ideál $\mathscr{U}^*$ platí

$$\varphi_f[V(f) \cap \mathscr{U}^*] = V(f) \cap \mathscr{U}.$$

Homeomorfismus převádí řídké množiny na řídké, a tedy i hubené množiny na hubené. Podle Baireovy věty $V(f)$ není hubená a jelikož

$$V(f) = (V(f) \cap \mathcal{U}) \cup (V(f) \cap \mathcal{U}^*),$$

není hubená ani množina $V(f) \cap \mathcal{U}$, ani $V(f) \cap \mathcal{U}^*$.

Předpokládejme, že ultrafiltr $\mathcal{U}$ má Baireovu vlastnost. Nechť G je otevřená množina lišící se od $\mathcal{U}$ o hubenou množinu. Víme, že $\mathcal{U} = V(0) \cap \mathcal{U}$ není hubená množina, proto G je neprázdná. Vezměme libovolnou množinu $V(f) \subseteq G$ z báze. Jelikož $G - \mathcal{U} \supseteq V(f) - \mathcal{U} = V(f) \cap \mathcal{U}^*$, dostáváme, že $V(f) \cap \mathcal{U}^*$ je hubená množina, a to je spor. Dokázali jsme, že žádný uniformní ultrafiltr na ω není množinou s Baireovou vlastností v Cantorově diskontinuu.

§ 2 Strukturální vlastnosti Booleových algeber

Nejprve se seznámíme se speciálními typy podmnožin Booleových algeber, jako jsou množiny disjunktních prvků, rozklady jednotky, husté množiny, množiny atomů a množiny generátorů. Ukážeme, že libovolná uspořádaná množina určuje jednoznačně úplnou Booleovu algebru. Budeme se zabývat obecnějším pojmem distributivnosti Booleových algeber, který souvisí se zjemňováním rozkladů. Kolapsující algebry $C(\omega, \varkappa)$ jsou příkladem úplných algeber, které mají pouze spočetnou množinu úplných generátorů. Kolapsující algebry jsou navíc univerzální v tom smyslu, že každou Booleovu algebru s hustou množinou mohutnosti nejvýše $\varkappa$ lze úplně vnořit do algebry $C(\omega, \varkappa)$. Seznámíme se s konstrukcemi nových algeber pomocí součinu, volného součinu a faktorizace. V závěru zavedeme pojmy ideálu a ultrafiltru pro Booleovy algebry a připomeneme klasické výsledky M. H. Stonea o reprezentaci Booleových algeber algebrami množin a o Stoneově dualitě mezi Booleovými algebrami a booleovskými topologickými prostory.

V dalším budou písmena A, B, C vždy označovat Booleovy algebry.

2.1 Faktory. Pro nenulový prvek $b \in B$ označíme $B \mid b$ množinu

$$\{x \in B : x \leq b\}$$

všech prvků algebry B, které jsou menší nebo rovny b. Množina $B \mid b$ spolu se zúžením operací $\wedge$, $\vee$ a operací komplementu $-_b$ definovanou vztahem $-_b x = b - x$ a konstantami $\mathbf{0}$ a b je také Booleova algebra. Nazýváme ji *faktorem* nebo *zúžením algebry* B a značíme stejně jako její univerzum $B \mid b$.

2.2 Disjunktnost.

(i) Říkáme, že prvky $x, y \in B$ jsou *disjunktní*, a značíme $x \perp y$, jestliže $x \wedge y = \mathbf{0}$. Nejsou-li prvky x, y disjunktní, říkáme, že jsou *kompatibilní*.

(ii) Říkáme, že $X \subseteq B$ je *množina disjunktních prvků*, jestliže všechny prvky z X jsou nenulové a po dvou disjunktní.

(iii) Množina P disjunktních prvků je rozkladem prvku $b \in B$, jestliže $b = \bigvee P$.

Podle lemmatu 1.9 platí

(1) $$x \not\leq y \leftrightarrow x - y \neq \mathbf{0}\,.$$

Odtud plyne důležitý vztah (2) mezi kanonickým uspořádáním a disjunktností:

(2) $x \nleq y$, právě když existuje nenulový prvek $z \leq x$ disjunktní s y.

Systém všech množin disjunktních prvků algebry B je uspořádán inkluzí a splňuje podmínky principu maximality. Odtud plyne, že každou množinu disjunktních prvků lze rozšířit do maximální. Přitom platí

2.3 Lemma. *Množina $P \subseteq B$ je maximální množina disjunktních prvků, právě když P je rozkladem jednotkového prvku $\mathbf{1}_B$.*

Důkaz. Nechť P je maximální množina disjunktních prvků. Ukážeme, že $\sup P = \bigvee P = \mathbf{1}$. Nechť $u \in B$ je libovolná majoranta množiny P. Kdyby $u \neq \mathbf{1}$, pak komplement $-u$ je nenulový a disjunktní se všemi prvky z P, to je spor s maximalitou množiny P. Tedy jednotkový prvek je jediná majoranta množiny P a $\bigvee P = \mathbf{1}$.

Naopak předpokládejme, že $\bigvee P = \mathbf{1}$. Stačí ukázat, že každé nenulové u je kompatibilní s nějakým prvkem z P. Nechť $u \neq 0$. Potom $-u \neq \mathbf{1}$, a proto prvek $-u$ není majorantou množiny P. Tedy pro nějaké $x \in P$ platí $x \nleq -u$ a podle (1) dostáváme $x \wedge u \neq \mathbf{0}$ a u je kompatibilní s x.

Ve shodě s obdobnou definicí pro uspořádané množiny (III.1.22) Suslinovo číslo $\mathrm{c}(B)$ Booleovy algebry B je supremum mohutností všech množin disjunktních prvků algebry B.

2.4 Definice. Saturovanost algebry B je nejmenší kardinální číslo $\varkappa$ takové, že v algebře B neexistuje množina disjunktních prvků, která má mohutnost $\varkappa$. Tedy

$$\mathrm{sat}(B) = \min\{\varkappa : \text{pro každou množinu } X \subseteq B \text{ disjunktních prvků je } |X| < \varkappa\}.$$

Je zřejmé, že $\mathrm{c}(B) \leq \mathrm{sat}(B)$. Mohou nastat dva případy. Buď nějaká množina disjunktních prvků má mohutnost Suslinova čísla $\mathrm{c}(B)$, pak $\mathrm{sat}(B) = (\mathrm{c}(B))^+$, nebo žádná množina disjunktních prvků nenabývá mohutnosti $\mathrm{c}(B)$, potom $\mathrm{sat}(B) = \mathrm{c}(B)$. Pro nekonečné algebry platí následující tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

2.5 Věta (Erdös, Tarski 1943). *Saturovanost každé nekonečné Booleovy algebry je nespočetný regulární kardinál.*

Z této věty plyne, že rovnost $\mathrm{sat}(B) = \mathrm{c}(B)$ může nastat, jen když $\mathrm{sat}(B)$ je slabě nedosažitelný kardinál. V příkladu 2.25(h) ukážeme, že pro každý slabě nedosažitelný kardinál $\varkappa$ existuje Booleova algebra B taková, že $\mathrm{sat}(B) = \varkappa$.

2.6 Definice. Atomy.

(i) Říkáme, že prvek $a \in B$ je *atom*, je-li $a \neq \mathbf{0}$ a pro žádné $b \in B$ neplatí $\mathbf{0} < b < a$. Množinu všech atomů algebry B značíme $\mathrm{At}(B)$.

(ii) Je-li $\mathrm{At}(B)$ prázdná množina, říkáme, že B je *bez atomů*.

(iii) Říkáme, že algebra B je *atomární*, jestliže pod každým nenulovým prvkem existuje nějaký atom.

Je zřejmé, že $\mathrm{At}(B)$ je množina disjunktních prvků. Uvědomme si, že algebra, která není atomární, ještě nemusí být bez atomů. Booleova algebra B je atomární, právě když množina $\mathrm{At}(B)$ je rozkladem jednotkového prvku. Snadno se dokáže:

2.7 Lemma. *Pro každé $a \in B$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *a je atom,*

(ii) *$B \mid a$ je dvouprvková algebra,*

(iii) *pro každé $b \in B$ platí $a \leq b$ nebo $a \wedge b = \mathbf{0}$.*

2.8 Konečné Booleovy algebry jsou atomární. Předpokládejme, že B není atomární, pak existuje nenulové $b \in B$, pod kterým není žádný atom. Můžeme vybrat nekonečnou klesající posloupnost $b = b_0 > b_1 > \ldots$ prvků menších než b. Odtud plyne, že neatomární algebra je vždy nekonečná a že každá konečná algebra je atomární.

Předpokládejme, že B je atomární algebra. Jelikož pro různá $x, y \in B$ je symetrická diference $x \triangle y$ nenulová, každý atom, který pod ní leží, je právě pod jedním z prvků x, y a s druhým je disjunktní. To znamená, že zobrazení f, které každému $b \in B$ přiřazuje množinu

$$f(b) = \{a \in \mathrm{At}(B) : a \leq b\}, \tag{3}$$

je prosté zobrazení atomární Booleovy algebry B do potenční množiny $\mathscr{P}(\mathrm{At}(B))$. Navíc pro každé $b \in B$ platí $b = \bigvee f(b)$.

2.9 Věta. *Je-li B nekonečná Booleova algebra, potom v B existuje*

(i) *nekonečná klesající posloupnost,*

(ii) *nekonečná množina disjunktních prvků, tedy* $\mathrm{sat}(B) \geq \omega_1$.

Důkaz. Nejprve předpokládáme, že B je atomární. Potom $\mathrm{At}(B)$ je nekonečná množina disjunktních prvků, tedy platí (ii). Vybereme-li prostou posloupnost atomů $\langle a_n : n < \omega \rangle$, stačí pro každé přirozené i položit $b_i = -\bigvee\{a_n : n \leq i\}$ a dostaneme nekonečnou klesající posloupnost $\langle b_i : i < \omega \rangle$. Tedy platí (i).

Nyní předpokládáme, že B není atomární. Z 2.8 víme, že potom existuje nekonečná klesající posloupnost $\langle b_n : n < \omega \rangle$. Položíme-li $a_n = b_n - b_{n+1}$, potom $\{a_n : n < \omega\}$ je nekonečná množina disjunktních prvků.

2.10 Husté množiny. Říkáme, že množina $H \subseteq B$ nenulových prvků je *hustá v B*, jestliže pro každé nenulové $b \in B$ existuje $x \in H$ takové, že $x \leq b$.

Je zřejmé, že pro každou algebru B je množina $B - \{\mathbf{0}\}$ hustá v B. Každá hustá množina musí obsahovat všechny atomy. Algebra B je atomární, právě když množina všech jejích atomů je hustá v B.

2.11 Lemma. *Je-li H hustá množina v B, potom pro libovolné $b \in B$ platí*

(i) $b = \bigvee\{x \in H : x \leq b\}$,

(ii) *existuje rozklad prvku b, který sestává jen z prvků množiny H.*

Důkaz. Pro zvolené $b \in B$ položme $X = \{x \in H : x \leq b\}$. Je-li $b = \mathbf{0}$, potom X je prázdná množina, tedy $\sup X$ je nejmenší prvek $\mathbf{0}$ v B. Nechť $b \neq \mathbf{0}$. Potom

$X \neq 0$ a je zřejmé, že b je majorantou množiny X. Potřebujeme ověřit, že pro libovolnou majorantu c množiny X platí $b \leq c$. V opačném případě je $b \nleq c$ a podle (2) existuje $u \in H$ takové, že $u \leq b$, tedy $u \in X$, a současně je u disjunktní s c, spor. Stejným způsobem se dokáže, že každá maximální množina disjunktních prvků z X je rozkladem prvku b.

Právě dokázané tvrzení naznačuje, že každá hustá množina spolu s kanonickým uspořádáním odráží strukturu celé algebry.

Důležitá vlastnost uspořádání husté množiny je separovanost. Je-li H hustá podmnožina algebry B, z (2) plyne, že pro libovolné $x, y \in H$ platí

$$x \nleq y \rightarrow (\exists z \in H)(z \leq x \,\&\, z \perp y), \tag{4}$$

kde $z \perp y$ znamená disjunktnost v uspořádání $\langle H, \leq \rangle$. Uvědomme si, že (4) je vyjádřena jen pomocí uspořádání množiny H.

2.12 Definice. Separované uspořádání. Říkáme, že uspořádání $\leq$ na neprázdné množině H je *separované*, jestliže pro každé $x, y \in H$ platí (4).

Víme, že kanonické uspořádání je separované na každé husté podmnožině Booleovy algebry. Ukážeme v 2.17, že každá množina separovaně uspořádaná je hustou množinou v nějaké jednoznačně určené úplné Booleově algebře. Nejprve připomeneme důležité pojmy vnoření a izomorfismu.

2.13 Definice. Úplné vnoření, izomorfismus.

(i) Říkáme, že zobrazení $f: A \rightarrow B$ je vnoření algebry A do algebry B, jestliže f je prosté zobrazení a zachovává konečné booleovské operace: pro libovolné $x, y \in A$ platí $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ a $f(-x) = -f(x)$.

(ii) Jestliže navíc platí

$$f(\bigwedge X) = \bigwedge f[X]$$

pro každou množinu $X \subseteq A$, která má infimum $\bigwedge X$ v A, říkáme, že f je úplné vnoření A do B.

(iii) Je-li $f: A \rightarrow B$ vnoření a $f[A] = B$, říkáme, že f je izomorfismus A na B. Algebry A a B jsou izomorfní, značíme $A \cong B$, jestliže existuje izomorfismus A na B.

Je zřejmé, že vnoření zachovává kanonické uspořádání a nejmenší a největší prvek. Izomorfismus algebry A na B je také úplným vnořením. Jsou-li algebry A a B izomorfní a je-li jedna z nich úplná nebo $\varkappa$-úplná, totéž platí pro druhou algebru.

2.14 Atomární algebry a algebry množin. Je-li B atomární Booleova algebra, snadno se ověří, že zobrazení (3) z 2.8 je úplné vnoření algebry B do potenční algebry $\mathscr{P}(\mathrm{At}(B))$. Každá atomární algebra je tedy izomorfní s nějakou algebrou množin. Je-li B navíc konečná, pak je izomorfní s potenční algebrou $\mathscr{P}(n)$ pro nějaké přirozené $n > 0$. Mohutnosti konečných algeber jsou právě všechny mocniny 2^n pro $n > 0$.

Ukážeme, že úplná Booleova algebra je jednoznačně určená libovolnou hustou podmnožinou a jejím kanonickým uspořádáním.

2.15 Věta. *Jsou-li B_1, B_2 úplné Booleovy algebry takové, že nějaká hustá podmnožina $H_1 \subseteq B_1$ je izomorfní s nějakou hustou podmnožinou $H_2 \subseteq B_2$ vzhledem ke kanonickým uspořádáním, potom algebry B_1, B_2 jsou izomorfní.*

Důkaz. Předpokládáme, že $j: H_1 \to H_2$ je izomorfismus hustých podmnožin vzhledem ke kanonickým uspořádáním $\leq_1$ a $\leq_2$. Ukážeme, že existuje dokonce jediný izomorfismus J algebry B_1 na B_2, který rozšiřuje zobrazení j. Pro libovolné $x \in B_1$ definujme

$$(5) \qquad J(x) = \bigvee\nolimits_2 \{j(y): y \in H_1 \;\&\; y \leq_1 x\}.$$

Z úplnosti algeber plyne, že J je zobrazení B_1 do B_2. Nejprve ověříme, že J rozšiřuje zobrazení j. Pro libovolné $x \in H_1$ máme $J(x) = \bigvee_2 \{z \in H_2: z \leq_2 j(x)\}$. Podle 2.11(i) je spojení rovno $j(x)$, a tedy $J(x) = j(x)$. Ukážeme, že J je zobrazení na celou algebru B_2. Využijeme toho, že izomorfismus j zachovává disjunktnost. Mějme libovolné $z \in B_2$ a položme $x = \bigvee_1 \{y \in H_1: j(y) \leq_2 z\}$. Je zřejmé, že $z \leq_2 J(x)$. Není možné, aby platilo $J(x) \not\leq_2 z$. V opačném případě existuje $z_0 \in H_2$ takové, že $z_0 \leq_2 J(x)$ a z_0 je disjunktní se z. Položíme-li $x_0 = j^{-1}(z_0)$, potom $x_0 \in H_1$ a x_0 je disjunktní s x. Z (5) plyne, že $J(x)$ je disjunktní s $j(x_0) = z_0$, a to je spor, protože $\mathbf{0} \neq z_0 \leq_2 J(x)$. Ověřili jsme, že $J(x) = z$. Podobně lze ukázat, že J je prosté zobrazení. Dále z (5) plyne, že zobrazení J zachovává kanonická uspořádání. To znamená, že J je izomorfismus algeber B_1 a B_2. Přitom každý izomorfismus $J: B_1 \to B_2$, který rozšiřuje zobrazení j, musí splňovat (5). Odtud plyne jednoznačnost izomorfismu J.

2.16 Uspořádané množiny a úplné Booleovy algebry. Ukážeme, že každá neprázdná uspořádaná množina jednoznačně určuje úplnou Booleovu algebru. To vede ke snadnějšímu popisu různých Booleových algeber. Stačí sestrojit vhodnou uspořádanou množinu, která pak určuje celou strukturu odpovídající Booleovy algebry. Je-li výchozí množina uspořádána separovaně, je navíc izomorfní s nějakou hustou podmnožinou odpovídající Booleovy algebry.

Předpokládáme, že $\langle Q, \leq \rangle$ je neprázdná uspořádaná množina. Zajímají nás dolní podmnožiny množiny Q. Je zřejmé, že sjednocení i průnik libovolného systému dolních podmnožin je opět dolní podmnožina. To znamená, že systém všech dolních podmnožin je topologie otevřených množin na množině Q. Nazýváme ji *topologií dolních podmnožin.*

Regulární otevřené množiny prostoru Q s topologií dolních podmnožin tvoří, podle věty 1.27, úplnou Booleovu algebru $B = \mathrm{RO}(Q)$. Říkáme, že úplná Booleova algebra B je určena uspořádanou množinou $\langle Q, \leq \rangle$.

Uvědomme si, že podmnožina X nějakého topologického prostoru je regulární otevřená, právě když je otevřená a současně platí: je-li nějaké okolí bodu p částí uzávěru $\mathrm{cl}(X)$ množiny X, potom $p \in X$. Pro každý bod p prostoru Q s topologií dolních podmnožin je množina $(\leftarrow, p]$ nejmenším okolím bodu p. Odtud plyne, že $X \subseteq Q$ je regulární otevřená množina v Q, právě když X je dolní podmnožinou a současně platí

$$(\forall p \in Q)\,[p \in X \leftrightarrow (\forall q \leq p)(X \cap (\leftarrow, q] \neq 0)]\,.$$

Následující věta charakterizuje úplnou Booleovu algebru určenou uspořádanou množinou.

2.17 Věta. *Nechť Q je neprázdná uspořádaná množina. Potom existuje úplná Booleova algebra B a zobrazení $j: Q \to B$ takové, že platí*

(i) *$j[Q]$ je hustá množina v B,*

(ii) *j zachovává uspořádání, je-li $p \leq q$ v Q, pak $j(p) \leq j(q)$ v B,*

(iii) *j zachovává disjunktnost, je-li $p \perp q$ v Q, pak $j(p) \perp j(q)$ v B.*

Podmínky (i)–(iii) určují úplnou algebru B jednoznačně až na izomorfismus. Navíc, je-li Q separovaně uspořádaná množina, potom zobrazení j je prosté, a tedy je izomorfním vnořením Q na hustou množinu v B.

Důkaz. Nejprve dokážeme větu pro případ, že Q je separované uspořádání. Uvažujme úplnou Booleovu algebru $B = \mathrm{RO}(Q)$ určenou uspořádanou množinou Q. Dokážeme o ní, že splňuje podmínky věty. Snadno se nahlédne, že separovanost uspořádání Q je ekvivalentní s tím, že pro každé $p \in Q$ je $(\leftarrow, p]$ regulární otevřená množina. Odtud plyne, že položíme-li $j(p) = (\leftarrow, p]$ pro každé $p \in Q$, potom j je prosté zobrazení množiny Q do B. Každé $j(p)$ je neprázdná množina, a tedy nenulový prvek algebry B. Je-li $X \in B$ a $X \neq 0$, pak pro každé $p \in X$ platí $j(p) \subseteq X$. To znamená, že $j[Q]$ je hustá množina v B. Je zřejmé, že zobrazení j je izomorfní vnoření Q do B, proto platí (ii) a (iii). Dále dokážeme jednoznačnost algebry B. Uvažujme libovolnou úplnou Booleovu algebru C a zobrazení $k: Q \to C$ takové, že vyhovují podmínkám (i)–(iii). Ověříme, že k je prosté zobrazení. Vezměme různá $p, q \in Q$, můžeme předpokládat, že $p \nleq q$. Ze separovanosti víme, že existuje $r \leq p$ disjunktní s q. Pak $k(r) \leq k(p)$ a $k(r)$ je disjunktní s $k(q)$ v algebře C. Odtud plyne, že $k(p) \nleq k(q)$. Tedy k je dokonce izomorfní vnoření Q na hustou podmnožinu algebry C. Jelikož j je izomorfní vnoření Q na hustou množinu algebry B a k je izomorfní vnoření Q na hustou množinu algebry C, obě algebry mají izomorfní husté množiny a podle věty 2.15 jsou izomorfní. Dokonce existuje izomorfismus $f: B \to C$ takový, že složené zobrazení $fj = k$.

V případě, že Q není separovaně uspořádaná množina, postupujeme obdobně. Místo množiny $(\leftarrow, p]$ v definici zobrazení j je nutno vzít její regularizaci (1.23).

2.18 Definice. Zúplnění. Říkáme, že úplná Booleova algebra B je *zúplněním* algebry A a píšeme $B = \mathrm{cm}(A)$, jestliže A je podalgebra algebry B a množina $A - \{\mathbf{0}\}$ je hustá v B.

Je-li B zúplnění algebry A, snadno se ověří, že identické zobrazení $i: A \to B$ je úplné vnoření A do B.

Následující tvrzení je důsledkem věty 2.17.

2.19 Věta. *Každá Booleova algebra A má zúplnění* $\mathrm{cm}(A)$, *toto zúplnění je (až na izomorfismus) jednoznačně určeno.*

Je-li A úplná Booleova algebra, je zřejmé, že $\mathrm{cm}(A) = A$. Poznamenejme, že pro libovolnou Booleovu algebru A dává Mac Neillova konstrukce, uvedená v I.5.24, také zúplnění $\mathrm{cm}(A)$.

2.20 Generátory. Průnik libovolného neprázdného systému podalgeber Booleovy algebry B je opět podalgebra algebry B. Odtud plyne, že pro libovolnou množinu $X \subseteq B$ je

$$A = \bigcap\{C : X \subseteq C \text{ a } C \text{ je podalgebra } B\}$$

nejmenší podalgebra, která obsahuje všechny prvky z X. Říkáme, že algebra A je generována množinou X nebo že X je množina generátorů algebry A.

Podobně, je-li B úplná Booleova algebra, můžeme se omezit jen na její úplné podalgebry. Pro libovolnou množinu $X \subseteq B$ je

$$A = \bigcap\{C : X \subseteq C \text{ a } C \text{ je úplná podalgebra } B\}$$

nejmenší úplná podalgebra obsahující X. Říkáme, že A je úplně generovaná množinou X nebo že X je množina úplných generátorů úplné algebry A.

Podle 2.8 je každá hustá podmnožina $H \subseteq B$ množinou úplných generátorů úplné algebry B. Uvažujeme-li podalgebru $C \subseteq B$, která je pouze generovaná množinou H, potom C nemusí být úplná. Platí však $\mathrm{cm}(C) = B$. Tím, že jsme dokázali, že libovolná uspořádaná množina Q jednoznačně určuje úplnou Booleovu algebru B, ukázali jsme také, že Q jednoznačně určuje (ne nutně úplnou) Booleovu algebru C, generovanou množinou $j[Q]$ (viz 2.17).

2.21 Mohutnost algebry a počet generátorů. Víme-li, že množina $X \subseteq B$ generuje algebru B, můžeme odhadnout mohutnost algebry B z velikosti množiny X. Je-li X nekonečná, podle III.2.37 je $|B| = |X|$.

Podalgebra $A \subseteq B$ generovaná množinou $X \subseteq B$ sestává právě z těch prvků $x \in B$, které se dají vyjádřit ve tvaru

$$x = \bigvee_{f \in F} \bigwedge_{y \in Y} (f(y))\, y, \tag{6}$$

kde Y je nějaká konečná podmnožina X, $F \subseteq {}^{Y}\{-1, 1\}$ a $(-1)x = -x$, $(1)x = x$. Je zřejmé, že každý prvek $x \in B$ tvaru (6) patří do A. K tomu, že také každý prvek $a \in A$ lze vyjádřit ve tvaru (6), stačí ověřit, že množina všech prvků tvaru (6) tvoří podalgebru, tedy že je uzavřená na operaci průseku a komplementu.

Je-li X konečná množina generátorů algebry B, potom B je konečná, má nejvýše $2^{|X|}$ atomů a $|B| \leq 2^{2^{|X|}}$.

Podobný odhad mohutnosti úplné Booleovy algebry z mohutnosti množiny úplných generátorů není možný. Existují libovolně velké úplné algebry, například $C(\omega, \varkappa)$ z 2.25(e), které mají spočetné množiny úplných generátorů.

2.22 Součin. Kartézský součin $B_1 \times B_2$ Booleových algeber B_1, B_2 s booleovskými operacemi definovanými po složkách je opět Booleova algebra. Nazýváme ji součinem algeber B_1, B_2 a značíme $B_1 \times B_2$.

Je-li $B = B_1 \times B_2$, potom prvky $u_1 = \langle \mathbf{1}_1, \mathbf{0}_2 \rangle$ a $u_2 = \langle \mathbf{0}_1, \mathbf{1}_2 \rangle$ tvoří rozklad jednotkového prvku $\langle \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2 \rangle$ v B. Pro každé $i = 1, 2$ je faktor $B \mid u_i$ izomorfní s algebrou B_i. Izomorfismus $j_1 : B_1 \to B \mid u_1$ je definován vztahem $j_1(x) = \langle x, \mathbf{0}_2 \rangle$ pro každé $x \in B_1$ a podobně se definuje izomorfismus j_2. Přitom libovolný prvek $\langle x, y \rangle \in B$ je spojením $j_1(x) \vee j_2(y)$. Součin algeber B_1, B_2 tedy vznikne položením algeber B_1 a B_2 vedle sebe.

Uvažujme úplnou Booleovu algebru B, která má nějaké atomy, ale není atomární. Potom její prvek $u = \bigvee \mathrm{At}(B)$ je různý od $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ a $B \cong B \mid u \times B \mid (-u)$. To znamená, že B je součinem atomární algebry a algebry bez atomů.

2.23 Volný součin. Pro Booleovu algebru B označíme B^+ množinu všech jejích nenulových prvků. Mějme dány algebry B_1, B_2. Říkáme, že algebra C je volným součinem algeber B_1, B_2 a píšeme

$$C = B_1 \odot B_2,$$

jestliže pro každé $i = 1, 2$ existuje vnoření j_i algebry B_i do C tak, že platí

(i) pro každé $x \in B_1^+$, $y \in B_2^+$ je $j_1(x) \wedge j_2(y) \neq \mathbf{0}$ v C,

(ii) množina $j_1[B_1] \cup j_2[B_2]$ generuje algebru C.

Z podmínek (i) a (ii) a vyjádření (6) plyne, že množina

$$\{j_1(x) \wedge j_2(y) : x \in B_1^+ \ \&\ y \in B_2^+\}$$

je hustá v C, a proto je volný součin algeber B_1, B_2 určen jednoznačně až na izomorfismus. Navíc zobrazení j_i pro $i = 1, 2$ je úplné vnoření do C. Poznamenejme, že volný součin C úplných Booleových algeber B_1, B_2 nemusí být úplná algebra. Proto je volný součin ve třídě úplných Booleových algeber definován jako zúplnění algebry C.

2.24 Konstrukce volného součinu. Doposud jsme nedokázali, že volný součin libovolných dvou algeber existuje. Mějme algebry B_1, B_2 a uvažujme množiny B_1^+, B_2^+ a jejich kanonická uspořádání $\leq_1, \leq_2$. Snadno se nahlédne, že kartézský součin $B_1^+ \times B_2^+$ je separovaně uspořádaný relací $\leq$, kde

$$\langle x_1, y_1 \rangle \leq \langle x_2, y_2 \rangle \leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \ \&\ y_1 \leq_2 y_2 .$$

Nechť B je úplná Booleova algebra určená uspořádanou množinou $\langle B_1^+ \times B_2^+, \leq \rangle$ a nechť $C \subseteq B$ je podalgebra generovaná množinou $B_1^+ \times B_2^+$. Víme, že B je zúplnění algebry C. Definujme zobrazení $j_1 : B_1 \to C$ tak, že $j_1(\mathbf{0}_1) = \mathbf{0}$ a $j_1(x) = \langle x, \mathbf{1}_2 \rangle$ pro $x \in B_1^+$. Podobně zobrazení $j_2 : B_2 \to C$ se definuje tak, že $j_2(\mathbf{0}_2) = \mathbf{0}$ a $j_2(y) = \langle \mathbf{1}_1, y \rangle$ pro $y \in B_2^+$. Snadno se ověří, že pro libovolné $x \in B_1^+$, $y \in B_2^+$ v algebře C platí $\langle x, y \rangle = j_1(x) \wedge j_2(y)$ a že j_i je vnoření B_i do C. Odtud plyne, že C je volný součin algeber B_1 a B_2 spolu se zobrazeními j_1, j_2.

2.25 Příklady. (a) Pro libovolné množiny I, J označíme $F(I, J)$ množinu všech konečných funkcí f takových, že $\mathrm{Dom}(f) \subseteq I$ a $\mathrm{Rng}(f) \subseteq J$, uspořádanou obrácenou inkluzí. Tedy $f \leq g \leftrightarrow f \supseteq g$.

Prázdná množina vždy leží v $F(I, J)$. Je-li množina J alespoň dvouprvková, potom $F(I, J)$ je separované uspořádání. Úplnou Booleovu algebru určenou množinou $F(I, J)$ značíme $C(I, J)$. Pokud $J = \{0, 1\}$, píšeme krátce $C(I)$ místo $C(I, 2)$.

(b) *Algebry* $C(\alpha)$. Pro libovolný ordinál α konečné funkce $f \in F(\alpha, 2)$ určují obojetnou bázi topologického prostoru ${}^{\alpha}2$. Odtud plyne, že úplná Booleova algebra $C(\alpha)$ je izomorfní s algebrou regulárních otevřených množin RO $({}^{\alpha}2)$ a ta je zúplněním algebry obojetných množin CO $({}^{\alpha}2)$.

$C(0)$ je triviální dvouprvková algebra. Pro přirozené n je algebra $C(n)$ konečná a má 2^{2^n} prvků. Pro nekonečné α algebra $C(\alpha)$ nemá žádné atomy. Podle III.1.24 je Suslinovo číslo $c(F(\alpha, 2)) = \omega$, proto $\mathrm{sat}(C(\alpha)) = \omega_1$. Speciálně $C(\omega)$ je algebra regulárních otevřených množin Cantorova diskontinua.

(c) *Podalgebry algebry* $C(\alpha)$. Uvažujme pevné α. Je-li $I \subseteq \alpha$, potom $F(I, 2) \subseteq F(\alpha, 2)$ a identické zobrazení $k: F(I, 2) \to F(\alpha, 2)$ lze jednoznačně rozšířit na úplné vnoření K algebry $C(I)$ do $C(\alpha)$. Přitom obraz $K[C(I)]$ sestává ze všech prvků $u \in C(\alpha)$, které se v $C(\alpha)$ dají vyjádřit jako $u = \bigvee X$ pro nějaké $X \subseteq F(I, 2)$. Ztotožníme-li $C(I)$ s $K[C(I)]$, pak $C(I)$ je úplná podalgebra algebry $C(\alpha)$. Speciálně pro $\beta, \gamma < \alpha$ jsou $C(\beta)$, $C(\gamma)$ úplné podalgebry algebry $C(\alpha)$ a z $\beta < \gamma$ plyne $C(\beta) \subset C(\gamma)$.

Ukážeme, že pokud je kofinalita ordinálu α nespočetná, potom $C(\alpha) = \bigcup\{C(\beta): \beta < \alpha\}$, to znamená, že $C(\alpha)$ je sjednocením rostoucího řetězce úplných podalgeber. Nechť $u \in C(\alpha)$. Podle 2.11(ii) existuje množina $X \subseteq F(\alpha, 2)$ disjunktních prvků taková, že $u = \bigvee X$. Jelikož $\mathrm{sat}(C(\alpha)) \leq \omega_1$, množina X je nejvýše spočetná. Odtud plyne, že mohutnost množiny $D = \bigcup\{\mathrm{Dom}(f): f \in X\}$ je nejvýše ω, a proto je omezená v α. To znamená, že pro nějaké $\beta < \alpha$ je $D \subseteq \beta$, a tedy $X \subseteq F(\beta, 2)$ a $u \in C(\beta)$.

(d) $C(\alpha)$ *jako volný součin podalgeber.* Nechť $\beta < \alpha$. Přiřadíme-li každé funkci $f \in F(\beta, 2)$ a $g \in F(\alpha - \beta, 2)$ funkci $f \cup g$, dostáváme izomorfismus kartézského součinu $F(\beta, 2) \times F(\alpha - \beta, 2)$ na uspořádanou množinu $F(\alpha, 2)$. Není těžké ověřit, že $C(\alpha)$ je zúplněním volného součinu podalgeber $C(\beta)$ a $C(\alpha - \beta)$.

(e) *Kolapsující algebry.* Pro libovolný nekonečný kardinál $\varkappa$ úplnou Booleovu algebru $C(\omega, \varkappa)$ určenou uspořádanou množinou $F(\omega, \varkappa)$ nazýváme *kolapsující algebrou.* To proto, že každé generické rozšíření určené algebrou $C(\omega, \varkappa)$ přidává prosté zobrazení kardinálu $\varkappa$ na ω, a tím kolapsuje kardinál $\varkappa$, který se v rozšíření stává spočetným ordinálem. Odtud také pochází myšlenka důkazu následujícího tvrzení (Solovay 1966).

Každá kolapsující algebra má spočetnou množinu úplných generátorů.

Důkaz. Je zřejmé, že $C(\omega, \varkappa)$ je izomorfní s algebrou RO $({}^{\omega}\varkappa)$, kde ${}^{\omega}\varkappa$ je topologický součin ω exemplářů množiny $\varkappa$ s diskrétní topologií. Pro libovolné $m < \omega$ a $\alpha < \varkappa$ položme

$$b(m,\alpha) = \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(m) = \alpha\}.$$

Každá množina $b(m,\alpha)$ je obojetná a jejich konečné průniky tvoří obojetnou bázi prostoru ${}^{\omega}\varkappa$. Odtud plyne, že každá regulárně otevřená množina je spojením všech obojetných množin z báze, které obsahuje. To znamená, že $\{b(m,\alpha): m < \omega, \alpha < \varkappa\}$ je systém úplných generátorů algebry RO $({}^{\omega}\varkappa)$, má však mohutnost $\varkappa$. Nyní pro libovolná přirozená m a n definujeme

$$a(m,n) = \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(m) < f(n)\}.$$

Každou množinu $a(m,n)$ i její doplněk lze vyjádřit jako sjednocení otevřených množin

$$a(m,n) = \bigcup_{\alpha<\beta} \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(m) = \alpha \;\&\; f(n) = \beta\},$$
$${}^{\omega}\varkappa - a(m,n) = a(n,m) \cup \bigcup_{\alpha<\varkappa} \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(m) = \alpha \;\&\; f(n) = \alpha\},$$

proto množiny $a(m,n)$ jsou obojetné a patří do RO $({}^{\omega}\varkappa)$. Ukážeme, že každou množinu $b(m,\alpha)$ lze získat ze systému $S = \{a(m,n): m, n < \omega\}$ pomocí nekonečných booleovských operací. Odtud pak plyne, že S je spočetný systém úplných generátorů algebry RO $({}^{\omega}\varkappa)$.

Stačí ověřit, že pro každé m a $\alpha < \varkappa$ platí

(7) $$b(m,\alpha) = \Big(-\bigvee_{\beta<\alpha} b(m,\beta)\Big) \wedge \bigwedge_{n<\omega} \Big(\bigvee_{\beta<\alpha} b(n,\beta) \vee (-a(n,m))\Big).$$

Z definice množin $b(m,\beta)$ dostáváme

$$\bigcup_{\beta<\alpha} b(m,\beta) = \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(m) < \alpha\}$$

a to je obojetná množina. Proto

(8) $$\bigvee_{\beta<\alpha} b(m,\beta) = \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(m) < \alpha\},$$

(9) $$-\bigvee_{\beta<\alpha} b(m,\beta) = \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(m) \geq \alpha\}.$$

To znamená, že ve druhém členu pravé strany (7) můžeme nahradit spojení sjednocením a komplement množinovým doplňkem. Pro každé $n < \omega$ je

(10) $$\bigvee_{\beta<\alpha} b(n,\beta) \vee (-a(n,m)) = \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(n) \geq f(m) \text{ nebo } f(n) < \alpha\}.$$

Z (9) a (10) plyne, že ve vztahu (7) platí inkluze $\subseteq$. Předpokládejme, že platí ostrá inkluze $\subset$. Potom existuje neprázdná obojetná množina

$$c = \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(i_1) = \gamma_1 \;\&\; \ldots \;\&\; f(i_k) = \gamma_k\},$$

která je disjunktní s $b(m,\alpha)$ a je podmnožinou pravé strany v (7). Můžeme předpokládat, že $i_1 = m$. Jelikož $c \subseteq \{f \in {}^{\omega}\varkappa : f(m) \geq \alpha\}$ a pro žádné $f \in c$ není $f(m) = \alpha$, protože c je disjunktní s $b(m, \alpha)$, je $\gamma_1 > \alpha$. Zvolme přirozené n různé od všech i_j. Potom pro $g \in c$ takové, že $g(n) = \alpha$, platí $g(n) < g(m)$ a současně $g(n) \geq \alpha$. To podle (10) znamená, že

$$g \notin \bigvee_{\beta < \alpha} b(n, \beta) \vee (-a(n, m)),$$

to je ve sporu s předpokládanou vlastností množiny c. Dokázali jsme (7), a tím i celé tvrzení.

(f) Pro množiny I, J a nekonečný kardinál λ označme $F(I, J, \lambda)$ množinu všech funkcí f takových, že $\mathrm{Dom}(f) \subseteq I$, $|\mathrm{Dom}(f)| < \lambda$ a $\mathrm{Rng}(f) \subseteq J$, uspořádanou opačnou inkluzí. Vidíme, že $F(I, J, \omega)$ je totéž jako $F(I, J)$ z příkladu (a).

Úplná Booleova algebra $C(I, J, \lambda)$ určená uspořádáním $F(I, J, \lambda)$ je izomorfní algebře regulárních otevřených množin prostoru $\mathsf{X}^{(\lambda)}\{J_i: i \in I\}$, z příkladu III.4.74(c), kde každé $J_i = J$ a J je topologický prostor s diskrétní topologií.

(g) $C(\omega_1, 2, \omega_1) \cong C(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$. Stačí ověřit, že algebry mají izomorfní husté podmnožiny. Rozložíme ω_1 na spočetné podmnožiny $\{A_\alpha: \alpha < \omega_1\}$. Pro každé $\alpha < \omega_1$ nechť $\{f_{\alpha,\beta}: \beta < 2^\omega\}$ je prosté očíslování všech funkcí definovaných na A_α s hodnotami v $\{0, 1\}$. Libovolné funkci $h \in F(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$ přiřaďme funkci

$$\bigcup \{f_{\alpha, h(\alpha)}: \alpha \in \mathrm{Dom}(h)\}.$$

Získáme tak izomorfní zobrazení množiny $F(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$ na podmnožinu $P \subseteq$ $\subseteq F(\omega_1, 2, \omega_1)$. Je zřejmé, že P je hustá množina algebry $C(\omega_1, 2, \omega_1)$.

(h) Pro slabě nedosažitelný kardinál $\varkappa$ vezměme nějakou rostoucí posloupnost nekonečných kardinálů $\langle \varkappa_\alpha: \alpha < \varkappa \rangle$ konvergující ke $\varkappa$. Je-li $\langle A_\alpha: \alpha < \varkappa \rangle$ soubor množin takový, že $|A_\alpha| = \varkappa_\alpha$ pro každé $\alpha < \varkappa$, potom množina

$$P = \{f: f \text{ je konečná funkce, } \mathrm{Dom}(f) \subseteq \varkappa \text{ a } (\forall i \in \mathrm{Dom}(f)) (f(i) \in A_i)\}$$

je separovaně uspořádaná opačnou inkluzí a z III.1.23 plyne, že pro algebru C určenou množinou P je $c(P) = \mathrm{sat}(B) = \varkappa$.

2.26 Zjemnění rozkladů. V I.5.37 jsme se zabývali rozklady na množině. Každý rozklad neprázdné množiny X je právě rozkladem jednotkového prvku v potenční algebře $\mathcal{P}(X)$. Nyní uvažujeme rozklady jednotky, krátce rozklady, v libovolné Booleově algebře. Následující definice je obdobou zjemnění rozkladů na množině.

2.27 Definice. Zjemnění. Nechť P, Q jsou rozklady v B. Říkáme, že P je *zjemněním* Q nebo že P zjemňuje Q, a píšeme $P \ll Q$, jestliže pro každé $x \in P$ existuje $y \in Q$ takové, že $x \leq y$.

Je-li $P \ll Q$, potom pro každé $y \in Q$ je $P_y = \{x \in P: x \leq y\}$ rozklad prvku y. Na druhou stranu, vybereme-li pro každé $y \in Q$ nějaký rozklad P_y prvku y, potom $P = \bigcup \{P_y: y \in Q\}$ je rozklad jednotky a $P \ll Q$. Je-li H hustá množina v B, potom podle 2.11(ii) každý rozklad Q má zjemnění P, které sestává jen z prvků množiny H. Pokud algebra B nemá atomy, pak každý rozklad Q má zjemnění P takové, že každé

$y \in Q$ je v P rozloženo na dva prvky. Pro libovolný rozklad P v B množina $B\langle P\rangle = \{u \in B : (\exists X \subseteq P)(u = \bigvee X)\}$ je atomární podalgebrou algebry B a P je množina všech jejích atomů.

2.28 Věta. *Všechny spočetné Booleovy algebry bez atomů jsou izomorfní.*
Důkaz. Nechť B je spočetná algebra bez atomů. Nejprve zkonstruujeme rostoucí posloupnost konečných podalgeber B_n takovou, že

$$B = \bigcup_{n<\omega} B_n .$$

Položíme $B_0 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Nechť $x_1, x_2, x_3, \ldots$ je očislování všech prvků z $B - \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Rekurzí konstruujeme posloupnost $P_1, P_2, P_3, \ldots$ konečných zjemňujících se rozkladů tak, že $x_n \in B\langle P_n\rangle$. Položíme $P_1 = \{x_1, -x_1\}$, je zřejmé, že $x_1 \in B\langle P_1\rangle$. Rozklad P_{n+1} konstruujeme tak, že se každý prvek $y \in P_n$ v P_{n+1} rozkládá právě na dva prvky. Pokud pro $y \in P_n$ jsou oba prvky $y \wedge x_{n+1}$ a $x_{n+1} - y$ nenulové, dáme je do P_{n+1}. Jinak zvolíme libovolně dva prvky rozkládající prvek $y \in P_n$ a ty dáme do P_{n+1}. Je zřejmé, že $P_{n+1} \ll P_n$, $x_{n+1} \in B\langle P_{n+1}\rangle$ a $|P_{n+1}| = 2^{n+1}$. Položíme-li $B_n = B\langle P_n\rangle$, je $B = \bigcup_{n<\omega} B_n$.

Předpokládejme, že C je jiná spočetná algebra bez atomů. Uvedenou konstrukcí získáme rozklady Q_n a podalgebry C_n. Izomorfismus f_n algeber B_n a C_n je jednoznačně určen vzájemně jednoznačným zobrazením φ_n rozkladu P_n na Q_n. Nechť f_0 je izomorfismus triviálních algeber B_0 a C_0. Nechť φ_1 je libovolné prosté zobrazení P_1 na Q_1. Máme-li již sestrojeno φ_n, zobrazení φ_{n+1} sestrojíme tak, aby pro libovolné $x \in P_{n+1}$, $y \in P_n$ platilo

$$x < y \rightarrow \varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(y) .$$

Potom izomorfismus f_{n+1} rozšiřuje f_n a $f = \bigcup f_n$ je izomorfismus B a C.

2.29 Důsledek. *Všechny úplné Booleovy algebry bez atomů, které mají spočetné husté podmnožiny, jsou izomorfní.*
Důkaz. Nechť H je spočetná hustá množina úplné Booleovy algebry B bez atomů. Potom podalgebra $C \subseteq B$ generovaná množinou H je spočetná, nemá atomy a množina $C - \{\mathbf{0}\}$ je hustá v B. Odtud podle věty 2.28 plyne, že uvažované úplné algebry mají izomorfní husté podmnožiny, a tedy podle 2.15 jsou izomorfní.

Odtud plyne, že algebry regulárních otevřených množin všech metrických separabilních prostorů bez izolovaných bodů jsou izomorfní. Speciálně, algebry RO $(\mathbb{R})$ reálné přímky, RO $(\mathbb{R}^2)$ roviny, RO $({}^{\omega}\mathbb{I})$ Hilbertova kvádru jsou všechny izomorfní s algebrou $C(\omega)$ z příkladu (b).

2.30 Distributivnost algeber. Nekonečné distributivní zákony, uvedené v 1.19, jsou ekvivalentní s tím, že libovolné dva rozklady P, Q jednotky v libovolné algebře mají společné zjemnění, a to

$$\{x \wedge y \neq \mathbf{0} : x \in P, y \in Q\} .$$

Společné zjemnění pro nekonečně mnoho rozkladů již nemusí existovat.

2.31 Definice. Nechť $\varkappa, \mu$ jsou kardinální čísla, mohou být i konečná. Říkáme, že Booleova algebra B je $(\varkappa, \mu)$-*distributivní*, jestliže pro libovolný soubor rozkladů $\langle P_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ takový, že pro každé $\alpha < \varkappa$ je $|P_\alpha| \leq \mu$, existuje rozklad P zjemňující každé P_α.

Je-li algebra $(\varkappa, \mu)$-distributivní pro každý kardinál μ, říkáme, že je $(\varkappa, \infty)$-distributivní.

Je zřejmé, že $(\varkappa, \mu)$-distributivní algebra je také (λ, η)-distributivní pro každé $\lambda < \varkappa$ a $\eta < \mu$. Algebra B, která je $(\varkappa, \mu)$-distributivní a má $\operatorname{sat}(B) \leq \mu^+$, je $(\varkappa, \infty)$-distributivní. Je-li algebra B atomární, potom rozklad $\operatorname{At}(B)$ zjemňuje všechny rozklady v B, a tedy B je $(\varkappa, \infty)$-distributivní pro každé $\varkappa$.

Předpokládejme, že B je bez atomů, a nechť $\varkappa$ je nejmenší mohutnost nějaké husté množiny H v B. Ukážeme, že B není $(\varkappa, 2)$-distributivní. Můžeme předpokládat, že $1 \notin H$. Pro každé $u \in H$ položme $Q(u) = \{u, -u\}$. Dostáváme systém $S = \{Q(u) : u \in H\}$ sestávající z $\varkappa$ dvouprvkových rozkladů. Přitom pro každé nenulové $v \in B$ existuje $u \in H$ takové, že $u < v$, tedy v je kompatibilní s u i $-u$. Odtud plyne, že systém S nemá zjemnění.

Speciálně $C(\omega)$ je úplná algebra, která není $(\omega, 2)$-distributivní.

2.32 Příklady. (a) Algebra B je $(\varkappa, 2)$-distributivní, právě když je $(\varkappa, \varkappa)$-distributivní.

(b) Úplná algebra je $(\varkappa, 2)$-distributivní, právě když je $(\varkappa, 2^\varkappa)$-distributivní.

Je-li úplná algebra B $(\varkappa, 2^\varkappa)$-distributivní, je také $(\varkappa, 2)$-distributivní. Předpokládejme, že B je $(\varkappa, 2)$-distributivní. Je-li dán rozklad P mohutnosti $2^\varkappa$, ukážeme, že P lze nahradit systémem $\varkappa$ dvouprvkových rozkladů. Prvky rozkladu P můžeme očíslovat zobrazeními $f : \varkappa \to 2$, tedy $P = \{p_f : f \in {}^\varkappa 2\}$. Dále pro každé $\alpha < \varkappa$ nechť $u_\alpha = \bigvee \{p_f : f(\alpha) = 0\}$ a $P = \{u_\alpha, -u_\alpha\}$. Máme systém $\{P_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ dvouprvkových rozkladů a snadno se ověří, že společné zjemnění všech rozkladů P_α je také zjemněním rozkladu P. Máme-li $\varkappa$ rozkladů mohutnosti $2^\varkappa$, nahradíme každý z nich systémem $\varkappa$ dvouprvkových rozkladů. Z $(\varkappa, 2)$-distributivnosti algebry B dostáváme zjemnění pro původní systém.

(c) Úplná algebra B je $(\varkappa, \lambda)$-distributivní, právě když pro libovolnou matici $\langle u(\alpha, \beta) : \alpha < \varkappa, \beta < \lambda \rangle$ prvků z B platí

$$\bigwedge_{\alpha < \varkappa} \bigvee_{\beta < \lambda} u(\alpha, \beta) = \bigvee_{f \in {}^\varkappa \lambda} \bigwedge_{\alpha < \varkappa} u(\alpha, f(\alpha)).$$

2.33 Kritérium distributivnosti. Nechť λ je nekonečný kardinál. Říkáme, že uspořádaná množina Q je λ-uzavřená, jestliže pro libovolné $\xi < \lambda$ a libovolnou klesající posloupnost $\langle q_\alpha : \alpha < \xi \rangle$ prvků z Q existuje $q \in Q$ takové, že $q \leq q_\alpha$ pro každé $\alpha < \xi$. Jinými slovy, Q je λ-uzavřená, jestliže každý řetězec v Q mohutnosti menší než λ má dolní mez.

Uspořádaná množina $F(I, J, \lambda)$ z příkladu 2.25(f) je cf (λ)-uzavřená.

2.34 Věta. *Má-li Booleova algebra B hustou λ-uzavřenou podmnožinu, potom B je $(\varkappa, \infty)$-distributivní pro každé $\varkappa < \lambda$.*

Důkaz. Nechť $\langle P_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je soubor rozkladů a $\varkappa < \lambda$. Nechť H je hustá λ-uzavřená množina v B. Ověříme, že pro každé $u \in B^+$ existuje $x \leq u$ takové, že

(11) $x \in H$ a x je právě pod jedním prvkem z každého rozkladu P_α.

Pro libovolné $u \in B^+$ konstruujeme rekurzí klesající posloupnosti $\langle x_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ prvků z H takovou, že $x_0 \leq u$ a každé x_α je pod jedním z prvků rozkladu P_α. Máme-li již sestrojenu posloupnost $\langle x_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ pro $\beta < \varkappa$, pak z λ-uzavřenosti množiny H existuje $z \in H$, které je menší než všechna x_α. Přitom z je kompatibilní s nějakým prvkem $y \in P_\beta$, protože $z \neq \mathbf{0}$. Zvolíme $x_\beta \in H$ tak, aby $x_\beta \leq z \wedge y$. Tak sestrojíme klesající posloupnost $\langle x_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ prvků z H a její dolní mez splňuje (11). Ukázali jsme, že množina prvků, které splňují (11), je hustá. Je zřejmé, že libovolný rozklad jednotky, sestávající z takových prvků, zjemňuje všechny rozklady P_α. Proto je algebra B $(\varkappa, \infty)$-distributivní.

2.35 Tříparametrová distributivnost. Nechť $\varkappa$, μ, ν jsou kardinály a $\nu \geq 2$. Říkáme, že algebra B je $(\varkappa, \mu, \nu)$-*distributivní*, jestliže pro každý soubor rozkladů $\langle P_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ jednotky v B takový, že každé $|P_\alpha| \leq \mu$, existuje rozklad P takový, že pro každé $x \in P$ a každé $\alpha < \varkappa$ je

$$|\{y \in P_\alpha : y \wedge x \neq \mathbf{0}\}| < \nu . \tag{12}$$

Je-li algebra $(\varkappa, \mu, \omega)$-distributivní, říkáme, že je slabě $(\varkappa, \mu)$-distributivní.

Všimněme si, že $(\varkappa, \mu, 2)$-distributivnost je totéž jako $(\varkappa, \mu)$-distributivnost. Tříparametrová distributivnost je tedy zobecněním pojmu distributivnosti.

2.36 *Úplnost a distributivnost.* Algebra A je $(\varkappa, \infty)$-distributivní, právě když její zúplnění cm(A) je $(\varkappa, \infty)$-distributivní. Uvědomme si, že každý rozklad jednotky v A je také rozkladem jednotky v cm(A) a že každý rozklad jednotky v cm(A) má zjemnění v algebře A. Na druhé straně $(\varkappa, \mu)$-distributivnost se z algebry na její zúplnění nepřenáší. V příkladu 2.45(b) popíšeme algebru, která je $(\omega, 2)$-distributivní, ale její zúplnění není ani $(\omega, \omega_1, \omega_1)$-distributivní.

V následujícím paragrafu uvidíme, že distributivnost úplných Booleových algeber určuje některé vlastnosti generických rozšíření modelů teorie množin. Proto se budeme zabývat především distributivností úplných algeber.

2.37 Lemma. *Je-li úplná algebra B $(\varkappa, \mu, \nu)$-distributivní, potom každá její úplná podalgebra je také $(\varkappa, \mu, \nu)$-distributivní.*

Důkaz. Nechť $C \subseteq B$ je úplná podalgebra a $\langle P_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je soubor rozkladů jednotky v algebře C takový, že $|P_\alpha| \leq \mu$ pro každé α. Je to současně soubor rozkladů jednotky v B, a proto v B existuje rozklad P takový, že pro každé $x \in P$ a každé $\alpha < \varkappa$ platí (12). Odtud plyne, že množina

$$H = \left\{x \in B^+ : (\forall \alpha < \varkappa)\left(|\{y \in P_\alpha : y \wedge x \neq \mathbf{0}\}| < \nu\right)\right\}$$

je hustá v B. Pro každé $x \in H$ položme $C(x) = \bigwedge\{u \in C : x \leq u\}$. Jelikož C je úplná podalgebra, je $C(x) \in C$, a proto $C(H) = \{C(x) : x \in H\}$ je hustá množina v C. Pro libovolné $C(x)$ a každé $\alpha < \varkappa$ platí

$$C(x) \leq \bigvee\{y \in P_\alpha : y \wedge x \neq \mathbf{0}\}.$$

To znamená, že $C(x)$ je kompatibilní s méně než ν prvky každého rozkladu P_α. Libovolný rozklad $Q \subseteq C(H)$ je hledaným rozkladem v C.

2.38 $(\varkappa, \mu, \nu)$-*nedistributivnost*. Předpokládejme, že úplná algebra B není $(\varkappa, \mu, \nu)$-distributivní. To znamená, že existuje soubor $\langle P_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ rozkladů jednotky v B takový, že $|P_\alpha| \leq \mu$ pro každé $\alpha < \varkappa$ a současně množina

$$X = \left\{x \in B^+ : (\forall \alpha < \varkappa)\left(|\{y \in P_\alpha : x \wedge y \neq \mathbf{0}\}| < \nu\right)\right\}$$

není hustá v B. Pro takový soubor rozkladů mohou nastat dva případy. Buď X je prázdná množina, to znamená, že každý nenulový prvek $x \in B$ je kompatibilní alespoň s ν prvky nějakého rozkladu P_α, a pak soubor $\langle P_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ zaručuje všude negaci $(\varkappa, \mu, \nu)$-distributivnosti. Nebo $X \neq 0$, a potom $u = -\bigvee X$ je nenulový prvek a $u \neq \mathbf{1}$, protože X není hustá v B. Vezmeme-li zúžení $P_\alpha \mid u = \{u \wedge y : y \in P_\alpha\}$ rozkladů P_α na prvek u, dostáváme soubor rozkladů jednotky v algebře $B \mid u$, který zaručuje všude v $B \mid u$ negaci $(\varkappa, \mu, \nu)$-distributivity. To nás vede k následujícímu zesílení negace $(\varkappa, \mu, \nu)$-distributivity.

2.39 Definice. Říkáme, že úplná Booleova algebra B je *všude* $(\varkappa, \mu, \nu)$-*nedistributivní*, jestliže existuje soubor $\langle P_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$, sestávající z rozkladů mohutnosti nejvýše μ, takový, že pro každé $x \in B^+$ existuje $\alpha < \varkappa$ takové, že x je kompatibilní alespoň s ν prvky rozkladu P_α.

2.40 Definice. Booleova algebra B se nazývá *homogenní*, jestliže B je izomorfní s každým faktorem $B \mid u$.

Z předchozího plyne, že úplná homogenní Booleova algebra není $(\varkappa, \lambda, \mu)$-distributivní, právě když je všude $(\varkappa, \lambda, \mu)$-nedistributivní.

2.41 Příklad. Úplná algebra $C(\omega_1, 2, \omega_1)$ z příkladu 2.25(f) je (ω, ∞)-distributivní a není $(\omega_1, 2)$-distributivní. (ω, ∞)-distributivnost algebry plyne z věty 2.34, protože její hustá množina $F(\omega_1, 2, \omega_1)$ je ω_1-uzavřená. Kdyby byla $(\omega_1, 2)$-distributivní, potom by podle 2.32(b) byla také $(\omega_1, 2^{\omega_1}, 2)$-distributivní.

Ukážeme však, že je všude $(\omega_1, 2^\omega, 2^\omega)$-nedistributivní. Podle 2.25(g) je $C(\omega_1, 2, \omega_1)$ izomorfní s $C(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$. Přitom množina H všech funkcí definovaných na nějakém spočetném ordinálu s hodnotami v 2^ω je hustá v $C(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$. Položíme-li

$$P_\alpha = \{f \in H : \mathrm{Dom}(f) = \alpha\}$$

pro každé $\alpha < \omega_1$, $\langle P_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ je zjemňující se soubor rozkladů jednotky. Přitom se každé $f \in P_\alpha$ rozkládá na 2^ω prvků v $P_{\alpha+1}$. Navíc $H = \bigcup\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ je hustá množina. Soubor $\langle P_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ tedy zaručuje, že algebra $C(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$ je všude $(\omega_1, 2^\omega, 2^\omega)$-nedistributivní a totéž platí pro algebru $C(\omega_1, 2, \omega_1)$.

2.42 *Charakterizace kolapsujících algeber.* Pro nekonečný kardinál $\varkappa$ uvažujme úplnou algebru $C(\omega, \varkappa)$ definovanou v 2.25(e). Pro každé přirozené n je množina $P_n = {}^n\varkappa$ rozkladem jednotky v $C(\omega, \varkappa)$ a každé $f \in P_n$ je rozloženo v P_{n+1} na $\varkappa$ prvků

$$\{f \cup \{\langle n, \alpha \rangle\} : \alpha < \varkappa\}.$$

Přitom množina ${}^{<\omega}\varkappa = \bigcup P_n$ má mohutnost $\varkappa$ a je hustá v $C(\omega, \varkappa)$. Odtud plyne, že systém $\langle P_n : n < \omega \rangle$ zaručuje, že $C(\omega, \varkappa)$ je všude $(\omega, \varkappa, \varkappa)$-nedistributivní.

2.43 Věta (McAloon). *Úplná Booleova algebra C, která je všude $(\omega, \varkappa, \varkappa)$-nedistributivní a má hustou podmnožinu mohutnosti $\varkappa$, je izomorfní s kolapsující algebrou $C(\omega, \varkappa)$.*

Důkaz. Nechť $H \subseteq C$ je hustá množina mohutnosti $\varkappa$ a nechť soubor $\langle Q_n : n < \omega \rangle$ zaručuje, že C je všude $(\omega, \varkappa, \varkappa)$-nedistributivní. Můžeme předpokládat, že každé Q_n má mohutnost $\varkappa$. Nejprve sestrojíme rozklady Q'_n tak, aby $\bigcup\{Q'_n : n < \omega\}$ byla hustá množina v C. Pro každé n položme

$$H_n = \left\{x \in H : |\{y \in Q_n : y \wedge x \neq \mathbf{0}\}| = \varkappa\right\}.$$

Z $(\omega, \varkappa, \varkappa)$-nedistributivnosti dostáváme $H = \bigcup\{H_n : n < \omega\}$. Přitom $|H_n| \leq \varkappa$ pro každé $n < \omega$, existuje tedy prosté zobrazení $\varphi_n : H_n \to Q_n$ takové, že $\varphi_n(x) \wedge x \neq \mathbf{0}$ pro každé $x \in H_n$. Pro každé n položme

$$Q'_n = (Q_n - \mathrm{Rng}(\varphi_n)) \cup \{x \wedge \varphi_n(x) : x \in H_n\} \cup (\{-x \wedge \varphi_n(x) : x \in H_n\} - \{\mathbf{0}\}).$$

Potom každé Q'_n je rozkladem jednotky a množina $\bigcup\{Q'_n : n < \omega\}$ je hustá v C.

Z $(\omega, \varkappa, \varkappa)$-nedistributivnosti plyne, že každý nenulový prvek y lze rozložit na $\varkappa$ prvků. Pro každé y zvolme jeden takový rozklad $P(y)$ mohutnosti $\varkappa$. Rekurzí definujeme zjemňující se posloupnost rozkladů $\langle P_n : n < \omega \rangle$. Položme $P_0 = \{\mathbf{1}\}$. Pro $n > 0$ vezmeme nejprve společné zjemnění P'_n rozkladů $P_0, \ldots, P_{n-1}, Q'_{n-1}$ a položíme $P_n = \bigcup\{P(y) : y \in P'_n\}$. Je zřejmé, že P_n jsou rozklady jednotky. Jelikož $P_{n+1} \ll Q'_n$ pro každé n, množina $\bigcup\{P_n : n < \omega\}$ je hustá v C. Navíc každé $y \in P_n$ je v P_{n+1} rozloženo na $\varkappa$ prvků. Odtud plyne, že hustá množina $\bigcup\{P_n : n < \omega\}$ spolu s kanonickým uspořádáním je izomorfní s hustou množinou ${}^{<\omega}\varkappa$ algebry $C(\omega, \varkappa)$. To znamená, že úplné algebry C a $C(\omega, \varkappa)$ jsou izomorfní.

2.44 Věta (Kripke). *Každou Booleovu algebru, která má hustou podmnožinu mohutnosti $\leq \varkappa$, lze úplně vnořit do kolapsující algebry $C(\omega, \varkappa)$. Tedy každou algebru lze úplně vnořit do nějaké úplné algebry se spočetnou množinou úplných generátorů.*

Důkaz. Nechť B je zúplnění volného součinu $A \odot C(\omega, \varkappa)$. Víme, že algebra A je úplně vnořená do B, a můžeme předpokládat, že $C(\omega, \varkappa)$ je úplná podalgebra úplné algebry B. Jelikož $C(\omega, \varkappa)$ je všude $(\omega, \varkappa, \varkappa)$-nedistributivní, podle 2.37 totéž platí i pro algebru B. Je-li $H \subseteq A$ hustá množina mohutnosti $\varkappa$, potom kartézský součin $H \times F(\omega, \varkappa)$ má také mohutnost $\varkappa$ a určuje hustou množinu v B. Dokázali jsme, že B má charakteristické vlastnosti kolapsující algebry $C(\omega, \varkappa)$, a proto je s ní izomorfní. Odtud plyne, že algebra A je úplně vnořena do $C(\omega, \varkappa)$.

2.45 Příklady. (a) Pro libovolný strom T označíme T^* množinu T s opačným uspořádáním. Potom vrcholy x a y jsou neporovnatelné v T, právě když jsou disjunktní v T^*. Navíc T^* je separované uspořádání, jestliže se každý vrchol stromu T větví.

Následující tvrzení jsou ekvivalentní: (i) *Existuje úplná Booleova algebra B bez atomů, která je (ω, ∞)-distributivní a má* $\operatorname{sat}(B) = \omega_1$.

(ii) *Existuje Suslinův ω_1-strom.*

Nechť B je algebra splňující (i). Pro každý nenulový prvek y zvolme spočetný rozklad $Q(y)$ prvku y. Rekurzí sestrojíme posloupnost $\langle P_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ zjemňujících se rozkladů. Položíme $P_0 = \{1\}$. Máme-li sestrojenu posloupnost $\langle P_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ a β je limitní, nechť P_β je kterékoli společné zjemnění všech rozkladů P_α. Z (ω, ∞)-distributivity plyne, že takový rozklad existuje. V případě $\beta = \gamma + 1$ položíme $P_\beta = \bigcup \{Q(y) : y \in P_\gamma\}$. Snadno se ověří, že množina $T = \bigcup \{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ spolu s opačným kanonickým uspořádáním je Suslinův ω_1-strom.

Naopak nechť T je Suslinův ω_1-strom. Můžeme předpokládat, že se každý vrchol větví a že T je bez krátkých výhonů. Nechť B je úplná Booleova algebra určená separovaným uspořádáním T^*. Potom B je bez atomů, protože se každý vrchol T větví a $\operatorname{sat}(B) = \omega_1$, protože každý antiřetězec v T je nejvýše spočetný. T je bez krátkých výhonů, proto každá hladina T_α určuje rozklad jednotky B takový, že $T_\beta \ll T_\gamma$ pro $\alpha < \beta < \omega_1$. Libovolný prvek $x \in B$ lze vyjádřit jako spojení nějaké nejvýše spočetné podmnožiny $X \subseteq T$. Je-li $\alpha < \omega_1$ takové, že $X \subseteq T | \alpha$, potom $x \in B\langle T_\alpha \rangle$. To znamená, že B je sjednocením rostoucí posloupnosti ω_1 úplných podalgeber. Každá spočetná množina rozkladů v B leží v nějaké úplné podalgebře $B\langle T_\alpha \rangle$ a T_α je jejich společným zjemněním v B. Tedy B je (ω, ∞)-distributivní.

(b) Připomeňme, že speciální Aronszajnův strom je ω_1-strom bez kofinálních větví, který je sjednocením spočetně mnoha antiřetězců. Podle III.3.41 a 3.48 speciální Aronszajnův strom existuje a nemůže být Suslinovým stromem.

Nechť $\langle T, \leq \rangle$ je speciální Aronszajnův strom. Můžeme předpokládat, že každý vrchol v T se větví a že T nemá krátké výhony. Ukážeme, že úplná algebra B určená separovaně uspořádanou množinou T^* je izomorfní s kolapsující algebrou $C(\omega, \omega_1)$. Nechť T je sjednocením spočetně mnoha antiřetězců Q_n. To znamená, že každé Q_n je množina disjunktních prvků v B, kterou můžeme doplnit na rozklad P_n jednotky v B. Ukážeme, že soubor rozkladů $\langle P_n : n < \omega \rangle$ zaručuje, že algebra B je všude $(\omega, \omega_1, \omega_1)$-nedistributivní. Vezměme libovolné $y \in T$. Jelikož T nemá krátké výhony, množina $Y = \{x \in T: y < x\}$ je nespočetná, a proto existuje n takové, že $Y \cap Q_n$ má mohutnost ω_1. To znamená, že x je kompatibilní také s ω_1 prvky rozkladu P_n. Algebra B je tedy všude $(\omega, \omega_1, \omega_1)$-nedistributivní a je izomorfní s $C(\omega, \omega_1)$ podle 2.43, protože T je hustá množina v B mohutnosti ω_1.

Každá hladina T_α stromu T je rozkladem jednotky v B a $B\langle T_\alpha \rangle$ je úplná podalgebra. Sjednocení všech algeber $B\langle T_\alpha \rangle$ pro $\alpha < \omega_1$ je podalgebra $C \subseteq B$ a stejně jako v příkladu (a) můžeme dokázat, že C je $(\omega, 2)$-distributivní. Podalgebra C je hustá v B, protože $T \subseteq C$. To znamená, že zúplněním C je celá algebra B, která však není $(\omega, 2)$-distributivní. Tedy C je příkladem algebry, která je $(\omega, 2)$-distributivní, ale její zúplnění není $(\omega, 2)$-distributivní.

2.46 Ideály a filtry v Booleově algebře jsou přímým zobecněním pojmů ideálu a filtru v potenční algebře množin, kterými jsme se podrobně zabývali v I.8 (ideály a filtry na množině).

Definice. Nechť B je Booleova algebra. Ideál v B je neprázdná množina $J \subseteq B$ taková, že platí $J \neq B$, $a \in J \;\&\; b \leq a \rightarrow b \in J$, $a, b \in J \rightarrow a \vee b \in J$.

Filtr v B je neprázdná množina $F \subseteq B$ taková, že platí $F \neq B$, $a \in F \;\&\; b \geq a \rightarrow$ $\rightarrow b \in F$, $a, b \in F \rightarrow a \wedge b \in F$.

Filtr v B se nazývá ultrafiltrem, jestliže pro každé $a \in B$ je $a \in F$ nebo $-a \in F$.

Hlavní filtr je množina tvaru $\{b \in B: b \geq a\}$, kde a je nějaký nenulový prvek z B.

Je zřejmé, že pojmy ideálu a filtru jsou duální pojmy. Je-li J ideál v B, říkáme že $J^* = \{-a: a \in J\}$ je duální filtr k J. Podobně, $F^* = \{-a: a \in F\}$ je duální ideál k filtru F.

2.47 Lemma. (i) *Filtr v B je ultrafiltr, právě když je maximálním filtrem v B vůči inkluzi.*

(ii) *Hlavní filtr $\{b \in B: b \geq a\}$ je ultrafiltr, právě když a je atomem algebry B.*

Důkazy (i) a (ii) jsou obdobou důkazů I.8.17 a I.8.11(a).

Z principu maximality snadno plyne následující obecnější formulace základní věty o ultrafiltrech (I.8.18):

2.48 Věta. *Nechť $S \subseteq B$ je centrovaný systém prvků algebry B, to znamená, že pro každé konečné $S_0 \subseteq S$ je $\bigwedge S_0 \neq \mathbf{0}$. Pak existuje ultrafiltr F v B takový, že $S \subseteq F$.*

Speciálně, pro každý nenulový prvek $a \in B$ existuje ultrafiltr F takový, že $a \in F$.

2.49 Důsledek. *Pro různé prvky $a, b \in B$ existuje ultrafiltr v B, ve kterém leží právě jeden z prvků a, b.*

Důkaz. Pro různá $a, b \in B$ je buď $u = a - b \neq \mathbf{0}$, nebo $v = b - a \neq \mathbf{0}$. Předpokládejme, že $u \neq \mathbf{0}$. Vezměme ultrafiltr $F \supseteq \{u\}$, jehož existenci zaručuje věta 2.48. Jelikož $u \in F$ a $u \leq a$, $u \leq -b$, je $a \in F$ a $b \notin F$.

2.50 Faktorizace. Ukážeme, jak konstruovat z dané Booleovy algebry B a ideálu J v B novou algebru B/J.

Pro libovolné $a, b \in B$ definujeme

$$a \sim b \leftrightarrow (a - b) \vee (b - a) \in J .$$

Vztah $a \sim b$ říká, že prvky a, b se od sebe málo liší z hlediska ideálu J. Jinými slovy, existují $u, v \in J$ takové, že $a = (b - u) \vee v$. Jelikož J je ideál, je $\sim$ relací ekvivalence na B, která respektuje booleovské operace, to znamená, že pro libovolné $a, b, c, d \in B$ platí

$$a \sim b \rightarrow -a \sim -b ,$$
$$(a \sim b) \,\&\, (c \sim d) \rightarrow (a \wedge c) \sim (b \wedge d) .$$

Třídu ekvivalence, ve které leží prvek $a \in B$, značíme $[a]$. Povšimněme si, že $[0] = J$ a $[1] = J^*$, proto $[0] \neq [1]$.

Na faktorové množině $B/\sim$ definujeme booleovské operace předpisem

$$[a] \wedge_J [b] = [a \wedge b], \qquad [a] \vee_J [b] = [a \vee b],$$
$$-_J[a] = [-a], \qquad \mathbf{0}_J = [0] \qquad \mathbf{1}_J = [1] .$$

Přirozená projekce $h: B \rightarrow B/\sim$, která každému $a \in B$ přiřazuje třídu ekvivalence $h(a) = [a]$, zachovává booleovské operace, a proto

$$B/J = \langle B/\sim, \wedge_J, \vee_J, -_J, \mathbf{0}_J, \mathbf{1}_J \rangle$$

je Booleovou algebrou. Nazýváme ji *faktorizací algebry B podle ideálu J.*

2.51 Příklady. (a) Faktorizace B/J je dvouprvkovou algebrou, právě když J je maximální ideál v B (duální filtr k J je ultrafiltr).

(b) Je-li J hlavní ideál v B určený prvkem a, pak faktorizace B/J je izomorfní faktoru $B \mid (-a)$.

(c) Předpokládejme, že $X \neq 0$ je baireovský topologický prostor, to znamená, že žádná neprázdná otevřená podmnožina není hubenou množinou. Potom faktorizace σ-algebry množin Baire (X), všech množin s Baireovou vlastností, podle ideálu hubených množin je izomorfní s úplnou Booleovou algebrou regulárních otevřených množin RO (X).

(d) (Smith a Tarski, 1957) Je-li B σ-úplná Booleova algebra, pak pro každý ideál J v B takový, že sat $(B/J) \leq \omega_1$, je faktorizace B/J úplná Booleova algebra.

Speciálně, je-li μ míra na $\mathscr{P}(\omega)$, viz I.8.29, a je-li $\mathscr{I}_\mu$ ideál nulových množin, potom platí sat $(B/\mathscr{I}_\mu) \leq \omega_1$, a proto faktorizace $B/\mathscr{I}_\mu$ je úplnou Booleovou algebrou.

(e) Obecně se úplnost algebry faktorizací nezachovává. Faktorizace potenční algebry $\mathscr{P}(\omega)$ podle ideálu $\mathscr{I}_F$ všech konečných podmnožin přirozených čísel není σ-úplná algebra. Navíc, sat $(\mathscr{P}(\omega)/\mathscr{I}_F) = (2^\omega)^+$, což plyne z III.1.14.

2.52 Značení. Množinu všech ultrafiltrů v Booleově algebře B značíme Ult (B). Všimněme si, že βX z I.8.19 je totéž jako Ult $(\mathscr{P}(X))$.

Následující tvrzení ukazuje, že Booleovy algebry jsou úzce spjaty s algebrami množin.

2.53 Věta o reprezentaci (Stone 1934). *Každá Booleova algebra je izomorfní s nějakou algebrou množin.*

Důkaz. Je-li B atomární Booleova algebra a je-li X množina všech jejích atomů, podle 2.14 víme, že zobrazení f definované pro každé $b \in B$ předpisem $f(b) = \{a \in X : a \leq b\}$ je izomorfismus algebry B a algebry podmnožin $\{f(b) : b \in B\}$ množiny X.

Existují však i Booleovy algebry, které nejsou atomární. Hledáme objekty podobné atomům, které by sloužily jako prvky výchozí množiny algebry množin. Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi atomy a hlavními ultrafiltry. Množina všech ultrafiltrů je rozšířením množiny všech atomů a slouží jako výchozí množina pro hledanou algebru množin.

Nechť B je libovolná Booleova algebra. Pro každé $a \in B$ definujme $S(a) = \{F \in \mathrm{Ult}(B) : a \in F\}$. Podle 2.49 je S prosté zobrazení algebry B do $\mathscr{P}(\mathrm{Ult}(B))$. Jelikož $\mathbf{0}$ neleží v žádném ultrafiltru a $\mathbf{1}$ je v každém ultrafiltru, je $S(\mathbf{0}) = 0$ a $S(\mathbf{1}) = \mathrm{Ult}(B)$. Navíc pro libovolné $a, b \in B$ je

$$\begin{aligned} S(a \wedge b) &= S(a) \cap S(b), \\ S(-a) &= \mathrm{Ult}(B) - S(a). \end{aligned}$$

To znamená, že S je izomorfismus algebry B a algebry množin $\{S(a) : a \in B\}$.

2.54 Poznamenejme, že právě dokázaná Stoneova věta říká, že konečné booleovské operace je možno reprezentovat množinovými operacemi. Pro nekonečné booleovské operace taková reprezentace není obecně možná. Úplná Booleova algebra bez atomů, která má spočetnou hustou podmnožinu, není izomorfní se žádnou σ-algebrou množin.

2.55 Stoneova dualita (Stone 1934, 1936, 1937). Stoneova dualita dává do souvislosti Booleovy algebry a kompaktní totálně nesouvislé topologické prostory (1.2(e)), které též nazýváme *booleovskými prostory*.

Booleově algebře B přiřadíme topologický prostor. Vezměme množinu $\mathrm{Ult}(B)$ všech ultrafiltrů v B a zobrazení $S : B \to \mathscr{P}(\mathrm{Ult}(B))$ takové, že

$$S(a) = \{F \in \mathrm{Ult}(B) : a \in F\}.$$

Z důkazu 2.53 víme, že $S[B]$ je systém uzavřený na konečné průniky. To znamená, že $S[B]$ tvoří bázi nějaké topologie na množině $\mathrm{Ult}(B)$, kterou nazýváme *Stoneovou topologií*. Množina $\mathrm{Ult}(B)$ s touto topologií se nazývá *Stoneův prostor* nebo také *duální prostor* algebry B.

2.56 Věta. *Pro každou Booleovu algebru B je* $\mathrm{Ult}(B)$ *booleovský prostor a S je izomorfismus algebry B na* $\mathrm{CO}(\mathrm{Ult}(B))$.

Důkaz. Jsou-li F, G různé ultrafiltry, pak existuje prvek $a \in B$ takový, že $a \in F$, $-a \in G$. Pak $S(a)$, $S(-a)$ jsou obojetné množiny oddělující F a G. Dokázali jsme, že prostor je totálně nesouvislý. Dokazujeme kompaktnost. Nechť Q je otevřené pokrytí celého prostoru. Můžeme předpokládat, že Q sestává z bázových množin, tedy $Q = \{S(a): a \in Z\}$ pro nějaké $Z \subseteq B$. Předpokládejme, že neexistuje konečné $Q_0 \subseteq Q$ pokrývající celý prostor. Potom $\{-\bigvee Y: Y \subseteq Z, Y \text{ konečné}\}$ je centrovaný systém prvků z B a ultrafiltr v B, který ho rozšiřuje, nepatří do žádné množiny z Q, spor. Tedy Ult (B) je booleovský prostor.

Jelikož $S[B]$ je algebra podmnožin prostoru Ult (B), jsou všechny množiny z $S[B]$ obojetné. Na druhou stranu, mějme obojetnou množinu X. Z kompaktnosti plyne, že je sjednocením konečného počtu bázových množin, například

$$X = S(a_1) \vee \ldots \vee S(a_n).$$

Potom $X = S(b)$, kde $b = a_1 \vee \ldots \vee a_n$, a tedy $X \in S[B]$. Jednoznačnost zobrazení S byla dokázána v 2.53.

Každé Booleově algebře máme přiřazen booleovský prostor. Naopak, je-li dán booleovský prostor X, uvažujme Booleovu algebru $B = \mathrm{CO}(X)$. Ukážeme, že Stoneův prostor algebry B je homeomorfní prostoru X.

Bodům prostoru X jednoznačně odpovídají ultrafiltry v B. Pro $x \in X$ definujme $D(x) = \{A \in B: x \in A\}$, což je ultrafiltr v B. Z totální nesouvislosti prostoru X plyne, že D je prosté zobrazení. Mějme libovolný ultrafiltr F v B. Potom F je centrovaný systém uzavřených množin v prostoru X. Z kompaktnosti plyne $x \in \bigcap F$ pro nějaké $x \in X$, a tedy $F = D(x)$. Zobrazení D je prosté zobrazení X na množinu Ult (B) a snadno se nahlédne, že D je homeomorfismus.

Stoneova dualita umožňuje použití topologických prostředků při zkoumání Booleových algeber.

§ 3 Generická rozšíření modelů teorie množin

V předchozím textu jsme se vícekrát setkali s principy, hypotézami a tvrzeními, nedokazatelnými v teorii množin ZFC. Seznámíme se s metodou, pocházející od P. Cohena, jak prokazovat jejich nedokazatelnost, s metodou generických rozšíření modelů teorie množin. Při výkladu těžíme z teorie úplných Booleových algeber a generických ultrafiltrů na nich. Touto technikou získáme, mimo jiné, bezespornost CH, $\diamondsuit$, $\neg$CH. Dále se seznámíme s Martinovým axiomem. Důkaz věty o generickém rozšíření tvoří závěr paragrafu.

3.1 Připomeňme, že Zermelova a Fraenkelova teorie množin (ZF) je teorie s rovností $=$, speciálním predikátovým symbolem $\in$ a s axiomy extenzionality, sumy, potence, existence nekonečné množiny, schématu axiomu nahrazení a axiomem fundovanosti (I.2.27). Přidáme-li k nim axiom výběru, mluvíme o teorii ZFC. Nebude-li uvedeno jinak, pracujeme v teorii ZF.

3.2 Relativizace. Nechť M je libovolná třída. Pro libovolnou formuli φ jazyka teorie množin definujeme její relativizaci φ^M do třídy M:

(i) $(x \in y)^M$ je $x \in y$, $(x = y)^M$ je $x = y$,

(ii) $(\neg\varphi)^M$ je $\neg(\varphi)^M$, $(\varphi \,\&\, \psi)^M$ je $\varphi^M \,\&\, \psi^M$ a podobně pro disjunkci, implikaci a ekvivalenci,

(iii) $(\forall x\varphi)^M$ je $(\forall x \in M)\,\varphi^M = (\forall x)\,(x \in M \rightarrow \varphi^M)$,
$(\exists x\varphi)^M$ je $(\exists x \in M)\,\varphi^M = (\exists x)\,(x \in M \,\&\, \varphi^M)$.

Tedy formule φ^M vznikne z formule φ relativizací všech kvantifikátorů do třídy M, přitom predikáty rovnost a náležení zůstávají beze změny. Můžeme říci, že formule φ^M říká totéž pro množinové univerzum M co formule φ pro univerzum V.

3.3 Tranzitivní model. (i) Říkáme, že uzavřená formule φ platí ve třídě M, jestliže formule φ^M je dokazatelná v teorii množin.

(ii) Říkáme, že třída M je modelem teorie ZF, jestliže každý axiom φ teorie ZF platí ve třídě M. Je-li M navíc tranzitivní třída (II.1.1) říkáme, že M je tranzitivní model ZF nebo vnitřní model teorie množin (II.7.13).

Univerzální třída **V** i třída **L** všech konstruovatelných množin jsou tranzitivní modely teorie množin. Navíc podle II.7 je třída **L** modelem ZFC, ve kterém platí zobecněná hypotéza kontinua. Tedy **L** je modelem teorie ZFC + GCH.

3.4 Příklady. (a) Axiom extenzionality platí v každé tranzitivní třídě M. Relativizace axiomu extenzionality do třídy M je formule

$$(1)\qquad (\forall x, y \in M)\big((\forall u \in M)(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y\big).$$

Z tranzitivnosti třídy M plyne, že pro $x, y \in M$ je $x = x \cap M$ a $y = y \cap M$, a proto jakmile $x \cap M = y \cap M$, je $x = y$. Dokázali jsme formuli (1), tedy v M platí axiom extenzionality.

(b) V každé třídě M platí axiom fundovanosti. Jeho relativizace je formule

$$(2)\qquad (\forall a \in M)\big((\exists x \in M)(x \in a) \rightarrow \\ \rightarrow (\exists x \in M)(x \in a \,\&\, \neg(\exists y \in M)(y \in a \,\&\, y \in x))\big);$$

Jelikož předpokládáme axiom fundovanosti, pro každé $a \in M$, pokud $a \cap M$ je neprázdné, existuje $\in$-minimální prvek x v množině $a \cap M$. To znamená, že platí (2).

(c) Pracujeme v teorii ZFC. Pro libovolný kardinál λ nechť $H(\lambda)$ je systém všech množin, jejichž tranzitivní obal (II.6.9) má mohutnost $< \lambda$. Je zřejmé, že tranzitivní obal každého prvku z $H(\lambda)$ je podmnožinou $H(\lambda)$, a tedy $H(\lambda)$ je tranzitivní množina. Speciálně platí $H(\omega) = V_\omega$ a množina $H(\omega)$ je modelem teorie konečných množin, to znamená teorie, která vznikne, když v ZF nahradíme axiom nekonečna jeho negací. Je-li λ nespočetný regulární kardinál, potom v $H(\lambda)$ platí všechny axiomy ZFC až na axiom potence. Je-li navíc λ nedosažitelný kardinál, pak v $H(\lambda)$ platí i axiom potence a $H(\lambda)$ je množinový tranzitivní model teorie ZFC.

Existuje-li nedosažitelný kardinál, potom existuje i spočetný tranzitivní model teorie ZFC.

3.5 Naším záměrem není metamatematické studium existence modelů teorie množin. Soustředíme se na popis konstrukce, která pochází od P. Cohena a která umožňuje z daného výchozího modelu získat nový model, který ho rozšiřuje. Chceme, aby rozšířený model obsahoval více množin než výchozí model. To v některých případech umožňuje ověřit, že v rozšířeném modelu platí nějaká hypotéza nebo kombinatorický princip, které buď ve výchozím modelu neplatí, nebo jejich platnost neumíme ověřit. Je zřejmé, že univerzální třída není vhodný výchozí model. Abychom vůbec mohli přidat nové množiny, výchozí model musí být menší.

Konstrukce rozšíření modelu teorie množin má vzdálenou analogii v konstrukci algebraického rozšíření tělesa. Pro dané těleso T a polynom $p(x)$ nad T, který nemá kořen v T, se konstruuje rozšíření T' tělesa T, v kterém již existuje kořen polynomu $p(x)$.

3.6 Volbou modelu M určujeme nové univerzum teorie množin, ve kterém úlohu univerzální třídy přejímá třída M. Prvky třídy M jsou množinami modelu a náležení mezi nimi je původní relace $\in$. Ke každé formuli φ je dána relativizace φ^M, proto každému pojmu, který jsme zavedli v předchozích částech knihy, odpovídá nějaký pojem ve třídě M. Je důležité vědět, co přeložený pojem znamená z pohledu univerzální třídy.

Náležení a rovnost mezi množinami modelu M jsou stejné jako v celém univerzu $\mathbf{V}$, protože formule $(x \in y)^M$ je $x \in y$ a formule $(x = y)^M$ je $x = y$. Říkáme, že náležení a rovnost jsou absolutní pro M. Zajímá nás, které další množinové pojmy a operace (průnik a rozdíl množin, ordinální číslo) jsou absolutní. Pokud nějaká operace není absolutní, chceme znát její hodnoty.

3.7 Absolutnost. Nechť φ je množinová formule, jejíž všechny volné proměnné jsou mezi $x_1, \ldots, x_n$. Nechť M a N jsou třídy takové, že $M \subseteq N$.

(i) Říkáme, že φ je *absolutní pro M, N*, jestliže

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in M)\,(\varphi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, \ldots, x_n))\,.$$

(ii) Říkáme, že φ je *absolutní pro M*, jestliže je absolutní pro M a $\mathbf{V}$, to znamená, že

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in M)\,(\varphi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n))\,.$$

Z definice absolutnosti dostáváme:

3.8 Lemma. *Nechť $M \subseteq N$. Jsou-li formule φ, ψ absolutní pro M a N, potom také formule $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \mathbin{\&} \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ jsou absolutní pro M, N.*

Je-li φ absolutní pro M a současně absolutní pro N, pak φ je absolutní pro M, N.

3.9 Příklady. Předpokládáme, že M je tranzitivní třída.

(a) *Absolutnost inkluze.* Vztah $x \subseteq y$ je zkratka za formuli

$$(\forall z)\,(z \in x \rightarrow z \in y)\,,$$

proto $(x \subseteq y)^M$ znamená

$$(\forall z \in M)\,(z \in x \rightarrow z \in y)\,. \tag{3}$$

Pro $x, y \in M$ je (3) ekvivalentní s $x = x \cap M \subseteq y$ neboli s $x \subseteq y$. Ověřili jsme, že pro každé $x, y \in M$ je $(x \subseteq y)^M \leftrightarrow x \subseteq y$, tedy vztah inkluze je absolutní pro M.

(b) *Axiom potence* platí v M, právě když

$$(\forall x \in M)\,(\exists y \in M)\,(\forall z \in M)\,((z \subseteq y)^M \leftrightarrow z \in y)\,. \tag{4}$$

Z příkladu (a) plyne, že (4) je ekvivalentní s tím, že pro každé $x \in M$ je $\mathcal{P}(x) \cap M \in M$. Uvidíme, že operace potence nemusí být absolutní ani pro tranzitivní modely ZF.

3.10 Tranzitivní modely mají velkou přednost v tom, že pro ně je mnoho pojmů absolutních, a tím je do nich nejlépe vidět. Proto se v dalším omezíme jen na tranzitivní modely teorie ZF nebo ZFC.

Následující množinové operace jsou absolutní pro každý tranzitivní model M:

$$(5)\qquad \begin{array}{ccc} \{x, y\}, & x - y, & \mathrm{Rng}(x), \\ \langle x, y\rangle, & x \cup \{x\}, & r''x, \\ x \cap y, & x \times y, & \bigcup x, \\ x \cup y, & \mathrm{Dom}(x). & \end{array}$$

To znamená, že pro každou z uvedených operací $F(x, y)$ je formule $z = F(x, y)$ absolutní. Poznamenejme, že pro každou operaci $F(x, y)$ definovanou v ZF se musí dokázat, že pro každé x, y existuje právě jedno z takové, že $z = F(x, y)$. Totéž platí i v modelu M. Odtud a z absolutnosti plyne, že třída M je uzavřená na všechny operace (5).

Ukážeme způsob, jakým se dokazuje absolutnost formulí pro tranzitivní modely.

3.11 Lemma. *Je-li M tranzitivní třída a je-li φ absolutní pro M, pak také formule $(\exists x \in y)\,\varphi$, $(\forall x \in y)\,\varphi$ jsou absolutní.*

Důkaz. Nechť $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny volné proměnné ve φ. Pro tranzitivní třídu M a $y \in M$ je $(\exists x)(x \in y)$ ekvivalentní s $(\exists x \in M)(x \in y)$. Odtud a z absolutnosti φ plyne, že pro každé $y, x_1, \ldots, x_n \in M$

$$((\exists x \in y)\,\varphi)^M \leftrightarrow (\exists x \in M)(x \in y \,\&\, \varphi^M) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists x)(x \in y \,\&\, \varphi^M) \leftrightarrow (\exists x)(x \in y \,\&\, \varphi).$$

Podobně se dokazuje absolutnost formule $(\forall x \in y)\,\varphi$.

Výrazy $(\exists x \in y)$, $(\forall x \in y)$ nazýváme *omezené kvantifikátory*. Říkáme, že *formule je omezená*, jestliže všechny kvantifikátory v ní jsou omezené. Protože všechny formule bez kvantifikátorů jsou absolutní, máme:

3.12 Důsledek. *Je-li M tranzitivní a φ omezená formule, pak φ je absolutní pro M.*

Týž pojem může být definován různými ekvivalentními formulemi. Je-li v ZF dokazatelná ekvivalence $\varphi \leftrightarrow \psi$, píšeme $\mathrm{ZF} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, pak v každém modelu M teorie ZF platí $\varphi^M \leftrightarrow \psi^M$. Je-li navíc ψ absolutní pro M, pak φ je také absolutní pro M. Toho lze využít k důkazu absolutnosti nějaké formule φ. Podaří-li se nám nalézt omezenou formuli ψ a dokázat v ZF ekvivalenci $\varphi \leftrightarrow \psi$, víme, že φ je absolutní pro model M. Tak lze ověřit absolutnost všech operací z (5). Například pro sjednocení použijeme ekvivalenci

$$z = \bigcup x \leftrightarrow (\forall y \in x)(y \subseteq z) \,\&\, (\forall w \in z)(\exists y \in x)(w \in y).$$

Formule na pravé straně je ekvivalentní s omezenou formulí, kterou získáme, když $y \subseteq z$ nahradíme ekvivalentní omezenou formulí $(\forall w \in y)(w \in z)$.

3.13 Lemma. *Pro tranzitivní model M jsou následující pojmy absolutní:*

(i) *z je uspořádaná dvojice,*

(ii) *r je relace,*

(iii) *r je funkce,*
(iv) *r je lineární uspořádání na a.*

Naznačíme důkaz (i) a (iv). Je zřejmé, že z je uspořádaná dvojice, právě když $(\exists x, y \in \bigcup z)(z = \langle x, y\rangle)$ a tato formule je ekvivalentní s omezenou formulí. Stejně tak vlastnost (iv) může být vyjádřena pomocí uspořádaných dvojic a omezených kvantifikátorů.

3.14 Ordinální čísla v modelu. *Následující pojmy jsou absolutní v tranzitivním modelu, protože jsou v* ZF *ekvivalentní nějaké omezené formuli:*

(i) *x je ordinální číslo,*
(ii) *x je limitní číslo,*
(iii) *x je izolované číslo,*
(iv) *x je přirozené číslo,*
(v) $0, \omega$.

Důkaz. (i) Z axiomu fundovanosti plyne, že x je ordinální číslo, právě když x je tranzitivní množina, lineárně uspořádaná relací $\in$. Obě vlastnosti jsou ekvivalentní omezené formuli. (v) $x = 0 \leftrightarrow (\forall y \in x)(y \neq y)$ a $x = \omega$, právě když x je limitní ordinál a $(\forall y \in x)(y$ není limitní$)$. (iv) x je přirozené číslo, právě když x a každé $y \in x$ je buď 0, nebo izolované číslo.

Absolutnost formule „x je ordinální číslo“ znamená, že ordinální čísla modelu M jsou právě všechna ordinální čísla, která leží v M, neboli $\mathrm{On}^M = \mathrm{On} \cap M$. Jelikož M je tranzitivní, $\mathrm{On} \cap M$ je tranzitivní část On, a tedy $\mathrm{On} \cap M$ je buď celé On, nebo je to ordinální číslo, a to v případě, že M je množina. Navíc $0 \in M$ a pro každé $x \in M$ je $x \cup \{x\} \in M$, odkud plyne $\omega \subseteq M$ a také, že $\mathrm{On} \cap M$ je limitní ordinál. V M platí axiom nekonečna, proto $\omega \in M$. V tranzitivním modelu jsou přirozená čísla stejná jako ve V.

3.15 Příklad. V tranzitivním modelu jsou následující pojmy absolutní:
(i) $\langle a, r\rangle$ je dobré uspořádání,
(ii) α je ordinální typ dobrého uspořádání $\langle a, r\rangle$.

Důkaz. Nechť $a, r \in M$, ukážeme, že

$$(6) \qquad (\langle a, r\rangle \text{ je dobré uspořádání})^M \to \langle a, r\rangle \text{ je dobré uspořádání.}$$

Dokázali jsme, že každé dobré uspořádání je izomorfní s nějakým ordinálním číslem (II.1.19). Tato věta platí i v modelu M, a proto existují $\alpha, f \in M$ takové, že

$$(\alpha \text{ je ordinál a } f \text{ je izomorfismus } \langle a, r\rangle \text{ na } \alpha)^M .$$

To je formule absolutní pro M, protože α je skutečné ordinální číslo a f je skutečný izomorfismus $\langle a, r\rangle$ na α. Tedy $\langle a, r\rangle$ je skutečné dobré uspořádání ordinálního typu α. Důkaz opačné implikace k (6) je snadný.

3.16 Operace potence v modelu. Axiom potence platí v tranzitivním modelu M, z příkladu 3.9(b) dostáváme

(i) $(\mathscr{P}(x))^M = \mathscr{P}(x) \cap M$ pro každé $x \in M$,
(ii) $(V_\alpha)^M = V_\alpha \cap M$ pro každé $\alpha \in \mathrm{On} \cap M$.

Odtud plyne, že typová funkce je absolutní pro M.

Operace $\mathscr{P}^M$ a množiny $(V_\alpha)^M$ nejsou obvykle absolutní. Zvlášť zřetelné je to v případě, kdy M je spočetný model. Potom pro každé nekonečné $x \in M$ je $\mathscr{P}^M(x) \neq \mathscr{P}(x)$, protože $\mathscr{P}(x)$ je nespočetné, zatímco $\mathscr{P}(x) \cap M$ je spočetná množina. Také $V_\alpha^M \neq V_\alpha$ pro každé $\alpha \in M$ a $\alpha > \omega$.

Kardinální číslo je další pojem, který nemusí být absolutní. Je-li model M spočetný, pak $\mathrm{On} \cap M$ je spočetné ordinální číslo. Proto každý nespočetný kardinál v M je spočetným ordinálem ve $\mathbf{V}$.

Pojem „B je Booleova algebra" je absolutní pro M. Avšak úplnost Booleovy algebry není absolutní pojem. Je-li algebra $B \in M$ úplná v modelu M, říkáme, že je M-úplná.

3.17 Rozšíření. Jsou-li M a N tranzitivní modely, říkáme, že N je rozšířením modelu M nebo že M je rozšířen do modelu N, jestliže oba modely mají stejná ordinální čísla, tedy $\mathrm{On} \cap M = \mathrm{On} \cap N$ a současně $M \subseteq N$.

3.18 Generická množina, motivace. Předpokládejme, že je dán nějaký výchozí tranzitivní model M a jeho rozšíření do tranzitivního modelu N. Je-li $N - M \neq 0$, uvažujme $\in$-minimální množinu σ ze třídy $N - M$. Pro ni platí $\sigma \in N$ a $\sigma \subseteq M$. Ukážeme, že pro každou množinu $\sigma \in N$, která je částí modelu M, existuje množina $a \in M$ výchozího modelu taková, že $\sigma \subseteq a$. Stačí položit $a = (V_\alpha)^M$, kde α je typ množiny σ (vzhledem k $\in$). Typová funkce je absolutní a pro $\sigma \in N$ je typ $(\sigma) \in \mathrm{On}\,(M)$, tedy $\sigma \subseteq V_\alpha^M \in M$.

Vezměme tedy nějakou neprázdnou množinu $\sigma \in N$, která je částí výchozího modelu M. Víme, že existuje $a \in M$, pro které $\sigma \subseteq a$. Uvažujme obrazy množiny σ přes všechny relace z výchozího modelu

$$\mathrm{Ob}\,(\sigma, M) = \{r''\sigma : r \text{ je relace, } r \in M\}.$$

Pro libovolné $r \in M$ je obraz $r''\sigma$ prvkem rozšíření N a současně je částí modelu M. Navíc, libovolné $x \in M$ také získáme jako obraz množiny σ, stačí vzít relaci $r = \{y\} \times x$ pro nějaké $y \in \sigma$. Zřejmě $\sigma \in \mathrm{Ob}\,(\sigma, M)$, protože identita na a je v M. Dostáváme

$$M \subseteq \mathrm{Ob}\,(\sigma, M) \subseteq \{\varrho \in N : \varrho \subseteq M\}.$$

Požadavek jednoduchosti nás přivádí k otázce, existuje-li netriviální rozšíření N daného modelu M, které je určeno výchozím modelem M a jedinou množinou $\sigma \in N$, $\sigma \subseteq M$ tak, že platí

$$\mathrm{Ob}\,(\sigma, M) = \{\varrho \in N : \varrho \subseteq M\}.$$

V takovém případě všechny části výchozího modelu, které patří do rozšíření, získáme jako obrazy jediné množiny σ. Podívejme se, jaké podmínky by musela taková množina σ splňovat.

Třída $\{\varrho \in N : \varrho \subseteq M\}$ je uzavřená na sjednocení a rozdíly množin. Pro libovolné σ je třída $\mathrm{Ob}(\sigma, M)$ uzavřená na sjednocení, protože $r_1''\sigma \cup r_2''\sigma = (r_1 \cup r_2)''\sigma$. Obecně třída $\mathrm{Ob}(\sigma, M)$ není uzavřená na rozdíl. To nás přivádí k definici generické množiny.

3.19 Generická množina. Nechť M je tranzitivní model pro ZF. Je-li $\sigma \subseteq a \in M$, říkáme, že σ je *generická množina nad* M, jestliže třída $\mathrm{Ob}(\sigma, M)$ je uzavřená na rozdíl.

Generické množiny úzce souvisí s ultrafiltry na Booleových algebrách.

3.20 Definice. Nechť B je Booleova algebra v tranzitivním modelu M. Říkáme, že ultrafiltr G v B je *generický nad* M, jestliže G má neprázdný průnik s každou množinou H modelu M, která je hustou podmnožinou algebry B.

Všimněme si, že ultrafiltr G v M-úplné algebře $B \in M$ je generický nad M, právě když pro každou množinu $c \subseteq B$ z M platí

(7) $$c \cap G \neq 0 \leftrightarrow \bigvee c \in G$$

nebo duálně
$$c \subseteq G \leftrightarrow \bigwedge c \in G .$$

Pokud je zřejmé, který model je výchozí, mluvíme krátce o generické množině nebo o generickém ultrafiltru.

3.21 Podobné množiny. Říkáme, že množiny $\sigma, \varrho \subseteq M$ jsou *podobné*, jestliže existují relace $r, s \in M$ takové, že $r''\sigma = \varrho$ a $s''\varrho = \sigma$.

Použijeme-li skládání relací, dostaneme:

3.22 Lemma. *Každá množina ϱ, která je podobná nějaké generické množině σ, je také generická a platí* $\mathrm{Ob}(\sigma, M) = \mathrm{Ob}(\varrho, M)$.

3.23 Věta (Vopěnka, Balcar). *Kanonický tvar generických množin. Nechť M je tranzitivní model teorie* ZF *a nechť $\sigma \subseteq a \in M$. Potom σ je generická množina nad M, právě když je podobná nějakému generickému ultrafiltru G v nějaké M-úplné Booleově algebře $B \in M$.*

Důkaz. Předpokládáme, že $\sigma \subseteq a \in M$ a že σ je generická množina nad M. Množina
$$\varrho = \{u \in M : u \subseteq a \,\&\, u \cap \sigma \neq 0\}$$
leží v $\mathrm{Ob}(\sigma, M)$, protože pro relaci $q = \{\langle x, u\rangle : x \in u \,\&\, u \in \mathcal{P}^M(a)\}$ je $q''\sigma = \varrho$. Je zřejmé, že $\mathcal{P}(a - \sigma) \cap M = \mathcal{P}^M(a) - \varrho$. Jelikož $\mathcal{P}^M(a) \in M$ a třída $\mathrm{Ob}(\sigma, M)$ je uzavřená na rozdíly, je $\mathcal{P}(a - \sigma) \cap M \in \mathrm{Ob}(\sigma, M)$. Zvolme relaci $r \in M$ takovou, že
$$r''\sigma = \mathcal{P}(a - \sigma) \cap M .$$

Můžeme předpokládat, že $\mathrm{Dom}(r) \subseteq a$ a $\mathrm{Rng}(r) \subseteq \mathscr{P}^M(a)$. Z relace r sestrojíme v M symetrickou a antireflexivní relaci $s \subseteq a \times a$ takovou, že platí

(i) pro každé $x \in \sigma$ je $s''\{x\} \cap \sigma = 0$,

(ii) pro každou množinu $c \subseteq a - \sigma$ modelu M existuje $x \in \sigma$ takové, že $c \subseteq$ $\subseteq s''\{x\}$.

Nechť s_1 je relace na množině a definovaná vztahem

$$s_1 = \{\langle x, y\rangle : x, y \in a \,\&\, x \neq y \,\&\, y \in \bigcup r''\{x\}\}.$$

Položme $s = s_1 \cup s_1^{-1}$. Je zřejmé, že s je symetrická, antireflexivní relace a $s \in M$. Pro libovolné $z \in \sigma$ je $r''\{z\} \subseteq \mathscr{P}(a - \sigma) \cap M$, proto $s_1''\{z\} \subseteq a - \sigma$. Tedy pro každé $z \in \sigma$ je $s_1''\{z\}$ disjunktní se σ. Předpokládejme, že pro relaci s a pro nějaké $x \in \sigma$ neplatí (i). Potom pro $y \in s''\{x\} \cap \sigma$ je $y \in \sigma$ a buď $\langle x, y\rangle \in s_1$, nebo $\langle y, x\rangle \in s_1$. Množiny $s_1''\{x\}$ a $s_1''\{y\}$ jsou disjunktní se σ, proto x a y nemohou být současně v σ. Dokázali jsme (i). Nyní ověřujeme (ii). Jelikož $\mathscr{P}(a - \sigma) \cap M =$ $= r''\sigma$, pro libovolnou množinu $c \in M$ takovou, že $c \subseteq a - \sigma$, existuje $x \in \sigma$, pro které $c \in r''\{x\}$. Odtud je zřejmé, že $c \subseteq s_1''\{x\} \subseteq s''\{x\}$, a tedy platí (ii). Od relace s přejdeme ke kvaziuspořádání $\leq$ na množině a definovanému pro $x, y \in a$ vztahem

$$x \leq y \leftrightarrow s''\{x\} \supseteq s''\{y\}.$$

Relace $\leq$ leží v M a ověříme, že platí

(8) pro každé $x, y \in \sigma$ existuje $z \in \sigma$ takové, že $z \leq x$ a $z \leq y$,

(9) je-li $x \in \sigma$ a $x \leq y$, potom $y \in \sigma$,

(10) je-li množina $c \in M$ taková, že $c \subseteq a - \sigma$, pak existuje $x \in \sigma$, které je disjunktní (ve smyslu kvaziuspořádání) se všemi prvky množiny c.

Platí-li (8)–(10), říkáme, že σ je generický filtr nad M v kvaziuspořádané množině $\langle a, \leq\rangle$.

Je-li $x, y \in \sigma$, pak podle (i) je $s''\{x\} \cup s''\{y\} \subseteq a - \sigma$, a proto podle (ii) existuje $z \in \sigma$ takové, že $s''\{z\} \supseteq s''\{x\} \cup s''\{y\}$. To znamená, že $z \leq x$ i $z \leq y$ a platí (8). Nechť $x \in \sigma$ a $x \leq y$. Potom $s''\{y\} \subseteq s''\{x\} \subseteq a - \sigma$. Kdyby $y \notin \sigma$, potom podle (ii) existuje $z \in \sigma$ takové, že $s''\{z\} \supseteq s''\{x\} \cup \{y\}$. Tedy $\langle z, y\rangle \in s$ a ze symetrie dostáváme $\langle y, z\rangle \in s$, odkud plyne $z \in a - \sigma$, to je spor. Zbývá ověřit (10). Nechť $c \in M$ a $c \subseteq a - \sigma$. Podle (ii) existuje $z \in \sigma$ takové, že $c \subseteq s''\{z\}$. Ukážeme, že z je disjunktní se všemi prvky množiny c, to znamená, že pro žádné $x \in c$ neexistuje $y \in a$ takové, že

(11) $$s''\{y\} \supseteq s''\{z\} \cup s''\{x\}.$$

Předpokládejme, že pro nějaké $x \in c$ a $y \in a$ platí (11). Jelikož $\langle z, x\rangle \in s$, podle (11) je také $\langle y, x\rangle \in s$ a ze symetrie dostáváme $\langle x, y\rangle \in s$. Odtud a z (11) plyne $\langle y, y\rangle \in s$, to je spor s antireflexivností relace s.

Ověřili jsme, že σ je generický filtr v kvaziuspořádané množině $\langle a, \leq \rangle$. Nyní od kvaziuspořádání přejdeme k Booleově algebře. Snadno se nahlédne, že věta 2.17 platí i pro kvaziuspořádané množiny. Tedy každá neprázdná kvaziuspořádaná množina určuje úplnou Booleovu algebru. Odtud plyne, že v modelu M existuje M-úplná Booleova algebra B a zobrazení $j \in M$ takové, že j zobrazuje množinu a na hustou podmnožinu B a j zachovává (kvazi)uspořádání a disjunktnost. Ověříme, že

$$G = \{u \in B: (\exists x \in \sigma)(j(x) \leq u)\}$$

je generický ultrafiltr v algebře B. Z vlastnosti (8) množiny σ plyne, že G je filtr. Je-li $H \in M$ hustá množina v B, položme

$$c = \{x \in a: j(x) \leq u \text{ pro nějaké } u \in H\}.$$

Množina c leží v M. Ukážeme, že $c \cap \sigma \neq 0$. Jinak by podle (10) existovalo $y \in \sigma$ disjunktní se všemi prvky z c. Protože zobrazení j zachovává uspořádání i disjunktnost, bylo by $j(y)$ disjunktní se všemi prvky z H, a to není možné. Nechť $x \in \sigma \cap c$ a $u \in H$ je takové, že $j(x) \leq u$, potom $u \in G$. Ukázali jsme, že každá množina $H \in M$, která je hustá v B, má společný prvek s G. Odtud již plyne, že G je ultrafiltr v B, protože pro libovolné $v \in B$ je množina

$$\{u \in B - \{\mathbf{0}\}: u \leq v \text{ nebo } u \leq -v\}$$

hustá, tedy v nebo $-v$ leží v G. Množiny σ a G jsou podobné, protože $\sigma = j^{-1}{}''G$ a $G = q''\sigma$, kde $q = \{\langle x, u \rangle: j(x) \leq u\}$. Ukázali jsme, že každá generická množina $\sigma \subseteq M$ je podobná nějakému generickému ultrafiltru.

Zbývá ukázat, že každý generický ultrafiltr v M-úplné algebře $B \in M$ je generickou množinou nad M. Dokážeme to v následujícím odstavci.

3.24 Jména podmnožin. Nechť B je Booleova algebra, a libovolná množina. Každou funkci

$$f: a \to B \tag{12}$$

nazýváme *jménem podmnožiny* množiny a.

Jde o zobecnění charakteristické funkce množiny. Míra náležení prvku $x \in a$ do podmnožiny se jménem f nemá pouze hodnotu 0 nebo 1, ale může mít libovolnou hodnotu $\mathbf{0}_B \leq f(x) \leq \mathbf{1}_B$. Je-li dán ultrafiltr G v B, potom jméno (12) určuje jednoznačně množinu

$$f_G = \{x \in a: f(x) \in G\} = f^{-1}{}''G.$$

Je zřejmé, že množina f_G závisí na volbě ultrafiltru G. Funkce f je tedy jménem nějaké podmnožiny množiny a a jeho význam je určen teprve ultrafiltrem G jako množina f_G. I když jsme jména podmnožin zavedli obecně uvnitř celé univerzální třídy, budeme je používat nejčastěji uvnitř nějakého tranzitivního modelu. Pro nějakou M-úplnou Booleovu algebru $B \in M$ a množinu $a \in M$ budeme uvažovat jen jména (12), která jsou také prvky modelu M.

Předpokládejme, že G je generický ultrafiltr v M-úplné Booleově algebře $B \in M$. Ukážeme, že platí

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{Ob}(G, M) = \{f_G : f \text{ je jméno, } f \in M\}.$$

Nechť $\varrho = r''G$, r je relace z M. Můžeme předpokládat, že $\mathrm{Dom}(r) \subseteq B$. Položme $a = \mathrm{Rng}(r)$. Z M-úplnosti algebry B plyne, že pro každé $x \in a$ je $f(x) = \bigvee r^{-1}{}''\{x\}$ prvek z B. Tím je definována funkce $f: a \to B$ a $f \in M$. Podle (7) je $x \in r''G$, právě když $f(x) \in G$. To znamená, že $f^{-1}{}''G = r''G$ neboli $\varrho = f_G$. Ukázali jsme, že ve (13) platí inkluze $\subseteq$, opačná inkluze je zřejmá.

Nyní snadno ověříme, že pro libovolný generický ultrafiltr G v B je třída obrazů $\mathrm{Ob}(G, M)$ uzavřená na rozdíl, tedy G je vskutku generickou množinou nad M podle 3.19. Z (13) plyne, že místo relací můžeme uvažovat jména. Nechť $f: a \to B$, $g: b \to B$ jsou z M. Pro každé $x \in a$ položme $h(x) = f(x) -_B g(x)$. Jelikož G je ultrafiltr, pro každé $x \in a$ platí

$$h(x) \in G \leftrightarrow f(x) \in G \,\&\, g(x) \notin G.$$

To znamená, že $h_G = f_G - g_G$, a tedy třída $\mathrm{Ob}(G, M)$ je uzavřená na rozdíl. Důkaz věty 3.23 je úplný.

3.25 Příklad. Nechť B je M-úplná algebra v modelu M. Generický ultrafiltr G v B leží v M, právě když $G = \{x \in B : u \leq x\}$ pro nějaký atom u algebry B. Plyne to z vlastnosti (7). Je-li B algebra bez atomů, pak žádný generický ultrafiltr v B není prvkem M.

3.26 Věta o generickém rozšíření. *Je-li M tranzitivní model* ZF *a G generická množina nad M, potom existuje rozšíření N modelu M takové, že*

(i) $\mathrm{Ob}(G, M) = \{\varrho \in N : \varrho \subseteq M\}$,

(ii) *je-li N_1 tranzitivní model* ZF *takový, že $M \subseteq N_1$ a $G \in N_1$, potom $N \subseteq N_1$.*

Navíc, je-li M model ZFC, *potom také N je model* ZFC.

3.27 Generické rozšíření. Rozšíření N s vlastnostmi (i) a (ii), jehož existenci zaručuje věta 3.26, nazýváme generickým rozšířením modelu M a značíme ho $N = M[G]$.

Je-li G generická množina nad M, je rozšíření $M[G]$ výchozím modelem M a generickou množinou G určeno jednoznačně, neboť $M[G]$ je nejmenší rozšíření modelu M, v kterém leží G. Podle 3.23 můžeme předpokládat, že generická množina G je generickým ultrafiltrem v nějaké M-úplné Booleově algebře z M.

Věta o generickém rozšíření má dvě stránky. První je metamatematická a zaručuje, že pro každou generickou množinu G nad M existuje rozšíření $M[G]$, které je modelem teorie ZF nebo ZFC. Důkaz tohoto tvrzení je stejný pro všechny generické množiny a vrátíme se k němu později. Druhá stránka je spíše matematická. Jde o to, že volbou generické množiny můžeme ovlivnit platnost či neplatnost nějakého množinového principu (hypotézy) v generickém rozšíření. Tímto způsobem se otázka bezespornosti nějaké hypotézy vzhledem k axiomům teorie množin převádí na kombinatorický problém, zda ve výchozím modelu M existuje Booleova algebra s určitými strukturálními vlastnostmi. Tuto druhou stránku ukážeme na několika příkladech.

Musíme se nejprve zabývat existencí generických množin, speciálně generických ultrafiltrů v Booleových algebrách. Pro spočetné modely snadno získáme různé generické množiny.

3.28 Věta. *Je-li M spočetný tranzitivní model a $B \in M$ je Booleova algebra, potom pro každé nenulové $v \in B$ existuje generický ultrafiltr $G \subseteq B$ nad M takový, že $v \in G$.*
Věta plyne z následujícího tvrzení o Booleových algebrách.

3.29 Věta (Rasiowa, Sikorski 1950). *Pro libovolný spočetný soubor $\langle H_n : n < \omega \rangle$ hustých podmnožin Booleovy algebry B a pro libovolné nenulové $v \in B$ existuje ultrafiltr F v B, který má společné prvky s každou množinou H_n a $v \in F$.*
Důkaz. Rekurzí sestrojíme posloupnost $\langle v_n : n < \omega \rangle$ prvků z B takovou, že $v = v_0 \geq v_1 \geq \dots$ a pro každé n je $v_{n+1} \in H_n$. Množina $\{v_n : n < \omega\}$ je centrovaná a každý ultrafiltr v B, který ji rozšiřuje, je hledaným ultrafiltrem.

Všimněme si, že podle Stoneovy duality věta 3.29 je algebraickým protějškem Baireovy věty (1.29(c)) pro booleovské topologické prostory.
Důkaz věty 3.28. Připomeňme, že každá Booleova algebra v M je Booleovou algebrou ve $\mathbf{V}$. Ze spočetnosti modelu M plyne, že všech hustých podmnožin algebry B, které leží v M, je nejvýše spočetně mnoho. Očíslujeme je $\langle H_n : n \in \omega \rangle$. Podle 3.29 existuje ultrafiltr G v B takový, že $v \in G$ a $H_n \cap G \neq 0$ pro každé n. Ultrafiltr G je generický nad M.

3.30 Co platí v generickém rozšíření $M[G]$, když je dána algebra $B \in M$ a v ní generický ultrafiltr G, podstatně závisí na vlastnostech algebry B a na tom, které prvky ultrafiltr G obsahuje. Ukážeme, jak lze volbou Booleovy algebry zaručit, aby v generickém rozšíření platil některý z následujících principů:

(i) hypotéza kontinua,
(ii) diamantový princip (III.2.40),
(iii) negace hypotézy kontinua,
(iv) každý skoro disjunktní systém na ω_1 má mohutnost nejvýše ω_2 a přitom $2^{\omega_1} = \omega_3$.

Běžný důkaz bezespornosti hypotézy kontinua používá univerzum konstruovatelných množin, v kterém platí GCH. Použijeme generické rozšíření k tomu, abychom získali model, ve kterém platí hypotéza kontinua. Ukážeme přitom některé základní techniky.

Budeme předpokládat, že výchozí model M je spočetný tranzitivní model ZFC. Podle 3.28 tím bude zaručeno, že pro libovolnou M-úplnou Booleovu algebru $B \in M$ existuje generický ultrafiltr G v B a $M[G]$ je také model ZFC.

3.31 Bezespornost hypotézy kontinua. *Je-li M spočetný tranzitivní model* ZFC, *existuje jeho generické rozšíření $N = M[G]$, v kterém platí $2^\omega = \omega_1$.*
Důkaz. Jelikož M je tranzitivní model, množina všech přirozených čísel je absolutní, tedy $\omega^M = \omega$. V M platí axiom výběru, proto všechny podmnožiny přirozených čísel modelu M lze očíslovat ordinálními čísly menšími než $(2^\omega)^M$ a nějaké očíslování $\langle A_\alpha : \alpha < (2^\omega)^M \rangle$ existuje v M. Přitom $(2^\omega)^M \geq \omega_1^M$. Využijeme toho, že kardinální čísla nemusí být absolutní pro M, N. Stačí nalézt generickou množinu G tak, aby v generickém rozšíření $M[G]$ platilo

(i) existuje prosté zobrazení ordinálu $(2^\omega)^M$ na ω_1^M,

(ii) neexistuje nová podmnožina přirozených čísel, to znamená, že neexistuje $X \subseteq \omega$ taková, že $X \in M[G] - M$· jinými slovy $\mathcal{P}^M(\omega) = \mathcal{P}^{M[G]}(\omega)$,

(iii) ω_1^M zůstává kardinálním číslem, neboli $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$.

Z podmínek (i)–(iii) již plyne, že v $M[G]$ lze všechny podmnožiny přirozených čísel očíslovat pomocí ordinálních čísel menších než $\omega_1^{M[G]}$, a tedy v rozšíření $M[G]$ platí $2^\omega = \omega_1$.

Všimněme si, že na základě (iii) je (i) ekvivalentní s tím, že v $M[G]$ existuje zobrazení ϱ kardinálu ω_1^M na $(2^\omega)^M$. Aproximacemi takového zobrazení ϱ ve výchozím modelu M jsou všechny funkce $f \in M$, které jsou v M spočetné s $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \omega_1^M$ a $\mathrm{Rng}(f) \subseteq (2^\omega)^M$. To nás přivádí k uspořádané množině $F(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$ z 2.25(f) a jí určené úplné Booleově algebře $C(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$, které uvažujeme uvnitř modelu M. Tedy $C = C^M(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$ je M-úplná algebra v M s hustou množinou $F = F^M(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$. Nechť G je ultrafiltr v C, který je generický nad M. V generickém rozšíření $M[G]$ definujeme

$$\varrho = \bigcup \{f \in F : f \in G\}.$$

Množina ϱ je definovaná pomocí $F \in M$ a $G \in M[G]$, proto $\varrho \in M[G]$. Ověřujeme, že ϱ je zobrazení ω_1^M na $(2^\omega)^M$. Jelikož G je filtr a množina F je uspořádaná obrácenou inkluzí, libovolné funkce $f_1, f_2 \in F \cap G$ musí být kompatibilní a $f_1 \wedge f_2 = f_1 \cup f_2 \in G$, tedy $f_1 \cup f_2$ je opět v $F \cap G$. Odtud plyne, že ϱ je zobrazení. Využijeme generičnosti ultrafiltru G, abychom dokázali, že ϱ je definované na celém ω_1^M a že $\mathrm{Rng}(\varrho) = (2^\omega)^M$. Nejprve se přesvědčíme, že pro každé $\alpha < \omega_1^M$ je

$$D_\alpha = \{f \in F : \alpha \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

hustá podmnožina algebry C. Pro dané α stačí ukázat, že každá funkce $g \in F$ má prodloužení z D_α. Je-li $\alpha \in \mathrm{Dom}(g)$, pak přímo $g \in D_\alpha$. Pokud $\alpha \notin \mathrm{Dom}(g)$, prodloužení $g \cup \{\langle \alpha, 0 \rangle\}$ je v D_α. Množina D_α je hustá v C. Tedy pro každé $\alpha < \omega_1^M$ existuje $f \in D_\alpha \cap G$ a to znamená, že $f \subseteq \varrho$ a $\alpha \in \mathrm{Dom}(\varrho)$. Odtud dostáváme $\mathrm{Dom}(\varrho) = \omega_1^M$.

Podobně ověříme, že pro každé $\beta < (2^\omega)^M$ je

$$R_\beta = \{f \in F : \beta \in \mathrm{Rng}(f)\}$$

hustá množina v C. Každé $g \in F$ je spočetná funkce v M, proto $\omega_1^M - \mathrm{Dom}(g) \neq 0$.

Jakmile $g \notin R_\beta$, vezměme nejmenší $\alpha \in \omega_1^M - \mathrm{Dom}(g)$ a položme $g \cup \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$. Získali jsme prodloužení, které je v R_β, proto množina R_β je hustá. Tedy pro každé $\beta < (2^\omega)^M$ existuje $f \in R_\beta \cap G$ a to znamená, že $f \subseteq \varrho$ a $\beta \in \mathrm{Rng}(\varrho)$. Ověřili jsme, že ϱ zobrazuje ω_1^M na $(2^\omega)^M$. Odtud a z $\omega_1^M \leq (2^\omega)^M$ plyne, že v $M[G]$ existuje prosté zobrazení $(2^\omega)^M$ na ω_1. Dokázali jsme (i).

K důkazu (ii) a (iii) využijeme distributivnosti algebry C. Uspořádaná množina $F(\omega_1 . 2^\omega, \omega_1)$ je ω_1-uzavřená (2.33) a z toho plyne (ω, ∞)-distributivnost úplné algebry $C(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$. Tedy algebra C je (ω, ∞)-distributivní v M. Z následujícího tvrzení 3.32 plyne, že v $M[G]$ neexistuje žádné nové zobrazení z ω do libovolného ordinálu $\alpha < \mathrm{On}^M$. Tedy v $M[G]$ neexistuje ani nová podmnožina přirozených čísel (funkce z ω do $\{0, 1\}$), ani zobrazení z ω na ω_1^M. Proto ω_1^M zůstává kardinálním číslem i v rozšíření $M[G]$. Máme tím dokázáno (ii) a (iii), a tedy v $M[G]$ platí hypotéza kontinua.

3.32 Věta. *Nechť $\varkappa$ a $\lambda \geq 2$ jsou kardinální čísla modelu M. Nechť v M platí, že B je úplná $(\varkappa, \lambda)$-distributivní Booleova algebra. Je-li G libovolný ultrafiltr v B, který je generický nad M, potom v $M[G]$ neexistuje nové zobrazení z $\varkappa$ do λ. Speciálně se v $M[G]$ nepřidá nová podmnožina kardinálu $\varkappa$, tedy $\mathscr{P}^M(\varkappa) = \mathscr{P}^{M[G]}(\varkappa)$ a všechna kardinální čísla menší nebo rovna $\varkappa^+$ v modelu M jsou také kardinálními čísly v rozšíření $M[G]$.*

Důkaz. Mějme v M úplnou $(\varkappa, \lambda)$-distributivní algebru B a v ní ultrafiltr G generický nad M. Nechť $\varrho : \varkappa \to \lambda$ je libovolné zobrazení v generickém rozšíření $M[G]$. Chceme ukázat, že $\varrho \in M$. Jelikož $\varrho \subseteq \varkappa \times \lambda \in M$, je ϱ podmnožinou výchozího modelu M, a proto podle (13) existuje nějaké jméno $f : (\varkappa \times \lambda) \to B$ takové, že $f \in M$ a $\varrho = f_G$.

To, že f je jméno nějakého zobrazení, umožňuje sestrojit v M nové jméno $v : \varkappa \times \lambda \to B$ takové, že $v_G = \varrho$ a pro každé $\alpha < \varkappa$ soubor $\langle v(\alpha, \beta) : \beta < \lambda \rangle$ sestává ze vzájemně disjunktních prvků algebry B a jeho spojení dává $\mathbf{1}$. Konstruujeme v M jméno v. Pro každé $\alpha < \varkappa$ a $\beta < \lambda$ položme

$$v(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) - \bigvee \{ f(\alpha, \gamma) : \gamma < \beta \} .$$

Je zřejmé, že $v(\alpha, \beta) \leq f(\alpha, \beta)$. Jelikož $\varrho = f_G$ je zobrazení, pro každé $\alpha < \varkappa$ existuje jediné $\beta_\alpha < \lambda$ takové, že $f(\alpha, \beta_\alpha) \in G$. Odtud a z vlastnosti (7) generického ultrafiltru dostáváme

$$\bigvee \{ f(\alpha, \gamma) : \gamma < \beta_\alpha \} \notin G \quad \text{a} \quad v(\alpha, \beta_\alpha) \in G .$$

Ověřili jsme, že pro libovolné $\alpha < \varkappa$ a $\beta < \lambda$ platí

$$v(\alpha, \beta) \in G \leftrightarrow f(\alpha, \beta) \in G , \tag{14}$$

tedy $v_G = f_G = \varrho$. Pro každé $\alpha < \varkappa$ soubor $\langle v(\alpha, \beta) : \beta < \lambda \rangle$ sestává ze vzájemně disjunktních prvků. Můžeme předpokládat, že $\bigvee \{ v(\alpha, \beta) : \beta < \lambda \} = \mathbf{1}$. Pokud tomu tak není, doplněk spojení můžeme přidat k $v(\alpha, 0)$. Tím neporušíme disjunktnost ani (14). Získali jsme tak $(\varkappa, \lambda)$-matici $\langle v(\alpha, \beta) : \alpha < \varkappa, \beta < \lambda \rangle$ prvků algebry B takovou, že nenulové prvky z každého řádku tvoří rozklad jednotky. Máme $\varkappa$ rozkladů a každý má mohutnost nejvýše λ. Z distributivnosti algebry B plyne existence jejich společného zjemnění $Q \in M$, které je také rozkladem. Podle (7) je $Q \cap G \neq 0$ a protože prvky Q jsou navzájem disjunktní, existuje jen jediný prvek $u \in Q$, který náleží do G. Pro tento prvek u definujme

$$h = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \alpha < \varkappa, \beta < \lambda, u \leq v(\alpha, \beta)\}.$$

Je zřejmé, že h je zobrazení $\varkappa$ do λ a $h \in M$, protože je definováno uvnitř M bez použití generického ultrafiltru. Jelikož $h = \varrho$, leží ϱ ve výchozím modelu M.

Dokázali jsme, že v rozšíření $M[G]$ se nepřidá nové zobrazení $\varkappa$ do λ. Odtud plyne, že pro libovolnou množinu $x \in M$ mohutnosti $\varkappa$ (v M) se v $M[G]$ nepřidá žádné zobrazení množiny x do λ. Speciálně se nepřidá funkce z $\varkappa$ do $\{0, 1\}$ a to znamená, že se nepřidá nová podmnožina kardinálu $\varkappa$. Nepřidá se tedy ani nová relace na $\varkappa$.

Připomeňme, že každé kardinální číslo rozšíření $M[G]$ je kardinálním číslem výchozího modelu M. Je-li $\varkappa$ kardinál v M, odtud plyne, že mezi kardinálními čísly $\varkappa$ a $(\varkappa^+)^M$ neexistuje nové kardinální číslo v $M[G]$. Ukážeme, že každé $\nu \leq \varkappa^+$, které je kardinálním číslem v M, je také kardinálním číslem v $M[G]$. Předpokládejme, že nějaké kardinální číslo $\nu \leq \varkappa^+$ v M není kardinálním číslem v $M[G]$. To znamená, že existuje ordinální číslo $\alpha < \nu$ a vzájemně jednoznačné zobrazení $\sigma \in M[G]$ ordinálu α na ν, přitom $\alpha \leq \varkappa$. Relace

$$R = \{\langle \xi, \eta \rangle : \xi, \eta < \alpha \,\&\, \sigma(\xi) < \sigma(\eta)\}$$

je dobrým uspořádáním množiny α podle typu ν v $M[G]$ a $R \subseteq \varkappa \times \varkappa$. Jelikož typ dobrých uspořádání je absolutní a $\alpha < \nu$, R nemůže ležet v M, a to je spor. Důkaz je skončen.

Absolutnost dalších kardinálních čísel je dána saturovaností Booleovy algebry (2.4).

3.33 Věta. *Nechť B je úplná Booleova algebra v M a její saturovanost v M je $\varkappa$. Je-li G libovolný ultrafiltr v B, který je generický nad M, potom všechna kardinální čísla modelu M, která jsou větší nebo rovna $\varkappa$, zůstávají kardinálními čísly v rozšíření $M[G]$.*

Speciálně, je-li $\operatorname{sat}(B) \leq \omega_1^M$, pak všechna kardinální čísla i jejich kofinality jsou absolutní pro M a $M[G]$.

Důkaz. Nechť v M platí $\operatorname{sat}(B) = \varkappa$. Nechť λ je kardinální číslo v M a $\lambda \geq \varkappa$. Uvažujme libovolné zobrazení $\varrho : \nu \to \lambda$ z generického rozšíření $M[G]$ definované na nějakém $\nu < \lambda$. Abychom ověřili, že λ je také kardinálním číslem v $M[G]$, stačí ukázat, že ϱ nezobrazuje ν na celé λ. Jelikož ϱ je zobrazení, $\varrho \subseteq \nu \times \lambda \in M$, z důkazu věty 3.32 víme, že v M existuje jméno $v : (\nu \times \lambda) \to B$ takové, že řádky matice $\langle v(\alpha, \beta) : \alpha < \nu, \beta < \lambda \rangle$ sestávají z disjunktních prvků a pro každé $\alpha < \lambda$ je $\varrho(\alpha) = \beta$, právě když $v(\alpha, \beta) \in G$. Pro každé $\alpha < \nu$ položme $A_\alpha = \{\beta < \lambda : v(\alpha, \beta) \neq 0\}$. Soubor $\langle A_\alpha : \alpha < \nu \rangle$ i množina $A = \bigcup \{A_\alpha : \alpha < \nu\}$ leží v M. Ze saturovanosti algebry B plyne $|A_\alpha| < \varkappa$ pro každé $\alpha < \nu$. Jelikož $\varrho(\alpha) \in A_\alpha$, můžeme říci, že $\langle A_\alpha : \alpha < \nu \rangle$ je roura v M všude o průměru menším než $\varkappa$, kterou prochází zobrazení ϱ. Pokud $\nu \geq \varkappa$, potom v M máme $|A| \leq \nu \,.\, \varkappa \leq \nu < \lambda$, a proto $\operatorname{Rng}(\varrho) \subseteq A \neq \lambda$.

Je-li $\nu < \varkappa$, z regularity $\varkappa$ (viz 2.5) dostáváme $|A| < \varkappa \leq \lambda$, tedy opět $\mathrm{Rng}(\varrho) \neq \lambda$. Ověřili jsme, že λ zůstává kardinálním číslem v $M[G]$.

Nyní předpokládáme $\mathrm{sat}(B) \leq \omega_1^M$. To znamená, že každá disjunktní množina v B ležící v M je v M nejvýše spočetná. Uvědomme si, že z absolutnosti kofinality plyne absolutnost kardinálních čísel. Je-li ξ limitní ordinální číslo se spočetnou kofinalitou v M, má také spočetnou kofinalitu v $M[G]$. Předpokládejme, že $\mathrm{cf}^M(\xi) > \omega$ a $\nu < \mathrm{cf}^M(\xi)$. Každé zobrazení $\varrho: \nu \to \xi$ v $M[G]$ prochází nějakou rourou $\langle A_\alpha : \alpha < \nu \rangle \in M$, která má všude v M nejvýše spočetný průměr. Jelikož $|A| \leq \leq \omega \cdot \nu < \mathrm{cf}^M(\lambda)$, ani množina A, ani $\mathrm{Rng}(\varrho) \subseteq A$ nejsou kofinální podmnožiny ordinálu ξ. Dokázali jsme $\mathrm{cf}^M(\xi) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\xi)$.

Metoda užitá v důkazech předchozích dvou vět dává víc.

3.34 Důsledek. *Nechť B je úplná Booleova algebra v M, pro kterou v M platí: $\mathrm{sat}(B) = \varkappa$ a B je $(\nu, 2)$-distributivní pro každé $\nu < \varkappa$. Je-li G generický ultrafiltr v B, potom všechna kardinální čísla i jejich kofinality jsou absolutní pro M a $M[G]$.*

3.35 Příklady. (a) Předpokládejme, že v M je $\varkappa$ nekonečný kardinál. Uvažujme kolapsující algebru $C = C(\omega, \varkappa)$ v M, která má množinu $F = \{f : n \to \varkappa : n < \omega\}$ uspořádanou opačnou inkluzí jako hustou podmnožinu (viz 2.25(e)). Je-li G ultrafiltr v C generický nad M, potom v rozšíření $M[G]$ je

$$\varrho = \bigcup \{f \in F : f \in G\}$$

zobrazení ω na $\varkappa$. Tedy v $M[G]$ lze každý nekonečný kardinál $\lambda \leq \varkappa$ v M zobrazit na ω. Říkáme, že λ se kolapsuje na ω. Jelikož v M je $\mathrm{sat}(C) = \varkappa^+$, všechny kardinály $\lambda \geq \varkappa^+$ v M zůstávají kardinály i v rozšíření. Speciálně $\omega_1^{M[G]} = (\varkappa^+)^M$.

(b) Uvažujme v M algebru $C(\omega_2, 2^{\omega_1}, \omega_2)$ a v ní generický ultrafiltr G. Podobně jako v 3.31 lze ukázat, že v $M[G]$ platí $2^{\omega_1} = \omega_2$. Přitom $P^M(\omega_1) = P^{M[G]}(\omega_1)$, $(2^{\omega_1})^M$ se kolapsuje na ω_2^M, všechny kardinály λ v M takové, že $\lambda \leq \omega_2^M$ nebo $\lambda \geq ((2^{\omega_1})^+)^M$ jsou absolutní. Platí-li navíc ve výchozím modelu M hypotéza kontinua, platí i v $M[G]$.

3.36 Bezespornost diamantového principu $\diamondsuit$. *Libovolný spočetný tranzitivní model M teorie* ZFC *má generické rozšíření N, ve kterém platí $\diamondsuit$.*

Důkaz. Chceme, aby v rozšíření N platilo: existuje posloupnost množin $A = \langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ taková, že pro každé α je $A_\alpha \subseteq \alpha$ a pro libovolné $X \subseteq \omega_1$ a libovolnou uzavřenou neomezenou množinu C v ω_1 existuje $\alpha \in C$, pro které $A_\alpha = X \cap \alpha$.

Obvyklá myšlenka je konstruovat hledaný objekt pomocí jeho aproximací ve výchozím modelu. Uvažujme v M množinu P všech posloupností $p = \langle A_\xi : \xi < \alpha \rangle$ nejvýše spočetné délky $\alpha < \omega_1$ takových, že $A_\xi \subseteq \xi$ pro libovolné $\xi < \alpha$. Množinu P uspořádáme opačnou inkluzí. Nechť B je úplná Booleova algebra v M určená uspořádanou množinou P. Zvolme ultrafiltr G v B generický nad M. Ověříme, že v generickém rozšíření $N = M[G]$ platí

(i) $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$,

(ii) neexistuje nová podmnožina žádného ordinálu $\alpha < \omega_1$,

(iii) $A = \bigcup\{p \in P: p \in G\}$ je $\diamondsuit$-posloupnost.

Část (i) a (ii) plyne z 3.32, protože uspořádaná množina P je ω_1-uzavřená v M, a B je proto (ω, ∞)-distributivní.

Ověřujeme (iii). Jelikož G je filtr, libovolné posloupnosti $p, q \in G$ musí být kompatibilní, a to znamená, že jedna je prodloužením druhé. Odtud víme, že A je posloupnost. Z generičnosti G plyne, že její délka je ω_1, protože pro každé $\alpha < \omega_1$ je množina $\{p \in P: \alpha \in \mathrm{Dom}(p)\}$ hustá v B. Dále je zřejmé, že pro každé $\xi < \omega_1$ je $A_\xi \subseteq \xi$. Buď $X \subseteq \omega_1$ množina z $M[G]$, zvolme v M její jméno $f: \omega_1 \to B$, $f_G = X$. Z (ω, ∞)-distributivnosti algebry B plyne, že v M existuje zjemňující se soubor $\langle Q(\alpha): \alpha < \omega_1\rangle$ rozkladů jednotky takový, že každé $Q(\alpha)$ zjemňuje $\{\{f(\xi), -f(\xi)\}: \xi < \alpha\}$. Tedy pro každé $u \in Q(\alpha)$ a pro každé $\xi < \alpha$ je buď $u \leq f(\xi)$, nebo u je disjunktní s $f(\xi)$. Nechť $C \subseteq \omega_1$ je uzavřená neomezená množina z $M[G]$, nechť $g: \omega_1 \to B$ je její jméno v M, $g_G = C$. Neomezenost množiny C říká, že pro každé $\beta < \omega_1$ existuje $\gamma > \beta$ takové, že $\gamma \in C$. V booleovských hodnotách to podle (7) znamená, že pro každé $\beta < \omega_1$ je

$$w_\beta = \bigvee\{g(\gamma): \beta < \gamma < \omega_1\} \in G. \tag{15}$$

Odtud dostáváme

$$w = \bigwedge\{w_\beta: \beta < \omega_1\} \in G.$$

Prvek $w \neq \mathbf{0}$, protože leží v G. Z (15) plyne, že pro každé $p \in P$, $p \leq w$ a každé $\beta < \omega_1$ existuje $\gamma > \beta$ takové, že p a $g(\gamma)$ jsou kompatibilní.

Hledáme $\alpha \in C$ takové, že pro α-tý člen A_α posloupnosti A platí $A_\alpha = X \cap \alpha$. K tomu účelu sestrojíme vhodnou množinu hustou v algebře $B \mid w$.

Zvolme libovolně $p \in P$, $p \leq w$ délky α_0. Konstruujeme rekurzí pro přirozené n posloupnost prodloužení

$$p = p_0 > p_1 > p_2 > \ldots \quad \text{z } P, \tag{16}$$

rostoucí posloupnost spočetných ordinálních čísel

$$\alpha_0 < \gamma_0 < \alpha_1 < \gamma_1 < \alpha_2 < \gamma_2 \ldots \tag{17}$$

a klesající posloupnost

$$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \quad \text{prvků } u_n \in Q(\alpha_n). \tag{18}$$

Známe-li p_n a α_n, pak existují $\gamma_n > \alpha_n$ a $u_n \in Q(\alpha_n)$ tak, že $p_n \wedge g(\gamma_n) \wedge u_n$ je nenulové; protože $Q(\alpha_n)$ je rozklad 1, existuje $u_n \in Q(\alpha_n)$ takové, že $p_n \wedge u_n \neq \mathbf{0}$, a jelikož $p_n \leq p \leq w$, je i $p_n \wedge u_n \leq w$, a tedy kompatibilní s nějakým $g(\gamma_n)$ pro $\gamma_n > \alpha_n$. Vybereme $p_{n+1} \in P$ tak, aby délka α_{n+1} posloupnosti p_{n+1} byla větší než γ_n a $p_{n+1} \leq p_n \wedge g(\gamma_n) \wedge u_n$. Tímto postupem získáme (16), (17), (18). Položme

$$\alpha = \sup \alpha_n = \sup \gamma_n\,, \qquad p_\omega = \bigcup\{p_n : n < \omega\}\,, \qquad Y_\alpha = \{\xi < \alpha : f(\xi) \geq p_\omega\}$$

a definujme

$$\varphi(p) = p_\omega \cup \{\langle \alpha, Y_\alpha \rangle\}\,.$$

Množina $H = \{\varphi(p) : p \in P, p \leq w\}$ je zřejmě hustá v $B \mid w$, a proto $H \cap G \neq 0$. Nechť $p \in P$ je takové, že $\varphi(p) \in H \cap G$. To znamená, že $\varphi(p)$ je počáteční úsek posloupnosti A. Nechť $\alpha + 1$ je délka $\varphi(p)$, potom $Y_\alpha = A_\alpha$.

Jelikož pro každé γ_n z (17) je $g(\gamma_n) \geq p_{n+1} \geq \varphi(p)$, je $\gamma_n \in C$. Z uzavřenosti množiny C plyne, že $\alpha = \sup \gamma_n \in C$. Zbývá ověřit, že pro poslední člen A_α posloupnosti $\varphi(p)$ platí $A_\alpha = X \cap \alpha$. Nechť $\xi \in A_\alpha$, pak $\xi < \alpha$ a $f(\xi) \geq p_\omega \geq \varphi(p) \in G$, tedy $\xi \in X \cap \alpha$. Pokud $\xi < \alpha$ a $\xi \notin A_\alpha$, pak z definice prvků u_n plyne, že $f(\xi)$ je disjunktní s $\varphi(p)$, proto $f(\xi) \notin G$. To znamená, že $\xi \notin X \cap \alpha$. Ověřili jsme, že $A_\alpha = X \cap \alpha$. Důkaz je hotov.

3.37 Poznámka. Podle III.2.41 z $\diamondsuit$ plyne CH. Tedy bezespornost hypotézy kontinua jsme právě ukázali podruhé. Na druhé straně $\diamondsuit$ platí i v našem prvním modelu z 3.31. Je-li dán model M, pak v M sestrojené algebry $C = C^M(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$ a B z 3.36 jsou izomorfní v M. Generický ultrafiltr G_1 v C se izomorfismem algeber převádí na generický ultrafiltr G_2 v B, tedy G_1, G_2 jsou podobné generické množiny. Odtud plyne $M[G_1] = M[G_2]$.

3.38 Bezespornost negace hypotézy kontinua. *Libovolný spočetný tranzitivní model M teorie* ZFC *má generické rozšíření N, ve kterém platí $2^\omega > \omega_1$. Speciálně, platí-li v M $2^\omega = \omega_1$, pak existuje jeho generické rozšíření, ve kterém platí $2^\omega = \omega_3$.*

Důkaz. Hledáme generické rozšíření N modelu M, které přidává hodně nových podmnožin přirozených čísel. Charakteristické funkce podmnožin množiny ω jsou aproximovány konečnými posloupnostmi nul a jedniček.

Zvolme v M nekonečné kardinální číslo $\varkappa$ a uvažujme v M množinu $F = F(\varkappa, 2)$ z 2.25(a), tedy množinu

$$F = \{p : X \to \{0, 1\} : X \subseteq \varkappa,\ X \text{ konečné}\}$$

uspořádanou opačnou inkluzí. Nechť $C(\varkappa)$ značí úplnou Booleovu algebru v M určenou množinou F. Pro libovolný generický ultrafiltr G v $C(\varkappa)$ máme generické rozšíření $N = M[G]$. Jelikož v M platí $\mathrm{sat}\,(C(\varkappa)) = \omega_1$, jsou podle 3.33 všechna kardinální čísla a jejich kofinality v $M[G]$ stejné jako v M. Ověříme, že v rozšíření $N = M[G]$ platí

(i) $2^\omega \geq \varkappa$,

(ii) $2^\omega = (\varkappa^\omega)^M$; mohutnost kontinua v $M[G]$ je rovna kardinálnímu číslu $\varkappa^\omega$ modelu M.

V $M[G]$ položme $\varrho = \bigcup\{f \in F : f \in G\}$. Každá konečná posloupnost $p \in F$ má pro libovolné $\alpha < \varkappa$ prodloužení $g \in F$ takové, že $\alpha \in \mathrm{Dom}\,(g)$, proto ϱ je funkce definovaná na celém $\varkappa$ s hodnotami v $\{0, 1\}$. K důkazu (i) potřebujeme ukázatzat, že v N existuje alespoň $\varkappa$ podmnožin přirozených čísel. Pro každé $\alpha < \varkappa$ definujme v N funkci $\varrho_\alpha: \omega \to \{0, 1\}$ tak, že pro každé přirozené n je $\varrho_\alpha(n) = \varrho(\alpha + n)$, kde $\alpha + n$ značí součet ordinálních čísel. Ověříme, že funkce ϱ_α, ϱ_β jsou různé pro různá $\alpha, \beta < \varkappa$. Zvolme $\alpha < \varkappa$ a konstruujeme hustou podmnožinu $H \in M$ algebry $C(\varkappa)$. Vezměme libovolné $p \in F$, $p: X \to \{0, 1\}$. Jelikož X je konečná podmnožina limitního ordinálu, existuje přirozené n_p takové, že $\alpha + n_p$ i $\beta + n_p$ neleží v X. Přitom $\alpha \neq \beta$, proto $\alpha + n_p \neq \beta + n_p$. Položíme-li

$$\varphi(p) = p \cup \{\langle \alpha + n_p, 0\rangle, \langle \beta + n_p, 1\rangle\},$$

pak $p \subseteq \varphi(p) \in F$. Tedy množina $H = \{\varphi(p): p \in F\}$ je hustá v $C(\varkappa)$ a definovaná v M, proto $H \cap G \neq 0$. Buď $p \in F$ takové, že $\varphi(p) \in G$. Potom $\varphi(p) \subseteq \varrho$ a pro n_p platí $\varrho_\alpha(n_p) = 0$ a $\varrho_\beta(n_p) = 1$. Tedy ϱ_α a ϱ_β jsou různé funkce. Ukázali jsme, že v $M[G]$ existuje alespoň $\varkappa$ různých charakteristických funkcí na ω, proto v $M[G]$ platí $2^\omega \geq \varkappa$.

Pro důkaz (ii) uvažujme množinu

$$J = \{f \in M, f: \omega \to C(\varkappa)\}$$

všech jmen podmnožin přirozených čísel, která jsou v M. Počítáme v M mohutnost množiny J. Jelikož $|F| = \varkappa$ a každý prvek algebry $C(\varkappa)$ lze vyjádřit jako spojení nejvýše spočetně mnoha prvků z F, je $|C(\varkappa)| \leq \varkappa^\omega$, a proto $|J| \leq (\varkappa^\omega)^\omega = \varkappa^\omega$. Odtud, z absolutnosti kardinálních čísel a rovnosti $P^{M[G]}(\omega) = \{f_G: f \in J\}$ dostáváme $(2^\omega)^{M[G]} \leq (\varkappa^\omega)^M$. Z (i) a zřejmého faktu $(\varkappa^\omega)^M \leq (\varkappa^\omega)^{M[G]}$ plyne opačná nerovnost; dokázali jsme (ii).

Speciálně, platí-li ve výchozím modelu $2^\omega = \omega_1$, platí v M také $\omega_3^\omega = \omega_3$. Tedy v rozšíření $N = M[G]$ přes algebru $C(\omega_3)$ platí $2^\omega = \omega_3$.

3.39 Z konstrukce generických rozšíření pro negaci CH je zřejmé, že volbou kardinálu $\varkappa$ můžeme získat různá rozšíření, ve kterých je kontinuum libovolně veliké. Jinými slovy, teorie ZFC nedává žádnou horní mez pro mohutnost množiny všech reálných čísel.

3.40 Vracíme se k systémům skoro disjunktních množin na ω_1, krátce k AD systémům. Podle III.1.13 víme, že vždy na ω_1 existuje AD systém mohutnosti ω_2. Za předpokladu hypotézy kontinua existuje AD systém na ω_1 maximální možné mohutnosti 2^{ω_1} (III.1.15). Ukážeme, že bez dodatečných předpokladů, to znamená pouze v ZFC, to dokázat nejde. Použijeme k tomu vhodné generické rozšíření a z kombinatoriky rozkladovou šipku

$$(2^{\omega_1})^+ \to (\omega_1^+)^2_{\omega_1} \tag{19}$$

z věty Erdöse a Rado (III.4.73).

3.41 Věta (Baumgartner 1976). *Nechť M je spočetný tranzitivní model* ZFC, *ve kterém platí $2^{\omega_1} = \omega_2$. Předpokládejme, že N je nějaké generické rozšíření modelu*

M přes M-úplnou Booleovu algebru $B \in M$, pro kterou v M platí $\operatorname{sat}(B) \leq \omega_1$. *Potom v rozšíření N platí:*

(20) *každý* AD *systém na* ω_1 *má mohutnost nejvýše* ω_2.

Speciálně, vezmeme-li v M algebru $C(\omega_3)$ *z* 3.38 *a v ní generický ultrafiltr G, potom v* $M[G]$ *platí* (20) *a* $2^{\omega} = 2^{\omega_1} = \omega_3$.

Důkaz. Nechť B je M-úplná Booleova algebra v M, pro kterou v M platí $\operatorname{sat}(B) \leq \omega_1$. Nechť $N = M[G]$, kde G je generický ultrafiltr v B. Podle 3.33 jsou všechna kardinální čísla absolutní pro M a N. Nechť A je libovolný AD systém na ω_1 v rozšíření N. Chceme dokázat, že v N platí $|A| \leq \omega_2$. Dokazujeme sporem. Předpokládáme, že systém A má v N mohutnost ω_3. Dále pracujeme v $N = M[G]$. Zvolme prosté očíslování $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_3 \rangle$ systému A. Každá množina A je nespočetná a $A_\alpha \subseteq \omega_1$. Pro $\alpha \neq \beta$ je průnik $A_\alpha \cap A_\beta$ nejvýše spočetný, proto existuje $\gamma < \omega_1$ takové, že $A_\alpha \cap B_\beta \subseteq \gamma$. Definujme zobrazení $\varrho : [\omega_3]^2 \to \omega_1$ tak, že

$$\varrho(\{\alpha, \beta\}) = \min \{\gamma : A_\alpha \cap A_\beta \subseteq \gamma\}.$$

Přitom $\varrho \subseteq [\omega_3]^2 \times \omega_1 \in M$, tedy pro ϱ existuje jméno $v : ([\omega_3]^2 \times \omega_1) \to B$ takové, že $v \in M$ a pro každé $\{\alpha, \beta\} \in [\omega]^3$ soubor

(21) $$\langle v(\{\alpha, \beta\}, \gamma) : \gamma < \omega_1 \rangle$$

sestává z disjunktních prvků algebry B. Využijeme toho, že B má malou saturovanost. V souboru (21) je nejvýše spočetně mnoho nenulových prvků, to znamená, že pro $\alpha \neq \beta$ existuje $\delta = f(\{\alpha, \beta\})$ takové, že pro každé $\gamma \geq \delta$ je $v(\{\alpha, \beta\}, \gamma) = \mathbf{0}$. Získali jsme tak zobrazení $f : [\omega_3]^2 \to \omega_1$, které je v M. Podle předpokladu v M platí $2^{\omega_1} = \omega_2$, a tedy podle (19) také $\omega_3 \to (\omega_2)^2_{\omega_1}$. To znamená, že v M existuje množina $X \subseteq \omega_3$ mohutnosti ω_2 a číslo $\xi < \omega_1$ takové, že pro libovolná různá $\alpha, \beta \in X$ je $f(\{\alpha, \beta\}) = \xi$.

V $M[G]$ tedy platí: ϱ je všude menší než f, neboť $\varrho = v_G$ a pro různá $\alpha, \beta \in X$ je $A_\alpha \cap B_\beta \subseteq \xi$. Uvažujme systém $D = \{A_\alpha - \xi : \alpha \in X\}$. Množiny A_α jsou nespočetné a $\xi < \omega_1$, proto D sestává z ω_2 neprázdných vzájemně disjunktních podmnožin kardinálu ω_1, a to je spor.

Dokázali jsme, že v $M[G]$ je ω_2 horní mez pro mohutnost systémů skoro disjunktních množin na ω_1. Speciálně algebra $C(\omega_3)$ v M má saturovanost ω_1 a podle 3.38 v generickém rozšíření přes tuto algebru C platí $2^{\omega} = \omega_3$. Současně platí $2^{\omega_1} = \omega_3$, protože jmen podmnožin kardinálu ω_1 v M je nejvýše $\omega_3^{\omega_1} = \omega_3$.

3.42 Podle věty Rasiowé a Sikorského na každé Booleově algebře existuje filtr (ultrafiltr), který prochází předem zvoleným spočetným systémem hustých podmnožin. Víme, že pokud Booleova algebra B nemá atomy, nemůžeme chtít, aby existoval (ve V) filtr, který prochází všemi hustými podmnožinami algebry B. Jedním z kombinatorických principů, které zaručují existenci filtrů procházejících i nespočetně mnoha hustými množinami, je Martinův axiom.

3.43 Definice. Martinův axiom. (i) Nechť $\varkappa$ je nekonečné kardinální číslo. *Martinův axiom* pro $\varkappa$, krátce $MA_\varkappa$, je tvrzení: Je-li B libovolná Booleova algebra, která má $\operatorname{sat}(B) \leq \omega_1$, pak pro každý systém $\{H_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ nejvýše $\varkappa$ hustých podmnožin algebry B existuje filtr na B, který má společný prvek s každou množinou H_α.

(ii) Martinův axiom MA je tvrzení: $(\forall \varkappa < 2^\omega)(MA_\varkappa)$.

Všimněme si, že MA_ω je speciální případ věty 3.29, a tedy MA je důsledkem hypotézy kontinua. Zajímavější je Martinův axiom MA_{ω_1} nebo $MA + \neg CH$. Ve 3.47 dokážeme, že

$$MA_\varkappa \rightarrow \varkappa < 2^\omega \quad \text{a} \quad 2^\omega = 2^\varkappa .$$

Tedy z MA plyne, že pro každé nekonečné $\varkappa < 2^\omega$ je $(2^\omega)^\varkappa = 2^\omega$ a 2^ω je regulární kardinální číslo.

3.44 Bezespornost Martinova axiomu spolu s negací hypotézy kontinua dokázali Solovay a Tennenbaum (1971).

Věta. *Nechť M je tranzitivní model* ZFC *a λ nespočetný kardinál v M, pro který v M platí $\lambda^{<\lambda} = \lambda$. Potom existuje M-úplná Booleova algebra $B \in M$ taková, že v M platí* $\operatorname{sat}(B) = \omega_1$ *a je-li G libovolný ultrafiltr v B generický nad M, potom v rozšíření $M[G]$ platí* $MA + 2^\omega = \lambda$.

Důkaz tohoto tvrzení používá iterování generických rozšíření a lze jej nalézt v knize T. Jecha (1978).

Seznámíme se s některými důsledky $MA + \neg CH$.

3.45 Věta $(MA_\varkappa)$. *Nechť $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je soubor spočetných podmnožin dané množiny X takový, že pro libovolné $\alpha < \beta < \varkappa$ je průnik $A_\alpha \cap A_\beta$ konečný. Potom pro libovolné $I \subseteq \varkappa$ existuje množina $S \subseteq X$ taková, že $|S| = |X|$ a pro každé $\alpha < \varkappa$ platí*

$$|A_\alpha \cap S| < \omega \leftrightarrow \alpha \in I .$$

Nejprve ukážeme použití této věty, její důkaz je v 3.50.

3.46 Lemma. (i) $(MA_\varkappa)$. *Každý nekonečný* MAD *systém na ω má mohutnost větší než $\varkappa$.*

(ii) (MA). *Každý nekonečný* MAD *systém na ω má mohutnost 2^ω.*

Důkaz. (i) Nechť $A = \langle A_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ je libovolný nekonečný MAD systém na ω. Pokud $\lambda > \varkappa$, jsme hotovi. Předpokládejme, že $\lambda \leq \varkappa$. Jelikož z $MA_\varkappa$ plyne MA_λ, můžeme ve větě 3.45 nahradit $\varkappa$ kardinálem λ. Položíme-li $I = \lambda$, $X = \omega$, pak množina S z citované věty je nekonečná, $S \subseteq \omega$ a je skoro disjunktní se všemi A_α. Tedy A není maximální, spor.

(ii) plyne z (i).

3.47 Lemma. *Z* $MA_\varkappa$ *plyne* $\varkappa < 2^\omega$ *a* $2^\varkappa = 2^\omega$.

Důkaz. Z předchozího tvrzení 3.46 plyne, že existuje AD systém $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ na ω mohutnosti $\varkappa$. Pro každou množinu $I \subseteq \varkappa$ zvolme množinu $S_I \subseteq \omega$ zaručenou větou 3.45. Jsou-li $I, J \subseteq \varkappa$ různé podmnožiny, potom pro α ze symetrické diference $I \triangle J$ má množina A_α s jednou z množin S_I, S_J průnik konečný a s druhou nekonečný. To znamená, že $S_I \neq S_J$. Získali jsme prosté zobrazení $\mathscr{P}(\varkappa)$ do $\mathscr{P}(\omega)$, a tedy $2^\varkappa \leq 2^\omega$. Odtud a z $\omega \leq \varkappa < 2^\varkappa$ máme $\varkappa < 2^\omega$ a $2^\varkappa = 2^\omega$.

3.48 Silně skoro disjunktní množiny na ω_1. Je-li D AD systém na ω_1, pak všechny množiny z D jsou nespočetné a libovolné dvě různé množiny z D mají nejvýše spočetný průnik. Ptáme se, zda může existovat AD systém na ω_1, který má mohutnost alespoň ω_2 a libovolné dvě různé množiny z D jsou silně skoro disjunktní, to znamená, že mají konečný průnik.

Hypotéza kontinua dává negativní odpověď. Předpokládáme-li CH, existuje očíslování $\langle X_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ všech spočetných podmnožin kardinálu ω_1. Je-li $\langle Y_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ libovolný soubor nekonečných podmnožin kardinálu ω_1, můžeme ke každé množině Y_α zvolit $\xi = f(\alpha)$ takové, že $X_\xi \subseteq Y_\alpha$. Přitom f nemůže být prosté zobrazení ω_2 do ω_1, proto existují různá α, β taková, že Y_α i Y_β obsahují stejnou spočetnou podmnožinu, tedy průnik $Y_\alpha \cap Y_\beta$ je nekonečný.

Na druhou stranu, MA_{ω_1} dává kladnou odpověď.

3.49 Věta. (i) (MA_{ω_1}). *Existuje systém silně skoro disjunktních množin na* ω_1, *který má mohutnost* ω_2.

(ii) ($MA + \neg CH$). *Na* ω_1 *existuje systém silně skoro disjunktních množin, který má mohutnost* $\geq \omega_2$ *a je maximálním* AD *systémem na* ω_1.

Důkaz. (i) Vezměme libovolný AD systém $\langle C_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ na ω_1 mohutnosti ω_2. Podle III.1.13 takový systém existuje. Hledaný systém $D = \langle D_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ konstruujeme rekurzí tak, že pro každé $\alpha < \omega_2$ je $D_\alpha \subseteq C_\alpha$. Pro libovolné $\alpha < \omega_1$ položme $D_\alpha = C_\alpha - \bigcup \{C_\beta : \beta < \alpha\}$. Tedy $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ sestává z nespočetných a vzájemně disjunktních množin. Předpokládejme, že pro dané ξ, $\omega_1 \leq \xi < \omega_2$ máme již sestrojeny množiny D_α pro všechna $\alpha < \xi$ a konstruujeme množinu D_ξ. Uvědomme si, že průnik $C_\xi \cap D_\alpha \subseteq C_\xi \cap C_\alpha$, a proto je nejvýše spočetný. Položme

$$A = \{C_\xi \cap D_\alpha : \alpha < \xi \quad \text{a} \quad |C_\xi \cap D_\alpha| = \omega\}.$$

Je zřejmé, že $|A| \leq \omega_1$ a A sestává ze spočetných vzájemně skoro disjunktních podmnožin množiny $X = C_\xi$. Z MA_{ω_1}, podle 3.45, existuje nespočetná množina $S \subseteq C_\xi$, která má s každou množinou z A konečný průnik. Položíme-li $D_\xi = S$, pak pro každé $\alpha < \xi$ je $D_\xi \cap D_\alpha$ konečná množina. Důkaz (i) je hotov.

Důkaz (ii) je snadnou modifikací důkazu (i). Využije se zvolené očíslování $\langle Y_\alpha : \alpha < 2^\omega \rangle$ množiny $[\omega_1]^{\omega_1}$ a $MA_\varkappa$ pro každé $\varkappa < 2^\omega$. Množinu D_α hledáme jako část Y_α jenom v tom případě, že $\{Y_\alpha\} \cup \{D_\beta : \beta < \alpha\}$ tvoří skoro disjunktní systém.

Podle věty 3.44 můžeme získat model MA + $2^{\omega} = \omega_3$ pomocí algebry, která má saturovanost ω_1. Tedy podle 3.41 je bezesporné

$$\text{MA} + \neg\text{CH} + \text{„neexistuje MAD na } \omega_1 \text{ mohutnosti } 2^{\omega_1}\text{“}.$$

Proto tvrzení 3.49(ii) neplatí, nahradíme-li mohutnost $\geq \omega_2$ mohutností 2^{ω_1}.

3.50 *Důkaz věty* 3.45. Nechť $A = \langle A_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ je soubor vzájemně skoro disjunktních spočetných podmnožin množiny X. Můžeme předpokládat, že $X = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, a proto $|X| \leq \varkappa$. Uvažujme množinu funkcí

$$P = \{p : \text{Dom}(p) = \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in J\} \cup Y,$$
$$\text{kde } J \subseteq I,\ Y \subseteq X \text{ jsou konečné podmnožiny,}$$
$$\text{Rng}(p) \subseteq \{0, 1\} \text{ a } p^{-1}[\{1\}] \text{ je konečné}\}$$

uspořádanou opačnou inkluzí. Všimněme si, že pro každé $p \in P$ je $X - \text{Dom}(p)$ nekonečná a $\text{Dom}(p)$ nejvýše spočetná množina. Označme $V(p) = p^{-1}[\{1\}]$, je to konečná množina. Nechť B je úplná Booleova algebra určená uspořádanou množinou P. Ověříme, že $\text{sat}(B) \leq \omega_1$. V opačném případě existuje soubor $\langle p_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ vzájemně disjunktních prvků z D. Potom $\langle V(p_\alpha) : \alpha < \omega_1 \rangle$ je nespočetný soubor konečných množin. Podle tvrzení o Δ-systémech (III.1.18) existuje nespočetná množina indexů $L \subseteq \omega_1$ taková, že $\langle V(p_\alpha) : \alpha \in L \rangle$ je Δ-soubor s nějakým jádrem W. Zvolme $\alpha \in L$. Jelikož $|\text{Dom}(p_\alpha)| \leq \omega$ a L je nespočetné, existuje $\beta \in L$, $\beta \neq \alpha$ takové, že $\text{Dom}(p_\alpha) \cap V(p_\beta) = W$. Odtud plyne, že $p_\alpha \cup p_\beta \in P$ a $p_\alpha \cup p_\beta$ je prodloužením p_α i p_β. To je spor s disjunktností p_α, p_β. Ověřili jsme $\text{sat}(B) \leq \omega_1$, a proto můžeme použít $\text{MA}_\varkappa$ pro algebru B.

Hledáme systém C hustých podmnožin algebry B tak, aby $|C| \leq \varkappa$ a aby pro zvolený ultrafiltr G v B, který prochází všemi množinami z C, zobrazení

$$\varrho = \bigcup\{p \in P : p \in G\}$$

bylo charakteristickou funkcí hledané množiny $S \leftrightharpoons \varrho^{-1}[\{1\}] \subseteq X$. Do C dáme každou množinu

$$H(\alpha, n) = \{p \in P : |A_\alpha \cap V(p)| \geq n\}$$

pro $\alpha \in \varkappa - I$ a přirozené n. Ověříme, že $H(\alpha, n)$ je hustá. Je-li dáno $q \in P$ s $\text{Dom}(q) = \bigcup\{A_\beta : \beta \in J\} \cup Y$, pak $\alpha \notin J$. Jelikož množiny z A jsou skoro disjunktní, je $A_\alpha - \text{Dom}(q)$ nekonečné. Vezměme libovolnou množinu $Y_n \subseteq A_\alpha - \text{Dom}(q)$ o n prvcích, pak prodloužení $q \cup (Y_n \times \{1\})$ je v $H(\alpha, n)$, tedy $H(\alpha, n)$ je hustá podmnožina algebry B. Ultrafiltr G prochází všemi množinami z C, proto existuje $p \in G \cap H(\alpha, n)$ a $p \subseteq \varrho$. Odtud dostáváme $|S \cap A_\alpha| \geq n$. Jelikož n je libovolné, je průnik $S \cap A_\alpha$ nekonečný.

Dále dáme do C množiny

$$H(\alpha) = \{p \in P : A_\alpha \subseteq \text{Dom}(p)\}$$

pro každé $\alpha \in I$. Ověříme, že $H(\alpha)$ je hustá v B. Mějme $q \in P$ s $\mathrm{Dom}(q) = \bigcup\{A_\beta : \beta \in J\} \cup Y$. Je-li $\alpha \in J$, pak $q \in H(\alpha)$. Pokud $\alpha \notin J$, je $A_\alpha \cap \mathrm{Dom}(q)$ konečná množina a $p = q \cup ((A_\alpha - \mathrm{Dom}(q)) \times \{0\})$ je prodloužení q, které leží v $H(\alpha)$. Tedy $H(\alpha)$ je hustá množina a $p \in H(\alpha) \cap G$ zaručuje, že průnik $S \cap A_\alpha \subseteq V_p$ je konečný.

Zbývá zaručit $|S| = |X|$. Rozlišíme dva případy.

(i) Množina X je spočetná. Zvolíme její dobré uspořádání $\prec$ podle typu ω. Pro každé $x \in X$ dáme do C množinu

$$D(x) = \{p \in P: (\exists y \succ x)(y \in V(p))\}.$$

Množina $D(x)$ je hustá v B a $p \in D(x) \cap G$ zaručuje, že v S leží nějaký prvek větší než x. To znamená, že S je nekonečná a $|S| = |X|$.

(ii) Množina X je nespočetná, $\omega < \lambda = |X| \leq \varkappa$. Rozložíme $X = \bigcup\{X_\xi : \xi < \lambda\}$ na λ částí, každou mohutnosti ω_1. Do C dáme ještě všechny množiny

$$D(\xi) = \{p \in P: V(p) \cap X_\xi \neq 0\}$$

pro $\xi < \lambda$. Pro libovolné $q \in P$ a $\xi < \lambda$ je X_ξ nespočetná a $X_\xi - \mathrm{Dom}(q)$ neprázdná množina. Zvolíme-li $x \in X_\xi - \mathrm{Dom}(q)$, pak $q \cup \{\langle x, 1\rangle\} \in D(\xi)$, a tedy $D(\xi)$ je hustá množina v B. Odtud plyne, že S má společné prvky s každou množinou rozkladu X_ξ, tedy $|S| = \lambda = |X|$.

Systém C hustých množin, sestrojený v průběhu důkazu, má mohutnost nejvýše $\varkappa$, a tedy jsou splněny všechny předpoklady Martinova axiomu pro $\varkappa$, konec důkazu.

3.51 Věta. *Z* MA_{ω_1} *plyne Suslinova hypotéza.*

Důkaz. Podle III.3.64 je Suslinova hypotéza ekvivalentní s tím, že neexistuje Suslinův ω_1-strom. Dokazujeme sporem. Nechť $\langle T, \leq\rangle$ je Suslinův ω_1-strom. Můžeme předpokládat, že T nemá krátké výhony a všude se větví. Vezměme úplnou Booleovu algebru B určenou uspořádanou množinou $\langle T, \geq\rangle$. Podle 2.45 je $\mathrm{sat}(B) = \omega_1$. Pro každé $\alpha < \omega_1$ je $H(\alpha) = \bigcup\{T_\beta : \beta \geq \alpha\}$ hustá podmnožina algebry B. Nechť G je filtr v B procházející všemi množinami $H(\alpha)$; jeho existenci zaručuje MA_{ω_1}. Pro každé $\alpha < \omega_1$ existuje jediný prvek $x_\alpha \in T_\alpha \cap G$. Je-li $\alpha < \beta < \omega_1$, pak prvky x_α, x_β jsou kompatibilní, to znamená porovnatelné ve stromu T. Dostáváme tak nespočetnou větev $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ ve stromu T, spor.

Od této chvíle směřujeme k důkazu věty 3.26 o generickém rozšíření.

3.52 Booleovské univerzum. Předpokládáme, že M je libovolný tranzitivní model teorie ZF a že $B \in M$ je M-úplná Booleova algebra. V 3.24 jsme zavedli jména podmnožin a podle (13) víme, že pro generický ultrafiltr G v B je množina $x \in M[G]$ významem nějakého jména z M, právě když $x \subseteq M$. Jakmile $M \neq M[G]$, v rozšíření $M[G]$ musí být množiny, které nejsou podmnožinami výchozího modelu M, například jednoprvková množina $\{G\}$, a tyto množiny nezískáme pomocí dosud zavedených jmen.

Booleovské univerzum $M^{(B)}$ sestává ze všech funkcí $f \in M$ takových, že $\mathrm{Dom}(f) \subseteq M^{(B)}$ a $\mathrm{Rng}(f) \subseteq B$. Jeho rekurzivní definice je obdobou konstrukce kumulativní hierarchie množin. Pro $\alpha < \mathrm{On}^M$ definujeme

$$\begin{aligned} M_0^{(B)} &= 0\,, \\ M_{\alpha+1}^{(B)} &= \{a \in M : \mathrm{Dom}(a) \subseteq M_\alpha^{(B)} \;\&\; \mathrm{Rng}(a) \subseteq B\}\,, \\ M_\alpha^{(B)} &= \bigcup\{M_\beta^{(B)} : \beta < \alpha\} \qquad \text{pro } \alpha \text{ limitní}, \\ M^{(B)} &= \bigcup\{M_\alpha^{(B)} : \alpha < \mathrm{On}^M\}\,. \end{aligned}$$

Typem (booleovským) funkce $a \in M^{(B)}$ nazýváme ordinální číslo

$$\mathrm{typ}_B(a) = \min\{\alpha : \mathrm{Dom}(a) \subseteq M_\alpha^{(B)}\}\,.$$

Je-li $b \in \mathrm{Dom}(a)$, pak $\mathrm{typ}_B(b) < \mathrm{typ}_B(a)$.

Existuje kanonické vnoření třídy M do univerza $M^{(B)}$, které je definováno rekurzí podle kumulativního typu předpisem

$$\check{x} = \{\langle \check{y}, 1\rangle : y \in x\}\,.$$

Všimněme si, že univerzum $M^{(B)}$ i zobrazení $\check{}: M \to M^{(B)}$ jsou třídy modelu M, jejich rekurzívní definice se relativizací do M nemění.

3.53 Definice $M[G]$. Prvky booleovského univerza $M^{(B)}$ jsou vhodná jména pro všechny množiny libovolného generického rozšíření modelu M přes algebru B.

Nechť G je ultrafiltr v B, který je generický nad M. Na třídě $M^{(B)}$ definujeme zobrazení i_G rekurzí podle booleovského typu prvků $a \in M^{(B)}$:

$$\begin{aligned} &i_G(0) = 0\,, \\ &i_G(a) = \{i_G(b) : b \in \mathrm{Dom}(a) \;\&\; a(b) \in G\}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Množina $i_G(a)$ je *interpretací jména a* určená ultrafiltrem G. Definujeme

$$M[G] = \{i_G(a) : a \in M^{(B)}\}\,.$$

Pro každé $x \in M[G]$ existuje nějaké jméno $a \in M^{(B)}$ takové, že $x = i_G(a)$. Zbývá ověřit, že $M[G]$ je vskutku generickým rozšířením modelu M.

Následující vlastnosti třídy $M[G]$ dokážeme snadno. Z (22) plyne, že $M[G]$ je tranzitivní třída. Pro libovolné $x \in M$ máme kanonické jméno $\check{x} \in M^{(B)}$ a indukcí ověříme, že $i_G(\check{x}) = x$. Tedy $M \subseteq M[G]$. Platí $G \in M[G]$, protože $B \in M$ a pro jméno $a = \{\langle \check{u}, u\rangle : u \in B\}$ je $i_G(a) = \{i_G(\check{u}) : u \in G\} = G$. Třídy M a $M[G]$ mají stejná ordinální čísla. Jelikož $M \subseteq M[G]$, je $M \cap \mathrm{On} \subseteq M[G] \cap \mathrm{On}$. Na druhou stranu pro libovolné $a \in M^{(B)}$ je $\mathrm{typ}_B(a)$ větší nebo roven kumulativnímu typu množiny $i_G(a)$. Odtud plyne opačná inkluze.

Nechť N je model ZF takový, že $M \subseteq N$ a $G \in N$. Pro každé $\alpha \in \mathrm{On}^M$ je $M_\alpha^{(B)} \in M$, a tedy také $M_\alpha^{(B)} \in N$. Indukcí dokážeme, že $i_G \restriction M_\alpha^{(B)} \in N$, to znamená, že pro každé $a \in M^{(B)}$ je $i_G(a) \in N$, neboli $M[G] \subseteq N$. Dokázali jsme 3.26(ii).

Pro důkaz, že $M[G]$ je modelem ZF, případně ZFC, potřebujeme jemnější prostředky.

3.54 Booleovské hodnoty formulí.

Pro libovolnou formuli $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ teorie množin definujeme v M zobrazení $\|\varphi\|_M$, krátce $\|\varphi\|$, které každé n-tici $a_1, \dots, a_n \in M^{(B)}$ přiřazuje prvek $\|\varphi(a_1, \dots, a_n)\|$ algebry B. Přitom logickým spojkám $\neg$, &, $\wedge$ odpovídají booleovské operace komplementu, průseku a spojení v algebře B. Booleovská operace odpovídající implikaci je operace

$$u \Rightarrow v = -u \vee v \; (\varphi \rightarrow \psi \text{ je ekvivalentní s } \neg\varphi \vee \psi)$$

a kvantifikátorům $\forall$, $\exists$ odpovídají nekonečné operace $\bigwedge$ a $\bigvee$.

Pro libovolné $a, b, a_1, \dots, a_n \in M^{(B)}$ definujeme

(i) $$\|a = b\| = \Big(\bigwedge_{c \in \mathrm{Dom}(a)} \big(a(c) \Rightarrow \bigvee_{d \in \mathrm{Dom}(b)} b(d) \wedge \|d = c\|\big)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{d \in \mathrm{Dom}(b)} \big(b(d) \Rightarrow \bigvee_{c \in \mathrm{Dom}(a)} a(c) \wedge \|c = d\|\big)\Big),$$

(ii) $$\|a \in b\| = \bigvee_{d \in \mathrm{Dom}(b)} b(d) \wedge \|d = a\|,$$

(iii) $$\|\neg\varphi(a_1, \dots, a_n)\| = -\|\varphi(a_1, \dots, a_n)\|,$$
$$\|(\varphi \,\&\, \psi)(a_1, \dots, a_n)\| = \|\varphi(a_1, \dots, a_n)\| \wedge \|\psi(a_1, \dots, a_n)\|,$$
$$\|(\varphi \vee \psi)(a_1, \dots, a_n)\| = \|\varphi(a_1, \dots, a_n)\| \vee \|\psi(a_1, \dots, a_n)\|,$$

(iv) $$\|(\exists x)\,\varphi(x, a_1, \dots, a_n)\| = \bigvee\{\|\varphi(b, a_1, \dots, a_n)\| : b \in M^{(B)}\},$$
$$\|(\forall x)\,\varphi(x, a_1, \dots, a_n)\| = \bigwedge\{\|\varphi(b, a_1, \dots, a_n)\| : b \in M^{(B)}\}.$$

Je zřejmé, že definice $\|\varphi\|$ je rekurzívní podle složitosti formule φ. Nejprve se definuje zobrazení

$$\|x = y\| : M^{(B)} \times M^{(B)} \rightarrow B$$

fundovanou rekurzí přes relaci R na $M^{(B)} \times M^{(B)}$, kde $\langle c, d\rangle \, R \, \langle a, b\rangle$, právě když $c \in \mathrm{Dom}(a)$ a $d \in \mathrm{Dom}(b)$. Je zřejmé, že R je úzká a fundovaná relace, protože z $c \in \mathrm{Dom}(a)$ plyne $\mathrm{typ}_B(c) < \mathrm{typ}_B(a)$. Zobrazení $\|x \in y\|$ je definováno ze zobrazení $\|x = y\|$ explicitně.

3.55 Lemma. *Pro každé* $a \in M^{(B)}$ *je* $\|a = a\| = \mathbf{1}$.

Důkaz indukcí podle typu:

$$\|a = a\| = \bigwedge_{b \in \mathrm{Dom}(a)} \big(a(b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bigvee_{c \in \mathrm{Dom}(a)} a(c) \wedge \|c = b\|\big) \geq \bigwedge_{b \in \mathrm{Dom}(a)} \big(-a(b) \vee (a(b) \;\wedge\; \|b = b\|)\big) =$$
$$= \bigwedge_{b \in \mathrm{Dom}(a)} \big(-a(b) \vee a(b)\big) = \mathbf{1}.$$

Nyní je zřejmé, že pro $a, b \in M^{(B)}$ je $b(a) \leq \|a \in b\|$ a $\|a = b\| = \|b = a\|$.

3.56 Příklad. Pro každé $a, b, c, M^{(B)}$ platí

$$\|a = b\| \wedge \|b = c\| \leq \|a = c\|,$$
$$\|a \in b\| \wedge \|a = c\| \leq \|c \in b\|,$$
$$\|a \in b\| \wedge \|b = c\| \leq \|a \in c\|.$$

Pro danou formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jsme zavedli zobrazení $\|\varphi\| : (M^{(B)})^n \to B$. Zobrazení $\|\varphi\|$ určuje relaci $\Vdash$ mezi prvky algebry B a n-ticemi jmen z $M^{(B)}$ definovanou předpisem

$$u \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n), \text{ právě když } u \leq \|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\|.$$

Jestliže $u \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, říkáme, že u *forsuje* (vynucuje) φ pro $a_1, \ldots, a_n$.

Všimněme si, že booleovské hodnoty formulí i relace forsingu jsou pojmy zavedené v M, zatímco třída $M[G]$ je definována pomocí generického ultrafiltru, který nemusí být v M. Následující klíčové tvrzení ukazuje vzájemný vztah mezi platností formule v $M[G]$ a relací forsingu v M.

3.58 Věta o forsingu. *Nechť ultrafiltr G v B je generický nad M. Potom pro libovolnou formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ platí*

$$(\forall a_1, \ldots, a_n \in M^{(B)}) (\varphi^{M[G]}(i_G(a_1), \ldots, i_G(a_n)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\|_M \in G).$$

Jinými slovy, chceme-li ověřit platnost φ v $M[G]$ pro množiny $X_1, \ldots, X_n \in M[G]$, stačí vzít některá jména $a_1, \ldots, a_n \in M^{(B)}$ odpovídající množinám $X_1, \ldots, X_n$, spočítat v M hodnotu $\|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\|$ a dokázat, že tato hodnota leží v generickém ultrafiltru G.

Důkaz. Místo interpretace i_G píšeme pouze i. Jádro důkazu je v atomických formulích. Fundovanou indukcí pro $a, b \in M^{(B)}$ dokazujeme

(i) $i(a) = i(b) \leftrightarrow \|a = b\| \in G$.

Stačí ověřit
$$i(a) \subseteq i(b) \leftrightarrow \Big(\bigwedge_{c \in \mathrm{Dom}(a)} (a(c) \Rightarrow \bigvee_{d \in \mathrm{Dom}(b)} b(d) \wedge \|c = d\|\Big) \in G.$$

Následující vztahy jsou ekvivalentní:

$$\Big(\bigwedge_{c \in \mathrm{Dom}(a)} (a(c) \Rightarrow \bigvee_{d \in \mathrm{Dom}(b)} b(d) \wedge \|c = d\|\Big) \in G,$$
$$(\forall c \in \mathrm{Dom}(a)) \Big((a(c) \Rightarrow \bigvee_{d \in \mathrm{Dom}(b)} b(d) \wedge \|c = d\|) \in G\Big),$$
$$(\forall c \in \mathrm{Dom}(a)) \Big(a(c) \in G \to (\bigvee_{d \in \mathrm{Dom}(b)} b(d) \wedge \|c = d\|) \in G\Big),$$
$$(\forall c \in \mathrm{Dom}(a)) (a(c) \in G \to (\exists d \in \mathrm{Dom}(b)) (b(d) \wedge \|c = d\| \in G),$$
$$(\forall c \in \mathrm{Dom}(a)) (a(c) \in G \to (\exists d \in \mathrm{Dom}(b)) (b(d) \in G \; \& \; i(c) = i(d)),$$
$$(\forall c \in \mathrm{Dom}(a)) (a(c) \in G \to i(c) \in \{i(d) : b(d) \in G\}),$$
$$(\forall c \in \mathrm{Dom}(a)) (i(c) \in i(a) \to i(c) \in i(b)),$$
$$i(a) \subseteq i(b).$$

(ii) $i(a) \in i(b)$, právě když $\|a \in b\| \in G$, plyne z následujících ekvivalentních vyjádření:

$$\|a \in b\| = \bigvee_{d \in \mathrm{Dom}(b)} b(d) \wedge \|d = a\| \in G\,,$$
$$(\exists d \in \mathrm{Dom}(b))\,(b(d) \in G \;\&\; \|d = a\| \in G\,,$$
$$(\exists d \in \mathrm{Dom}(b))\,(i(d) \in i(b) \;\&\; i(d) = i(a))\,,$$
$$i(a) \in i(b).$$

(iii) $\|\neg\varphi\| \in G \leftrightarrow \|\varphi\| \notin G \leftrightarrow \neg(\varphi^{M[G]}) = (\neg\varphi)^{M[G]}$. Pro další logické spojky je důkaz podobný.

(iv) Nechť $\psi(y_1, \ldots, y_n) = \exists x\, \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$. Pak

$$\|\psi(a_1, \ldots, a_n)\| = \|\exists x\, \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\| \in G\,,$$

právě když

$$(\exists b \in M^{(B)})\,(\|\varphi(b, a_1, \ldots, a_n)\| \in G)\,.$$

Podle indukčního předpokladu máme

$$(\exists b \in M^{(B)})\,(\varphi^{M[G]}(i(b), i(a_1), \ldots, i(a_n))$$

a to je ekvivalentní s

$$(\exists x \in M[G])\,(\varphi^{M[G]}(x, i(a_1), \ldots, i(a_n))\,,$$

což je $\psi^{M[G]}(i(a_1), \ldots, i(a_n))$. Pro velký kvantifikátor je důkaz obdobný.

3.59 Dokončení důkazu věty 3.26 o generickém rozšíření. Víme z 3.53, že $N = M[G]$ je tranzitivní třída a $M \subseteq M[G]$. Odtud již plyne, že v $M[G]$ platí axiomy extenzionality, fundovanosti a nekonečna. Pomocí věty o forsingu ověříme 3.26(i) a dokážeme, že v $M[G]$ platí axiom potence, sumy a schéma axiomů nahrazení. Opět místo i_G píšeme pouze i.

Zvolme množinu $X \in M[G]$ a nechť $a \in M^{(B)}$ je její jméno, to znamená, že $X = i(a)$. Nejprve ukážeme, že libovolné $Y \subseteq X$, $Y \in M[G]$ má jméno speciálního typu. Nechť b je nějaké jméno pro $Y \subseteq X$. Definujme jméno b' předpisem

$$\mathrm{Dom}(b') = \mathrm{Dom}(a) \;\&\; b'(c) = a(c) \wedge \|c \in b\|\,. \tag{22}$$

Tedy pro každé c je $b'(c) \leq a(c)$. Jelikož $Y \subseteq X$ a $i(b') = \{i(c) : (a(c) \wedge \|c \in b\|) \in G\}$, pomocí věty o forsingu dostáváme

$$i(b') = \{i(c) : a(c) \in G \;\&\; i(c) \in i(b)\} = X \cap Y = Y\,.$$

Tedy b' je také jméno pro Y.

K ověření 3.26(i) využijeme identity (13). Nechť $\varrho \subseteq x \in M$ a $\varrho \in N = M[G]$. Uvažujme kanonické jméno $a = \check{x}$ pro x. Podle (22) existuje jméno b' pro ϱ takové, že $\mathrm{Dom}(b') = \{\check{y} : y \in x\}$. Definujeme-li $f(y) = \|\check{y} \in b'\|$ pro každé $y \in x$, dostaneme funkci $f: x \to B$, $f \in M$, pro kterou platí

$$y \in \varrho \leftrightarrow b(\check{y}) \in G \leftrightarrow f(y) \in G\,.$$

Tedy $\varrho = f^{-1}{}''G$, $\varrho \in \mathrm{Ob}(G, M)$. Stejným postupem nalezneme jméno $b' \in M^{(B)}$ pro $\varrho \subseteq x$, známe-li $f\colon x \to B$, $f \in M$, pro které $\varrho = f^{-1}{}''G$. Platí tedy 3.26(i).

Axiom potence. Buď $a \in M^{(B)}$ jméno množiny $X \in M[G]$. Podle 3.9(b) potřebujeme dokázat, že $\mathscr{P}(X) \cap M[G] \in M[G]$. Vezměme množinu jmen

$$w = \{b \in M^{(B)}\colon \mathrm{Dom}\,(b) = \mathrm{Dom}\,(a)\ \&\ (\forall c \in \mathrm{Dom}\,(a))\,(b(c) \leq a(c))\}\,.$$

Pak $s = w \times \{1_B\} \in M^{(B)}$ je jméno množiny $\mathscr{P}(X) \cap M[G]$, neboť pro každé $b \in w$ je $i(b) \subseteq X$ a přitom každé $Y \subseteq X$, $Y \in M[G]$ má podle (22) nějaké jméno ve w. Tedy $i(s) = \mathscr{P}(X) \cap M[G]$.

Axiom sumy se ověřuje podobně.

Axiomy nahrazení. Připomeňme, že axiom nahrazení pro formuli $\psi(u, v)$ říká: Je-li třída $F = \{\langle u, v\rangle\colon \psi(u, v)\}$ zobrazením, pak pro každou množinu X je obraz $F''X$ také množinou.

Ověřujeme, že axiom nahrazení pro ψ platí v $M[G]$. Předpokládáme, že $\psi^{M[G]}$ definuje zobrazení, to znamená, že

$$F = \{\langle x, y\rangle\colon x, y \in M^{[G]}\ \&\ \psi^{M[G]}(x, y)\}$$

je zobrazením. Odtud a věty o forsingu pro libovolné $b, c, c' \in M^{(B)}$ máme

$$(\|\psi(b, c)\| \in G\ \&\ \|\psi(b, c')\| \in G) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\psi^{M[G]}(i(b), i(c))\ \&\ \psi^{M[G]}(i(b), i(c')) \rightarrow i(c) = i(c'))\,.$$

Nechť $X \in M[G]$ má jméno a. Hledáme jméno d pro $F''X$. Pro každé $b \in \mathrm{Dom}\,(a)$ existuje pouze množina jmen J_b taková, že

$$\bigvee\{\|\psi(b, c)\|\colon c \in M^{(B)}\} = \bigvee\{\|\psi(b, c)\|\colon c \in J_b\}\,, \tag{23}$$

protože $B \in M$ a můžeme vzít jména c minimálních typů. Definujeme $d \in M^{(B)}$ předpisem

$$\mathrm{Dom}\,(d) = \bigcup\{J_b\colon b \in \mathrm{Dom}\,(a)\} \quad \text{a} \quad d(c) = \bigvee\{\|\psi(b, c)\| \wedge a(b)\colon b \in \mathrm{Dom}\,(a)\}\,.$$

Ověřujeme, že d je jméno pro $F''X$. Je-li $z \in i(d)$, pak $z = i(c)$ pro nějaké c takové, že $d(c) \in G$. Z generičnosti G existuje $b \in \mathrm{Dom}\,(a)$, pro které $\|\psi(b, c)\| \in G$ i $a(b) \in G$, tedy pro $x = i(b) \in X$ je $z = F(x)$. Naopak, je-li $z = F(x)$ pro nějaké $x \in X$, vezměme jméno $b \in \mathrm{Dom}\,(a)$ pro x a nějaké jméno c' pro z. Přitom $\|\psi(b, c')\| \in G$ a $a(b) \in G$. Z (23) plyne, že existuje $c \in J_b \subseteq \mathrm{Dom}\,(d)$, pro které $\|\psi(b, c)\| \in G$, a proto $d(c) \in G$. Jelikož $i(c') = z$, je také $i(c) = z$, proto $z \in i(d)$.

Důkaz hlavní části věty 3.26 je skončen. Zbývá ukázat, že v $M[G]$ platí axiom výběru, pokud M je modelem ZFC. Je-li $X \in M[G]$ se jménem a, pak pro $S = \mathrm{Dom}\,(a)$ je $i_G \mid S \in M[G]$, protože podle 3.53 pro každé $\alpha \in M \cap \mathrm{On}$ je $i_G \mid M_\alpha^{(B)} \in M[G]$. V M platí AC, proto existuje prosté zobrazení $h\colon S \to \mathrm{On}^M$, $h \in M$. Definujme zobrazení g z X do On předpisem

$$g(x) = \min\{h(b) : b \in S \,\&\, i_G(b) = x\}.$$

Jelikož $g \in M[G]$, g zaručuje dobré uspořádání množiny X v $M[G]$. Věta o forsingu je dokázána.

V této kapitole jsme se seznámili s metodou forsingu a její použití jsme ilustrovali na poměrně jednoduchých Booleových algebrách, respektive částečných uspořádáních. Vyšetřování komplikovanějších částečných uspořádání již vychází za rámec standardní učebnice. Některé příklady tohoto druhu jsme proto zařadili do dodatků.

Dodatek 1. Nekonečná kombinatorika modulo Fréchetův ideál

V tomto dodatku se seznámíme s kombinatorickými vlastnostmi faktorizace potenční algebry množin $\mathcal{P}(\varkappa)$ přes ideál $[\varkappa]^{<\varkappa}$ sestávající z množin, které mají mohutnost menší než $\varkappa$. V dalším výkladu $\varkappa$ značí nekonečné kardinální číslo, $\mathrm{cf}(\varkappa)$ jeho kofinalitu.

Faktorová algebra $\mathcal{P}(\varkappa)/[\varkappa]^{<\varkappa}$, kterou budeme značit kratčeji $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$, je přirozeným derivátem algebry $\mathcal{P}(\varkappa)$ a reflektuje některé vlastnosti množin mohutnosti $\varkappa$. Algebra $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ má zajímavé strukturální vlastnosti, které mají vztah k maximálním skoro disjunktním systémům, k vlastnostem uniformních ultrafiltrů a překvapivě její zúplnění $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$ je za předpokladu $2^\varkappa = \varkappa^+$ izomorfní s dobře známou kolapsovou algebrou $C(\omega, 2^\varkappa)$ (IV.2.25 (e)), je-li $\mathrm{cf}(\varkappa) > \omega$ a je izomorfní s $C(\omega_1, 2^\varkappa, \omega_1)$ (IV.2.25 (f)), je-li $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$. Jádrem důkazů těchto tvrzení je existence tak zvaných bázových stromů. K tomu účelu zavedeme pojem výšky Booleovy algebry a určíme jejich velikosti pro algebry $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ v případě nespočetného $\varkappa$. V případě $\varkappa = \omega$ nelze výšku algebry $\mathcal{P}_\omega(\omega) = \mathcal{P}(\omega)/\mathit{fin}$ jednoznačně určit pouze v teorii ZFC. Seznámíme se také s další kardinální charakteristikou $\mathfrak{b}_\varkappa$, která se týká systémů funkcí z ${}^\varkappa\varkappa$, a se selektivními ultrafiltry na ω. Ukážeme, že algebra $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ je kanonickou algebrou pro generické přidání selektivního ultrafiltru. Seznámíme se také s bohatou a zajímavou strukturou uzavřených neomezených množin na singulárních kardinálních číslech.

1.1 Značení. Prvky algebry $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ jsou určeny podmnožinami kardinálního čísla $\varkappa$. Pro $X \subseteq \varkappa$ bude $[X]$ značit třídu ekvivalence obsahující množinu X. Tedy $Y \in [X]$, právě když $Y \subseteq \varkappa$ a $|(X - Y) \cup (Y - X)| < \varkappa$. Algebra $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ sestává právě ze všech takových tříd.

Pro $X, Y \subseteq \varkappa$ píšeme $X \subseteq^* Y$, jestliže $|X - Y| < \varkappa$. Tedy $X \subseteq^* Y$, právě když $[X] \leq [Y]$ v kanonickém uspořádání algebry $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. Místo $X \subseteq^* Y \mathbin{\&} X \neq^* Y$ píšeme $X \subset^* Y$.

Uvědomme si, že $S \subseteq [\varkappa]^\varkappa$ je skoro disjunktní systém množin na $\varkappa$ (III.1.12), jestliže $\{[X] : X \in S\}$ je množina disjunktních prvků v algebře $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ (IV.2.2).

Maximální skoro disjunktní systémy množin na $\varkappa$ odpovídají rozkladům jednotky v $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$.

Potenční algebra $\mathcal{P}(\varkappa)$ je úplná atomární algebra mohutnosti $2^\varkappa$, tedy nehomogenní (IV.2.40).

1.2 Lemma. *Algebra* $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ (i) *nemá atomy,* (ii) *je homogenní,* (iii) *není úplná,* (iv) *má mohutnost* $2^\varkappa$.

Důkaz. (i) Algebra nemá atomy, protože libovolnou množinu $X \in [\varkappa]^\varkappa$ lze rozložit na dvě disjunktní části $X_0 \cup X_1 = A$ takové, že obě mají mohutnost $\varkappa$. Jelikož $[X_0]$, $[X_1]$ jsou nenulové a $[X_0] \wedge [X_1] = \mathbf{0}$, prvek $[X]$ nemůže být atomem.

(ii) Je-li $[X] \neq \mathbf{0}$, pak $|X| = \varkappa$, a proto existuje vzájemně jednoznačné zobrazení f množiny X na $\varkappa$. Zobrazení f zachovává mohutnosti i operace průniku a rozdílu dvou množin a tedy určuje izomorfismus faktoru $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)|[X]$ na $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$.

(iii) Vezměme nějaký systém $\{X_\alpha : \alpha < \varkappa\} \subseteq [\varkappa]^\varkappa$ disjunktních množin. Ukážeme, že soubor $\{[X_\alpha] : \alpha < \varkappa\}$ nemá supremum v algebře $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. Nechť $[Y]$ je horní mezí tohoto souboru. Potom $X_\alpha \subseteq^* Y$ pro každé $\alpha < \varkappa$, a tedy $\{X_\alpha \cap Y : \alpha < \varkappa\}$ je disjunktní systém množin, každá mohutnosti $\varkappa$. Budiž $Z \subseteq Y$ selektorem pro tento systém a položme $W = Y - Z$. Jelikož $|W| = |Y| = |Z| = \varkappa$ a $X_\alpha \subseteq^* W$, je $[W]$ také horní mezí systému $\{[X_\alpha] : \alpha < \varkappa\}$. Ale $[W] < [Y]$, protože $\mathbf{0} \neq [Z] \leq [Y]$ a $[W] \wedge [Z] = \mathbf{0}$. Tím jsme ukázali, že nemůže existovat nejmenší horní mez zvoleného souboru.

(iv) Pro odhad $|\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)| \geq 2^\varkappa$ stačí nalézt prosté zobrazení $\varphi : \mathcal{P}(\varkappa) \longrightarrow \mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. Zvolme disjunktní systém $\{X_\alpha : \alpha < \varkappa\} \subseteq [\varkappa]^\varkappa$ a pro libovolné $Y \subseteq \varkappa$ položme $\varphi(Y) = [\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \varkappa\}]$, φ je hledané zobrazení. Opačná nerovnost $|\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)| \leq 2^\varkappa$ je zřejmá.

1.3 Nedistributivnost algeber $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. K tomuto tématu je dobré připomenout si pojmy ze IV. kapitoly, které se týkají hustých a λ-uzavřených množin v Booleových algebrách (2.10, 2.33, 2.34), (λ, ∞)-distributivnosti (2.31, 2.35) a (λ, μ, ν)-nedistributivnosti algeber (2.38, 2.39).

Dohodněme se, že u tříparametrové distributivnosti $(\lambda, \cdot, \nu)$ tečka znamená, že druhý parametr, velikost rozkladů, není nijak omezen. Tedy (λ, ∞)-distributivnost a $(\lambda, \cdot, 2)$ distributivnost je totéž.

1.4 Definice. Výška algebry. Nechť Booleova algebra B nemá atomy. Výškou algebry B nazýváme kardinální číslo

$$\mathfrak{h}(B) = \min\{\lambda : B \text{ není } (\lambda, \cdot, 2) - \text{distributivní}\}.$$

Výšku algebry $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ značíme $\mathfrak{h}_\varkappa$. Místo $\mathfrak{h}_\omega$ píšeme $\mathfrak{h}$ bez indexu.

1.5 Předpokládejme, že B nemá atomy. Z definice charakteristiky $\mathfrak{h}(B)$ plyne, že jakýkoliv systém rozkladů jednotky mohutnosti menší než $\mathfrak{h}(B)$ má společné zjemnění. Odtud je zřejmé, že výška je nekonečné kardinální číslo a je regulární. Kritérium distributivnosti, věta IV.2.34, říká, že z existence husté λ-uzavřené množiny v B plyne $\lambda \leq \mathfrak{h}(B)$. Jelikož B nemá atomy, je $\mathfrak{h}(B) \leq |B|$.

Je snadné nahlédnout, že $\mathfrak{h}(B)$ je nejmenší mohutnost systému hustých dolních podmnožin algebry B, jehož průnik není hustá množina v B.

Jaký je vztah mezi výškou algebry B a výškou jejího zúplnění $\mathrm{cm}(B)$ (IV.2.18)? Hustá množina v B je také hustou množinou v $\mathrm{cm}(B)$. Na druhou stranu, je-li $H \subseteq \mathrm{cm}(B)$ hustá dolní množina v $\mathrm{cm}(B)$, je množina $H \cap B$ hustá dolní v B. Tedy výška algebry se nemění přechodem k jejímu zúplnění. Jinými slovy, výška algebry je určená libovolnou její hustou částí.

1.6 Soustředíme se na algebry $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. V důsledku jejich homogenity je $\mathfrak{h}_\varkappa$ nejmenší kardinál takový, že $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ je všude $(\mathfrak{h}_\varkappa, \cdot, 2)$-nedistributivní. Naším cílem je určit hodnotu čísla $\mathfrak{h}_\varkappa$, pokud je to možné, a nalézt co největší hodnotu třetího parametru, pro kterou ještě platí $(\mathfrak{h}_\varkappa, \cdot, \nu)$-nedistributivnost algebry $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$.

Dolní odhad $\mathfrak{h}_\varkappa$ získáme z kritéria distributivnosti.

1.7 Lemma. *Algebra $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ má hustou ω_1-uzavřenou podmnožinu, právě když* $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$.

Důkaz. Nechť $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$. Ověříme, že $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa) - \{0\}$ je ω_1-uzavřená. K tomu stačí ukázat, že libovolná klesající posloupnost nenulových prvků $\{[X_n] : n \in \omega\}$ má nenulovou dolní mez. Můžeme předpokládat, že množiny X_n jsou klesající v inkluzi.

Zvolme rostoucí posloupnost kardinálních čísel $\varkappa_n$ takovou, že $\sup \varkappa_n = \varkappa$. Pro $\varkappa = \omega$, $\varkappa_n = n$. Vybíráme posloupnost $\{y_n : n \in \omega\}$ vzájemně disjunktních množin tak, že $y_n \subseteq X_n$ a $|y_n| = \varkappa_n$. Pro množinu $Y = \bigcup\{y_n : n \in \omega\}$ platí $|Y| = \varkappa$ a $Y \subseteq^* X_n$ pro každé n. Tedy $[Y]$ je hledaná dolní mez.

Opačná implikace je důsledkem věty 1.8 (ii).

Z předchozího lemmatu plyne, že v případě $\varkappa$ se spočetnou kofinalitou platí

$$\omega_1 \leq \mathfrak{h}_\varkappa \leq 2^\varkappa.$$

Později dokážeme, že pro nespočetné $\varkappa$, číslo $\mathfrak{h}_\varkappa$ nabývá pouze hodnotu ω nebo ω_1.

1.8 Věta. *Pro nespočetné kardinální číslo $\varkappa$ platí*

(i) $\mathfrak{h}_\varkappa = \omega_1$, *právě když* $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$

(ii) $\mathfrak{h}_\varkappa = \omega$, *právě když* $\mathrm{cf}(\varkappa) > \omega$.

Důkaz je v 1.26.

Zbývá diskuse toho nejzajímavějšího případu $\varkappa = \omega$. Jaké je $\mathfrak{h}$? Jaká je šíře nedistributivnosti algebry $\mathcal{P}_\omega(\omega)$? Hodnota $\mathfrak{h}$ závisí na dalších přidaných axiomech, ale šířka je maximální možná, a to 2^ω.

1.9 Věta o bázovém stromu (Balcar, Pelant, Simon 1980). *Existuje množina* $T \subseteq \mathcal{P}_\omega(\omega) - \{0\}$ *taková, že*

(i) T *je hustá v* $\mathcal{P}_\omega(\omega)$,

(ii) $(T, \geq)$ *je strom výšky* $\mathfrak{h}$, *kde* $\leq$ *je kanonické uspořádání algebry* $\mathcal{P}_\omega(\omega)$,

(iii) *každé* $u \in T$ *má* 2^ω *bezprostředních následníků.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že máme strom T uvedených vlastností. Ověříme, že každá jeho hladina T_α, pro $\alpha < \mathfrak{h}$, je rozklad jednotky. Nechť $u, v \in T_\alpha$ jsou různé. Kdyby u, v nebyly disjunktní, podle (i) existuje $w \in T$, $w \leq u \wedge v$. Odtud plyne, jelikož T je strom, že u a v jsou srovnatelné, a protože $u \neq v$, musely by ležet v různých hladinách. Ověřili jsme, že T_α je disjunktní množina. Předpokládejme, že $\bigvee T_\alpha \neq \mathbf{1}$. Potom existuje $v \in T$, které je disjunktní se všemi $u \in T_\alpha$. Nutně $v \in T_\beta$ pro nějaké $\beta < \alpha$. Potom $(\{w : w \leq v, w \in \bigcup_{\gamma<\alpha} T_\gamma\}, \geq)$ je hustý strom v $\mathcal{P}_\omega(\omega)|v$ výšky menší než $\mathfrak{h}$. Jelikož $\mathfrak{h}(\mathcal{P}_\omega(\omega)|v) = \mathfrak{h}$, máme spor. Tedy T_α jsou rozklady jednotky a pro $\beta < \alpha$ rozklad T_α zjemňuje T_β. Proto hledaný strom konstruujeme pomocí zjemňujícího se systému rozkladů.

Víme, že $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ je všude $(\mathfrak{h}, \cdot, 2)$-nedistributivní. Jinými slovy, existuje systém rozkladů $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ takový, že každé nenulové $u \in \mathcal{P}_\omega(\omega)$ protíná alespoň dva prvky nějakého rozkladu P_α. Můžeme navíc předpokládat, že pro každé $\beta < \alpha < \mathfrak{h}$ P_α zjemňuje P_β. Ověříme, že každé nenulové $u \in \mathcal{P}_\omega(\omega)$ má neprázdný průsek dokonce s 2^ω prvky nějakého rozkladu P_α. To znamená, že systém $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ zaručuje, že algebra $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ je všude $(\mathfrak{h}, \cdot, 2^\omega)$-nedistributivní. Nechť $u_0 = u$ je nenulový prvek. Vezměme $\alpha_0 < \mathfrak{h}$ takové, že existují různé prvky $v_0, v_1 \in P_{\alpha_0}$ s nenulovými průseky $u_{00} = u_0 \wedge v_0$ a $u_{01} = u_0 \wedge v_1$. Obecně, máme-li pro dané n sestrojen disjunktní systém $\{u_f : f \in {}^n\{0,1\}\}$ nenulových prvků, potom k danému $\alpha_n < \mathfrak{h}$ existuje $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ takové, že každé u_f je kompatibilní alespoň se dvěma prvky $v_{f\frown 0}$ a $v_{f\frown 1}$ z $P_{\alpha_{n-1}}$. Stačí položit $u_{f\frown i} = u_f \wedge v_{f\frown i}$ a dostaneme disjunktní systém $\{u_g : g \in {}^{n+1}\{0,1\}\}$. Tímto způsobem sestrojíme rostoucí posloupnost $\{\alpha_n : n < \omega\}$ ordinálních čísel menších než $\mathfrak{h}$ a systém prvků $\{u_f : f \in {}^{<\omega}\{0,1\}\}$ takový, že pro každé $\varphi : \omega \longrightarrow \{0,1\}$ je $\{u_{\varphi|n} : n < \omega\}$ klesající posloupnost nenulových prvků. Podle 1.7 k danému φ existuje u_φ takové, že pro každé n je

$$\mathbf{0} \neq u_\varphi \leq u_{\varphi|n} \leq u.$$

Využíváme toho, že rozklady $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ se zjemňují, a že $\mathfrak{h}$ je nespočetné regulární číslo. Tedy $\beta = \sup\{\alpha_n : n < \omega\} < \mathfrak{h}$ a pro různá $\varphi, \psi \in {}^\omega\{0,1\}$ jsou prvky u_φ a u_ψ disjunktní a kompatibilní s různými prvky z P_β. Odtud plyne, že množina $\{v \in P_\beta : u \wedge v \neq \mathbf{0}\} \supseteq \{v \in P_\beta : v \wedge u_\varphi \neq \mathbf{0};\ \varphi \in {}^\omega\{0,1\}\}$ má plnou mohutnost 2^ω. Dokázali jsme, že $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ zabezpečuje všude $(\mathfrak{h}, \cdot, 2^\omega)$-nedistributivnost.

Položme pro $\alpha < \mathfrak{h}$

$$R_\alpha = \{u \in \mathcal{P}_\omega(\omega) : |\{v \in P_\alpha : v \wedge u \neq \mathbf{0}\}| = 2^\omega\}.$$

Z předchozích odstavců víme, že $\bigcup_{\alpha<h} R_\alpha = \mathcal{P}_\omega(\omega) - \{\mathbf{0}\}$. Platí $|R_\alpha| \leq |\mathcal{P}_\omega(\omega)| \leq 2^\omega$. Indukcí můžeme získat prosté zobrazení $\psi : R_\alpha \longrightarrow P_\alpha$ takové, že $\psi(u) \wedge u \neq \mathbf{0}$ pro každé $u \in R_\alpha$. Potom $\{\psi(u) \wedge u : u \in R_\alpha\} \cup \{u - \psi(u) : u \in R_\alpha \,\&\, u - \psi(u) \neq \mathbf{0}\} \cup (P_\alpha - \mathrm{Rng}(\psi))$ je rozklad zjemňující P_α, který označíme $R(P_\alpha)$. Tedy pro každé α můžeme P_α zjemnit na rozklad $R(P_\alpha)$ tak, že pro každé $u \in R_\alpha$ existuje $v \in R(P_\alpha)$, pro které $v \leq u$. Dále víme, že pro každé nenulové u existuje $S(u)$ disjunktní rozklad prvku u mohutnosti 2^ω. Nyní stačí indukcí konstruovat zjemňující se systém rozkladů $\{T_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ tak, že pro každé α je $T_{\alpha+1}$ rozklad zjemňující $\bigcup_{u\in T_\alpha} S(u)$ a $R(P_\alpha)$. Množina $T = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{h}} T_\alpha$ je hledaný strom a T_α je jeho α-tá hladina.

Následující množinová formulace je ekvivalentní větě o bázovém stromu.

1.10 Věta o bázovém systému množin. *Existuje systém $W \subseteq [\omega]^\omega$ takový, že*
(i) *pro každé nekonečné $X \subseteq \omega$ existuje $A \in W$, pro které $A \subseteq X$,*
(ii) *je-li $A, B \in W$, potom buď $|A \cap B| < \omega$, nebo $A \subseteq {}^*B$, nebo $B \subseteq {}^*A$,*
(iii) *pro každé $A \in W$ je $|\{B \in W : A \subseteq {}^*B\}| < \mathfrak{h}$.*
(iv) *Pro každé $A \in W$ a libovolný systém $S = \{B \in W : B \subset^* A\}$ mohutnosti $< 2^\omega$ existuje $C \in W$ takové, že $C \subset^* A$ a C je skoro disjunktní se všemi množinami $B \in S$.*

Důkaz. Vezměme nějaký bázový strom T v algebře $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ splňující podmínky věty 1.9. Různé prvky z T jsou různé třídy ekvivalence sestávající z některých nekonečných podmnožin ω. Nechť W' je selektor ze systému $\{u : u \in T\}$. W' splňuje (ii), protože T je strom. Podmínka (iii) plyne z toho, že výška T je $\mathfrak{h}$. Z hustoty množiny T dostáváme v (i) pouze $\subseteq^*$ místo $\subseteq$. Zmenšíme-li každou množinu z W' o konečnou část, zachováme vlastnosti (i) a (ii). Pro každé $X \in [\omega]^\omega$ existuje 2^ω množin $A \in W'$ takových, že $A \subseteq^* X$, proto můžeme rekurzí sestrojit prosté zobrazení $\varphi : [\omega]^\omega \longrightarrow W'$ takové, že $\varphi(X) \subseteq^* X$. Nyní stačí položit $W = \{\varphi(X) \cap X : X \in [\omega]^\omega\}$. Pro W platí také podmínka (i).

Vlastnost (iv) je bezprostředním důsledkem toho, že každý vrchol bázového stromu má 2^ω bezprostředních následníků.

Co můžeme více říci o čísle $\mathfrak{h}$?

1.11 Věta.
(i) $\mathfrak{h} \leq \mathrm{cf}(2^\omega)$,
(ii) $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{b}$.

Důkaz je v 1.15. Nejprve se seznámíme s dalším kardinálním invariantem $\mathfrak{b}$.

1.12 Definice. Kardinální charakteristika $\mathfrak{b}_\varkappa$. Na množině ${}^\varkappa\varkappa$ všech zobrazení z $\varkappa$ do $\varkappa$ uvažujeme relaci $\leq^*$ skoro dominance

$$f \leq^* g \equiv |\{\alpha \in \varkappa : f(\alpha) > g(\alpha)\}| < \varkappa.$$

Charakteristika

$$\mathfrak{b}_\varkappa = \min\{|F| : F \subseteq {}^\varkappa\varkappa \text{ a } F \text{ nemá vzhledem k relaci } \leq^* \text{ horní mez}\}.$$

Opět místo $\mathfrak{b}_\omega$ píšeme prostě $\mathfrak{b}$.

Diagonálním argumentem snadno ověříme, že pro každé $\varkappa$ je $\mathfrak{b}_\varkappa > \mathrm{cf}(\varkappa)$ a z definice plyne, že $\mathfrak{b}_\varkappa$ je regulární kardinál. Tedy $\mathfrak{b} \geq \omega_1$ podobně jako $\mathfrak{h}$.

1.13 Realizace $\mathfrak{b}_\varkappa$. Pro regulární $\varkappa$ můžeme $\mathfrak{b}_\varkappa$ realizovat transfinitní posloupností $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}_\varkappa\}$ rostoucích funkcí tak, že pro $\alpha < \beta < \mathfrak{b}_\varkappa$ je $f_\alpha \leq^* f_\beta$. K tomu stačí vzít nějaký neomezený systém $F \subseteq {}^\varkappa\varkappa$ mohutnosti $\mathfrak{b}_\varkappa$, očíslovat jeho prvky $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}_\varkappa\}$ a indukcí vybírat z ${}^\varkappa\varkappa$ rostoucí funkce f_α tak, že f_0 je identita na $\varkappa$ a f_α je horní mez systému funkcí $S_\alpha = \{f_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{g_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Jelikož $|S_\alpha| < \mathfrak{b}_\varkappa$, systém S_α má horní mez, řekněme h. Jelikož $\varkappa$ je regulární, existuje rostoucí funkce $f \geq h$, tedy je z čeho vybírat. Získaný systém $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}_\varkappa\}$ je neomezený, protože F je neomezený a $g_\alpha \leq^* f_\alpha$ pro každé $\alpha < \mathfrak{b}_\varkappa$.

1.14 Příklady použití charakteristik $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{h}$.

(i) **Rozklady množiny přirozených čísel na intervaly.** Libovolná rostoucí funkce $f : \omega \longrightarrow \omega$ s $f(0) = 0$ určuje rozklad $R_f = \{r_n : n \in \omega\}$ přirozených čísel na polouzavřené intervaly $r_n = [f(n), f(n+1))$. Máme tak vzájemně jednoznačný vztah mezi rostoucími funkcemi a rozklady na intervaly.

Říkáme, že $X \subseteq \omega$ je velká množina vůči rozkladu R_f, jestliže $\limsup |X \cap r_n| = \omega$. Množina Y, která vybírá po jednom prvku z každé množiny r_n, je příklad nekonečné množiny, která není velká vůči R_f. Množinám, které nejsou velké, budeme říkat malé.

Nejmenší počet rozkladů na intervaly takových, že libovolná nekonečná $X \subseteq \omega$ je velká alespoň vůči jednomu z nich, je roven charakteristice $\mathfrak{b}$.

Důkaz. Nechť $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ je rostoucí systém rostoucích funkcí, který realizuje $\mathfrak{b}$. Můžeme předpokládat, že $f_\alpha(0) = 0$ pro každé α. Máme tak rozklady na intervaly R_α pro $\alpha < \mathfrak{b}$. Nechť $X \in [\omega]^\omega$ je libovolná, $X = \{x(0) < x(1) < \ldots < x_n(n) < \ldots\}$ a definujme $g(n) = x(n^2+1)$. Jelikož funkce g není horní mezí systému $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$, existuje $\alpha_0 < \mathfrak{b}$ taková, že neplatí $f_{\alpha_0} \leq^* g$. Ukážeme, že X je velká vůči každému rozkladu R_α pro $\alpha \geq \alpha_0$. Nechť $\alpha \geq \alpha_0$. Pak $f_{\alpha_0} \leq^* f_\alpha$, a proto také $f_\alpha \not\leq^* g$. Tedy pro libovolné $k \in \omega$ existuje $m \geq k$ takové, že $f_\alpha(m) \geq g(m) = x(m^2+1)$.

To znamená, že $|X \cap [0, f_\alpha(m))| \geq m^2$, a tedy pro nějaké $n < m$ je

$$|X \cap [f_\alpha(n), f_\alpha(n+1))| \geq m \geq k.$$

Jelikož k bylo libovolné, dokázali jsme, že X je velké vůči R_α.

Naopak, mějme $\nu < \mathfrak{b}$ rozkladů na intervaly, R_α pro $\alpha < \nu$. Jim odpovídají rostoucí funkce f_α a systém $\{f_\alpha : \alpha < \nu\}$ má nějakou horní mez g. Můžeme předpokládat, že g je také rostoucí. Definujme $h \in {}^\omega\omega$ rekurzí: $h(0) = g(0) + 1$ a $h(n+1) = g(h(n)+1)$. Množina $X = \{h(n) : n \in \omega\}$ je nekonečná, protože h je rostoucí funkce. Zbývá ukázat, že X není velká vůči žádnému rozkladu R_α, $\alpha < \nu$. Jelikož $f_\alpha \leq^* g$, existuje $k \in \omega$ takové, že $f_\alpha(n) \leq g(n)$ pro všechna $n \geq \varkappa$. Pro tato n je $|X \cap [f_\alpha(n), f_\alpha(n+1))| \leq 1$, neboť je-li $h(p) \in [f_\alpha(n), f_\alpha(n+1)]$, pak $h(p+1) = g(h(p)+1) \geq g(f_\alpha(n)+1) \geq g(n+1) \geq f_\alpha(n+1)$. Tedy X není velká vůči R_α.

(ii) **Nekonečný MAD systém na ω má mohutnost $\geq \mathfrak{b}$.** Nechť A je nekonečný skoro disjunktní systém. Vezměme spočetně mnoho množin $\{X_n : n \in \omega\}$ z A. Konečnými modifikacemi množin $X \in A$, to znamená přidáním nebo ubráním konečné množiny, neporušíme skoro disjunktnost systému. Můžeme proto předpokládat, že $\{X_n : n \in \omega\}$ je rozklad množiny ω na nekonečné části. Každá množina X_n je přirozeně očíslovaná

$$X_n = \{x_{n0} < x_{n1} < x_{n2} < \dots\}.$$

Pro $Y \in A - \{X_n : n \in \omega\}$ zvolme funkci $f_Y \in {}^\omega\omega$ tak, že

$$f_Y(n) = \min\{m : Y \cap X_n \subseteq \{x_{n0}, \dots, x_{nm}\}\}.$$

Je-li $|A| < \mathfrak{b}$, pak systém funkcí f_Y má nějakou horní mez g vůči $\leq^*$. Množina $Z = \{x_{n,g(n)+1}, n \in \omega\}$ je nekonečná, skoro disjunktní se všemi množinami z A. Tedy A nemůže být MAD systém.

(iii) **Skoro disjunktní zjemnění.** Mějme $S \subseteq [\omega]^\omega$ systém nekonečných podmnožin ω. Zobrazení $\phi : S \longrightarrow [\omega]^\omega$ nazýváme skoro disjunktním zjemněním systému S, jestliže $\varphi(X) \subseteq X$ pro každé $X \in S$ a $\{\varphi(X) : X \in S\}$ je skoro disjunktní systém na ω. Zdaleka ne každý systém má skoro disjunktní zjemnění, například $S = [\omega]^\omega$.

Dokážeme následující dvě tvrzení o existenci skoro disjunktních zjemnění.

(a) *Každý systém $S \subseteq [\omega]^\omega$ mohutnosti menší než 2^ω má skoro disjunktní zjemnění.*

(b) *Je-li $\{r_n : n \in \omega\}$ rozklad množiny ω takový, že* $\limsup |r_n| = \omega$, *potom systém $S = \{X \in [\omega]^\omega :$ $\limsup |X \cap r_n| = \omega\}$ velkých množin vůči rozkladu* *má skoro disjunktní zjemnění φ sestávající z parciálních selektorů, to znamená* $|\varphi(X) \cap r_n| \leq 1$ *pro každé* n *a každé* $X \in S$.

Společným jádrem důkazu je následující fakt vyplývající z existence bázového systému z věty 1.10.

Nechť $\langle X_\alpha : \alpha < \nu \rangle$ je soubor nekonečných množin $X_\alpha \subseteq \omega$, délky $\nu \leq 2^\omega$. Připouštíme i opakování. Potom existuje soubor $\langle A_\alpha : \alpha < \nu \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ takový, že $A_\alpha \subseteq^* X_\alpha$ pro každé $\alpha < \nu$ a je-li $\alpha < \beta$, pak A_β je buď skoro disjunktní s A_α, nebo $A_\beta \subset^* A_\alpha$.

Důkaz. Pracujeme s nějakým bázovým systémem W z 1.10. Množiny A_α vybíráme transfinitní rekurzí z W. Pro X_α nejprve vybereme $C_\alpha \subseteq X_\alpha$, $C_\alpha \in W$. Uvažujme systém $D_\alpha = \{A_\gamma : \gamma < \alpha \,\&\, A_\gamma \subset^* C_\alpha\}$, který sestává z některých již vybraných množin A_γ pro $\gamma < \alpha$. Nutně $|D_\alpha| < 2^\omega$, a proto podle 1.10 (iv) můžeme vybrat $A_\alpha \in W$ takové, že $A_\alpha \subset^* C_\alpha$ a je skoro disjunktní se všemi množinami z D_α. Množiny A_α mají požadovanou vlastnost.

Dokazujeme (a). Očíslujeme $S = \{X_\alpha : \alpha < \nu\}$. Podle uvedeného faktu máme systém $\{A_\alpha : \alpha < \nu\}$, $A_\alpha \subseteq^* X_\alpha$, který nemusí být ještě skoro disjunktní. Využijeme toho, že $\nu < 2^\omega$. Pro $\alpha < \nu$ uvažujme systém $D_\alpha = \{A_\beta : A_\beta \subset^* A_\alpha\}$. Jelikož $|D_\alpha| \leq \nu < 2^\omega$, podle 1.10 (iv) existuje $B_\alpha \subset^* A_\alpha$, B_α skoro disjunktní se všemi množinami z D_α. Položíme-li $\varphi(X_\alpha) = X_\alpha \cap B_\alpha$, dostáváme hledané skoro disjunktní zjemnění.

(b) Očíslujeme systém $S = \{M_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ velkých množin a pro každé $\alpha < 2^\omega$ vybereme nekonečné $X_\alpha \subseteq \omega$ tak, že $\lim_{n \in X_\alpha} |M_\alpha \cap r_n| = \omega$. Získáváme soubor $\langle X_\alpha : \alpha < 2^\omega \rangle$, ke kterému podle výše uvedeného faktu máme soubor $\langle A_\alpha : \alpha < 2^\omega \rangle$. Nyní transfinitní rekurzí vybíráme skoro disjunktní zjemnění φ pro S. $\varphi(M_0)$ bude nějaký selektor z $\{M_0 \cap r_n : n \in A_0\}$. Máme vybrány selektory $\varphi(M_\beta)$ pro $\beta < \alpha$. Na kroku α uvažujme množinu $M'_\alpha = M_\alpha \cap \bigcup\{r_n : n \in A_\alpha\}$. Pro $\beta < \alpha$ je buď A_β skoro disjunktní s A_α, a proto $\varphi(M_\beta)$ je skoro disjunktní s M'_α, nebo $A_\beta{}^* \supset A_\alpha$. Ale těch $\beta < \alpha$ s druhou vlastností je méně než $\mathfrak{h}$, podle 1.10 (iii). Jelikož $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{b}$, nekonečné prvky systému $\{\varphi(A_\beta) : \beta < \alpha\} \cup \{M_\alpha \cap r_n : n \in \omega\}$ netvoří maximální skoro disjunktní pokrytí množiny M_α, a proto lze vybrat nekonečný parciální selektor $\varphi(M_\alpha)$ z $\{M_\alpha \cap r_n : n \in A_\alpha\}$, který je skoro disjunktní se všemi dříve vybranými množinami $\varphi(A_\beta)$, $\beta < \alpha$. Tím je konstrukce disjunktního zjemnění skončena.

Otázka. Nutnou podmínkou pro to, aby systém $S \subseteq [\omega]^\omega$ měl skoro disjunktní zjemnění, je existence AD systému D na ω takového, že každé $X \in S$ má nekonečný průnik s nekonečně mnoha množinami z D. Je-li tato podmínka též postačující podmínkou v ZFC, je dosud otevřeným problémem. Více o této problematice je možno nalézt v práci (Balcar, Simon 1989).

(iv) **Součin sekvenciálně kompaktních prostorů.** Připomeňme, že topologický prostor se nazývá sekvenciálně kompaktní, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost. Známá Tichonovova věta říká, že součin libovolného počtu kompaktních prostorů je kompaktní prostor. Pro sekvenciální kompaktnost analogické tvrzení neplatí.

Dá se dokázat (P. Simon 1993), že kardinální číslo $\mathfrak{h}$ je největší kardinál τ takový, že topologický součin méně než τ sekvenciálně kompaktních prostorů je sekvenciálně kompaktní.

(v) **Aditivita ideálů řídkých množin.** Řídké množiny v každém topologickém prostoru tvoří ideál. Tento ideál není obecně σ-aditivní, příkladem je reálná přímka. Prostor $U(\omega)$ uniformních ultrafiltrů na ω jako Stoneův prostor algebry $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ nebo prostor $[\omega]^\omega$ s Ellentuckovou topologií (III. 4.39) jsou příklady prostorů, ve kterých ideál řídkých množin má aditivitu právě $\mathfrak{h}$. To znamená, že $\mathfrak{h}$ je největší kardinál takový, že sjednocení méně než $\mathfrak{h}$ řídkých množin je opět řídká množina. Detaily je možné nalézt v článku (Balcar, Simon 1989).

1.15 Důkaz věty 1.11. $\mathfrak{h} \leq \mathrm{cf}(2^\omega)$. Předpokládejme, že 2^ω je singulární kardinál a $\lambda = \mathrm{cf}(2^\omega) < 2^\omega$. Zvolme rostoucí posloupnost $\langle \nu_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ kardinálních čísel se $\sup \nu_\alpha = 2^\omega$ a rozložme $[\omega]^\omega = \bigcup\{S_\alpha : \alpha < \lambda\}$ tak, že $|S_\alpha| \leq \nu_\alpha$. Podle 1.14 (iv) pro každé S_α existuje disjunktní zjemnění φ_α. $\mathrm{Rng}(\varphi_\alpha)$ je AD systém, doplňme jej na MAD a označme ho P_α. Kdyby $\lambda < \mathfrak{h}$, pak systém $\{P_\alpha : \alpha < \lambda\}$ má společné zjemnění. Ukážeme, že to není možné. Nechť Y je nějaká množina ze společného zjemnění. Vyberme nekonečnou část $Z \subseteq Y$ takovou, že $|Y - Z| = \omega$. Pro nějaké $\beta < \lambda$ je $Z \in S_\beta$. Tedy $\varphi_\beta(Z) \in P_\beta$. Protože Y je ze společného zjemnění a $\varphi_\beta(Z) \subset Y$, dostáváme spor s tím, že

$$Y \subseteq^* \varphi_\beta(Z) \subseteq Z \subset^* Y \quad \text{a} \quad |Y - \varphi_\beta(Z)| = \omega.$$

$\mathfrak{h} \leq \mathfrak{b}$. Vezměme systém rozkladů $\{R_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ na intervaly takový, že každá nekonečná $X \subseteq \omega$ je vůči některému z nich velká (1.14 (i)). Ke každému $R_\alpha = \{r_n : n \in \omega\}$ zvolme MAD systém P_α na ω sestávající z parciálních selektorů, to znamená, že pro $X \in P_\alpha$ platí $|X \cap r_n| \leq 1$ pro každé n. Získali jsme tak $\mathfrak{b}$ maximálních skoro disjunktních systémů. Zvolme libovolné $X \in [\omega]^\omega$ a $\alpha < \mathfrak{b}$ takové, že množina X je velká vůči R_α. Pak X protíná alespoň dva prvky systému P_α v nekonečné množině, tudíž $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ není $(\mathfrak{b}, \cdot, 2)$-distributivní.

1.16 Kofinální větve v bázových stromech. Kromě velikosti čísla $\mathfrak{h}$ se můžeme setkat s otázkou týkající se existence kofinálních větví v bázových stromech. Teoreticky mohou nastat tři případy:

(a) Existuje bázový strom bez kofinálních větví.

(b) Každý bázový strom má kofinální větev.

(c) Existuje bázový strom jehož všechny větve jsou kofinální.

Z lemmatu 1.7, plyne, že pokud $\mathfrak{h} = \omega_1$, potom nastává (c). Dokonce v každém bázovém stromu jsou všechny jeho větve délky ω_1, tedy kofinální. Lze s malým úsilím dokázat, že z (c) plyne (b). Jelikož z (c) plyne také, že $2^\lambda = 2^\omega$ pro každé λ, $\omega \leq \lambda < \mathfrak{h}$, (b) nemůže být ekvivalentní s (c). P. L. Dordal 1987 ukázal, že je bezesporná situace $\mathfrak{h} = \omega_2$ a platí (a).

1.17 Kolapsové algebry. Nechť λ je nekonečné regulární kardinální číslo, $\tau \geq \lambda$ libovolný kardinál.

$\mathrm{Col}(\lambda, \tau)$ bude značit úplnou Booleovu algebru, jejíž hustou částí je množina $\{f \in {}^\alpha\tau : \alpha < \lambda\}$ uspořádaná opačnou inkluzí. Tuto množinu jsme značili v IV.2.25 jako $\mathrm{Fn}(\lambda, \tau, \lambda)$ a odpovídající algebru jako $C(\lambda, \tau, \lambda)$. Název kolapsové algebry je odvozen od toho, že jsou to nejpřirozenější forsingové algebry pro přidání nového zobrazení kardinálu λ na kardinál τ. V případě $\tau > \lambda$ je tím zrušena kardinalita τ, τ je kolapsováno na λ.

1.18 Lemma. *Pokud nastává případ* (c) *v* 1.16, *pak úplná algebra* $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\omega(\omega))$ *je izomorfní s kolapsovou algebrou* $\mathrm{Col}(\mathfrak{h}, 2^\omega)$.

Důkaz. Pro izomorfismus úplných algeber stačí nalézt jejich husté množiny a izomorfismus mezi nimi vůči odpovídajícím kanonickým uspořádáním. Vezměme bázový strom T v algebře $P_\omega(\omega)$, jehož všechny větve jsou kofinální. Izomorfismus φ sestrojíme rekurzí mezi hustými množinami $\bigcup\{T_{\alpha+1}; \alpha < \mathfrak{h}\}$ a $\bigcup\{{}^{(\alpha+1)}2^\omega : \alpha < \mathfrak{h}\}$ tak, že $T_{\alpha+1}$ bude prostě zobrazeno na ${}^{(\alpha+1)}(2^\omega)$. Všimněme si, že izomorfismus je definován pouze pro vrcholy, které mají bezprostředního předchůdce. Pro $\alpha = 0$ je $|T_1| = 2^\omega$, zvolíme jednoznačné očíslování $T_1 = \{v_\xi : \xi < 2^\omega\}$ a položíme $\varphi(v_\xi) = \{\langle 0, \xi\rangle\}$. Jsme v α-tém kroku, $\alpha > 0$, a chceme definovat φ pro prvky z $T_{\alpha+1}$. Pro každý vrchol $u \in T_\alpha$ zvolme prosté očíslování všech jeho bezprostředních následníků $\langle v_{u,\xi} : \xi < 2^\omega\rangle$. Nechť $v \in T_{\alpha+1}$. Existuje jediné $u \in T_\alpha$ takové, že $v < u$ a proto $v = v_{u,\xi}$ pro jednoznačně určené $\xi < 2^\omega$. Je-li α izolované číslo, máme již sestrojeno $\varphi(u)$ a položíme $\varphi(v) = \varphi(u) \cup \{\langle \alpha, \xi\rangle\}$. Je-li α limitní, položíme

$$\varphi(v) = \bigcup\{\varphi(w) : w \in T_{\beta+1}, w > u, \beta < \alpha\} \cup \{\langle \alpha, \xi\rangle\}.$$

Tím dostáváme prosté zobrazení, které zachovává uspořádání a podmínka o kofinálních větvích zaručuje, že φ je zobrazení na všechny požadované funkce. Lemma je dokázáno.

Pokud nastává případ (b) v 1.16 a $\mathfrak{h} = 2^\omega$, pak existuje uniformní ultrafiltr na ω extremálních vlastností.

1.19 Definice. Selektivní ultrafiltr. Ultrafiltr F na ω, který rozšiřuje Fréchetův filtr, se nazývá selektivní, jestliže pro každý rozklad R množiny ω buď

(i) nějaká množina z R leží v F, nebo

(ii) existuje $X \in F$ takové, že $|r \cap X| \leq 1$ pro každé $r \in R$.

Dokazujeme existenci selektivního ultrafiltru za předpokladu 1.16 (b) spolu s $\mathfrak{h} = 2^\omega$. Všech rozkladů množiny ω je 2^ω, očíslujeme je $\{R_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$. Systém všech nekonečných množin z R_α lze doplnit do maximálního skoro disjunktního systému přidáním parciálních selektorů na R_α. Pro každé $\alpha < 2^\omega$ buď P_α nějaký takový MAD systém. Jelikož $\mathfrak{h} = 2^\omega$, můžeme vybrat zjemňující soubor MAD systémů $\langle Q_\alpha : \alpha < 2^\omega \rangle$ takový, že každé Q_α navíc zjemňuje také P_α. Tím získáváme strom $(\bigcup\{Q_\alpha : \alpha < 2^\omega\}, \supset^*)$, odpovídající bázovému systému. Vezměme jeho kofinální větev H. Potom množina

$$F = \{X \subseteq \omega : (\exists Y \in H)\, X \supseteq^* Y\}$$

je hledaný selektivní ultrafiltr.

Všimněme si, že zkonstruovaný ultrafiltr, kromě selektivity, má ještě následující vlastnost. Pro každé $S \in [F]^{<2^\omega}$ existuje $X \in F$ takové, že $X \subseteq^* Y$ pro libovolné $Y \in S$. Ultrafiltr mající pouze tuto vlastnost, se nazývá $P(2^\omega)$-ultrafiltr.

1.20 Příklad. Vlastnosti selektivních ultrafiltrů. Nechť $\langle A_i : i \in \omega \rangle$ je soubor nekonečných částí množiny ω. Říkáme, že $B \subseteq \omega$ je diagonální množinou souboru $\langle A_i : i \in \omega \rangle$, jestliže

$$(\forall i, j \in B)\, i < j \to j \in B_i.$$

Existují soubory, pro které neexistuje nekonečná diagonální množina, například když množiny souboru jsou skoro disjunktní.

Mluvíme-li o stromu $T \subseteq \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$, který sestává z některých konečných posloupností přirozených čísel, máme na mysli, že $T \neq 0$, s každou posloupností obsahuje všechna její zúžení a uspořádání je dáno inkluzí.

Pro uniformní ultrafiltr F na ω jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

(i) F je selektivní.

(ii) Pro každý soubor $\langle A_i : i \in \omega \rangle$ množin z F existuje jeho diagonální množina, ležící také v F.

(iii) Je-li $T \subseteq \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$ strom takový, že každý vrchol se větví do množiny z ultrafiltru F, to znamená, že

$$(\forall f \in T)\, (\{n : f^\frown n \in T\} \in F),$$

pak existuje větev v ve stromu T taková, že $\mathrm{Rng}(\bigcup v) \in F$.

(iv) Pro každé obarvení $c : [\omega]^2 \longrightarrow k$, $k \in \omega$, existuje množina $X \in F$, která je homogenní pro c. To znamená, že v Ramseyově větě můžeme požadovat, že homogenní množina je v ultrafiltru F. Odtud pochází název Ramseyův ultrafiltr jako synonymum pro selektivní ultrafiltr.

(v) Pro každou funkci $f : \omega \longrightarrow \omega$ existuje množina $X \in F$ taková, že zúžení $f|X$ je buď konstantní, nebo prostá funkce.

Poznamenejme, že existenci selektivního ultrafiltru pouze v ZFC nelze dokázat. Kunen 1976 ukázal, že v generickém rozšíření přes měrovou algebru délky alespoň ω_2 neexistuje selektivní ultrafiltr. Ve 1.23 uvidíme, že existuje generické rozšíření pro přidání nového selektivního ultrafiltru, které je v jistém smyslu kanonické.

1.21 Co dává Martinův axiom? S Martinovým axiomem MA jsme se setkali ve IV.3.43. Odtud víme, že MA je důsledkem hypotézy kontinua CH, ale také, že je bezesporný s negací CH. Jedním z důsledků MA je regularita kardinálního čísla 2^ω.

Ukážeme další důsledky Martinova axiomu.

(i) Solovayův princip. Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ jsou systémy množin mohutnosti menší než 2^ω takové, že $\mathcal{A} \neq 0$ a žádná množina $A \in \mathcal{A}$ není pokryta až na konečnou část nějakým konečným podsystémem z $\mathcal{B}$. Potom existuje nekonečná množina $S \subseteq \omega$ taková, že

$$|S \cap A| = \omega \text{ pro každé } A \in \mathcal{A}, \qquad |S \cap B| < \omega \text{ pro každé } A \in \mathcal{B}.$$

(ii) $\mathcal{P}_\omega(\omega) - \{0\}$ je 2^ω-uzavřená.

Odtud pak, podle 1.5, 1.18, 1.19 víme, že

(iii) $\mathfrak{h} = 2^\omega$;

(iv) v každém bázovém stromu jsou všechny větve kofinální;

(v) existuje selektivní, $P(2^\omega)$-ultrafiltr;

(vi) zúplnění $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\omega(\omega))$ je izomorfní s $\mathrm{Col}(2^\omega, 2^\omega)$.

Důkaz. MA $\rightarrow$ (i) Solovayův princip připomíná větu IV.3.45. Podstatné je, že jeho důkaz získáme snadnou modifikací důkazu IV.3.50 této věty, a to takto. Jelikož $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = \varkappa < 2^\omega$ můžeme všechny množiny z $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ očíslovat $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa\rangle$, opakování je přípustné. Položíme-li $I = \{\alpha < \varkappa : A_\alpha \in \mathcal{B}\}$, $X = \omega$, potom uspořádání P a získaná množina S v důkazu IV.3.50 mají požadované vlastnosti. Stačí si uvědomit, že místo skoro disjunktnosti systému $\langle A_\alpha : \alpha < \varkappa\rangle$ stačí v našem případě použít to, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ a $\mathcal{B}_0 \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$ je $|A - \bigcup \mathcal{B}_0| = \omega$.

(i) $\rightarrow$ (ii). Dokážeme trochu silnější tvrzení. Nechť $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ je neprázdný uniformně centrovaný systém množin, to znamená, že každý konečný podsystém $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ má nekonečný průnik a nechť $|\mathcal{A}| < 2^\omega$. Potom existuje nekonečné $S \subseteq \omega$ takové, že $S \subseteq^* A$ pro každé $A \in \mathcal{A}$.

Stačí položit $\mathcal{B} = \{X \in [\omega]^\omega : (\exists\, A \in \mathcal{A}) X = \omega - A\}$, pak systémy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ splňují podmínky Solovayova principu. Nekonečné $S \subseteq \omega$, které je skoro disjuktní se všemi $X \in \mathcal{B}$ má požadovanou vlastnost vůči systému $\mathcal{A}$.

1.22 Zobecnění. Věta o bázovém stromu má širší působnost. Platí s analogickým důkazem pro každou algebru C bez atomů, která má ω_1-uzavřenou hustou množinu mohutnosti 2^ω a je homogenní pro charakteristiku $\mathfrak{h}(C)$. Úlohu kardinálního čísla $\mathfrak{h}$ přebírá výška $\mathfrak{h}(C)$. Jednoduchý příklad algebry splňující tyto podmínky a různé od $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ je volný součin $C = \mathcal{P}_\omega(\omega) \otimes \mathcal{P}_\omega(\omega)$. Překvapivě, výška tohoto součinu může být menší než $\mathfrak{h}$ (Shelah, Spinas 1998).

1.23 $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ jako forcingová algebra. Zajímá nás, co platí v generickém rozšíření universa V konstruovaném nad algebrou $\mathcal{P}_\omega(\omega)$. Nechť G je libovolný generický filtr na $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ nad V, $V[G]$ odpovídající generické rozšíření. Připomeňme, že filtr G je generický, jestliže obsahuje nějaký prvek z každé husté podmnožiny H algebry $\mathcal{P}_\omega(\omega)$, pokud $H \in V$. Ekvivalentně, jestliže pro každý rozklad jednotky P, $P \in V$, je $P \cap G \neq 0$.

Algebra $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ je $(\varkappa, \infty)$-distributivní pro každé $\varkappa < \mathfrak{h}$ a tato distributivnost se zachovává i v zúplnění $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\omega(\omega))$. Podle věty IV.3.23 v rozšíření $V[G]$ není žádná podmnožina kardinálního čísla $\varkappa$, $\varkappa < \mathfrak{h}$, která by nebyla ve V. Odtud okamžitě vidíme, že kardinální čísla $\varkappa \leq \mathfrak{h}$, včetně $\mathfrak{h}$, jsou absolutní, zůstávají kardinálními čísly i v rozšíření. Jelikož $\mathfrak{h} \geq \omega_1$, $V[G]$ nepřidává nová reálná čísla (= synonymum pro podmnožiny přirozených čísel). a proto i rozklady přirozených čísel ve $V[G]$ jsou pouze ty, které náleží do V.

Pracujme chvíli v rozšíření $V[G]$. Víme, že $G \in V[G]$ a že $G \notin V$, protože $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ nemá atomy. Filtr G sestává z nějakých prvků algebry $\mathcal{P}_\omega(\omega)$, tedy z nějakých tříd ekvivalence. Položme $F = \bigcup G$. Ukážeme, že F je selektivní ultrafiltr na ω (1.19). Předně $F \in V[G]$, $F \subseteq [\omega]^\omega$, F je filtr na ω, ale $F \notin V$. Vezměme libovolný rozklad R množiny ω. Nechť $S = \{A \in R : |A| = \omega\}$. Pokud S není maximální skoro disjunktní systém na ω, doplníme jej do takového systému přidáním některých částečných selektorů rozkladu R a označíme jej P. Důležité je, že konstrukci P provedeme ve výchozím universu V, tedy $P \in V$. Obecně ne každý MAD systém ve $V[G]$ leží ve V. Systém $\{[X] : X \in P\}$ je rozklad jednotky algebry $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ a z genericity filtru G víme, že pro nějaké $X \in P$ je $[X] \in G$, neboli $X \in F$. Toto X buď leží v S, a tedy v R, nebo $|X \cap r| \leq 1$ pro každé $r \in R$. Tím je selektivita filtru F ověřena. Všimněme si, že z ní již plyne, že F je ultrafiltr. Tedy ve $V[G]$ platí, že existuje selektivní ultrafiltr.

Víme též, že ω_1 je absolutní, $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$. Protože MAD systém na ω má nejvýše mohutnost 2^ω, podle IV.3.33 jsou všechna kardinální čísla $\lambda > 2^\omega$ také absolutní. Obecně číslo $\mathfrak{h}$ rozhoduje o tom, je-li nějaké kardinální číslo kolapsováno. Ukážeme, že ve $V[G]$ existuje nové zobrazení ρ, které zobrazuje $\mathfrak{h}$ na 2^ω. To znamená, že v případě $\mathfrak{h} < 2^\omega$ jsou ve $V[G]$ všechna kardinální čísla $\varkappa$, $\mathfrak{h} < \varkappa \leq 2^\omega$, kolapsována na $\mathfrak{h}$, neboli roli mohutnosti kontinua ve $V[G]$ přebírá číslo $\mathfrak{h}$.

Jméno pro kolaps. Na algebře $\mathcal{P}_\omega(\omega)$ existuje matice sestávající z disjunktních souborů $A_{\alpha,\beta}$ pro $\alpha < \mathfrak{h}$, $\beta < 2^\omega$ následujících vlastností:

(i) pro každé $\alpha < \mathfrak{h}$, $\bigcup\{A_{\alpha,\beta} : \beta < 2^\omega\}$ je rozklad jednotky;
(ii) $A_{\alpha,\beta_1} \cap A_{\alpha,\beta_2} = 0$ pro $\beta_1 \neq \beta_2$;
(iii) pro každé $\beta < 2^\omega$ je množina $\bigcup\{A_{\alpha,\beta} : \alpha < \mathfrak{h}\}$ hustá.

Matici $\{A_{\alpha,\beta} : \alpha < \mathfrak{h}, \beta < 2^\omega\}$ získáme snadno z bázového stromu. Nechť T je takový strom. Pro každé $u \in T$ zvolme prosté očíslování $\{u_\beta : \beta < 2^\omega\}$ jeho bezprostředních následníků. Položíme-li pro $\alpha < \mathfrak{h}$, $\beta < 2^\omega$ $A_{\alpha,\beta} = \{u_\beta : u \in T_\alpha\}$, kde T_α značí α-tou hladinu bázového stromu, snadno nahlédneme, že $\{A_{\alpha,\beta} : \alpha < \mathfrak{h}, \beta < 2^\omega\}$ má požadované vlastnosti.

Generický filtr G určuje zobrazení $\rho : \mathfrak{h} \longrightarrow 2^\omega$ tak, že $\rho(\alpha) = \beta$, jestliže $A_{\alpha,\beta} \cap G \neq 0$. Podmínky (i) a (ii) zaručují, že pro každé α existuje jediné β, pro které je $\rho(\alpha) = \beta$ a podmínka (iii) říká, že ρ je zobrazení na celé 2^ω.

Následující tvrzení shrnuje vlastnosti generického rozšíření:

1.24 Věta. *V generickém rozšíření $V[G]$ platí:*
(i) *existuje selektivní ultrafiltr na ω,*
(ii) $\mathcal{P}(\omega) = \mathcal{P}^V(\omega)$,
(iii) $\mathfrak{h}$ *je nejmenší kardinální číslo τ ve V takové, že v generickém rozšíření $V[G]$ se přidává nová podmnožina kardinálu τ,*
(iv) $2^\omega = \mathfrak{h}^V$ *a* $\mathfrak{b} = 2^\omega$,
(v) $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}(\mathcal{P}_\omega(\omega) \otimes \mathcal{P}_\omega(\omega)))^V$.

Uvedli jsme již, že existence selektivního ultrafiltru není dokazatelná v ZFC. Přesto může být výhodné využít předpokladu jeho existence ke zkrácení a zprůhlednění důkazů některých tvrzení o podmnožinách přirozených čísel. Označme $H(\omega_1)$ množinu všech dědičně spočetných množin, $H(\omega_1) = \{x : |U_\in(x)| < \omega_1\}$. K důkazu, že nějaká sentence φ platí ve struktuře $(H(\omega_1), \in)$, můžeme využít selektivního ultrafiltru. Je to možné proto, že v kanonickém rozšíření $V[G]$ selektivní ultrafiltr existuje a $(H(\omega_1))^V = (H(\omega_1))^{V[G]}$. Jinými slovy, formule φ je absolutní mezi V a $V[G]$. Příklad takového použití můžeme nalézt u K. Kunena (1998).

Algebry $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ pro nespočetné $\varkappa$. Nejprve si ověříme jednoduchý vztah mezi algebrami $\mathcal{P}_\lambda(\lambda)$ a $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$, jakmile $\lambda = \mathrm{cf}(\varkappa)$ a $\varkappa$ je singulární kardinál.

Připomeňme, že vnoření $f : A \longrightarrow B$ algebry A do algebry B je úplné (IV.2.13), právě když každý rozklad P jednotky v A je zobrazen na systém $\{f(u) : u \in P\}$, který je rozkladem jednotky v B. Při úplném vnoření algebry A do B se převádějí rozklady jednotky na rozklady jednotky a zachovává se vztah zjemnění mezi rozklady. Pokud navíc A i B nemají atomy, jsou definovány jejich výšky a v takovém případě platí $\mathfrak{h}(A) \geq \mathfrak{h}(B)$.

1.25 Lemma. *Pro singulární $\varkappa$ s $\mathrm{cf}(\varkappa) = \lambda$ existuje úplné vnoření $\mathcal{P}_\lambda(\lambda)$ do $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$, a tedy o výškách platí $\mathfrak{h}_\varkappa \leq \mathfrak{h}_\lambda$.*

Důkaz. Zvolme rostoucí posloupnost kardinálních čísel $\langle \varkappa_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ kofinální v $\varkappa$ s $\varkappa_0 = 0$. Polouzavřené intervaly $I_\alpha = [\varkappa_\alpha, \varkappa_{\alpha+1})$ tvoří rozklad množiny $\varkappa$. Pro $[X] \in \mathcal{P}_\lambda(\lambda)$ položme $\varphi([X]) = [\bigcup\{I_\alpha : \alpha \in X\}]$ v $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. Zobrazení φ je hledané úplné vnoření $\mathcal{P}_\lambda(\lambda)$ do $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$.

Pro případ singuláru $\varkappa$ se spočetnou kofinalitou, například $\aleph_\omega$, tedy víme, že $\mathfrak{h}_\varkappa \leq \mathfrak{h}$. Ale to je málo. Máme větu 1.8. Důkaz věty 1.8 je obsažen v následujícím tvrzení.

1.26 Věta o výšce. (i) (Balcar, Vopěnka 1970) *Je-li $\varkappa$ kardinál s nespočetnou kofinalitou, potom algebra $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ je všude $(\omega, \cdot, \mathrm{cf}(\varkappa)^+)$-nedistributivní, a tedy*

$$\mathfrak{h}_\varkappa = \omega.$$

(ii) (Balcar, Simon 1988) *Je-li $\varkappa$ singulár se spočetnou kofinalitou, pak algebra $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ je všude $(\omega_1, \cdot, 2^\omega)$-nedistributivní, a tedy*

$$\mathfrak{h}_\varkappa = \omega_1.$$

Důkaz. Začneme následujícím pozorováním.

(a) Nechť $\varkappa$ je nekonečný kardinál, $X \in [\varkappa]^\varkappa$ a $f : X \longrightarrow \varkappa$ je prosté zobrazení. Potom existuje $Y \subseteq X$ a prosté zobrazení $g : Y \longrightarrow \varkappa$ takové, že $|Y| = \varkappa$ a $g(\xi) < f(\xi)$ pro každé $\xi \in Y$.

K tomuto cíli vezměme $\langle \eta_\iota : \iota < \varkappa \rangle$ rostoucí prosté očíslování množiny $f[X]$. Stačí položit

$$Y = \{\xi \in X : \text{ pro nějaké } \iota < \varkappa \text{ je } f(\xi) = \eta_{\iota+1}\}$$

a definovat $g(\xi) = \eta_\iota$, jakmile $f(\xi) = \eta_{\iota+1}$.

(b) Dokazujeme (i). $\mathrm{cf}(\varkappa) > \omega$. Použijeme pozorování (a) a princip maximality a budeme konstruovat indukcí pro $n < \omega$ maximální skoro disjunktní systémy $\mathcal{A}_n$ na $\varkappa$ spolu s prostými zobrazeními $f_A : A \longrightarrow \varkappa$ pro každé $A \in \mathcal{A}_n$ tak, že platí:

(b1) $\mathcal{A}_0 = \{\varkappa\}$, $f_\varkappa = \mathrm{id}$,

(b2) pro $m < n < \omega$ je $\mathcal{A}_n$ jemnější než $\mathcal{A}_m$, to znamená, pro každé $B \in \mathcal{A}_n$ existuje $A \in \mathcal{A}_m$ takové, že $B \subseteq A$,

(b3) je-li $m < n$, $B \in \mathcal{A}_n$, $A \in \mathcal{A}_m$ a $B \subseteq A$, potom pro každé $\xi \in B$ je $f_B(\xi) < f_A(\xi)$.

Předpokládejme, že máme sestrojen MAD systém $\mathcal{A}_n$. Z (a) plyne, že pro každé $A \in \mathcal{A}_n$ a $f_A : A \longrightarrow \varkappa$ existuje MAD systém $\mathcal{B}(A)$ na A spolu s prostými zobrazeními $f_B : B \longrightarrow \varkappa$ pro každé $B \in \mathcal{B}(A)$ takovými, že $f_B(\xi) < f_A(\xi)$ pro každé $\xi \in B$. Položíme $\mathcal{A}_{n+1} = \bigcup\{\mathcal{B}(A) : A \in \mathcal{A}_n\}$, je zřejmé, že $\mathcal{A}_{n+1}$ je MAD systém na $\varkappa$.

Ověříme, že soubor $\{\mathcal{A}_n : n < \omega\}$ zabezpečuje všude $(\omega, \cdot, (\mathrm{cf}(\varkappa))^+)$-nedistributivnost algebry $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. Musíme ukázat, že pro každé $X \in [\varkappa]^\varkappa$ existuje $n < \omega$, pro které platí

$$|\{A \in \mathcal{A}_n : |X \cap A| = \varkappa\}| \geq (\mathrm{cf}(\varkappa))^+.$$

Dokazujeme sporem, předpokládejme, že pro $X \in [\varkappa]^\varkappa$ to neplatí. To ovšem znamená, že pro každé $n < \omega$ má množina

$$\mathcal{S}_n = \{A \in \mathcal{A}_n : |A \cap X| = \varkappa\}$$

velikost menší než $\mathrm{cf}(\varkappa)$. Velikost $cf(\varkappa)$ není možná, protože na $\varkappa$ neexistuje MAD systém mohutnosti $\mathrm{cf}(\varkappa)$. Odtud plyne, že množina

$$Z_n = \bigcup\{A \cap B : A, B \in \mathcal{S}_n \;\&\; A \neq B\}$$

má mohutnost $< \varkappa$. Z maximality $\mathcal{A}_n$ plyne $|X - \bigcup \mathcal{S}_n| < \varkappa$. Jelikož $\mathrm{cf}(\varkappa) < \omega$, množina

$$Z = (X \cap \bigcap_{n\in\omega} \bigcup \mathcal{S}_n) - \bigcup_{n\in\omega} Z_n$$

je neprázdná.

Zvolme $\xi \in Z$. Potom pro každé $n \in \omega$ existuje jediné $A_n \in \mathcal{S}_n$ takové, že $\xi \in A_n$ a tyto A_n tvoří klesající posloupnost. Podle (b3) dostáváme klesající posloupnost

$$f_{A_0}(\xi) > f_{A_1}(\xi) > \cdots > f_{A_n}(\xi) > \dots$$

ordinálních čísel, a to je spor.

(c) Dokazujeme (ii), $\varkappa > \mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$. V tomto případě je $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ $(\omega, \cdot, 2)$-distributivní podle 1.7 a odtud víme, že $\mathfrak{h}_\varkappa \geq \omega_1$. Nejprve dokazujeme $\mathfrak{h}_\varkappa = \omega_1$.

Transfinitní indukcí pro $\alpha < \omega_1$ konstruujeme maximální skoro disjunktní systémy $\mathcal{A}_\alpha$ na $\varkappa$ spolu s prostými zobrazeními $f_A : A \longrightarrow \varkappa$ pro každé $A \in \mathcal{A}_\alpha$ tak, že platí:

(c1) $\mathcal{A}_0 = \{\varkappa\}$, $f_\varkappa = \mathrm{id}$,

(c2) je-li $\alpha < \beta < \omega_1$, potom $\mathcal{A}_\beta$ zjemňuje $\mathcal{A}_\alpha$, to znamená, že pro každé $B \in \mathcal{A}_\beta$ existuje $A \in \mathcal{A}_\alpha$, pro které $B \subseteq^* A$,

(c3) je-li $\alpha < \beta < \omega_1$, $B \in \mathcal{A}_\beta$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$ a $B \subseteq^* A$, potom pro každé $\xi \in A \cap B$ je $f_B(\xi) < f_A(\xi)$.

Máme-li sestrojeno $\mathcal{A}_\alpha$, použijeme (a) stejným způsobem jako v případě (i), abychom získali $\mathcal{A}_{\alpha+1}$.

Zbývá definovat $\mathcal{A}_\alpha$ pro α limitní. Jelikož $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ je $(\omega, \cdot, 2)$-distributivní, existuje MAD systém $\mathcal{C}$ na $\varkappa$ zjemňující všechna $\mathcal{A}_\beta$, $\beta < \alpha$. To znamená pro každé $C \in \mathcal{C}$ a každé $\beta < \alpha$ existuje $A \in \mathcal{A}_\beta$ takové, že $C \subseteq^* A$. Pro $C \in \mathcal{C}$ definujme $g_C : C \longrightarrow \varkappa$ předpisem

$$g_C(\xi) = \min\{f_A(\xi) : A \in \mathcal{A}_\beta, C \subseteq^* A, \xi \in A, \beta < \alpha\}.$$

Pro každé $\eta \in \varkappa$ máme

$$g_C^{-1}(\eta) \subseteq \{f_A^{-1}(\eta) : C \subseteq^* A, A \in \mathcal{A}_\beta, \beta < \alpha\},$$

a jelikož α je spočetné a každé f_A je prosté, je $|g_C^{-1}(\eta)| \leq \omega$. Tedy existuje $D \subseteq C$ takové, že $|D| = \varkappa$ a $g_C|D$ je prosté. Můžeme proto předpokládat, že každé zobrazení g_C pro $C \in \mathcal{C}$ je prosté. Přechod od $\mathcal{C}$ k $\mathcal{A}_\alpha$ je analogický jako od $\mathcal{A}_\beta$ k $\mathcal{A}_{\beta+1}$.

Máme sestrojenu matici $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ MAD systémů a nyní ověříme, že zabezpečuje $(\omega_1, \cdot, 2)$-nedistributivnost algebry $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. Pokud ne, existuje $X \in [\varkappa]^\varkappa$ takové, že pro každé $\alpha < \omega_1$ existuje $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, pro které je $X \subseteq^* A_\alpha$. Položme $f_\alpha = f_{A_\alpha}$ a definujme pro $\xi \in X$

$$h(\xi) = \min\{f_\alpha(\xi) : \xi \in X \cap A_\alpha, \alpha < \omega_1\}.$$

Pro $\alpha < \omega_1$ nechť $X_\alpha = \{\xi \in X : h(\xi) = f_\alpha(\xi)\}$.

Jelikož $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ a $|X| = \varkappa$ a $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$, existuje $\alpha < \omega_1$ takové, že $|\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta| = \varkappa$. Tedy $\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \subseteq X \subseteq^* A_\alpha$ a můžeme zvolit ξ takové, že $\xi \in X_\beta \cap A_\alpha$ pro nějaké $\beta < \alpha$. Pro takto zvolené ξ, z definice zobrazení h a množiny X_β, dostáváme

$$f_\beta(\xi) = h(\xi) = \min\{f_\gamma(\xi) : \xi \in A_\gamma \cap X, \gamma < \omega_1\} \leq f_\alpha(\xi).$$

Jelikož $\alpha > \beta$, podle (c3) máme také $f_\alpha(\xi) < f_\beta(\xi)$ a dostáváme spor.

Dokázali jsme, že $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ je všude $(\omega_1, \cdot, 2)$-nedistributivní. Jelikož $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ má hustou ω_1-uzavřenou část, standardní argument rozvětvení dokazuje, že $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ je všude $(\omega_1, \cdot, 2^\omega)$-nedistributivní.

Víme, jaké jsou výšky algeber $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. Ptáme se, jestli existuje i pro nespočetné $\varkappa$ bázový strom v $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$. Zde nastávají potíže, pouze v ZFC je otázka nerozhodnutelná. Pro pozitivní odpověď stačí předpoklad $2^\varkappa = \varkappa^+$, nebo o něco méně. Použijeme kardinální charakteristiku $\mathfrak{b}_\varkappa$ z 1.12 pro regulární $\varkappa$. Víme, že $\mathfrak{b}_\varkappa \geq \varkappa^+$ a $\mathfrak{b}_\varkappa$ je také regulární kardinální číslo. Navíc platí tvrzení 1.14 (ii) i pro nespočetné $\varkappa$ se stejnou ideou důkazu: MAD systém na regulárním $\varkappa$, který má mohutnost alespoň $\varkappa$, má mohutnost $\geq \mathfrak{b}_\varkappa$.

1.27 Věta o bázovém stromu pro $\varkappa > \omega$ (Balcar, Vopěnka 1970). *Předpokládáme, že pro nespočetné regulární kardinální číslo $\varkappa$ platí $2^\varkappa = \mathfrak{b}_\varkappa$. Potom*

(i) *Existuje množina* $T \subseteq \mathcal{P}_\varkappa(\varkappa) - \{0\}$ *taková, že*
(a) T *je hustá v* $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$,
(b) $(T, \geq)$ *je strom výšky* ω, *kde* $\leq$ *je kanonické uspořádání algebry* $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$,
(c) *každé* $u \in T$ *má* $2^\varkappa$ *bezprostředních následníků.*
(ii) *Zúplnění* $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$ *je izomorfní s kolapsovou algebrou* $\mathrm{Col}(\omega, 2^\varkappa)$.

Důkaz. (i) předvedeme v množinách. Z věty 1.26 (i) víme, že existuje spočetný soubor $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ zjemňujících se MAD systémů na $\varkappa$, který zaručuje všude $(\omega, \cdot, \varkappa^+)$-nedistributivnost. To znamená, že pro libovolnou množinu $A \in [\varkappa]^\varkappa$ existuje $n \in \omega$ takové, že $\{X \cap A : X \in P_n \,\&\, |X \cap A| = \varkappa\}$ je MAD systém na A mohutnosti větší než $\varkappa$, a tedy z našich předpokladů plyne, že má mohutnost $\mathfrak{b}_\varkappa = 2^\varkappa$.

Ověřili jsme, že soubor $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ zaručuje $(\omega, \cdot, 2^\varkappa)$-nedistributivnost.

Nyní k sestrojení hledaného bázového stromu zbývá postupovat stejně, jako v posledním odstavci důkazu věty 1.9, stačí zaměnit $\mathfrak{h}$ za ω a 2^ω za $2^\varkappa$. Získáme zjemňující soubor MAD systémů T_n, $n \in \omega$, požadovaných vlastností.

(ii) plyne z (i), protože zúplnění $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$ splňuje podmínky McAloonovy věty IV.2.43.

Je známo, že za předpokladu $2^\varkappa = \varkappa^+$ existují bázové stromy nebo ekvivalentně bázové systémy množin i pro singulární $\varkappa$. Později podáme důkaz alespoň pro $\varkappa$ se spočetnou kofinalitou.

1.28 Příklady. (i) Bázový strom nemusí existovat již pro $\varkappa = \omega_1$. Stačí použít Baumgartnerovu větu IV.3.41. Rozšíříme genericky universum V, ve kterém platí $2^{\omega_1} = \omega_2$ přidáním ω_3 Cohenových čísel, to znamená pomocí algebry $C(\omega_3, 2)$. V rozšíření $V[G]$ platí $2^{\omega_1} \geq \omega_3$, protože již $2^\omega \geq \omega_3$. MAD systémy na ω_1 mají mohutnost nejvýše ω_2. Kdyby ve $V[G]$ existoval bázový strom, tedy spočetně mnoho MAD systémů, je ve hře pouze ω_2 podmnožin kardinálu ω_1. Ale ty nemohou tvořit hustou část v $[\omega_1]^{\omega_1}$, ta má v rozšíření mohutnost $\geq \omega_3$.

(ii) Malá hustá množina. Zabýváme se převážně vlastnostmi algeber $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$, které jsou určeny vlastnostmi libovolné její husté části. Algebra sama má mohutnost $2^\varkappa$, může mít hustou část mohutnosti menší než $2^\varkappa$? Pokud ano, pak každý MAD systém na $\varkappa$ má mohutnost také menší než $2^\varkappa$.

A. W. Miller (1982) ukázal bezespornost tohoto tvrzení:

Existuje $H \subseteq [\omega_1]^{\omega_1}$ taková, že $(\forall X \in [\omega_1]^{\omega_1})(\exists Y \in H)\, Y \subseteq X$ a přitom $|H| = \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} \leq 2^{\omega_1}$.

V tomto případě je hustota $\pi(\mathcal{P}_{\omega_1}(\omega_1)) < 2^{\omega_1}$. Tvrzení platí v generickém rozšíření $V[G]$, kde předpokládáme, že ve V platí GCH (stačí, že $\aleph_\omega$ je silně limitní) a G je generický filtr na algebře $C(\aleph_\omega, 2)$, to znamená na algebře pro přidání $\aleph_\omega$ Cohenových reálných čísel.

(iii) (A. Dow, K. P. Hart 1994) Zúplnění $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$ se může podstatně lišit od nějaké kolapsové algebry. Předpokládejme, že ve V platí $2^{\omega_1} = \omega_2$ a že máme fixované kardinální číslo $\varkappa \geq \omega_3$, pro které $\varkappa^{\omega_1} = \varkappa$. Potom v generickém rozšíření $V[G]$ nad algebrou $C(\varkappa, 2)$ platí

$$\mathrm{cm}(\mathcal{P}_{\omega_1}(\omega_1)) \simeq \mathrm{cm}(\mathrm{Col}(\omega, \omega_2) \otimes C(\varkappa, 2)).$$

To znamená, že zúplnění algebry $\mathcal{P}_{\omega_1}(\omega_1)$ je izomorfní volnému součinu ve třídě úplných Booleových algeber (IV.2.23) kolapsové algebry ω na ω_2 a algebry pro přidání $\varkappa$ Cohenových čísel.

Bezprostředním důsledkem tohoto vyjádření je určení nejmenší mohutnosti uniformních ultrafiltrů na ω_1, které tvoří hustou podmnožinu topologického prostoru $\mathcal{U}(\omega_1)$ neboli Stoneova prostoru $\mathrm{Ult}(\mathcal{P}_{\omega_1}(\omega_1))$. Ve $V[G]$ platí: hustota prostoru $\mathcal{U}(\omega_1)$ je rovna ω_2, $2^{\omega_1} = 2^\omega = \varkappa$ a přitom každá hustá část algebry $\mathcal{P}_{\omega_1}(\omega_1)$ má plnou mohutnost 2^{ω_1}.

Kolapsování. Viděli jsme v právě uvedeném příkladu, že zúplnění algebry $\mathcal{P}_{\omega_1}(\omega_1)$ má daleko ke kolapsové algebře, přesto kolapsová algebra $\mathrm{Col}(\omega, \omega_2)$ je jeho úplnou podalgebrou. Tedy v generickém rozšíření přes $\mathcal{P}_{\omega_1}(\omega_1)$ se kolapsuje ω_2 na ω. Přesvědčíme se, že to není náhoda, ani záležitost konsistentního příkladu, ale je to dokazatelné v ZFC.

Zajímá nás, co platí absolutně, bez dalších předpokladů o teorii množin. Víme již, že na existenci bázových systémů pro každé nespočetné $\varkappa$ nemáme nárok. Věta o výšce 1.26 je ekvivalentní s tvrzením, že algebra $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ forsuje zobrazení malého kardinálního čísla ω nebo ω_1, v závislosti na $\mathrm{cf}(\varkappa)$, do čísla $2^\varkappa$. Systém MADů, zabezpečující výšku $\mathfrak{h}_\varkappa$, je jméno pro takové zobrazení. To, že odpovídající zobrazení kolapsuje nějaké větší kardinály není přímým důsledkem této věty.

1.29 Věta o kolapsu. (i) *Pro každé nespočetné $\varkappa$, regulární nebo singulární s $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$, existuje kardinální číslo $\tau \geq \varkappa^+$ a systém $\{P_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}_\varkappa\}$ maximálních skoro disjunktních systémů na $\varkappa$ spolu s rozklady $\{P_{\alpha,\beta} : \beta < \tau\}$ každého P_α na τ částí s následující vlastností: Pro každé $X \in [\varkappa]^\varkappa$ existuje hladina $\alpha < \mathfrak{h}_\varkappa$ taková, že pro každé $\beta < \tau$ existuje $A \in P_{\alpha,\beta}$, pro které $|X \cap A| = \varkappa$.*

(ii) *Úlohu τ splňuje pro regulární $\varkappa$ číslo $\mathfrak{b}_\varkappa$, pro singulár s $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$ číslo $\varkappa^{\aleph_0}$.*

(iii) *Pro singulární $\varkappa$ s $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$ je kolapsová algebra $\mathrm{Col}(\omega_1, \varkappa^{\aleph_0})$ úplnou podalgebrou zúplnění $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$.*

Hypotéza. Je velice plausibilní, že věta o kolapsu platí i pro singuláry $\varkappa$ s nespočetnou kofinalitou, kde úlohu τ hraje $\varkappa^+$. Doposud nebyl nalezen důkaz pouze v ZFC.

Proč název věta o kolapsu? Položíme-li v úplné algebře $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$ pro $\alpha < \mathfrak{h}_\varkappa$, $\beta < \tau$

$$u_{\alpha,\beta} = \bigvee\{[A] : A \in P_{\alpha,\beta}\},$$

dostáváme booleovskou matici typu $(\mathfrak{h}_\varkappa, \tau)$. Její řádky jsou rozklady jednotky a pro každý β-tý sloupec je $\bigvee\{u_{\alpha,\beta} : \alpha < \mathfrak{h}_\varkappa\} = \mathbf{1}$, tedy booleovské jméno pro zobrazení $\mathfrak{h}_\varkappa$ na τ.

V dalším výkladu se seznámíme s kombinatorickými metodami, které se opírají o topologii dobrého uspořádání ordinálních čísel, jmenovitě o uzavřené neomezené a stacionární množiny, viz kapitola III.2. Uváděné techniky souvisejí s důkazem věty 1.29 a jsou dnes součástí pcf teorie. Dohodněmě se, že $\mathrm{Club}(\delta)$ pro limitní ordinál δ značí systém všech uzavřených neomezených podmnožin ordinálu δ. Tedy pro δ s $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$ filtr $\mathrm{Cub}(\delta)$ má $\mathrm{Club}(\delta)$ jako svoji bázi.

Začneme s charakteristikou $\mathfrak{b}_\varkappa$ pro nespočetné regulární $\varkappa$ a jejím vztahem k systémům uzavřených neomezených množin v $\varkappa$.

1.30 Lemma. *Nechť $\varkappa$ je nespočetné a regulární. Potom $\mathfrak{b}_\varkappa$ je největší kardinál τ takový, že pro libovolný systém $\{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ méně než τ uzavřených neomezených množin existuje uzavřená neomezená množina C, $C \subseteq^* C_\alpha$ pro každé $\alpha < \lambda$.*

Stručněji, $\mathrm{Club}(\varkappa)$ *je v algebře $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ dolů $\mathfrak{b}_\varkappa$-usměrněný systém.*

Důkaz. Pro rostoucí funkci $f : \varkappa \longrightarrow \varkappa$ bude $\mathrm{sp}\,(f)$ značit spojitou modifikaci funkce f, to znamená $\mathrm{sp}\,(f) : \varkappa \longrightarrow \varkappa$ a $\mathrm{sp}\,(f)(\xi+1) = f(\xi+1)$ a pro ξ limitní $\mathrm{sp}\,(f)(\xi) = \sup_{\eta<\xi} f(\eta)$. Je zřejmé, že $\mathrm{sp}\,(f) \le f$, $\mathrm{sp}\,(f)$ je spojitá rostoucí funkce na $\varkappa$ a pokud jsou f, g rostoucí a $f \le^* g$, pak i $\mathrm{sp}\,(f) \le^* \mathrm{sp}\,(g)$.

Ověříme, že pro libovolný systém $S \subseteq {}^\varkappa\varkappa$ rostoucích funkcí platí: S je omezený v $({}^\varkappa\varkappa, \le^*)$, právě když $\mathrm{sp}(S) = \{\mathrm{sp}(f) : f \in S\}$ je omezený. Je-li h horní mezí pro S, můžeme předpokládat, že h je rostoucí. Pak $\mathrm{sp}(h)$ je horní mezí pro $\mathrm{sp}(S)$. Na druhou stranu, je-li h rostoucí a současně horní mezí pro $\mathrm{sp}(S)$, pak $\overline{h}$, kde $\overline{h}(\xi) = h(\xi+1)$, je horní mezí pro S.

Vezměme posloupnost $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}_\varkappa\}$ rostoucích funkcí, která realizuje $\mathfrak{b}_\varkappa$ podle 1.13. Jak jsme ověřili, $\{\mathrm{sp}(f_\alpha) : \alpha < \mathfrak{b}_\varkappa\}$ také realizuje $\mathfrak{b}_\varkappa$. Funkce $\mathrm{sp}(f_\alpha)$ je rostoucí spojitá, proto množina jejích pevných bodů $C_\alpha = \{\xi \in \varkappa : \mathrm{sp}(f_\alpha)(\xi) = \xi\}$ je uzavřená neomezená v $\varkappa$. Pro $\alpha < \beta < \mathfrak{b}_\varkappa$ je $\mathrm{sp}(f_\alpha) \le^* \mathrm{sp}(f_\beta)$ a proto $C_\beta \subseteq^* C_\alpha$. Získali jsme tak $\subseteq^*$-klesající řetězec $\{C_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}_\varkappa\} \subseteq \mathrm{Club}(\varkappa)$. Ověříme, že řetězec $\{C_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}_\varkappa\}$ nemá dolní mez v $([\varkappa]^\varkappa, \subseteq^*)$. Pokud X je takovou mezí, je jí i množina $C = \mathrm{cl}\,(X)$, a rostoucí funkce f, zobrazující $\varkappa$ na C by byla horní mezí pro $\{\mathrm{sp}(f_\alpha) : \alpha < \mathfrak{b}_\varkappa\}$, a to není možné.

Na druhou stranu, mějme systém $\{C_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathrm{Club}(\varkappa)$, $\lambda < \mathfrak{b}_\varkappa$. Pro $\alpha < \lambda$ nechť f_α je očíslování množiny C_α, tj. f_α je rostoucí zobrazení $\varkappa$ na C_α. Jelikož $\lambda < \mathfrak{b}_\varkappa$, existuje rostoucí funkce g, která je horní mezí systému

$\{f_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Nechť C je množina pevných bodů zobrazení $\mathrm{sp}(g)$. Potom $C \subseteq^* C_\alpha$ pro každé $\alpha < \lambda$.

1.31 Důsledek. *Pro nespočetné regulární $\varkappa$ existuje řídký řetězec $\{C_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}_\varkappa\} \subseteq \mathrm{Club}(\varkappa)$, to znamená, že*
(i) *$C_\beta \subset^* C_\alpha$ pro $\alpha < \beta < \mathfrak{b}_\varkappa$,*
(ii) *pro libovolné $X \in [\varkappa]^\varkappa$ existuje $\alpha < \mathfrak{b}_\varkappa$ takové, že $|X - C_\alpha| = \varkappa$.*

Některé kombinatorické principy se nazývají predikční. Mezi takové principy počítáme různé verze diamantových principů, čtvereček i v dalším textu uvedený princip odhadu uzavřených neomezených množin. Jde o to, že se postuluje existence (transfinitní) posloupnosti objektů daného typu, která zpravidla na stacionárně mnoha místech uhodne nebo odhadne chování větších objektů téhož typu.

Následující Shelahův princip odhadu uzavřených neomezených množin patří k základním tvrzením pcf teorie.

1.32 Věta. *Nechť $\varkappa, \lambda$ jsou nekonečná regulární kardinální čísla taková, že $\varkappa^+ < \lambda$ a nechť $S \subseteq \{\delta < \lambda : \mathrm{cf}(\delta) = \varkappa\}$ je stacionární množina v λ. Pak existuje posloupnost $\langle c_\delta : \delta \in S\rangle$ splňující:*
(i) *$c_\delta \subseteq \delta$ a je uzavřená neomezená v δ,*
(ii) *ordinální typ uspořádání množiny c_δ, zkráceně $\mathrm{otp}(c_\delta)$, je roven $\varkappa$,*
(iii) *pro každé $C \in \mathrm{Club}(\lambda)$ existuje $\delta \in S$ takové, že $c_\delta \subseteq C$.*

Povšimněme si, že z této formulace již snadno plyne formálně silnější závěr. Pro každé $C \in \mathrm{Club}(\lambda)$ je množina $\{\delta \in S : c_\delta \subseteq C\}$ stacionární v λ.

1.33 Definice. Posloupnosti $\mathcal{C} = \langle c_\delta : \delta \in S\rangle$ splňující (i) – (iii) věty 1.31 říkáme Club-odhadující posloupnost nad S.

Důkaz. Mějme požadované $\varkappa, \lambda, S$. Pro každé $\delta \in S$ zvolme kofinální podmnožinu d_δ ordinálního typu $\varkappa$, to můžeme, protože $\mathrm{cf}(\delta) = \varkappa$. Množina d_δ nemusí být uzavřená v δ, vezměme $c_\delta = \mathrm{cl}(d_\delta)$ uzávěr v δ. Tímto uzávěrem se nezmění ordinální typ. Máme tak startovní posloupnost $\mathcal{C} = \langle c_\delta : \delta \in S\rangle$.

Pro libovolnou množinu $C \in \mathrm{Club}(\lambda)$ můžeme vytvořit modifikaci startovní posloupnosti $\mathcal{C}$, kterou označíme $\mathcal{C} \restriction C = \langle \bar{c}_\delta : \delta \in S\rangle$. Volba modifikace bude záviset na velikosti $\varkappa$. Je-li δ limitním bodem množiny C, pak v případě $\varkappa > \omega$ položíme $\bar{c}_\delta = c_\delta \cap C$ a v případě $\varkappa = \omega$ položíme $\bar{c}_\delta = \{\sup(C \cap (\gamma + 1)) : \gamma \in c_\delta, C \cap (\gamma + 1) \neq 0\}$. Není-li $\delta \in S$ limitním bodem množiny C, bude $\bar{c}_\delta = c_\delta$ v obou případech. Uvědomme si, že pro všechny modifikované množiny $\bar{c}_\delta$ opět platí $\bar{c}_\delta \in \mathrm{Club}(\delta)$.

Dokazujeme, a to sporem, že existuje uzavřená neomezená množina C v λ taková, že posloupnost $\mathcal{C} \restriction C$ je Club-odhadující posloupností. Tedy předpokládáme, že žádná modifikace nedává Club-odhadující posloupnost. Transfinitní rekurzí pro $\alpha < \varkappa^+$ vybíráme množiny $C_\alpha \in \mathrm{Club}(\lambda)$ tak, aby $C_\alpha \subseteq C_\beta$ pro všechna $\beta < \alpha$ a aby byla svědkem toho, že modifikace $\mathcal{C} \restriction (\bigcap_{\beta<\alpha} C_\beta)$ není Club-odhadující posloupností.

Vezměme $C = \bigcap\{C_\alpha : \alpha < \varkappa^+\}$. Jelikož $\varkappa^+ < \lambda$, je $C \in \mathrm{Club}(\lambda)$. $C \cap S \neq 0$, protože S je stacionární v λ. Pro $\delta \in C \cap S$ a δ limitní v C je δ limitní také v každé množině C_α, $\alpha < \varkappa^+$.

V případě $\varkappa > \omega$ pro množiny $c_\delta \cap C_\alpha$ platí, že $c_\delta \cap (C_\alpha - C_{\alpha+1}) \neq 0$, neboť $C_{\alpha+1}$ svědčila o tom, že $\mathcal{C} \restriction (\bigcap_{\beta<\alpha+1} C_\beta)$ není Club-odhadující posloupností. Dostáváme ostře klesající posloupnost $c_\delta \supsetneq c_\delta \cap C_0 \supsetneq \dots c_\delta \cap C_\alpha \supsetneq \dots$ délky $\varkappa^+$ podmnožin množiny mohutnosti $\varkappa$, a to není možné. Tím je důkaz prvního případu proveden.

Pro $\varkappa = \omega$ dospějeme ke sporu takto. Je-li $\gamma \in c_\delta$ takové, že $C \cap (\gamma + 1) \neq 0$ a $\alpha < \beta < \varkappa^+$, pak $\sup(C_\beta \cap (\gamma + 1)) \leq \sup(C_\alpha \cap (\gamma + 1))$; přitom pro nějaké $\gamma \in c_\delta$ je nerovnost ostrá dle volby množiny C_β. Protože množina c_δ je spočetná, musí existovat $\gamma \in c_\delta$ takové, že v transfinitní posloupnosti ordinálních čísel $\gamma \geq \sup(C_0 \cap (\gamma + 1)) \geq \dots \geq \sup(C_\alpha \cap (\gamma + 1)) \geq \dots$ je nekonečně mnoho nerovností ostrých, což není možné. Důkaz je hotov.

Ukazuje se, že struktura uzavřených neomezených množin na $\varkappa$ je zajímavá i užitečná také v případě, kdy $\varkappa$ je singulární kardinál.

1.34 Značení. $Q_\varkappa = \{X \in [\varkappa]^\varkappa : X \text{ je uzavřená v } \varkappa\}$.

Místo $[\varkappa]^\varkappa$ s kvaziuspořádáním $\subseteq^*$ se budeme zabývat podstrukturou $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$. Chování uzavřených neomezených množin plné mohutnosti, tedy množin z $Q_\varkappa$, se pro $\varkappa$ singulární podstatně liší od $Q_\lambda = \mathrm{Club}(\lambda)$, je-li $\lambda > \omega$ regulární. Nesmí nás překvapit, že v $Q_\varkappa$ nalezneme nekonečné podsystémy vzájemně skoro disjunktních množin, ani to, že pro některá $X \in Q_\varkappa$ existuje rostoucí funkce $f : X \longrightarrow \varkappa$, která je skoro všude regresivní, tedy $|\{x \in X : f(x) \not< x\}| < \varkappa$.

1.35 Číslující funkce, skeleton. Libovolná množina $a \subseteq \mathrm{On}$ má jednoznačně určený ordinální typ $\mathrm{otp}(a) = \alpha$. Izomorfismus e_a ordinálního čísla $(\alpha, \in)$ na $(a, \in)$ nazýváme číslující funkcí množiny a. Pro $X \in [\varkappa]^\varkappa$ je číslující funkce e_X definována na celém $\varkappa$ a $X \in Q_\varkappa$, právě když e_X je spojitá. Tedy množiny z $Q_\varkappa$ jsou vzájemně spojitě izomorfní. Pro každý singulár $\varkappa$ s $\nu = \mathrm{cf}(\varkappa)$ existuje aproximující posloupnost, to znamená rostoucí posloupnost kardinálních čísel $s = \langle \varkappa_\imath : i < \nu \rangle$ konvergující ke $\varkappa$. Skeletonem pro $\varkappa$ rozumíme takovou posloupnost s, která vznikne z nějaké spojité aproximace $\langle \lambda_\imath : i < \nu \rangle$ pro $\varkappa$ přechodem k následníkům, tedy $\varkappa_\imath = \lambda_\imath^+$ a navíc $\varkappa_0 \geq \nu^+$ a $\varkappa_\imath^+ < \varkappa_{\imath+1}$ pro každé $i < \nu$. Tedy skeleton sestává z regulárních kardinálních čísel a mezi následujícími členy posloupnosti leží nějaký jiný kardinál. Všimněme si, že v případě $\nu = \omega$ je každá aproximace spojitá.

1.36 Věta. *Předpokládejme, že $\varkappa$ je singulární kardinál.*

(i) *Vlastnosti* $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ *nezávislé na* $\mathrm{cf}(\varkappa)$:

(a) $|Q_\varkappa| = 2^\varkappa$,

(b) $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ *je homogenní, to znamená, že pro každé* $X \in Q_\varkappa$ *je* $Q_\varkappa$ *izomorfní s* $\{Y \in Q_\varkappa : Y \subseteq X\}$ *vůči* $\subseteq^*$,

(c) *výška* $\mathfrak{h}(Q_\varkappa) = \mathfrak{h}_\varkappa$,

(d) *úplná algebra* $RO(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ *je úplnou podalgebrou zúplnění* $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$.

(ii) *Vlastnosti* $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ *závislé na* $\mathrm{cf}(\varkappa)$:

(a) $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ *je* ω_1*-uzavřené, právě když* $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$.

(b) *Je-li* $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$, *vždy existuje skoro disjunktní systém množin z* $Q_\varkappa$, *který má mohutnost* $\varkappa^{\aleph_0} = \varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)}$. *Je-li* $\mathrm{cf}(\varkappa) > \omega$, *existuje takový systém mohutnosti* $\varkappa^+$, *ale nemusí existovat systém mohutnosti* $\varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)}$.

Důkaz. Fixujeme singulár $\varkappa$, označíme $\nu = \mathrm{cf}(\varkappa)$ a zvolíme skeleton $\langle \varkappa_i : i < \nu \rangle$ pro $\varkappa$. Tím máme dány disjunktní intervaly $I_i = [\varkappa_i, \varkappa_{i+1})$. V každém takovém intervalu můžeme vybrat $\varkappa_i$ vzájemně disjunktních uzavřených podintervalů $\{J_{i,\alpha} : \alpha < \varkappa_i\}$, každý ordinálního typu $\varkappa_i + 1$.

(i)(a) Pro každé $\alpha < \varkappa$ existuje nejmenší $i \in \nu$ takové, že $\alpha < \varkappa_i$ a pro takové i označme $K_\alpha = J_{i,\alpha}$. Potom pro různá $X, Y \in [\varkappa]^\varkappa$ jsou množiny $\mathrm{cl}\,(\bigcup_{\alpha\in X} K_\alpha)$, $\mathrm{cl}\,(\bigcup_{\alpha\in Y} K_\alpha) \in Q_\varkappa$ a různé. Tedy $|Q_\varkappa| = 2^\varkappa$.

(i)(b) Homogenita je přímým důsledkem toho, že množiny z $Q_\varkappa$ jsou spojitě izomorfní.

(ii)(b) Uvažujme systémy $S \subseteq \times_{i\in\nu} \varkappa_i$ skoro všude různých funkcí z III.1.13. Položíme-li pro $f \in S$ $X_f = \bigcup\{J_{i,f(i)} : i < \nu\}$, potom $A_f = \mathrm{cl}\,(X_f)$ se liší od X_f nejvýše o množinu mohutnosti $\leq \nu$. Proto $\{A_f : f \in S\}$ je skoro disjunktní systém. Podle III.1.13 víme, že existuje systém S mohutnosti $\varkappa^{\aleph_0}$ v případě spočetné kofinality a mohutnosti $\varkappa^+$ v případě $\nu > \omega$.

(ii)(a) Mějme dánu posloupnost $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq Q_\varkappa$ s $X_{n+1} \subseteq^* X_n$. Hledáme $Z \in Q_\varkappa$ takové, že $Z \subseteq^* X_n$ pro všechna $n \in \omega$. Vezmeme-li $Y_n = \bigcap_{i\leq n} X_i$, potom posloupnost $\{Y_n : n \in \omega\} \subseteq Q_\varkappa$ je klesající v $\subseteq$. Očíslování množiny Y_n označme e_n a položme $y_{n,i} = e_n(\varkappa_i)$. Tedy $y_{n,i}$ je $\varkappa_i$-tý prvek množiny Y_n. Uvědomme si, že pro $j < k < \omega$ je $y_{j,i} \leq y_{k,i}$ pro všechna $i \in \omega$.

Pro dané $n \in \omega$ chceme definovat množinu Z_n takovou, že $Z_n \subseteq [y_{n,n}, y_{n,n+1})$, Z_n je kofinální v $y_{n,n+1}$ a tedy $|Z_n| = \varkappa_{n+1}$, a pro každé $j < n$ je buď $Z_n \subseteq Y_j$, nebo $Z_n \cap Y_j = 0$. K tomu cíli rozdělme $\{j : j \leq n\}$ na dvě části d_1, d_2 tak, že $d_1 = \{j \leq n : y_{j,n+1} = y_{n,n+1}\}$ a d_2 je zbytek. Nutně $n \in d_1$. Vezměme $z = \max\{y_{n,n}, y_{j,n+1} : j \in d_2\}$. Potom $z < y_{n,n+1}$ a tedy $[z, y_{n,n+1})$ je neprázdný interval. Nyní stačí položit $Z_n = \bigcap\{Y_j : j \in d_1\} \cap [z, y_{n,n+1})$. Potom $Z = \mathrm{cl}\,(\bigcup\{Z_n : n \in \omega\}) \in Q_\varkappa$ a platí $|Z - X_n| \leq |Z - Y_n| < \varkappa_{n+1}$ pro každé $n \in \omega$. Všimněme si, že toto je silnější vlastnost než požadované $Z \subseteq^* X_n$. Využijeme ji v důkazu věty 1.39.

(i)(c) Podle (ii)(b) pro každé $X \in Q_\varkappa$ existují skoro disjunktní $X_1, X_2 \in Q_\varkappa$ takové, že $X_1, X_2 \subseteq X$. Má tedy smysl ptát se na velikost výšky $\mathfrak{h}(Q_\varkappa, \subseteq^*)$. Využijeme větu o výšce 1.26.

Nejprve případ $\nu > \omega$. Kardinální číslo ν je regulární a nespočetné, tedy podle 1.26(i) víme, že $\mathfrak{h}_\nu = \omega$. Nechť $\{P_n : n \in \omega\}$ je systém MADů na ν, který svědčí o rovnosti $\mathfrak{h}_\nu = \omega$. Pro singulár $\varkappa$ máme zvolený skeleton $\langle \varkappa_i : i < \nu\rangle$. Systém $\{P_n : n \in \omega\}$ pracující na ν přeneseme na systém $\{\overline{P}_n : n \in \omega\}$ pracující na $\varkappa$; stačí položit pro každé $p \in P_n$ $\overline{p} = \mathrm{cl} \bigcup\{I_i : i \in p\}$ a $\overline{P}_n = \{\overline{p} : p \in P_n\}$.

Přesvědčíme se, že $\{\overline{P}_n : n \in \omega\}$ je posloupnost maximálních skoro disjunktních systémů v $Q_\varkappa$ svědčící o tom, že $\mathfrak{h}(Q_\varkappa) = \omega$. Nechť je dáno $n \in \omega$ a $X \in Q_\varkappa$. Jelikož $|X| = \varkappa$, můžeme vybrat transfinitní posloupnost $\langle i_j : j \in \nu\rangle$ ordinálních čísel $< \nu$ takovou, že $|X \cap I_{i_j}| \geq \varkappa_j$ pro každé $j \in \nu$. Množina $a = \{i_j : j \in \nu\} \in [\nu]^\nu$, tedy existuje $p \in P_n$, pro které $|a \cap p| = \nu$. Pak ovšem $|X \cap \bigcup\{I_i : i \in p\}| = \varkappa$. Nalezli jsme $\overline{p} \in \overline{P}_n$, pro které $|\overline{p} \cap X| = \varkappa$. Tím jsme dokázali, že $\overline{P}$ je maximální skoro disjunktní v $Q_\varkappa$. To, že $\{\overline{P}_n : n \in \omega\}$ nemá společné zjemnění v $Q_\varkappa$ se ověřuje stejnou úvahou.

Důkaz pro $\nu = \omega$ převedeme na důkaz věty 1.26(ii) tím, že budeme specifikovat prostá zobrazení $f_A : A \longrightarrow \varkappa$ pro každé $A \in Q_\varkappa$. Pro $A \in Q_\varkappa$ máme očíslování $e_A : \varkappa \longrightarrow A$ a položíme $f_A = e_A^{-1}$. Nyní hledáme $B \subseteq A$, $B \in Q_\varkappa$ takové, že pro každé $x \in B$ je $f_B(x) < f_A(x)$. Využijeme skeleton $\langle \varkappa_n : n \in \omega\rangle$ pro $\varkappa$. Množina $e_A''[\varkappa_{n+1}, \varkappa_{n+2})$ je kopie intervalu I_{n+1} v A, do množiny B dáme pouze počáteční úsek ordinálního typu $\varkappa_n + 1$. Tedy

$$B = \bigcup_{n \in \omega} e_A''[\varkappa_{n+1}, \varkappa_{n+1} + \varkappa_n + 1],$$

zde $+$ značí ordinální součet. Množina $B \in Q_\varkappa$, $B \subseteq A$ a mělo by být zřejmé, že $f_B < f_A|B$. Tím je zabezpečen přechod od $\mathcal{A}_\alpha$ k $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ v konstrukci systému $\{\mathcal{A}_\xi : \xi < \omega_1\}$ potřebného k ověření $\mathfrak{h}(Q_\varkappa) = \omega_1$. Zbývá $\alpha < \omega_1$ limitní. Použijeme ω_1 uzavřenost $Q_\varkappa$ a dostaneme se do situace, kdy máme maximální skoro disjunktní systém $\mathcal{C}$ v $Q_\varkappa$ zjemňující $\{\mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha\}$. Fixujeme $C \in \mathcal{C}$. Hledáme podmnožinu $B \subseteq C$, $B \in Q_\varkappa$, pro kterou zobrazení $f_B \leq g_C$, g_C z důkazu 1.16(c). Množin $A \in \bigcup\{\mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha\}$, pro které platí $C \subseteq^* A$, je spočetně mnoho, pouze jedna z každého $\mathcal{A}_\beta$. Očíslujeme je, máme tak množiny $\{A_m : m \in \omega\}$ spolu se spojitými zobrazeními $f_m = f_{A_m}$.

Dále mějme $n \in \omega$ a uvažujme kopii $C_{n+1} = e_C''[\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$ intervalu I_n v C, označme $\delta_{n+1} = e_C(\varkappa_{n+1})$. Ordinální číslo δ_{n+1} má nespočetnou kofinalitu a C_{n+1} je uzavřená neomezená množina v δ_{n+1}. Jelikož množiny A_m jsou uzavřené v celém $\varkappa$, pro $A_m \cap C_{n+1}$ nastávají pouze dvě možnosti. Buď $A_m \cap C_{n+1} \in \mathrm{Club}(\delta_{n+1})$, pak položme $d_m = A_m \cap C_{n+1}$, nebo $A_m \cap C_{n+1}$ je nestacionární v δ_{n+1}, pak existuje $d_m \in \mathrm{Club}(\delta_{n+1})$, $d_m \subseteq C_{n+1}$ takové, že $d_m \cap A_m = 0$. Množina $b'_{n+1} = \bigcap\{d_m : m \in \omega\} \in \mathrm{Club}(\delta_{n+1})$. Položíme-li

$$B' = \bigcup_{n\in\omega} b'_{n+1} \cup \{\delta_{n+1} : n \in \omega\},$$

pak $B' \in Q_\varkappa$ a pro každé $x \in B' \cap A_m - \{\delta_{n+1} : n \in \omega\}$ je $f_B(x) \leq f_m(x)$. Hledaná množina je

$$B = \bigcup_{n\in\omega} e_{B'}{}''[\varkappa_n, \varkappa_n + \varkappa_n + 1].$$

(i)(d) Označme $\mathcal{B}_\varkappa = \mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$. Naším cílem je ukázat, že $\mathcal{B}_\varkappa$ obsahuje kopii algebry RO $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ jako úplnou podalgebru.

Nejprve pro $X \in [\varkappa]^\varkappa$ označme $\mathrm{acp}(X)$ množinu všech hromadných bodů množiny X v $\varkappa$. Jinými slovy $\mathrm{acp}(X)$ je derivace množiny $\mathrm{cl}(X)$. Zobrazení $H : Q_\varkappa \longrightarrow \mathcal{B}_\varkappa$ definované vztahem

$$H(A) = \bigvee\{[X] : X \in [\varkappa]^\varkappa \;\&\; \mathrm{acp}(X) \subseteq^* A\}$$

je homomorfismus $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ do $(\mathcal{B}_\varkappa, \leq)$. Navíc, jsou-li $A, B \in Q_\varkappa$ skoro disjunktní, jsou prvky $H(A), H(B)$ disjunktní. K tomu, aby RO $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ bylo izomorfní s úplnou podalgebrou algebry $\mathcal{B}_\varkappa$ obsahující množinu $\{H(A) : A \in Q_\varkappa\}$ jako hustou část, stačí ověřit, že H převádí každý maximální skoro disjunktní systém $\mathcal{A}$ v $Q_\varkappa$ na rozklad jednotky $\{H(A) : A \in \mathcal{A}\}$ v $\mathcal{B}_\varkappa$. Nechť $\mathcal{A}$ je takový systém. Mějme libovolnou množinu $X \in [\varkappa]^\varkappa$. Potom z maximality systému $\mathcal{A}$ víme, že existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že množina $D = A \cap \mathrm{acp}(X)$ má mohutnost $\varkappa$. Hledáme $Y \in [X]^\varkappa$ takové, že $\mathrm{acp}(Y) \subseteq A$, neboť odtud plyne $[X] \cap H(A) \neq 0$. Mějme očíslování $\{d_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ množiny D. Pro každé $\alpha < \varkappa$ vyberme z množiny X nejmenší prvek $x_\alpha \geq d_\alpha$. Množina $Y = \{x_\alpha : \alpha < \varkappa\} \subseteq X$ má mohutnost $\varkappa$ a $\mathrm{acp}(Y) \subseteq D \subseteq A$, protože D je uzavřená v $\varkappa$. Tím je důkaz hotov.

Na závěr poznamenejme, že formálně jednodušší zobrazení $F : Q_\varkappa \longrightarrow \mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ definované vztahem $F(A) = [A]$, které je také homomorfismem $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ do $\mathcal{B}_\varkappa$ a převádí skoro disjunktní množiny na disjunktní prvky, nepracuje, protože nezachovává úplnost.

1.37 Příklad. Omezení velikosti skoro disjunktních systémů v $Q_\varkappa$. Mějme systém $S \subseteq Q_\varkappa$ skoro disjunktních množin a $\langle \varkappa_i : i \in \nu \rangle$ nějaký skeleton pro $\varkappa$, $\nu = \mathrm{cf}(\varkappa)$. Pro $X \in S$ definujme $g_X : \nu \longrightarrow \varkappa$ vztahem $g_X(i) = e_X(\varkappa_i)$, tedy

$g_X(i)$ je $\varkappa_i$-tý prvek množiny X. Potom $\{g_X : X \in S\} \subseteq {}^{\nu}\varkappa$ je systém skoro různých funkcí.

Existuje generické rozšíření, ve kterém platí $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} > \aleph_{\omega_1+1}$ a přitom každý systém skoro různých funkcí z ${}^{\omega_1}\aleph_{\omega_1}$ má mohutnost $\leq \aleph_{\omega_1+1}$. Analogicky jako v příkladech 1.28 rozšíříme universum V s GCH genericky přidáním $\aleph_{\omega_1+2}$ Cohenových reálných čísel. Podle Baumgartnerovy věty v rozšíření $V[G]$ každý AD systém na ω_1 má mohutnost nejvýše ω_2. Forsingová algebra $C(\omega_{\omega_1+2}, 2)$ má saturovanost ω_1. Z toho plyne, že pro každé zobrazení $\sigma \in V[G]$, $\sigma : \omega_1 \longrightarrow \aleph_{\omega_1}$ existuje roura, to jest relace $r_\sigma \subseteq \omega_1 \times \aleph_{\omega_1}$ taková, že $r_\sigma \in V$, $|r_\sigma|^V = \omega_1$ a $\sigma \subseteq r_\sigma$. Takových relací ve V je pouze $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_{\omega_1+1}$. Skoro různé funkce ležící ve stejné rouře r tvoří skoro disjunktní soubor na množině r, $|r| = \omega_1$, a tedy je jich nejvýše ω_2. Odtud každý systém skoro různých funkcí ve $V[G]$ má nejvýše $\omega_2 \cdot |\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1}|^V = \aleph_{\omega_1+1}$ prvků, a současně $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1+2}$, tedy $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} \geq \aleph_{\omega_1+2}$.

Víme, že $Q_\varkappa$ má mohutnost $2^\varkappa$. Existence Club-odhadující posloupnosti, věta 1.32, umožňuje horní odhad mohutnosti hustých podmnožin v $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$.

1.38 Lemma. *Nechť $\varkappa$ je singulární kardinál. V $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$ existuje hustá množina mohutnosti $\varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)}$.*

Důkaz. Jako obvykle $\nu = \mathrm{cf}(\varkappa)$, $\langle \varkappa_i : i < \nu \rangle$ je skeleton pro $\varkappa$, $I_i = [\varkappa_i, \varkappa_{i+1})$. Pro každé $i < \nu$ označme $S_i = \{\alpha \in I_i : \mathrm{cf}(\alpha) = \varkappa_i\}$. Množina S_i je stacionární v $\varkappa_{i+1}$, podle věty 1.32 existuje Club-odhadující posloupnost $C_i = \langle c_\alpha^i : \alpha \in S_i \rangle$ nad S_i.

První odhad mohutnosti spočívá v tom, že $|\mathsf{X}_{i\in\nu} C_i| = |\mathsf{X}_{i\in\nu} \varkappa_{i+1}| = \varkappa^\nu = \varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)}$. Označme $C = \mathsf{X}_{i\in\nu} C_i$. Uvažujme další systém funkcí $\Phi \subseteq {}^{\nu}\varkappa$, kde $\Phi = \{f : f \in {}^{\nu}\varkappa \,\&\, (\forall i < \nu)\, \mathrm{cf}(f(i)) = \varkappa_i\}$. Opět $|\Phi| = \varkappa^\nu = \varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)}$.

Pro dané $f \in \Phi$ a každé $i \in \nu$ fixujeme jeden izomorfismus vůči uspořádání ordinálních čísel $\pi_{f,i}$ intervalu I_i na nějakou množinu $K_{f,i}$ uzavřenou neomezenou v $f(i+1)$. To je možné, protože $\mathrm{cf}(f(i+1)) = \varkappa_{i+1}$, a $\varkappa_{i+1}$ je regulární nespočetný kardinál. Navíc, můžeme požadovat, aby $K_{f,i} \subseteq [f(i), f(i+1))$. Pro $c \in C$, $f \in \Phi$ definujeme množinu

$$H_{c,f} = \mathrm{cl}\,(\bigcup_{i\in\nu} \pi_{f,i}{}'' c_i).$$

Systém $\mathcal{H} = \{H_{c,f} : c \in C, f \in \Phi\} \subseteq Q_\varkappa$ má mohutnost $\varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)}$.

Zbývá ověřit hustotu. Nechť je dáno $A \in Q_\varkappa$, e_A odpovídající číslující funkce. Položíme-li $f(i) = e_A(\varkappa_i)$ pro každé $i < \nu$, je $f \in \Phi$. Dále $A \cap K_{f,i}$ je uzavřená neomezená v $f(i+1)$, a proto existuje $c_i \in C_i$, pro které $\pi_{f,i}{}'' c_i \subseteq A \cap K_{f,i}$. Takto jsme získali posloupnost $c = \langle c_i : i < \nu \rangle \in C$. Pro toto $f \in \Phi$ a $c \in C$ je $\bigcup_{i\in\nu} \pi_{f,i}{}'' c_i \subseteq A$, A je uzavřené, proto i $H_{c,f} \subseteq A$. Tedy $\mathcal{H}$ je hustá v $Q_\varkappa$.

Naskýtá se otázka, je pro $\varkappa$ singulární $\varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)}$ nejmenší možná mohutnost nějaké husté části v $(Q_\varkappa, \subseteq^*)$? Pro $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$ je odpověď pozitivní a plyne z věty 1.36(b), protože v $Q_\varkappa$ existuje skoro disjunktní systém mohutnosti $\varkappa^{\aleph_0}$. Pro $\mathrm{cf}(\varkappa) > \omega$ je konsistentní, že může být menší. To nastává v příkladě 1.37.

Další postup se týká důkazu věty o kolapsu 1.29. Pro nespočetné regulární $\varkappa$ a $\lambda = \mathfrak{b}_\varkappa$ odkazujeme na důkaz v článku (Balcar, Simon 1988), kvůli jeho technické náročnosti. Větu 1.29 dokážeme pro singuláry se spočetnou kofinalitou.

Fixujeme singulární kardinál $\varkappa$ s $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$. V dalším textu píšeme Q místo $Q_\varkappa$.

1.39 Lemma. *$(Q, \subseteq^*)$ je všude $(\omega_1, \cdot, \varkappa^{\aleph_0})$-nedistributivní.*

Důkaz. Víme, že Q je ω_1-uzavřená a $\mathfrak{h}(Q) = \omega_1$, tedy $(Q, \subseteq^*)$ je všude $(\omega_1, \cdot, 2^\omega)$-nedistributivní. To znamená, že pro $\varkappa < 2^\omega$ je lemma dokázáno.

Pro obecné $\varkappa$ nejprve dokazujeme, že Q je všude $(\omega_1, \cdot, \varkappa)$-nedistributivní. Požadovaná nedistributivita potom vyplyne z lemmatu 1.40. Fixujeme skeleton $\langle \varkappa_n : n \in \omega \rangle$ pro $\varkappa$. Vyjdeme z libovolné posloupnosti $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ skoro disjunktních systémů v Q, svědčící o $\mathfrak{h}(Q) = \omega_1$ a sestrojíme novou zjemňující se posloupnost $\{\mathcal{R}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, přičemž $\mathcal{R}_{\alpha+1}$ zjemňuje $\mathcal{A}_\alpha$. Podstatný je limitní krok. Pro každé limitní $\alpha < \omega_1$ fixujeme rostoucí posloupnost $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ konvergující k α. Mějme již $\{\mathcal{R}_\beta : \beta < \alpha\}$ zjemňující se systémy, α limitní. Vezměme libovolný $\subseteq^*$ klesající řetězec $R = \{Y_\beta : \beta < \alpha, Y_\beta \in \mathcal{R}_\beta\}$ délky α. Podposloupnost $\{Y_{\alpha_n} : n \in \omega\}$ je kofinální část řetězce R. Použijeme konstrukci z důkazu 1.36(ii)(a), ze které víme, že pokud $Y \in Q$ a $Y \subseteq^* Y_{\alpha_n}$ pro všechna $n \in \omega$, pak existuje $Z \subseteq Y$ takové, že $Z \in Q$ a $(\forall n)\, |Z - Y_{\alpha_n}| < \varkappa_{n+1}$. Vyberme maximální skoro disjunktní systém $\mathcal{D}(R)$, sestávající z množin $Z \in Q$, pro které $|Z - Y_{\alpha_n}| < \varkappa_{n+1}$, pro každé n, a položme $\mathcal{R}_\alpha = \bigcup\{\mathcal{D}(R) : R$ je $\subseteq^*$ klesající řetězec v $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{R}_\beta\}$.

Ověřujeme, že $\{\mathcal{R}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ zabezpečuje požadovanou $(\omega_1, \cdot, \varkappa)$-nedistributivitu. Víme, že $\{\mathcal{R}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ stejně jako $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ svědčí o $\mathfrak{h}(Q) = \omega_1$. Mějme dáno $X \in Q$. Existuje $\alpha(0) < \omega_1$ a různé množiny $X_{\alpha(0)}, Y_{\alpha(0)} \in \mathcal{R}_{\alpha(0)}$, pro které $|X_{\alpha(0)} \cap X| = |Y_{\alpha(0)} \cap X| = \varkappa$. Jsou-li $\alpha(n) < \omega_1$ a $X_{\alpha(n)}, Y_{\alpha(n)} \in \mathcal{R}_{\alpha(n)}$ známy, nechť $\alpha(n+1)$ je takové, že existují různé $X_{\alpha(n+1)}, Y_{\alpha(n+1)} \in \mathcal{R}_{\alpha(n+1)}$, pro které $|X_{\alpha(n+1)} \cap Y_{\alpha(n)} \cap X| = |Y_{\alpha(n+1)} \cap Y_{\alpha(n)} \cap X| = \varkappa$. Položíme $\alpha = \sup_{n\in\omega} \alpha(n)$. Uvažujme řetězec $R = \{Y \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{R}_\beta : (\exists n \in \omega)\, Y_{\alpha(n)} \subseteq^* Y\}$. Stačí ukázat, že množina $\mathcal{Z} = \{Z \in \mathcal{D}(R) : |Z \cap X| = \varkappa\}$ má mohutnost alespoň $\varkappa$. Předpokládejme, že tomu tak není, $|\mathcal{Z}| < \varkappa$.

Ukážeme, že v tomto případě je dostatečný prostor k výběru vzájemně disjunktních množin $\{d_n : n \in \omega\}$ takových, že pro každé $n \in \omega$ je $d_n \subseteq X$, $|d_n| = \varkappa_n$, d_n je uzavřená a omezená v $\varkappa$ a navíc $D = \bigcup_{n\in\omega} d_n \in Q$, $|D - Y_{\alpha_n}| < \varkappa_{n+1}$ pro každé $n \in \omega$ a D je disjunktní se všemi množinami ze $\mathcal{Z}$. To však bude spor s maximalitou systému $\mathcal{D}(R) \subseteq \mathcal{R}_\alpha$.

Máme dvě posloupnosti konvergující k α, totiž $\{\alpha_n : n \in \omega\}$, již jsme použili pro konstrukci $\mathcal{R}_\alpha$, a $\{\alpha(n) : n \in \omega\}$ použitou pro výběr skoro disjunktních $X_{\alpha(n)}, Y_{\alpha(n)}$. Pro dané $n \in \omega$ předpokládejme, že máme již d_p pro $p < n$. Vezměme nejmenší $k, m \in \omega$, aby platilo $\alpha_n \leq \alpha(k) < \alpha(k+1) \leq \alpha_m$. Zřejmě $\tilde{X} = X \cap X_{\alpha(k+1)} \cap \bigcap_{p \leq n} Y_{\alpha_p} \in Q$. Podívejme se na množinu $\tilde{X} \cap (\bigcup\{Z : Z \in \mathcal{Z}\} \cup \bigcup\{d_p : p < n\})$. Ta má mohutnost menší než $\varkappa$, neboť $|\bigcup_{p<n} d_p| < \varkappa_n$ a $|X_{\alpha(k+1)} \cap Y_{\alpha_m}| < \varkappa$ a pro každé $Z \in \mathcal{Z}$ je $|Z - Y_{\alpha_m}| < \varkappa_{m+1}$ a $|\mathcal{Z}| < \varkappa$.

Proto můžeme vybrat uzavřenou množinu $d_n \subseteq \tilde{X}$ omezenou v $\varkappa$ mohutnosti $\varkappa_n$, která je částí intervalu $[\sup \bigcup_{p<n} d_p + 1, \varkappa)$ a disjunktní se všemi $Z \in \mathcal{Z}$. Potom množina $D = \bigcup_{n \in \omega} d_n \in Q$ a pro každé $n \in \omega$ je $D - Y_{\alpha_n} \subseteq \bigcup_{p<n} d_p$, tedy $|D - Y_{\alpha_n}| < \varkappa_n$.

1.40 Lemma. *Nechť $\lambda \geq 2$ je kardinální číslo. Předpokládejme, že $(P, \leq)$ je uspořádání (nebo kvaziuspořádání), které je* (i) *ω_1-uzavřené,* (ii) *všude $(\omega_1, \cdot, \lambda)$-nedistributivní. Pak $(P, \leq)$ je všude $(\omega_1, \cdot, \lambda^\omega)$-nedistributivní.*

Důkaz. Pokud $\lambda^\omega = \lambda$, není co dokazovat. Případ $\lambda \leq 2^\omega$ je také zřejmý, víme již, že P musí být $(\omega_1, \cdot, 2^\omega)$-nedistributivní. Předpokládejme tedy, že $2^\omega < \lambda < \lambda^\omega$.

Nechť $\tau \leq \lambda$ je nejmenší kardinál splňující $\tau^\omega \geq \lambda$. Zřejmě $\tau^\omega = \lambda^\omega$ a z Hausdorffovy formule pro kardinální aritmetiku a z předpokladu $\lambda > 2^\omega$ plyne, že τ musí být singulár se spočetnou kofinalitou. Zvolme rostoucí posloupnost $\langle \tau_n : n \in \omega \rangle$ regulárních kardinálních čísel aproximující τ. Z volby τ plyne, že $\tau_n^{\aleph_0} < \tau$ pro každé $n \in \omega$.

Nechť $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ je systém maximálních disjunktních množin v $(P, \leq)$, které svědčí pro $(\omega_1, \cdot, \lambda)$-nedistributivitu. Jelikož P je ω_1-uzavřené, můžeme předpokládat, že A_β zjemňuje A_α pro $\alpha < \beta < \omega_1$, to znamená, že pro libovolná $r \in A_\beta$, $s \in A_\alpha$ je buď $r \leq s$, nebo r a s jsou disjunktní, neexistuje žádný prvek pod oběma.

Mějme dáno $s \in P$. K prvku s konstruujeme rekurzí rozvětvující se systémy. Rozvětvení bude kontrolováno stromem $S = \{\varphi \in {}^n\tau : n \in \omega \,\&\, (\forall i \in \mathrm{Dom}(\varphi))\ \varphi \in \tau_i\}$ a uspořádání je prodloužení. S_n značí n-tou hladinu stromu S, tedy $S_n = \mathsf{X}_{\iota<n} \tau_\iota$. Pro $\varphi \in S_n$, $n > 0$, hledáme číslo $\alpha_\varphi < \omega_1$ a prvky $a_\varphi \in A_{\alpha_\varphi}$, $s_\varphi \in P$ tak, že $s_\varphi \leq a_\varphi$. Pro $\varphi = 0$ položíme $s_0 = a_0 = s$, $\alpha_0 = 0$. Předpokládáme, že pro $\varphi \in \mathsf{X}_{\iota<n} \tau_\iota$ máme $s_\varphi \leq a_\varphi$ a α_φ. Existuje nějaké $\alpha < \omega_1$, $\alpha > \alpha_\varphi$ takové, že $A_{\alpha,\varphi} = \{a \in A_\alpha : a$ je kompatibilní s $s_\varphi\}$ má mohutnost $\geq \tau_n$. To plyne z $(\omega_1, \cdot, \lambda)$-nedistributivnosti a $\tau_n \leq \lambda$. Zvolme takové α, vyberme z $A_{\alpha,\varphi}$ část mohutnosti τ_n a prostě ji indexujeme funkcemi $\{\psi \in \mathsf{X}_{\iota \leq n} \tau_\iota : \varphi \subseteq \psi\}$. Dostáváme tak $\{a_\psi : \psi = \varphi \cup \langle n, \xi \rangle, \xi < \tau_n\}$ a vybereme s_ψ tak, že $s_\psi \leq s_\varphi$ a $s_\psi \leq a_\psi$ a položíme $\alpha_\psi = \alpha$. Tím je popsána konstrukce.

Uvažujme nyní nekonečné posloupnosti $f \in \mathsf{X}_{n \in \omega} \tau_n$. Ty jednak odpovídají vzájemně jednoznačně větvím stromu S, a jednak na ně můžeme pohlížet jako na body topologického prostoru $X = \mathsf{X}_{n\in\omega} \tau_n$ se součinovou topologií diskrétních prostorů τ_n. Zobrazení $F : \mathsf{X}_{n\in\omega} \tau_n \longrightarrow {}^{\omega}\omega_1$ je určeno vztahem $F(f)(n) = \alpha_{f|n}$. Jelikož $|\mathsf{X}_{n\in\omega} \tau_n| = \tau^{\omega} = \lambda^{\omega} > 2^{\omega}$ a $|{}^{\omega}\omega_1| = 2^{\omega}$, existuje jedna rostoucí posloupnost $\overline{\alpha} = \langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$, pro kterou množina

$$M = \{f \in \mathop{\mathsf{X}}_{n\in\omega} \tau_n : F(f) = \overline{\alpha}\}$$

má mohutnost větší než τ. Cílem je ukázat, že $|M| = \tau^{\omega}$.

Nemůžeme použít mohutnostní argument, protože nevíme nic o vztahu $\mathrm{cf}(\tau^{\omega})$ a 2^{ω}. Zobrazení F je spojité zobrazení prostoru X do prostoru $\mathsf{X}_{n\in\omega} \omega_1$ a množina M, jakožto vzor jednobodové a tedy uzavřené množiny, je uzavřená v X. Pro $\varphi \in S$ je $O_\varphi = \{f \in X : \varphi \subset f\}$ otevřená množina v prostoru X. Množina $U = \bigcup\{O_\varphi : |O_\varphi \cap M| \leq \tau, \varphi \in S\}$ je otevřená a $M_0 = M \cap U$ má mohutnost nejvýše τ, protože $|S| = \tau$.

Jelikož $|M| \geq \tau^+$, je množina $M_1 = M - M_0 = M - U$ uzavřená v X a $|M_1| \geq \tau^+$. Uvažujme podstrom $T \subseteq S$, $T = \{f|n : f \in M_1, n \in \omega\}$. Topologická uzavřenost množiny M_1 je ekvivalentní s tím, že každá větev v T sestává z restrikcí nějaké funkce v M_1. Ve stromu T platí: pro každé $\varphi \in T$ a $n \in \omega$ existuje $\psi \in T$, $\psi \supseteq \varphi$ a ψ má alespoň τ_n bezprostředních následníků v T. Kdyby tomu tak nebylo, pak jednak z definice T existuje $f \in M_1$, $\varphi \subset f$ a jednak $|O_\varphi \cap M_1| \leq \tau_n^{\omega} < \tau$. To ovšem znamená, že i $|O_\varphi \cap M| \leq \tau$ a tedy $f \in U$, máme spor s tím, že $M_1 \cap U = 0$.

Ověřili jsme, že strom T je dokonale větvící se a z toho by již mělo být zřejmé, že větví v T musí být $\prod_{n\in\omega} \tau_n = \tau^{\omega}$. Tedy $|M| \geq |M_1| = \tau^{\aleph_0}$.

K dokončení důkazu označme $\beta = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$. Ověřujeme, že s je kompatibilní s alespoň $\tau^{\aleph_0}$ prvky β-té hladiny A_β. Pro $f \in M$ vyberme prvek $s_f \in P$ takový, že $s_f \leq s_{f|n}$ pro všechna $n \in \omega$, existence plyne z ω_1-uzavřenosti uspořádání P. Dále zvolme $a_f \in A_\beta$ tak, že a_f je kompatibilní s s_f. Pro různá $f, g \in M$ jsou prvky a_f, a_g disjunktní, protože $a_f \leq a_{f|n}$ pro každé $n \in \omega$, a pro nejmenší m takové, že $f(m) \neq g(m)$ jsou prvky $a_{f|m+1}$, $a_{g|m+1}$ disjunktní. Jelikož $s_f \leq s$, je s kompatibilní se všemi prvky a_f, $f \in M$. Konec důkazu.

Nyní je již nasnadě důkaz věty 1.29 pro $\varkappa > \mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$. Použijeme přirozené zobecnění McAloonovy věty IV.2.43: *Má-li úplná Booleova algebra B nějakou ω_1-uzavřenou hustou část mohutnosti λ a je všude $(\omega_1, \cdot, \lambda)$-nedistributivní, potom B je izomorfní s kolapsovou algebrou* $\mathrm{Col}(\omega_1, \lambda)$.

Víme, že $(Q, \subseteq^*)$ je ω_1-uzavřená podle 1.36(ii)(a), má hustou část H mohutnosti $\varkappa^{\aleph_0}$ podle 1.38. H je nutně také ω_1-uzavřená a podle 1.39 je všude $(\omega_1, \cdot, \varkappa^{\aleph_0})$-nedistributivní. Proto RO (Q) je izomorfní s $\mathrm{Col}(\omega_1, \varkappa^{\aleph_0})$. Tedy podle 1.36(i)(d) nalezneme $\mathrm{Col}(\omega_1, \varkappa^{\aleph_0})$ jako úplnou podalgebru zúplnění $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$.

Podívejme se na rozklady jednotky v kolapsové algebře $\mathrm{Col}(\omega_1, \tau)$, kde τ je daný kardinál. Existuje hustá část této algebry izomorfní s $H = {}^{<\omega_1}\tau$, kanonickému uspořádání algebry odpovídá prodloužení v H. Ztotožníme množinu H s touto hustou částí.

Pro $\alpha < \omega_1$, $\beta < \tau$ položme v algebře $\mathrm{Col}(\omega_1, \tau)$

$$u_{\alpha,\beta} = \bigvee\{f \in H : \alpha \in \mathrm{Dom}\,(f),\ f(\alpha) = \beta\}.$$

Dostáváme tak booleovskou matici typu (ω_1, τ), její řádky jsou rozklady jednotky. Navíc, je-li $f \in H$ a $\alpha < \omega_1$, $\alpha \notin \mathrm{Dom}\,(f)$, pak pro každé $\beta < \tau$ je $f \wedge u_{\alpha,\beta} \neq \mathbf{0}$. Jelikož H je hustá množina, dostáváme, že pro každé nenulové v existuje $\gamma < \omega_1$ takové, že pro každé α, $\gamma < \alpha < \omega_1$ a každé $\beta < \tau$ je $v \wedge u_{\alpha,\beta} \neq \mathbf{0}$.

Označíme-li $\tau = \varkappa^{\aleph_0}$, víme, že $\mathrm{Col}(\omega_1, \tau)$ je úplnou podalgebrou algebry $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$ s hustou částí $\{[X] : x \in [\varkappa]^\varkappa\}$. Z již popsané matice $\{u_{\alpha,\beta} : \alpha < \omega_1, \beta < \tau\}$ v $\mathrm{Col}(\omega_1, \tau)$ získáme MAD systémy požadované ve větě 1.29. Za $P_{\alpha,\beta}$ zvolme skoro disjunktní systém D na $\varkappa$, pro který v $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$ platí $u_{\alpha,\beta} = \bigvee\{[X] : X \in D\}$. Jelikož $\{u_{\alpha,\beta} : \beta < \tau\}$ je rozklad jednotky, je $P_\alpha = \bigcup\{P_{\alpha,\beta} : \beta < \tau\}$ maximální skoro disjunktní systém na $\varkappa$.

Mějme libovolné $X \in [\varkappa]^\varkappa$. $[X]$ je nenulový prvek v $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa) \subseteq \mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$. Uvažujme prvek $v = \bigwedge\{u : [X] \leq u \,\&\, u \in \mathrm{Col}(\omega_1, \tau)\}$. Tedy v je nejmenší prvek z podalgebry $\mathrm{Col}(\omega_1, \tau)$, který je nad $[X]$. Jelikož $v \neq \mathbf{0}$, existuje $\alpha < \omega_1$ takové, že $v \wedge u_{\alpha,\beta} \neq \mathbf{0}$ pro každé $\beta < \tau$. Potom také $[X] \wedge u_{\alpha,\beta} \neq \mathbf{0}$ pro každé $\beta < \tau$, neboť v opačném případě by pro některé $\beta < \tau$ bylo $v \leq -u_{\alpha,\beta}$, a to není možné z důvodu $v \wedge u_{\alpha,\beta} \neq \mathbf{0}$. To dokazuje, že pro každé $\beta < \tau$ existuje $A \in P_{\alpha,\beta}$, pro které $|A \cap X| = \varkappa$. Tím je věta o kolapsu pro singulár $\varkappa$ s $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$ dokázána.

1.41 Důsledek. Nechť $\varkappa$ je singulár s $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$ a platí $2^\varkappa = \varkappa^{\aleph_0}$ (například $\varkappa$ silně limitní). Potom $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$ je izomorfní s $\mathrm{Col}(\omega_1, 2^\varkappa)$. To plyne z toho, že hustá část $\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa)$ je ω_1-uzavřená, má mohutnost $2^\varkappa$ a algebra $\mathrm{cm}(\mathcal{P}_\varkappa(\varkappa))$ je všude $(\omega_1, \cdot, 2^\varkappa)$-nedistributivní, protože již její podalgebra $\mathrm{Col}(\omega_1, 2^\varkappa) \simeq \mathrm{RO}(Q_\varkappa)$ je všude $(\omega_1, \cdot, 2^\varkappa)$-nedistributivní.

Výsledek ve větě o kolapsu 1.29(iii) patří M. Kojmanovi a S. Shelahovi (Kojman, Shelah 2001). Uvedený důkaz se opírá o práci (Balcar, Simon 2001).

Dodatek 2. Mocniny singulárních kardinálů

V tomto dodatku uvedeme dva výsledky, týkající se odhadu mocnin kardinálních čísel. Prvním z nich je Shelahovo zobecnění Galvinovy a Hajnalovy věty i pro kardinály $\aleph_\delta$ se spočetnou kofinalitou. Je to obecnější formulace věty II.5.26. Druhým je fantastický velmi překvapující výsledek Shelahův, který je populární ve své nejjednodušší formulaci, je-li $\aleph_\omega$ silně limitní, pak

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}.$$

Je vskutku číslo 4 to magické číslo, pro které nelze odhad zlepšit? To se doposud neví.

2.1 Věta. *Je-li δ limitní ordinál a μ je kardinální číslo menší než $\aleph_\delta$, potom*

$$\aleph_\delta^\mu < \aleph_{(|\delta|^\mu)^+}.$$

2.2 Věta. *Je-li δ limitní ordinál, potom*

$$\aleph_\delta^{|\delta|} < \max\{\aleph_{|\delta|^{+4}}, (2^{|\delta|})^+\}.$$

Speciálně platí

$$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \rightarrow \aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}.$$

Důkazy těchto tvrzení se opírají o takzvanou pcf teorii, neboli teorii možných kofinalit redukovaných součinů malých množin regulárních kardinálů, kterou vyvinul S. Shelah. Základní myšlenky této teorie a snad i její krásu a sílu ukážeme na demonstraci věty 2.1. Pro technickou náročnost neuvádíme důkaz věty 2.2, čtenáře odkazujeme na učebnici (Holz et al. 1999) a nejnovější přehledový článek U. Abrahama a M. Magidora (2001).

2.3 Důsledky. (i) *Je-li* $\aleph_\delta$ *silně limitní singulární kardinál, potom*

$$2^{\aleph_\delta} < \aleph_{(2^{|\delta|})^+}.$$

(ii) *Je-li* $\aleph_\omega$ *silně limitní kardinální číslo, potom*

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4} \textit{ a přitom } 2^{\aleph_\omega} \textit{ je regulární kardinál.}$$

(iii) *Je-li* $\aleph_\omega$ *silně limitní a platí CH, pak*

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_2}.$$

Důkaz. (i) Víme podle II.5.19, že pro silně limitní $\aleph_\delta$ je

$$2^{\aleph_\delta} = \aleph_\delta^{\mathrm{cf}(\aleph_\delta)} = \aleph_\delta^{\mathrm{cf}(\delta)}.$$

Tedy podle věty 2.1 je

$$2^{\aleph_\delta} < \aleph_{(|\delta|^{\mathrm{cf}(\delta)})^+} \leq \aleph_{(2^{|\delta|})^+}.$$

(ii) Silně limitní $\aleph_\omega$ znamená, že $2^{\aleph_\omega} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$, a to podle věty 2.2 je

$$2^{\aleph_\omega} < \max\{\aleph_{\omega_4}, (2^\omega)^+\} = \aleph_{\omega_4},$$

protože $(2^\omega)^+ < \aleph_\omega$. Jelikož podle II.5.17 je $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\omega}) > \aleph_\omega$ a $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$ a všechny singulární kardinály $\varkappa < \aleph_{\omega_4}$ mají kofinalitu nejvýše $\aleph_3 < \aleph_\omega$, musí $2^{\aleph_\omega}$ být regulární.

(iii) Je-li navíc $2^\omega = \omega_1$, je podle (i)

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^\omega)^+} = \aleph_{\omega_2}.$$

2.4 Příklad. Pro každý ordinál $\alpha < (2^{\aleph_0})^+$ platí

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}.$$

Abychom to dokázali, položme $\delta = \alpha + \omega$, potom δ je limitní ordinál a $|\delta|^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Z věty 2.1 pak plyne

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} \leq \aleph_\delta^{\aleph_0} < \aleph_{(|\delta|^{\aleph_0})^+} \leq \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}.$$

2.5 Poznámka. Pro silně limitní kardinál $\aleph_\omega$ je dán odhad $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$. Můžeme se ptát, jaké byly získány výsledky o bezespornosti pro mocninu $2^{\aleph_\omega}$. Magidor získal první výsledky o bezespornosti za pomoci superkompaktního kardinálu. Ukázal, že je bezesporné předpokládat $2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega+1}$ pro silně limitní $\aleph_\omega$ a také bezespornost $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$ při zachování zobecněné hypotézy kontinua pod $\aleph_\omega$. Tento výsledek zlepšil Shelah až na hodnoty $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\alpha+1}$ pro libovolné $\alpha < \omega_1$. Není známo, zda $2^{\aleph_\omega}$ může nabýt hodnoty větší než $\aleph_{\omega_1}$.

Od této chvíle se budeme zabývat technikami, vedoucími k důkazu věty 2.1.

2.6 Redukce věty 2.1. Ukážeme, že stačí dokázat toto slabší tvrzení.

(*) Je-li γ limitní ordinál a pro všechna $\beta < \gamma$ je $\aleph_\beta^{\mathrm{cf}(\gamma)} < \aleph_\gamma$,
pak $\aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\gamma)} < \aleph_{(|\gamma|^{\mathrm{cf}(\gamma)})^+}$.

Nechť δ je limitní ordinál a $\mu < \aleph_\delta$. Pokud $\aleph_\delta^\mu = \aleph_\delta$, tvrzení věty je triviálně splněno, neboť funkce $\aleph$ je rostoucí a $\delta < |\delta|^+ \leq (|\delta|^\mu)^+$. Budeme tedy nadále předpokládat, že $\aleph_\delta^\mu > \aleph_\delta$. Nutně $\mu \geq \aleph_0$.

Buď $\varrho \leq \delta$ nejmenší ordinál, pro který platí $\aleph_\varrho^\mu \geq \aleph_\delta$. Všimněme si, že z nerovností $\aleph_\varrho^\mu \geq \aleph_\delta$ a $\delta \geq \varrho$ okamžitě plyne $\aleph_\varrho^\mu = \aleph_\delta^\mu$, protože $\aleph_\varrho^\mu = (\aleph_\varrho^\mu)^\mu \geq \aleph_\delta^\mu \geq \aleph_\varrho^\mu$.

Pokud $\aleph_\varrho \leq \mu$, pak $\aleph_\varrho^\mu = 2^\mu$ a z minimality ϱ máme $\varrho = 0$. Tvrzení věty pak vyplývá snadno z faktu, že $\alpha \leq \aleph_\alpha$, neboť $\aleph_\delta^\mu = \aleph_\varrho^\mu = 2^\mu < (2^\mu)^+ \leq (|\delta|^\mu)^+ \leq \aleph_{(|\delta|^\mu)^+}$. Tvrzení (*) jsme v tomto případě vůbec nepotřebovali.

Pokud $\aleph_\varrho > \mu$, musí být $\varrho > 0$, protože $\mu \geq \aleph_0$. Z minimality ϱ dostáváme, že $\aleph_\beta^\mu < \aleph_\varrho$ pro všechna $\beta < \varrho$, což podle věty II.5.29 vylučuje možnost, že by ϱ bylo izolovaným ordinálním číslem, stejně jako možnost, že by ϱ bylo limitním ordinálem a současně $\mu < \mathrm{cf}(\aleph_\varrho)$. Avšak v situaci $\mathrm{cf}(\aleph_\varrho) \leq \mu < \aleph_\varrho$ víme, že $\aleph_\beta^\mu < \aleph_\varrho < \aleph_\varrho^\mu$ pro $\beta < \varrho$ a tedy případ (iv)(a) věty II.5.29 rovněž nenastává.

Zbývá druhá alternativa Bukovského formule, což v našem případě znamená $\aleph_\varrho^\mu = \aleph_\varrho^{\mathrm{cf}(\varrho)}$. Současně máme $\mathrm{cf}(\varrho) = \mathrm{cf}(\aleph_\varrho) \leq \mu$ a jelikož $\aleph_\beta^\mu < \aleph_\varrho$, je i $\aleph_\beta^{\mathrm{cf}(\varrho)} < \aleph_\varrho$ pro všechna $\beta < \varrho$. Můžeme tedy při volbě $\gamma = \varrho$ použít (*) a dostáváme, že $\aleph_\varrho^{\mathrm{cf}(\varrho)} < \aleph_{(|\varrho|^{\mathrm{cf}(\varrho)})^+}$, a tedy

$$\aleph_\delta^\mu = \aleph_\varrho^\mu = \aleph_\varrho^{\mathrm{cf}(\varrho)} < \aleph_{(|\varrho|^{\mathrm{cf}(\varrho)})^+} \leq \aleph_{(|\delta|^\mu)^+},$$

kde poslední nerovnost je důsledkem nerovností $\varrho \leq \delta$ a $\mathrm{cf}(\varrho) = \mathrm{cf}(\aleph_\varrho) \leq \mu$. Ověřili jsme, že věta 2.1 plyne z (*).

2.7 Ordinální funkce a ultraprodukt. Nechť A je neprázdná množina a U je ultrafiltr na A. Ordinální funkcí rozumíme jakékoli zobrazení s hodnotami v ordinálních číslech.

Definice. Pro funkce f, g definované na A s hodnotami v On položme

$f =_U g$, jestliže $\{a \in A : f(a) = g(a)\} \in U$,
$f \leq_U g$, jestliže $\{a \in A : f(a) \leq g(a)\} \in U$,
$f <_U g$, jestliže $\{a \in A : f(a) < g(a)\} \in U$.

Relace $=_U$ je ekvivalence, protože U je filtr. Pro libovolnou množinu $S \subseteq {}^A On$ symbolem S/U značíme faktorizaci množiny S podle ekvivalence $=_U$. Z toho, že U je ultrafiltr plyne, že $\leq_U$ je lineární kvaziuspořádání na S, neboť pro libovolné funkce f, g jsou množiny $\{a \in A : f(a) = g(a)\}$, $\{a \in A : f(a) < g(a)\}$, $\{a \in A : g(a) < f(a)\}$ vzájemně disjunktní, pokrývají celé A a právě jedna z nich leží v U, tedy buď $f =_U g$, nebo $f <_U g$, nebo $g <_U f$. Tedy $\leq_U$ je lineární uspořádání na třídách ekvivalence.

Libovolná množina $S \subseteq {}^A On$ a ultrafiltr U na A určuje jednoznačně kardinální číslo, a to kofinalitu lineárně uspořádané množiny $(S/U, \leq_U)$, značené obvykle $\mathrm{cf}_U(S)$. Tedy $\mathrm{cf}_U(S)$ je nejmenší kardinální číslo $\varkappa$ takové, že existuje soubor $\langle f_\alpha : \alpha < \varkappa \rangle$ funkcí z S takový, že pro $\alpha < \beta < \varkappa$ je $f_\alpha <_U f_\beta$ a pro každé $g \in S$ existuje $\alpha < \varkappa$ splňující $g \leq_U f_\alpha$. Z linearity uspořádání $(S/U, \leq_U)$ plyne, že $\mathrm{cf}_U(S)$ je regulární kardinální číslo.

2.8 Příklad. (i) Uvažujme množinu $S = {}^\omega\omega$ všech posloupností přirozených čísel. Je-li U triviální ultrafiltr, to znamená, že obsahuje nějaký singleton $\{k\}$, pak $\mathrm{cf}_U(S) = \omega$. Je-li U netriviální ultrafiltr, pak $\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathrm{cf}_U(S) \leq 2^\omega$, kde $\mathfrak{b}$ je charakteristika zavedená v Dodatku 1, 1.12. Nepřekvapí, že konzistentně mohou existovat různé netriviální ultrafiltry U, V na ω, pro které $\mathrm{cf}_U(S) \neq \mathrm{cf}_V(S)$.

(ii) Nechť $S = \times_{n \in \omega} \omega_n$. Zřejmě $\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n : n \in \omega\}$. Pro libovolný netriviální ultrafiltr U na ω má ultraprodukt S/U maximální možnou mohutnost $\aleph_\omega^{\aleph_0}$, protože existuje $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ skoro všude různých funkcí v S. Snadno ověříme, že $\mathrm{cf}_U(S) > \aleph_\omega$. Shelah ukázal, že vždy existuje ultrafiltr U na ω, pro který $\mathrm{cf}_U(S) = \aleph_{\omega+1}$.

2.9 Cesta za důkazem tvrzení 2.6 (*). Nejprve vyloučíme triviální případ. Všimněme si, že (*) je tvrzení o singulárních kardinálech, protože z předpokladu na $\aleph_\gamma$ plyne $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) = \mathrm{cf}(\gamma) < \aleph_\gamma$. Funkce $\aleph$ je nejen rostoucí, ale i spojitá, proto má mnoho singulárních kardinálů jako pevné body. Pro takové singuláry tvrzení (*) nic nového neříká. Pokud totiž nastává rovnost $\gamma = \aleph_\gamma$, pak máme $\aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\gamma)} = |\gamma|^{\mathrm{cf}(\gamma)} < (|\gamma|^{\mathrm{cf}(\gamma)})^+ \leq \aleph_{(|\gamma|^{\mathrm{cf}(\gamma)})^+}$. Proto budeme nadále předpokládat, že $\gamma < \aleph_\gamma$ a uvědomíme si, že máme tedy také $|\gamma|^{\mathrm{cf}(\gamma)} < \aleph_\gamma$.

Začneme značením. Položme $\lambda = \mathrm{cf}(\gamma)$ a $A = \{\nu : \nu$ je regulární kardinál, $|\gamma|^\lambda < \nu < \aleph_\gamma\}$. A je množina nekonečných regulárních kardinálů, kofinální v $\aleph_\gamma$, $\lambda \leq |A| \leq |\gamma|$, která má tyto dvě vlastnosti:

(i) $|A| < \min A$, jinými slovy, A je progresivní,

(ii) A je interval, to znamená, že obsahuje každé regulární τ takové, že $\min A \leq \tau < \sup A$.

Nyní uvažujme množinu funkcí $S = \times A = \times\{\nu : \nu \in A\}$. Pro ultrafiltr U na A označíme $\mathrm{tcf}(U)$ kofinalitu lineárního uspořádání $(S/U, \leq_U)$. Zajímají nás některé ultrafiltry na A. Pro $M \subseteq A$ budeme symbolem $\mathrm{Ult}(M)$ značit ultrafiltry na A obsahující množinu M. Množinu všech ultrafiltrů U na A takových, že existuje $M \in U$ o mohutnosti $|M| \leq \lambda$, budeme značit $\mathrm{Ult}(A, \lambda)$. Položíme

$$\mathrm{pcf}(A) = \{\mathrm{tcf}(U) : U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)\}.$$

Poznamenejme, že v literatuře je takto zavedený pojem uváděn jako $\mathrm{pcf}_\lambda(A)$.

Pro pohodlí budeme raději pracovat s kvaziuspořádáním $(\times A, \leq_U)$ než s faktorizací $(\times A/U, \leq_U)$, protože jejich kofinality jsou stejné.

Pro ultrafiltr U na A

$$\lim U = \min\{\sup X : X \in U\}.$$

Pokud $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$ a $\lim U < \aleph_\gamma$, pak z předpokladů na kardinál $\aleph_\gamma$ je zřejmé, že $|S/U| < \aleph_\gamma$, a tedy také $\mathrm{tcf}(U) < \aleph_\gamma$. Nepřekvapí proto, že nás budou nejvíce zajímat ultrafiltry s $\lim U = \aleph_\gamma$. Pro takové ultrafiltry je vždy $\mathrm{tcf}(U) > \aleph_\gamma$, neboť $\mathrm{tcf}(U)$ je regulární kardinál a nemůže být menší než $\aleph_\gamma$.

Všimněme si, že $A \subseteq \mathrm{pcf}(A)$, což zabezpečují triviální ultrafiltry na A.

Důkaz (*) nyní vyplyne z těchto tří vlastností množiny $\mathrm{pcf}(A)$:

(a) $|\mathrm{pcf}(A)| \leq |\gamma|^\lambda$,
(b) $\mathrm{pcf}(A)$ je interval,
(c) $\sup \mathrm{pcf}(A) = \aleph_\gamma^\lambda$.

Vskutku, podle (b), množina $\mathrm{pcf}(A)$ obsahuje všechny regulární kardinály mezi $\aleph_\gamma$ a $\sup \mathrm{pcf}(A)$. Protože množina všech regulárních kardinálů mezi $\aleph_\gamma$ a $\aleph_{(|\gamma|^\lambda)^+}$ má mohutnost $(|\gamma|^\lambda)^+$, musí být podle (a) $\mathrm{pcf}(A) \subset \aleph_{(|\gamma|^\lambda)^+}$, a proto i $\sup \mathrm{pcf}(A) < \aleph_{(|\gamma|^\lambda)^+}$. Nyní z (c) plyne, že $\aleph_\gamma^\lambda \leq \sup \mathrm{pcf}(A) < \aleph_{(|\gamma|^\lambda)^+}$, což jsme měli dokázat.

Zbývá ukázat, že $\mathrm{pcf}(A)$ má vlastnosti (a), (b) a (c), což provedeme postupně ve větách 2.12, 2.17 a poslední vlastnost (c) rozdělíme na případ nespočetné kofinality, věta 2.22, a speciální případ spočetné kofinality je řešen větou 2.28.

2.10 Lemma. *Je-li $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$ a množina funkcí $H \subseteq \times A$ nemá horní mez v uspořádání $(\times A, \leq_U)$, pak existuje množina $M \in U$ taková, že pro všechny ultrafiltry $V \in \mathrm{Ult}(M)$ je H neomezená také v $(\times A, \leq_V)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že tomu tak není. Zvolme množinu $L \in U$ takovou, že $|L| \leq \lambda$. Pro každé $X \subseteq L$, $X \in U$, existuje ultrafiltr $V(X) \in \mathrm{Ult}(X)$, který je protipříkladem na tvrzení lemmatu. To znamená, že v kvaziuspořádání $(\mathsf{X} A, \leq_{V(X)})$ existuje horní mez f_X množiny H. Protože $|\mathcal{P}(L)| = 2^{|L|} \leq 2^{\lambda}$ a protože každé $\nu \in A$ je regulární kardinál splňující $\nu > 2^{\lambda}$, je $\sup\{f_X(\nu) : X \subseteq L, X \in U\} < \nu$, a tedy funkce f, definovaná předpisem $f(\nu) = \sup\{f_X(\nu) : X \subseteq L, X \in U\}$ pro $\nu \in A$, je prvkem množiny $\mathsf{X} A$.

Ověříme, že funkce f je $\leq_U$-horní mezí množiny H, a to bude ve sporu s předpokladem lemmatu. Zvolme $g \in H$ libovolně. Je-li $X \subseteq L$ a $X \in U$, pak množina $Y(X) = \{\nu \in X : g(\nu) \leq f_X(\nu)\} \in V(X)$, protože f_X je horní mezí množiny H v kvaziuspořádání $\leq_{V(X)}$, přitom zřejmě $Y(X) \subseteq \{\nu \in X : g(\nu) \leq f(\nu)\}$. Položme $M = \bigcup\{Y(X) : X \subseteq L \,\&\, X \in U\}$.

Ukážeme, že $M \in U$. Kdyby tomu tak nebylo, muselo by být $L - M \in U$, jenže $Y(L-M) \in V(L-M)$, tedy $Y(L-M)$ je neprázdná podmnožina množiny $L - M$ a současně částí M, což není možné. Z definice funkce f teď dostáváme, že pro každé $\nu \in M$ je $f(\nu) \geq g(\nu)$, tedy $g \leq_U f$, a to je hledaný spor.

2.11 Důsledek. *Pro každé* $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$ *existuje množina* $M \in U$ *taková, že pro všechny ultrafiltry* $V \in \mathrm{Ult}(M)$ *je* $\mathrm{tcf}(V) \leq \mathrm{tcf}(U)$.

Důkaz. Stačí zvolit množinu $H \subseteq \mathsf{X} A$, která má mohutnost $\mathrm{tcf}(U)$ a je kofinální v $(\mathsf{X} A, \leq_U)$. Podle 2.10 existuje $M \in U$ taková, že pro $V \in \mathrm{Ult}(M)$ je H neomezená v $(\mathsf{X} A, \leq_V)$. Dostáváme $\mathrm{tcf}(V) \leq |H| = \mathrm{tcf}(U)$.

Nyní už snadno dokážeme (a).

2.12 Věta. $|\mathrm{pcf}(A)| \leq |\gamma|^{\lambda}$.

Důkaz. Pro každé $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$ zafixujme ultrafiltr $U_\tau \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$, pro který platí $\mathrm{tcf}(U_\tau) = \tau$. Podle 2.10 existuje $M_\tau \in U_\tau$ tak, že $|M_\tau| \leq \lambda$ a pro každý ultrafiltr $V \in \mathrm{Ult}(M_\tau)$ je $\mathrm{tcf}(V) \leq \tau$. Získali jsme tak zobrazení $\varphi : \mathrm{pcf}(A) \longrightarrow [A]^{\leq\lambda}$. Toto zobrazení je prosté, neboť pro $\tau, \tau' \in \mathrm{pcf}(A)$, $\tau < \tau'$, musí být $M_\tau \neq M_{\tau'}$, jinak by $\tau' \leq \tau$. Jelikož množina A má mohutnost $\leq |\gamma|$, je $|[A]^{\leq\lambda}| \leq |\gamma|^{\lambda}$, a tedy i $|\mathrm{pcf}(A)| \leq |\gamma|^{\lambda}$.

Chceme se přesvědčit, že $\mathrm{pcf}(A)$ je interval.

2.13 Definice. Buď $U \in \mathrm{Ult}(A)$, τ regulární kardinál, $\langle f_\alpha : \alpha < \tau\rangle$ $<_U$-rostoucí posloupnost funkcí v $\mathsf{X} A$ a $\varkappa < \aleph_\gamma$ nekonečný regulární kardinál. Řekneme, že posloupnost $\langle f_\alpha : \alpha < \tau\rangle$ je aproximována $\varkappa$-malým podsoučinem, pokud existují množiny $S_\nu \subseteq \nu$ $(\nu \in A)$ takové, že $|S_\nu| < \varkappa$ pro všechna $\nu \in A$ a pro každé $\alpha < \tau$ existují $\beta > \alpha$ a $h \in \mathsf{X}_{\nu \in A} S_\nu$ tak, že $f_\alpha <_U h <_U f_\beta$.

Následující dvě lemmata, vedoucí k důkazu (b), dávají kritérium k rozpoznání, kdy má rostoucí posloupnost funkcí v $(\mathsf{X} A, \leq_U)$ supremum.

2.14 Lemma. *Buďte $U \in \mathrm{Ult}(A)$, τ, $\varkappa$ regulární kardinální čísla splňující $|A|^+ = \varkappa$ a $\varkappa < \tau < \mathrm{tcf}(U)$. Není-li $<_U$-rostoucí posloupnost funkcí délky τ v $\mathsf{X}\, A$ aproximována $\varkappa$-malým podsoučinem, pak má supremum v $(\mathsf{X}\, A, \leq_U)$.*

Důkaz. Zvolme posloupnost $\langle f_\alpha : \alpha < \tau \rangle$ v $\mathsf{X}\, A$, pro niž platí $f_\alpha <_U f_\beta$, jakmile $\alpha < \beta < \tau$. Jelikož $\mathrm{tcf}(U) > \tau$, existuje nějaká $\leq_U$-horní mez této posloupnosti, řekněme h_0. Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že pro všechna $\alpha < \tau$ a $\nu \in A$ je $f_\alpha(\nu) \leq h_0(\nu)$, neboť $\min\{f_\alpha, h_0\} =_U f_\alpha$. Pokud je h_0 supremum naší posloupnosti, jsme hotovi.

V opačném případě budeme transfinitní rekurzí do $\varkappa$ nacházet stále menší horní meze a v nějakém kroku buď nalezneme supremum, nebo $\varkappa$-malý podsoučin, který aproximuje posloupnost $\langle f_\alpha : \alpha < \tau \rangle$. Buď $\xi < \varkappa$ a předpokládejme, že již známe horní mez h_ξ. Pokud je h_ξ supremem, rekurze končí. V opačném případě existuje $\leq_U$-horní mez $h_{\xi+1}$, pro kterou platí $h_{\xi+1} <_U h_\xi$ a opět smíme požadovat, aby $h_{\xi+1}(\nu) \leq h_\xi(\nu)$ pro všechna $\nu \in A$.

Pro $\xi < \varkappa$ limitní, pokud již byly funkce h_η pro $\eta < \xi$ nalezeny, známe pro každé $\nu \in A$ všechny hodnoty $h_\eta(\nu)$, $\eta < \xi$. Položme $S_{\nu,\xi} = \{h_\eta(\nu) : \eta < \xi\}$, máme $S_{\nu,\xi} \subseteq \nu$ a $|S_{\nu,\xi}| \leq |\xi| < \varkappa$. Pro $\alpha < \tau$ zvolme nejlepší horní aproximaci funkce f_α v součinu $\mathsf{X}_{\nu \in A}\, S_{\nu,\xi}$, kterou je zřejmě funkce $g_{\alpha,\xi}$ definovaná předpisem

$$g_{\alpha,\xi}(\nu) = \min\{\delta \in S_{\nu,\xi} : \delta \geq f_\alpha(\nu)\}.$$

Všimněme si, že pro $\eta < \xi$ je $h_\eta \in \mathsf{X}_{\nu \in A}\, S_{\nu,\xi}$ a $f_\alpha <_U h_\eta$. Proto $g_{\alpha,\xi} \leq_U h_\eta$ pro všechna $\alpha < \tau$ a $\eta < \xi$. Protože je ξ limitní ordinál, je dokonce $g_{\alpha,\xi} <_U h_\eta$, neboť $g_{\alpha,\xi} \leq_U h_{\eta+1} <_U h_\eta$. Dále, pro $\alpha < \beta < \tau$ je $f_\alpha <_U f_\beta$ a tudíž $g_{\alpha,\xi} \leq_U g_{\beta,\xi}$.

Nyní mohou nastat dvě možnosti.

(i) Existuje $\alpha(\xi) < \tau$ tak, že $g_{\alpha(\xi),\xi} =_U g_{\alpha,\xi}$ pro všechna $\alpha \geq \alpha(\xi)$, $\alpha < \tau$. V tomto případě položme $h_\xi = g_{\alpha(\xi),\xi}$ a zřejmě máme další horní mez dané posloupnosti, která je $<_U$-menší než všechny předchozí.

(ii) Pro každé $\alpha < \tau$ existuje $\beta < \tau$, $\beta > \alpha$, takové, že $g_{\alpha,\xi} <_U g_{\beta,\xi}$. Pak však součin $\mathsf{X}_{\nu \in A}\, S_{\nu,\xi}$ aproximuje posloupnost $\langle f_\alpha : \alpha < \tau \rangle$. Jsou-li totiž $\alpha < \overline{\alpha} < \beta < \tau$ takové, že $g_{\alpha,\xi} <_U g_{\overline{\alpha},\xi} <_U g_{\beta,\xi}$, pak $f_\alpha \leq_U g_{\alpha,\xi} <_U f_{\overline{\alpha}} \leq_U g_{\overline{\alpha},\xi} <_U f_\beta$. Tedy $f_\alpha <_U g_{\overline{\alpha},\xi} <_U f_\beta$ a zřejmě $g_{\overline{\alpha},\xi} \in \mathsf{X}_{\nu \in A}\, S_{\nu,\xi}$. V tomto případě rekurze končí, poněvadž jsme zjistili, že uvažovaná posloupnost je aproximována $\varkappa$-malým podsoučinem.

Lemma bude dokázáno, jestliže ověříme, že transfinitní rekurze nemůže proběhnout všech $\varkappa$ kroků. To ukážeme sporem. Předpokládejme, že jsme pro každé $\xi < \varkappa$ našli popsaným způsobem horní mez h_ξ. Posloupnost $\langle h_\xi : \xi < \varkappa \rangle$ je $<_U$-klesající. Pro všechna limitní $\xi < \varkappa$ jsme nalezli $\alpha(\xi) < \tau$. Jelikož $\tau > \varkappa$ a τ je regulární, je $\overline{\alpha} = \sup\{\alpha(\xi) : \xi$ limitní, $\xi < \varkappa\} < \tau$. Z konstrukce plyne, že pro každé limitní $\xi < \varkappa$ nastal případ (i) a tedy $g_{\overline{\alpha},\xi} =_U h_\xi$, a co je podstatné, pro $\xi_1 < \xi_2$, obě limitní, je $g_{\overline{\alpha},\xi_1} \geq g_{\overline{\alpha},\xi_2}$ všude na A.

Pišme g_ξ místo $g_{\overline{\alpha},\xi}$.

Pro každé $\nu \in A$ se nerostoucí posloupnost ordinálních čísel $\{g_\xi(\nu) : \xi$ limitní, $\xi < \varkappa\}$ někde stabilizuje, to znamená, že pro nějaké $\xi(\nu) < \varkappa$ je $g_{\xi(\nu)}(\nu) = \min\{g_\xi(\nu) :$ limitní $\xi < \varkappa\}$. Jelikož $\varkappa$ je regulární a $|A| < \varkappa$, je $\overline{\xi} = \sup\{\xi(\nu) : \nu \in A\} < \varkappa$. Ale pro ξ limitní, $\xi > \overline{\xi}$, pro nějaké $\nu \in A$ je $g_\xi(\nu) < g_{\overline{\xi}}(\nu)$, protože $g_\xi <_U g_{\overline{\xi}}$, a to je spor s definicí čísla $\overline{\xi}$. Tímto sporem je důkaz lemmatu ukončen.

2.15 Poznámka. Všimněme si, že předchozí lemma platí pro libovolný ultrafiltr U na libovolné množině A regulárních kardinálů. Stejná poznámka ohledně množiny A platí i pro následující lemma.

2.16 Lemma. *Je-li* $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$ *a* τ *regulární kardinál,* $(|A|^\lambda)^+ \leq \tau < \mathrm{tcf}(U)$, *pak každá* $<_U$*-rostoucí posloupnost funkcí v* $\mathsf{X}\, A$ *délky* τ *má supremum v kvazi-uspořádání* $(\mathsf{X}\, A, <_U)$.

Důkaz. Je zřejmé, že $|A|^\lambda \geq 2^\lambda \geq \lambda^+$. Položíme-li $\varkappa = \lambda^+$, pak $\varkappa < \tau$ a pro $M \in U$, $|M| \leq \lambda$, můžeme aplikovat předchozí lemma 2.14 pro ultrafiltr $U_0 = U \cap \mathcal{P}(M)$ na M. Nechť $\langle f_\alpha : \alpha < \tau \rangle$ je $<_U$-rostoucí posloupnost v $\mathsf{X}\, A$. Potom $f = \langle f_\alpha | M : \alpha < \tau \rangle$ je $<_{U_0}$-rostoucí posloupnost v $\mathsf{X}\, M$ a $\mathrm{tcf}(U_0) = \mathrm{tcf}(U)$. Posloupnost f nemůže být aproximována žádným $\varkappa$-malým podsoučinem $\langle S_\nu : \nu \in M \rangle$, protože $|\mathsf{X}_{\nu \in M} S_\nu| \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda < \tau$ a tedy je k dispozici málo funkcí pro aproximaci rostoucí posloupnosti délky τ.

Posloupnost f má proto supremum v $(\mathsf{X}\, M, \leq_{U_0})$, označme jej h. Libovolné rozšíření funkce h do funkce v $\mathsf{X}\, A$ je supremem výchozí posloupnosti vůči $\leq_U$.

2.17 Věta. $\mathrm{pcf}(A)$ *je interval.*

Důkaz. Jelikož množina A je počátečním úsekem $\mathrm{pcf}(A)$ a sama je intervalem, stačí ukázat, že pro regulární kardinály τ a τ', $\aleph_\gamma < \tau < \tau'$, pokud je $\tau' \in \mathrm{pcf}(A)$, pak také $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$.

Zvolme ultrafiltr $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$ tak, aby platilo, že $\tau' = \mathrm{tcf}(U)$. Víme, že existuje $<_U$-rostoucí posloupnost $\langle f_\alpha : \alpha < \tau' \rangle$, kofinální v $(\mathsf{X}\, A, \leq_U)$. Jelikož $|A|^\lambda < \aleph_\gamma < \tau$, podle 2.16 existuje supremum h počátečního úseku $\langle f_\alpha : \alpha < \tau \rangle$ v $(\mathsf{X}\, A, \leq_U)$.

Pro funkci h musí množina $\{\nu \in A : h(\nu)$ limitní $\}$ ležet v U, můžeme proto předpokládat, že všechna čísla $h(\nu)$ jsou limitní. Funkce f_α, $\alpha < \tau$, nebo jejich modifikace na množinách neležících v U, zaručují $\mathrm{cf}(\mathsf{X}_{\nu \in A}\, h(\nu), \leq_U) = \tau$.

Mělo by být zřejmé, že se pro ordinální funkce kofinalita ultraproduktu nemění přechodem k ultraproduktu kofinalit, jinými slovy,

$$\mathrm{cf}(\mathop{\mathsf{X}}_{\nu \in A} h(\nu), \leq_U) = \mathrm{cf}(\mathop{\mathsf{X}}_{\nu \in A} \mathrm{cf}(h(\nu)), \leq_U).$$

Položme $g(\nu) = \mathrm{cf}(h(\nu))$ pro $\nu \in A$. Jelikož $g(\nu)$ je regulární kardinál $\leq \nu$ a $\mathrm{cf}(\mathsf{X}_{\nu\in A}\, g(\nu), \leq_U) = \tau > \aleph_\gamma$, je pro každé $\xi < \aleph_\gamma$ množina $\{\nu \,.\, g(\nu) \in A, g(\nu) > \xi\} \in U$, to proto, že $|\xi|^\lambda < \aleph_\gamma$ a $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$. Můžeme tedy předpokládat, že pro každé $\nu \in A$ je $g(\nu) \in A$. Položíme-li $V = \{X \subseteq A : g^{-1}[X] \in U\}$, je V ultrafiltr na A. Dále, $V \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$, protože $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$ a pro $M \in U$, $|M| \leq \lambda$, je $g[M] \in V$ a $|g[M]| \leq \lambda$.

Zbývá ověřit, že $\mathrm{tcf}(V) = \tau$. Zafixujme $M \in U$, $|M| = \lambda$. Funkce g určuje rozklad množiny M na obory konstantnosti $\{g^{-1}(\mu) : \mu \in g[M]\}$. Pro libovolné $d \in \mathsf{X}_{\nu\in A}\, g(\nu)$ definujme modifikovanou funkci $\overline{d}$ takto. Pro $\nu \in M$ položme $\overline{d}(\nu) = \sup d[g^{-1}\{g(\nu)\}]$ a pro $\nu \in A - M$ nechť $\overline{d}(\nu) = d(\nu)$. Funkce $\overline{d}$ opět leží v $\mathsf{X}_{\nu\in A}\, g(\nu)$, $d \leq \overline{d}$ všude a $\overline{d}$ je konstantní na každé množině $g^{-1}(\mu)$, $\mu \in g[M]$.

Modifikované funkci $\overline{d}$ přiřadíme funkci $\varphi(\overline{d}) \in \mathsf{X} A$ tak, že pro $\mu = g(\nu)$, $\nu \in M$, položíme $\varphi(\overline{d})(\mu) = \overline{d}(\nu)$, pro zbývající μ může být hodnota zvolena libovolně. Je zřejmé, že pro modifikované funkce $\overline{d_1}, \overline{d_2}$, je $\overline{d_1} \leq_U \overline{d_2}$, právě když $\varphi(\overline{d_1}) \leq_V \varphi(\overline{d_2})$. Odtud plyne, že $\mathrm{tcf}(V) = \tau$. Tedy $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$ a věta je dokázána.

Přecházíme k nejzávažnějšímu bodu (c). Je jasné, že $\sup \mathrm{pcf}(A) \leq \aleph_\gamma^\lambda$, protože o $\mathrm{tcf}(U)$ pro $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$ rozhoduje nejvýše $\aleph_\gamma^\lambda$ funkcí. Podstata je tedy v nerovnosti opačné. Budeme se zabývat dvěma technikami spadajícími do pcf teorie. První používá fundované relace a skoro všude různé funkce a je použitelná pro případ nespočetného λ. Druhá používá dominující systémy funkcí, báze ideálů a použijeme ji pro případ $\lambda = \omega$.

2.18 Rozšíření značení. Nechť $\mathcal{I}$ je ideál na množině X. Pro ordinální funkce f, g definované na X položme

$f \leq_{\mathcal{I}} g$, jestliže $\{x \in X : f(x) > g(x)\} \in \mathcal{I}$,

$f <_{\mathcal{I}} g$, jestliže $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{I}$.

Je-li $\mathcal{I}$ maximální ideál na X, pak duální filtr U k $\mathcal{I}$ je ultrafiltr. V tomto případě právě zavedená relace $\leq_{\mathcal{I}}$ a relace $\leq_U$ z 2.7 splývají.

2.19 Lemma. *Je-li $\mathcal{I}$ σ-úplný ideál na X, potom $<_{\mathcal{I}}$ je fundovaná relace na ${}^X On$.*

Důkaz. Stačí ukázat, že neexistuje nekonečná posloupnost $f_0 >_{\mathcal{I}} \cdots f_n >_{\mathcal{I}} f_{n+1} \cdots$ funkcí. V opačném případě máme pro $n \in \omega$ množiny $Y_n = \{x \in X : f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\} \in \mathcal{I}$, a tedy ze σ-úplnosti je také $Y = \bigcup\{Y_n : n \in \omega\} \in \mathcal{I}$. Jelikož $X \notin \mathcal{I}$, je $X - Y \neq 0$. Pro $x \in X - Y$ bychom měli nekonečný regres $f_0(x) > \cdots > f_n(x) > \cdots$ v ordinálních číslech, což je nemožné.

2.20 Skoro všude různé funkce. Nechť X je nekonečná množina a $\mathcal{I}$ ideál na X. Funkce f, g jsou $\mathcal{I}$-různé, jestliže $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{I}$. Pokud $\mathcal{I}_F$ je Fréchetův ideál na X, to znamená $\mathcal{I}_F = \{Y \subseteq X : |Y| < |X|\}$, pak $\mathcal{I}_F$-různé funkce nazýváme skoro všude různé.

Připomeňme, které symboly máme zafixované: $\aleph_\gamma$, $\lambda = \mathrm{cf}(\aleph_\gamma)$, A množinu regulárních kardinálů.

2.21 Lemma. *Existuje rostoucí funkce* $\psi : \lambda \longrightarrow A$ *taková, že v součinu* $\mathsf{X}_{\xi<\lambda}\,\psi(\xi)$ *existuje* $\aleph_\gamma^\lambda$ *vzájemně skoro všude různých funkcí.*

Důkaz. Buď $\psi : \lambda \longrightarrow A$ rostoucí funkce splňující $\sup\{\psi(\alpha) : \alpha \in \lambda\} = \aleph_\gamma$ a taková, že $(\sup\{\psi(\beta) : \beta < \alpha\})^\lambda < \psi(\alpha)$ pro každé $\alpha < \lambda$. Z kardinální aritmetiky víme, že $|\mathsf{X}_{\alpha<\lambda}\,\psi(\alpha)| = \aleph_\gamma^\lambda$ a navíc pro každé $\alpha < \lambda$ máme nějaké prosté zobrazení $e_\alpha : \mathsf{X}_{\beta<\alpha}\,\psi(\beta) \longrightarrow \psi(\alpha)$. Pro libovolné $f \in \mathsf{X}_{\alpha<\lambda}\,\psi(\alpha)$ funkce g_f, definovaná vztahem

$$g_f(\alpha) = e_\alpha(f|\alpha),$$

leží opět v $\mathsf{X}_{\alpha<\lambda}\,\psi(\alpha)$. Pro různé f_1, f_2 jsou funkce g_{f_1} a g_{f_2} skoro všude různé. Máme tak $\{g_f : f \in \mathsf{X}_{\alpha<\lambda}\,\psi(\alpha)\}$ $\aleph_\gamma^\lambda$ skoro všude různých funkcí.

2.22 Věta. *Je-li* λ *nespočetné, pak* $\sup \mathrm{pcf}(A) = \aleph_\gamma^\lambda$.

Důkaz. Zvolme pevné regulární τ, $\aleph_\gamma < \tau \le \aleph_\gamma^\lambda$. Dokazujeme, že $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$. Uvažujme množinu R všech zobrazení $\psi : \lambda \longrightarrow A$, pro které v $\mathsf{X}_{\xi<\lambda}\,\varphi(\xi)$ existuje alespoň τ skoro všude různých funkcí. Fréchetův ideál $\mathcal{I}_F$ na λ je σ-úplný. Podle předchozího lemmatu je $R \neq 0$. Z fundovanosti plyne, že existuje $<_{\mathcal{I}_F}$-minimální funkce $\varphi \in R$. Chceme nalézt ultrafiltr $\mathcal{F}$ na λ, pro který platí $\mathrm{cf}(\mathsf{X}_{\xi<\lambda}\,\varphi(\xi), \le_\mathcal{F}) \ge \tau$.

Položme $\mathcal{I} = \mathcal{I}_F \cup \{X : X \in [\lambda]^\lambda$, existuje $g \in \mathsf{X}_{\xi\in X}\,\varphi(\xi)$ a v $\mathsf{X}_{\xi\in X}\,g(\xi)$ je alespoň τ skoro všude různých funkcí$\}$.

Dokazujeme, že $\mathcal{I}$ je ideál na λ. Předně $\lambda \notin \mathcal{I}$, jinak existuje $g : \lambda \longrightarrow \aleph_\gamma$, $g < \varphi$ a v $\mathsf{X}_{\xi\in\lambda}\,g(\xi)$ existuje τ vzájemně skoro všude různých funkcí. Stejnou vlastnost má funkce $g' \le g$, kde $g'(\xi) = |g(\xi)|$, a navíc $g'(\xi) < \varphi(\xi)$. Položíme-li pro $\xi < \lambda$

$$h(\xi) = \min\{\nu \in A : \nu \ge \sup\{g'(\eta) : \eta \le \xi\}\},$$

je $h : \lambda \longrightarrow A$, $h <_{\mathcal{I}_F} \varphi$ a $h \in R$, a to je spor s minimalitou funkce φ. Uzavřenost $\mathcal{I}$ na podmnožiny je zřejmá, a jsou-li $X, Y \in \mathcal{I} - \mathcal{I}_F$ disjunktní množiny a g_Y, g_X jim odpovídající funkce, pak $g_X \cup g_Y$ zaručuje, že sjednocení $X \cup Y \in \mathcal{I}$. Přidáme-li k $X \in \mathcal{I} - \mathcal{I}_F$ množinu $Y \in \mathcal{I}_F$, neovlivní to skoro různost požadovaných funkcí. $\mathcal{I}$ je ideál.

Nechť $\mathcal{F}$ je ultrafiltr na λ, který rozšiřuje filtr duální k $\mathcal{I}$, to znamená, že $\mathcal{F} \cap \mathcal{I} = 0$. Ověříme, že $\mathrm{cf}(\mathsf{X}_{\xi<\lambda}\,\varphi(\xi), \le_\mathcal{F}) = \tau$. Zvolme $S \subseteq \mathsf{X}_{\xi<\lambda}\,\varphi(\xi)$ systém skoro všude různých funkcí, $|S| = \tau$. $\mathcal{F}$ je uniformní ultrafiltr, tedy pro $f, g \in S$, jakmile $f \neq g$, pak $f \neq_\mathcal{F} g$, tedy mohutnost ultraproduktu $|\mathsf{X}_{\xi<\lambda}\,\varphi(\xi)/\mathcal{F}| \ge \tau$. K ověření kofinality stačí ukázat, že pro každé $f \in \mathsf{X}_{\xi<\lambda}\,\varphi(\xi)$ je množina $S_f = \{g \in S :$

$g <_{\mathcal{F}} f\}$ malá, $|S_f| < \tau$. Pokud by pro nějaké f bylo $S_f = \tau$, potom pro každé $g \in S_f$ existuje $X_g \in \mathcal{F}$ takové, že $g|X_g < f|X_g$. Ale $\tau > \aleph_\gamma > 2^\lambda$, proto pro τ funkcí $g \in S_f$ je X_g stejné, označme jej X. To ovšem znamená, že $X \in \mathcal{I}$, a to není možné, protože $X \in \mathcal{F}$.

Nyní stačí ultrafiltr $\mathcal{F}$ převést na ultrafiltr $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$, kde $U = \{Y \subseteq A$ $\varphi^{-1}[Y] \in \mathcal{F}\}$. Stejně jako ve 2.17 ověříme, že $\mathrm{tcf}(U) = \tau$. Tedy $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$. Požadovaná rovnost je dokázána.

Všimněme si, že jsme pro případ nespočetné kofinality nejen znovu dokázali větu o intervalu $\mathrm{pcf}(A)$, ale i to, že pokud $\aleph_\gamma^\lambda$ je regulární kardinál, pak $\aleph_\gamma^\lambda = \max \mathrm{pcf}(A)$. Obecně maximum $\mathrm{pcf}(A)$ ve smyslu naší definice nemusí existovat.

2.23 Dominující systémy. Uvažujme na $X \neq 0$ nějakou množinu H ordinálních funkcí. Systém $D \subseteq H$ nazýváme dominující, jestliže

$$(\forall f \in H)\,(\exists g \in D)\,(\forall x \in X)\,(f(x) \leq g(x)).$$

Je asi patrné, že nás budou zajímat nejmenší velikosti dominujících systémů v různých množinách funkcí.

Pro naši množinu kardinálních čísel A označme

$$\mathrm{supp}(\mathsf{X} A, \lambda) = \{f \in \mathsf{X} A : |\{\nu \in A : f(\nu) \neq 0\}| \leq \lambda\}.$$

Tedy $\mathrm{supp}(\mathsf{X} A, \lambda)$ sestává z funkcí, které mají nosič nejvýše mohutnosti λ. Z následujícího tvrzení plyne, že v $\mathrm{supp}(\mathsf{X} A, \lambda)$ je nejmenší mohutnost dominujícího systému rovna právě $\sup \mathrm{pcf}(A)$.

2.24 Lemma. (a) *Pro každé $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$ existuje množina $M \in U$ a soubor funkcí $G \subseteq \mathsf{X} A$ tak, že $|G| = \mathrm{tcf}(U)$ a pro každou $f \in \mathsf{X} A$ existuje $g \in G$ takové, že pro všechna $\nu \in M$ platí $f(\nu) \leq g(\nu)$.*

(b) *Je-li $M \subseteq A$, $0 < |M| \leq \lambda$, pak existuje $G \subseteq \mathsf{X} A$ tak, že $|G| \leq \sup\{\mathrm{tcf}(U) : U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda), M \in U\}$ a pro každou $f \in \mathsf{X} A$ existuje $g \in G$ takové, že pro všechna $\nu \in M$ platí $f(\nu) \leq g(\nu)$.*

Důkaz. (a) Zvolme $F \subseteq \mathsf{X} A$ neomezenou v $(\mathsf{X} A, <_U)$, $|F| = \mathrm{tcf}(U)$. Buď $M \in U$ zvolena podle lemmatu 2.10. Množinu $G \subseteq \mathsf{X} A$ definujme jako $G = \{\max\{f_0, f_1, \ldots, f_n\} : n \in \omega \,\&\, f_0, f_1, \ldots, f_n \in F\}$. Zřejmě $|G| = |F|$.

Ukážeme, že G je hledaná množina. Předpokládejme sporem, že existuje $f \in \mathsf{X} A$ tak, že pro každé $g \in G$ je množina $X(g) = \{\nu \in M : g(\nu) < f(\nu)\}$ neprázdná. Protože G je uzavřená na konečná maxima, soubor $\{X(g) : g \in G\}$ má konečnou průnikovou vlastnost, a tedy ho lze rozšířit do ultrafiltru V. Jenže $g <_V f$ pro všechna $g \in G$, což je ve sporu s tím, že M byla zvolena podle 2.10.

(b) Pro každý ultrafiltr $U \in \mathrm{Ult}(A, \lambda)$, který obsahuje množinu M, zvolme množinu $M(U)$ a soubor funkcí $G(U)$ s vlastnostmi z právě dokázané části (a). Pak existuje konečně mnoho množin $M(U_1), M(U_2), \ldots, M(U_n)$, jejichž sjednocení obsahuje celou množinu M. Kdyby tomu tak nebylo, pak by soubor $\{M - M(U) : U \in \mathcal{U}(A, \lambda), M \in U\}$ byl subbází filtru F na množině M, pro ultrafiltr $U \supseteq F$ by pak platilo, že $M(U) \in U$ a $M - M(U) \in F \subseteq U$, což není možné. Soubor $G = \{\max\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} : g_1 \in G(U_1), g_2 \in G(U_2), \ldots, g_n \in G(U_n)\}$ zřejmě má požadované vlastnosti.

2.25 Definice. Pokrývací číslo ideálu. Nechť $\mathcal{I}$ je ideál na nekonečném kardinálu $\varkappa$. Pokrývacím číslem rozumíme

$$\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \min\{|B| : B \subseteq \mathcal{I}, (\forall x \in \mathcal{I})\,(\exists y \in B)\,(x \subseteq y)\}.$$

Tedy $\mathrm{cof}(\mathcal{I})$ je nejmenší mohutnost báze ideálu $\mathcal{I}$. Pokrývací číslo ideálu $[\varkappa]^{\leq\tau}$ pro fixované nekonečné $\tau \leq \varkappa$ značíme $\mathrm{cov}(\varkappa, \tau)$.

Uveďme základní vztahy pro $\mathrm{cov}(\varkappa, \tau)$.

2.26 Lemma. (i) $\mathrm{cov}(\omega, \omega) = 1$,
(ii) $\mathrm{cov}(\aleph_n, \omega) = \aleph_n$ *pro* $n \in \omega - \{0\}$,
(iii) *Nechť* $\varkappa$ *je singulár s* $\mathrm{cf}(\varkappa) = \omega$. *Potom*
(a) $\mathrm{cov}(\varkappa, \omega) > \varkappa$,
(b) $\varkappa^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \mathrm{cov}(\varkappa, \omega)$.

Důkaz. (ii) Všimněme si, že pro libovolné kardinály $\varkappa$, λ takové, že $\omega \leq \lambda < \varkappa$ a $\varkappa$ regulární, je nutně $\mathrm{cov}(\varkappa, \lambda) \geq \varkappa$. Pro $\aleph_n$ dokážeme nerovnost $\mathrm{cov}(\aleph_n, \omega) \leq \aleph_n$ indukcí. Pro $\aleph_1$ tvoří systém $\{\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ bázi ideálu $[\aleph_1]^{\leq\omega}$, tedy $\mathrm{cov}(\aleph_1, \omega) = \aleph_1$. Pro $\aleph_{n+1}$ je $\mathrm{cov}(\aleph_{n+1}, \omega) \leq \mathrm{cov}(\aleph_{n+1}, \aleph_n) \cdot \mathrm{cov}(\aleph_n, \omega) = \aleph_{n+1} \cdot \aleph_n = \aleph_{n+1}$

(iii)(a) Nechť $\langle \varkappa_n : n \in \omega \rangle$ je rostoucí posloupnost kardinálních čísel kofinální v $\varkappa$. Ukážeme, že žádný systém $B \subseteq [\varkappa]^{\leq\omega}$ mohutnosti $\varkappa$ není bází ideálu $[\varkappa]^{\leq\omega}$. Očíslujeme $B = \{x_\alpha : \alpha < \varkappa\}$. Položme $X_n = \bigcup\{x_\alpha : \alpha < \varkappa_n\}$ pro $n \in \omega$. Jelikož $|X_n| \leq \varkappa_n$, je $|\varkappa - X_n| = \varkappa$. Můžeme proto vybrat prostou posloupnost $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ tak, že $\alpha_n \in \varkappa - X_n$ pro každé n. Množina $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ není pokryta žádnou množinou z B. Tedy $\mathrm{cov}(\varkappa, \omega) > \varkappa$.

(ii)(b) Je zřejmé, že $\varkappa^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0}$ a $\varkappa^{\aleph_0} \geq \mathrm{cov}(\varkappa, \omega)$, protože $|[\varkappa]^{\leq\omega}| = \varkappa^{\aleph_0}$. Na druhou stranu, je-li B báze ideálu $[\varkappa]^{\leq\omega}$, potom $\bigcup\{\mathcal{P}(x) : x \in B\} = [\varkappa]^{\leq\omega}$, a tedy $\varkappa^{\aleph_0} \leq \mathrm{cov}(\varkappa, \omega) \cdot 2^{\aleph_0}$.

2.27 Příklad. Nechť $\mathcal{N}$ značí ideál množin Lebesgueovy míry nula na reálné přímce. Hodnotu $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$ nelze jednoznačně určit v ZFC, platí $\omega_1 \leq \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \leq 2^{\aleph_0}$. Nechť $\mathcal{N}_\varkappa$ značí ideál na ${}^\varkappa\{0, 1\}$ nulových množin ve standardní Haarově míře na kompaktní grupě $2^\varkappa$. Označme $\mathcal{B}_\varkappa$ měrovou algebru $\mathrm{Borel}(2^\varkappa)/\mathcal{N}_\varkappa$. Nechť $\pi(\mathcal{B}_\varkappa)$ je nejmenší mohutnost husté množiny v $\mathcal{B}_\varkappa$. Pak platí rovnosti (Cichoń et al. 1985)

$$\mathrm{cof}(\mathcal{N}_\varkappa) = \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \cdot \mathrm{cov}(\varkappa, \omega) = \pi(\mathcal{B}_\varkappa).$$

Vracíme se k našemu tématu. Máme ve hře dva systémy ordinálních funkcí. První, $\mathrm{supp}(\bigtimes A, \lambda)$, funkce definované na A, $|A| = |\gamma|$, druhý, $\mathrm{supp}({}^{\aleph_\gamma}\{0,1\}, \lambda)$, pouze dvouhodnotové funkce definované na $\aleph_\gamma$. Nejmenší mohutnost dominujícího systému v $\mathrm{supp}(\bigtimes A, \lambda)$ je $\sup \mathrm{pcf}(A)$, to je dokázáno ve 2.24. Nejmenší mohutnost dominujícího systému v $\mathrm{supp}({}^{\aleph_\gamma}\{0,1\}, \lambda)$ je zřejmě $\mathrm{cov}(\aleph_\gamma, \lambda)$. Poznamenejme, že Shelah dokázal rovnost $\sup \mathrm{pcf}_\lambda(A) = \mathrm{cov}(\aleph_\gamma, \lambda)$.

2.28 Věta. *Pro* $\lambda = \omega$, $\sup \mathrm{pcf}(A) = \aleph_\gamma^\omega$.

Tuto část důkazu provedeme pouze pro γ limitní, $\gamma < \omega_1$. Přitom ukážeme hlavní ideu obecného důkazu, a to prostředky, které máme k dispozici. Obecný případ využívá jemnějších kombinatorických argumentů a lze jej nalézt v pracích zmíněných v úvodu tohoto dodatku.

Buď $A = \{\nu < \aleph_\gamma : \nu \text{ je regulární, } (2^\omega)^+ < \nu\}$. Pro $\nu \in A$ označme ν^- ten kardinál $\varkappa$, že $\nu = \varkappa^+$. Uvědomme si, že každý kardinál $\nu \in A$ je izolované nespočetné kardinální číslo, tedy ν^- je definováno. Pro každé $\nu \in A$ a $x \in \nu \setminus \nu^-$ zafixujme bijekci $b_{\nu,x}$ množiny x na ν^-. Buď $c < \omega_1$ ten ordinál, že $\aleph_c = (2^\omega)^+$.

Množina $M \subseteq \aleph_\gamma$ se nazývá pokrývací, jestliže splňuje následujících šest podmínek:

(1) $M \cap \aleph_c = \aleph_c$,
(2) pro každé $\nu \in A$ je $\sup(M \cap \nu) < \nu$,
(3) pro každé $\nu \in A$ je $\mathrm{cf}(\sup(M \cap \nu)) > \omega$,
(4) pro každé $\nu \in A$ je $M \cap (\nu \setminus \nu^-)$ uzavřená neomezená v $\sup(M \cap \nu)$,
(5) pro každé $\nu \in A$, každé $x, y \in M \cap (\nu \setminus \nu^-)$, $y < x$, je $b_{\nu,x}(y) \in M$,
(6) pro každé $\nu \in A$, každé $x \in M \cap (\nu \setminus \nu^-)$ a každé $y \in M \cap \nu^-$, je $b_{\nu,x}^{-1}(y) \in M$.

Pro pokrývací množinu M označme Ch_M funkci, která je definovaná vztahem $\mathrm{Ch}_M(\nu) = \sup M \cap \nu$ pro $\nu \in A$. Tuto funkci nazvěme charakteristickou funkcí množiny M.

2.29 Lemma. *Jsou-li množiny* M, N *pokrývací a platí-li* $\mathrm{Ch}_M = \mathrm{Ch}_N$, *pak* $M = N$.

Důkaz. Stačí ukázat, že pro všechny kardinály $\nu < \aleph_\gamma$ platí $M \cap \nu = N \cap \nu$, což provedeme indukcí.

Pro $\nu \le \aleph_c$ je $M \cap \nu = N \cap \nu = \nu$ podle (1).

Předpokládejme, že pro všechna $\nu' < \omega_\gamma$, $\nu' < \nu$, platí $M \cap \nu' = N \cap \nu'$. Je-li ν limitní, pak ovšem $M \cap \nu = \bigcup_{\nu' < \nu} M \cap \nu' = \bigcup_{\nu' < \nu} N \cap \nu' = N \cap \nu$.

Je-li ν kardinální následník, $\nu > \aleph_c$, pak $\nu \in A$ a $M \cap \nu^- = N \cap \nu^-$.

Buď $C_M = M \cap (\nu \setminus \nu^-)$, $C_N = N \cap (\nu \setminus \nu^-)$. Podle (4) je množina C_M uzavřená neomezená v $\mathrm{Ch}_M(\nu)$ a množina C_N uzavřená neomezená v $\mathrm{Ch}_N(\nu)$.

Protože $\mathrm{Ch}_M(\nu) = \mathrm{Ch}_N(\nu)$ a protože $\mathrm{cf}(\mathrm{Ch}_M(\nu)) > \omega$ podle (3), je i množina $C = C_M \cap C_N$ uzavřená neomezená v $\mathrm{Ch}_M(\nu)$.

Zvolme libovolné $z \in M \cap (\nu \setminus \nu^-)$. Protože $z < \mathrm{Ch}_M(\nu)$ a protože C je neomezená v $\mathrm{Ch}_M(\nu)$, existuje $x \in C$, $x > z$. Jelikož $z \in M$, pro $y = b_{\nu,x}(z)$ máme podle (5) $y \in M$. Jelikož $y \in \nu^-$, tedy z indukčního předpokladu je $y \in N$. Avšak $x \in C \subseteq C_N \subseteq N$, tedy podle (6) je $z = b_{\nu,x}^{-1}(y) \in N$. Dokázali jsme, že $M \cap (\nu \setminus \nu^-) \subseteq N \cap (\nu \setminus \nu^-)$, a symetrickým argumentem dostaneme opačnou inkluzi, tedy hledanou rovnost $M \cap \nu = N \cap \nu$.

2.30 Definice. Univerzální posloupnost. Nechť $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$. Posloupnost funkcí $\langle f_\xi : \xi \in \tau \rangle$, splňující tyto tři podmínky

(i) pro každé $\xi \in \tau$ je $f_\xi \in \mathsf{X} A$;

(ii) je-li U libovolný ultrafiltr na A takový, že $\tau = \mathrm{tcf}(U)$, pak pro každá $\xi < \eta < \tau$ je $f_\xi <_U f_\eta$;

(iii) je-li U libovolný ultrafiltr na A takový, že $\tau = \mathrm{tcf}(U)$, a $g \in \mathsf{X} A$, pak existuje $\xi \in \tau$ tak, že $g <_U f_\xi$,

se nazývá univerzální posloupností pro τ.

2.31 Definice. Univerzální $\varkappa$-minimální posloupnost. Nechť $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$, $\varkappa$ regulární nespočetný kardinál. Univerzální posloupnost $\langle f_\xi : \xi \in \tau \rangle$ se nazývá $\varkappa$-minimální, pokud pro každé $\xi < \tau$ o kofinalitě $\mathrm{cf}(\xi) = \varkappa$ platí

(iv) pro každé $\nu \in A$ je $f_\xi(\nu) = \min\{\sup\{f_\eta(\nu) : \eta \in C\} : C \subseteq \xi$ je uzavřená neomezená množina ordinálního typu $\varkappa$ v $\xi\}$.

2.32 Lemma. *Pro každé $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$ existuje univerzální $(2^\omega)^+$-minimální posloupnost.*

Důkaz. Fixujeme $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$. Víme, že $\min(A) > |A|^+$, v našem případě $|A| = \omega$. Položme

$$\mathcal{J}_{<\tau} = \{X \subseteq A : (\forall U \in \mathrm{Ult}(A))(X \in U \longrightarrow \mathrm{tcf}(U) < \tau)\}.$$

Je zřejmé, že $\mathcal{J}_{<\tau}$ je ideál na A. Speciálně, pro $\tau = \min(A)$ je $\mathcal{J}_{<\tau} = \{0\}$ a univerzální posloupnost tvoří konstantní funkce f_ξ, $\xi < \tau$, pro které je $f_\xi(\nu) = \xi$ pro všechna $\nu \in A$.

Nejprve ukážeme, že kvaziuspořádání $(\mathsf{X} A, <_{\mathcal{J}_{<\tau}})$ je nahoru τ-usměrněné. Kdyby tomu tak nebylo, pak existuje regulární kardinální číslo $\varrho < \tau$, $\varrho \geq \min(A)$, a $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$-rostoucí posloupnost $\langle h_\eta : \eta < \varrho \rangle \subseteq \mathsf{X} A$, která nemá horní mez v $(\mathsf{X} A, <_{\mathcal{J}_{<\tau}})$. Ukážeme, že toto vede ke sporu. Označme $\mathcal{U}_\tau = \{U \in \mathrm{Ult}(A) : U \cap \mathcal{J}_{<\tau} = 0\}$. Podle 2.10 je zřejmé, že $\mathcal{U}_\tau = \{U \in \mathrm{Ult}(A) : \mathrm{tcf}(U) \geq \tau\}$. Pro každé $U \in \mathcal{U}_\tau$ je posloupnost $\langle h_\eta : \eta < \varrho \rangle$ $<_U$-rostoucí a má $\leq_U$-horní mez. Označme ji h_U.

Využijeme toho, že v našem případě je $\varrho \geq \min(A) > 2^{|A|} = 2^{\omega}$. Pro dané $U \in \mathcal{U}_\tau$ je $|U| = 2^{\omega}$ a tedy existuje množina $X_U \in U$ taková, že pro kofinálně mnoho indexů $\eta < \varrho$ je $h_U|X_U > f_\eta|X_U$ všude na X_U. To znamená, že $h_U|X_U \geq_{\mathcal{J}_{<\tau}} h_\eta|X_U$ pro každé $\eta < \varrho$. Nyní z kompaktnosti plyne, že existuje konečně mnoho ultrafiltrů z $\mathcal{U}_\tau$ takových, že $X_{U_1} \cup X_{U_2} \cup \cdots \cup X_{U_n} \in \mathcal{J}_{<\tau}{}^*$, kde $\mathcal{J}_{<\tau}{}^*$ je filtr duální k $\mathcal{J}_{<\tau}$. V opačném případě by množiny $\{A - (X_{U_0} \cup X_{U_1} \cup \cdots \cup X_{U_k}) : k \in \omega, \{U_i : i \leq k\} \subseteq \mathcal{U}_\tau\}$ spolu s $\mathcal{J}_{<\tau}{}^*$ tvořily centrovaný systém a jeho libovolné rozšíření do ultrafiltru V na A dává $V \in \mathcal{U}_\tau$ a máme spor s tím, že $X_V \in V$ a $A - X_V \in V$. Máme tedy konečně mnoho funkcí $h_{U_1}, h_{U_2}, \cdots, h_{U_n}$ a stačí položit $h = \max\{h_{U_i} : i = 1, 2, \cdots, n\}$. Funkce h je $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$-horní mezí posloupnosti $\langle h_\eta : \eta < \varrho \rangle$.

Dokazujeme existenci univerzální posloupnosti pro τ. Hledáme posloupnost $f = \langle f_\xi : \xi < \tau \rangle \subseteq \mathsf{X} A$, která je $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$-rostoucí a má požadovanou vlastnost pro τ. Předpokládejme, že taková posloupnost neexistuje. Provedeme $|A|^+$ kroků, v našem případě $|A|^+ = \omega_1$, ve kterých zkonstruujeme $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$-rostoucí posloupnosti $f^\alpha = \langle f^\alpha_\xi : \xi < \tau \rangle \subseteq \mathsf{X} A$ pro $\alpha < |A|^+$ a současně vybíráme vhodné ultrafiltry U_α s $\mathrm{tcf}(U_\alpha) = \tau$ pro všechna izolovaná ordinální čísla α.

Nechť $f^0 = \langle f^0_\xi : \xi < \tau \rangle$ je nějaká $<_\tau$-rostoucí posloupnost. Taková posloupnost existuje, protože $(\mathsf{X} A, <_{\mathcal{J}_{<\tau}})$ je τ-usměrněná.

Jsme v kroku $\alpha < |A|^+$, máme posloupnost f^α a konstruujeme posloupnost $f^{\alpha+1}$. Jelikož f^α není univerzální pro τ, existuje ultrafiltr $U_{\alpha+1}$ s $\mathrm{tcf}(U_{\alpha+1}) = \tau$ takový, že posloupnost $f^\alpha = \langle f^\alpha_\xi : \xi < \tau \rangle$ je $<_{U_{\alpha+1}}$-omezená. Jako $f^{\alpha+1}_0$ zvolíme funkci, která je $<_{U_{\alpha+1}}$-horní mezí posloupnosti f^α, můžeme předpokládat, že $f^{\alpha+1}_0 \geq f^\alpha_0$ všude na A. Ostatní funkce $f^{\alpha+1}_\xi$ volíme tak, aby

(1) $f^{\alpha+1}$ byla $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$-rostoucí a kofinální v $(\mathsf{X} A, <_{U_{\alpha+1}})$, a

(2) $f^{\alpha+1}_\xi \geq f^\alpha_\xi$ všude na A pro každé $\xi < \tau$.

Pro α limitní zvolme f^α tak, aby

(3) f^α byla $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$-rostoucí,

(4) $f^{\alpha+1}_\xi(\nu) \geq \sup\{f^\beta_\xi(\nu) : \beta < \alpha\}$ pro každé $\nu \in A$ a $\xi < \tau$.

To je možné, jednak z τ-usměrněnosti kvaziuspořádání $(\mathsf{X} A, <_{\mathcal{J}_{<\tau}})$ a jednak proto, že $\alpha < |A|^+$ a $\min(A) > |A|$.

Definujme funkci $g \in \mathsf{X} A$ vztahem

$$g(\nu) = \sup\{f^\alpha_0(\nu) : \alpha < |A|^+\}$$

pro $\nu \in A$.

Pro každé $\alpha < |A|^+$ existuje $\xi_\alpha < \tau$ takové, že $g <_{U_{\alpha+1}} f^{\alpha+1}_{\xi_\alpha}$, to plyne z kofinálnosti posloupnosti $f^{\alpha+1}$ v $(\mathsf{X} A, <_{U_{\alpha+1}})$. Položme $\overline{\xi} = \sup\{\xi_\alpha : \alpha < |A|^+\}$. Jelikož $\tau > |A|^{++}$, je $\overline{\xi} < \tau$.

Pro $\alpha < |A|^+$ je množina

$$X_\alpha = \{\nu \in A : g(\nu) < f_\xi^{\alpha+1}(\nu)\} \in U_{\alpha+1}.$$

Jelikož pro $\alpha < \beta < |A|^+$ je $f_\xi^\alpha \leq f_\xi^\beta$ na celém A, množiny X_α s rostoucím α rostou. Jelikož $X_\alpha \in U_{\alpha+1}$, ale $X_\alpha \notin U_{\beta+1}$ pro $\beta > \alpha$, je $\langle X_\alpha : \alpha < |A|^+\rangle$ ostře rostoucí posloupnost podmnožin množiny A, a to není možné.

Tím jsme dokázali, že existuje univerzální $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$-rostoucí posloupnost pro τ. Z ní a z τ-usměrněnosti uspořádání $(\mathsf{X} A, <_{\mathcal{J}_{<\tau}})$ získáme snadno minimální univerzální posloupnost.

Zafixujme jednu univerzální $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$-rostoucí posloupnost pro τ, $\langle f_\xi : \xi < \tau\rangle$. Transfinitní rekurzí do τ sestrojíme posloupnost $\langle g_\xi : \xi < \tau\rangle$ takto: $g_0 = f_0$, je-li $\xi < \tau$ a $\mathrm{cf}(\xi) \neq (2^\omega)^+$, zvolme g_ξ tak, aby byla v uspořádání $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$ větší než funkce f_ξ a všechny funkce g_η, $\eta < \xi$. To je možné, protože uspořádání $(\mathsf{X} A, <_{\mathcal{J}_{<\tau}})$ je τ-usměrněné. Všimněme si, že z těchto požadavků a z univerzálnosti posloupnosti $\langle f_\xi : \xi < \tau\rangle$ plyne, že i posloupnost $\langle g_\xi : \xi < \tau\rangle$ bude univerzální pro τ.

Mějme $\xi < \tau$, $\mathrm{cf}(\xi) = (2^\omega)^+$ a $<_{\mathcal{J}_{<\tau}}$-rostoucí posloupnost $\langle g_\eta : \eta < \xi\rangle \subseteq \mathsf{X} A$. Pro libovolnou uzavřenou neomezenou množinu $C \subseteq \xi$, $\mathrm{otp} C = (2^\omega)^+$ definujme funkci $g_C \in \mathsf{X} A$ vztahem

$$g_C(\nu) = \sup\{g_\eta(\nu) : \eta \in C\}.$$

Ukážeme, že mezi funkcemi $\{g_C : C \in \mathrm{Club}(\xi)\}$ existuje nejmenší. Využijeme toho, že $\mathrm{Club}(\xi)$ je uzavřený na průniky mohutnosti $|A|$. Kdyby nejmenší funkce g_C neexistovala, můžeme vybrat klesající posloupnost $\{C_\alpha : \alpha < |A|^+\}$ uzavřených neomezených množin v ξ, $\mathrm{otp} C_\alpha = (2^\omega)^+$ tak, že pro každé α je $g_{C_\alpha}(\nu) > g_{C_{\alpha+1}}(\nu)$ pro nějaké $\nu \in A$. Jelikož pro $\alpha < \beta < |A|^+$ je $g_{C_\alpha} \geq g_{C_\beta}$ všude na $|A|$, nalezneme jedno $\nu \in A$ takové, že $g_{C_\alpha}(\nu) > g_{C_{\alpha+1}}$ pro neomezeně mnoho α, a to není možné.

Pro $\xi < \tau, \mathrm{cf}(\xi) = (2^\omega)^+$, buď g_ξ nejmenší z funkcí g_C, $C \in \mathrm{Club}(\xi)$. Lemma je dokázáno.

Pro každé $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$ zafixujme univerzální $(2^\omega)^+$-minimální posloupnost $\langle f_\xi^{(\tau)} : \xi \in \tau\rangle$. Označme H množinu všech funkcí $f \in \mathsf{X} A$ takových, že existuje přirozené číslo n, kardinální čísla $\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1} \in \mathrm{pcf}(A)$, ordinální čísla $\xi_i < \tau_i$ pro $i < n$, $\mathrm{cf}(\xi_i) = \aleph_c$, a rozklad $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ množiny A tak, že pro každé $i < n$ je $f|X_i = f_{\xi_i}^{(\tau_i)}|X_i$.

2.33 Věta. *Je-li $S \subseteq \aleph_\gamma$, S spočetná, pak existuje pokrývací množina $M \subseteq \aleph_\gamma$ taková, že $S \subseteq M$, $|M| = \aleph_c$ a $\mathrm{Ch}_M \in H$.*

Důkaz. Nejprve zavedeme zobrazení $B : \mathcal{P}(\aleph_\gamma) \longrightarrow \mathcal{P}(\aleph_\gamma)$. Pro $T \subseteq \aleph_\gamma$ buď $T_0 = \mathrm{cl} T$, kde cl je uzávěr množiny T v prostoru $\aleph_\gamma$, a dále, $T_{k+1} = T_k \cup \{b_{\nu,x}(y) :$

$\nu \in A, y \in T_k \cap \nu, x \in T_k \cap (\nu \setminus \nu^-), y < x\} \cup \{b_{\nu,x}^{-1}(y) : x \in T_k \cap (\nu \setminus \nu^-), y \in T_k \cap \nu^-\}$, $B(T) = \bigcup_{k \in \omega} T_k$. Z této definice se snadno ověří, že $T \subseteq B(T)$ a $|B(T)| \leq |T| \cdot \omega$.

Buď S spočetná podmnožina ordinálu $\aleph_\gamma$. Množinu M nalezneme transfinitní indukcí do $\aleph_c$ současně s množinami $L^{(\tau)} \subseteq \tau$ pro $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$, mohutnost každé množiny $L^{(\tau)}$ je nejvýše 2^ω.

Pro každé $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$ zafixujme univerzální $\aleph_c$-minimální posloupnost $f^{(\tau)} = \langle f_\xi^{(\tau)} : \xi < \tau \rangle$ a položme $S_0 = S$, $L_0^{(\tau)} = 0$ pro všechna $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$.

Je-li $\alpha < \aleph_c$ limitní, položíme $S_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta$, $L_\alpha^{(\tau)} = \mathrm{cl}(\bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta^{(\tau)})$, uzávěr je brán v prostoru τ.

Známe-li S_α, předpokládáme, že $|S_\alpha| \leq \aleph_c$. Pro $\nu \in A$ buď $h_\alpha(\nu) = \sup S_\alpha \cap \nu$. Pro $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$ a pro $X \subseteq A$ označme $\xi(\alpha, X, \tau)$ nejmenší $\xi < \tau$, které splňuje, že $\xi > \sup L_\alpha^{(\tau)}$ a pro všechna $\nu \in X$ platí $f_\xi^{(\tau)}(\nu) > h_\alpha(\nu)$. Pokud ξ s požadovanými vlastnostmi neexistuje, položme $\xi(\alpha, X, \tau) = 0$. Množinu $L_{\alpha+1}^{(\tau)}$ definujme vztahem $L_{\alpha+1}^{(\tau)} = \mathrm{cl}(L_\alpha^{(\tau)} \cup \{\xi(\alpha, X, \tau) : X \subseteq A\})$. Protože množina A je spočetná a $|L_\alpha^{(\tau)}| \leq 2^\omega$, je i $|L_{\alpha+1}^{(\tau)}| \leq 2^\omega$. Nyní položme

$$S_{\alpha+1} = B(S_\alpha \cup \{f_\xi^{(\tau)}(\nu) : \nu \in A, \xi \in L_{\alpha+1}, \tau \in \mathrm{pcf}(A)\} \cup \{\alpha\}).$$

Protože $|\mathrm{pcf}(A)| \leq |A|^\omega = 2^\omega$, je $|S_{\alpha+1}| \leq 2^\omega$.

Tím jsou indukční kroky popsány a zbývá položit $M = \bigcup_{\alpha<\aleph_c} S_\alpha$, $L^{(\tau)} = \bigcup_{\alpha<\aleph_c} L_\alpha^{(\tau)}$ pro $\tau \in \mathrm{pcf}(A)$.

Z popsané konstrukce okamžitě plyne, že množina $M = \bigcup_{\alpha<\aleph_c} S_\alpha$ je pokrývací, obsahuje množinu S a má mohutnost $\aleph_c$. Musíme ještě ověřit, že $\mathrm{Ch}_M \in H$.

Z transfinitní indukce víme, že pro $\alpha < \beta < \aleph_c$ je $h_\alpha \leq h_\beta \leq \mathrm{Ch}_M$ všude na A a že $\mathrm{Ch}_M = \sup\{h_\alpha : \alpha < \aleph_c\}$.

Zvolme libovolně ultrafiltr U na A, buď $\tau = \mathrm{tcf}(U)$. Množina $L^{(\tau)}$ je podmnožinou ordinálu τ, má ordinální typ $\aleph_c$ a pro $\eta = \sup L^{(\tau)}$ je $L^{(\tau)}$ uzavřená neomezená v η.

Protože jsme pracovali s univerzálním $\aleph_c$-minimálním systémem pro τ, existuje pro funkci $f_\eta^{(\tau)}$ množina C uzavřená neomezená v η taková, že $f_\eta^{(\tau)} = \sup\{f_\xi^{(\tau)} : \xi \in C\}$. Položíme-li $\tilde{C} = C \cap L^{(\tau)}$, je $\tilde{C}$ rovněž uzavřená neomezená v η a platí také $f_\eta^{(\tau)} = \sup\{f_\xi^{(\tau)} : \xi \in \tilde{C}\}$.

Protože pro každé $\xi \in \tilde{C}$ je $\xi \in L^{(\tau)}$, existuje $\alpha < \aleph_c$, pro které je $\xi \in L_\alpha^{(\tau)}$. Avšak $\{f_\xi^{(\tau)}(\nu) : \nu \in A\} \subseteq S_{\alpha+1}$, a tedy $h_{\alpha+1}(\nu) \geq f_\xi^{(\tau)}(\nu)$ pro všechna $\nu \in A$. Dostáváme tak

$$f_\eta^{(\tau)} = \sup\{f_\xi^{(\tau)} : \xi \in \tilde{C}\} \leq \sup\{h_\alpha : \alpha \in \aleph_c\} = \mathrm{Ch}_M.$$

Zvolme libovolně $\alpha < \aleph_c$. Soubor funkcí $f_\xi^{(\tau)}$ je $<_U$-neomezený, a tedy pro nějaké $\xi \in \tau$ platí nerovnost $h_\alpha <_U f_\xi^{(\tau)}$. Pro množinu $X = \{\nu \in A : h_\alpha(\nu) < f_\xi^{(\tau)}(\nu)\}$ tedy existuje nenulové $\xi(\alpha, X, \tau) \in L_{\alpha+1}$ a platí, že $h_\alpha <_U f_{\xi(\alpha,X,\tau)}^{(\tau)} <_U h_\eta$. Protože $\xi(\alpha, X, \tau) < \eta$ a protože množina $\tilde{C}$ je neomezená v η, můžeme zvolit $\xi(\alpha) \in \tilde{C}$ tak, že $\xi(\alpha, X, \tau) < \xi(\alpha) < \eta$. Zřejmě $h_\alpha <_U f_{\xi(\alpha)}^{(\tau)}$.

Označme $X_\alpha = \{\nu \in A : h_\alpha(\nu) < f_{\xi(\alpha)}^{(\tau)}(\nu)\}$. Máme $X_\alpha \in U$. Protože $\aleph_c = (2^\omega)^+$, existuje množina $I \subseteq \aleph_c$ o mohutnosti $\aleph_c$ a $X \in U$ tak, že pro všechna $\alpha \in I$ je $X = X_\alpha$. Pro všechna $\nu \in X$ potom dostáváme

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_M(\nu) &= \sup\{h_\alpha(\nu) : \alpha \in \aleph_c\} = \sup\{h_\alpha(\nu) : \alpha \in I\} \leq \\ &\leq \sup\{f_{\xi(\alpha)}^{(\tau)}(\nu) : \alpha \in I\} \leq \sup\{f_\xi^{(\tau)}(\nu) : \xi \in \tilde{C}\} = f_\eta(\nu).\end{aligned}$$

Tedy pro množinu X platí, že $\mathrm{Ch}_M|X = f_\eta|X$. Množinu X jsme nalezli v ultrafiltru U, a proto ji označme symbolem X_U.

Z kompaktnosti plyne, že pro nějakou konečnou množinu $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Ult}(A)$ je $A = \bigcup_{U \in \mathcal{K}} X_U$, což dokazuje, že $\mathrm{Ch}_M \in H$.

2.34 Závěr důkazu. Podle lemmatu 2.33 pokrývací množiny o mohutnosti $\aleph_c$, jejichž charakteristická funkce je prvkem množiny H, pokrývají všechny spočetné podmnožiny kardinálu $\aleph_\omega$. Protože $|H| \leq \sup \mathrm{pcf}(A)$ a každá pokrývací množina o mohutnosti $\aleph_c$ obsahuje pouze $\aleph_c = (2^\omega)^+$ spočetných množin, dostáváme $\aleph_\gamma^\omega \leq (2^\omega)^+ \cdot |H| = |H| \leq \sup \mathrm{pcf}(A)$.

Literatura

ARCHANGELSKIJ, A. V.

1969 O moščnosti bikompaktov udovletvorjajuščich pervoj axiome sčotnosti. Doklady Akad Nauk *187*, 967–974

BALCAR, B.

1973 A theorem on supports in the theory of semisets. Comment. Math. Univ. Carolinae *14*, 1–6

BALCAR, B., PELANT, J., SIMON, P.

1980 The space of ultrafilters on N covered by nowhere dense sets. Fund. Math. *110*, 11–24

BALCAR, B., ŠTĚPÁNEK, P.

1977 Boolean matrices, subalgebras and automorphisms of complete Boolean algebras. Fund. Math. *106*, 211–223

BAUMGARTNER, J. E.

1973 All $\aleph_1$-dense sets of reals can be isomorphic. Fund. Math. *79*, 101–106

1975 Canonical partition relations. Journal Symb. Logic *40*, 541–554

1975 Ineffability properties of cardinals I. Coll. Math. Soc. János Bolyai 10, Infinite and finite sets, Keszthely 1973, 109–130

1976 Almost-disjoint sets, the dense set problem, and the partition calculus. Ann. Math. Logic *10*, 401–439

1979 Independence proofs and combinatorics. Proc. of Symposia in Pure Math. *34*, 35–46

1982 Order types of real numbers and other uncountable linear orderings. Proc. Banff Conference on Ordered Sets (ed. I. Rival), D. Reidel Publ. Co., 239–277

BELL, J. L.

1977 Boolean-valued models and independence proofs in set theory. Clarendon Press, Oxford

BENDA, M., KETONEN, J. A.

1974 Regularity of ultrafiltres. Israel J. Math. *17*, 231–240

BLASS, A.

1977 A model without ultrafilters. Bull. Acad. Polon. Sci. *25*, 329–331

BLASZCZYK, A.

1982 Aspekty topologiczne algebr Boole'a. Universytet Ślaski

BLAŽEK, J. et al.

1983 Algebra a teoretická aritmetika. SPN, Praha

BOLZANO, B.

1851 Paradoxien des Unendlichen. Leipzig (český překlad Paradoxy nekonečna, překl. O. Zich, NČSAV, Praha 1963)

BROUWER, L. E. J.

1975 Collected works. North Holland, Amsterdam

BUKOVSKÝ, L.

1965 The continuum problem and the powers of alephs. Comment. Math. Univ. Carolinae *6*, 181–197

1979 Štruktura reálnej osi. Veda, Bratislava
BURKILL, H., MIRSKY, L.
1973 Monotonicity. J. Math. Anal. Appl. *41*, 391–410
CANTOR, G.
1932 Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts Berlin 1932 (druhé vydání G. Olms, Hildesheim 1962)
CARTAN, H.
1937 Filtres et ultrafiltres. C. R. Acad. Sci. Paris *205*, 777–779
COHEN, P. J.
1963 The independence of the continuum hypothesis. Proceedings of the Nat. Acad. Sci. USA *50*, 1143–1148
1966 Set theory and the continuum hypothesis. Benjamin, New York (ruský překlad Mir, Moskva 1969)
COMFORT, W. W., NEGREPONTIS, S.
1974 The theory of ultrafilters. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
1982 Chain conditions in topology. Cambridge Univ. Press
DE BRUIN, H. G., ERDÖS, P.
1951 A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sec. A 54 = Indag. Math. *13*, 369–373
DEVLIN, K. J.
1978 $\aleph_1$-trees. Ann. Math. Logic *13*, 267–330
1984 Constructibility. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
DEVLIN, K. J., JENSEN, R. B.
1975 Marginalia to a Theorem of Silver. In: Logic Conference Kiel 1974 (ed. G. H. Müller et al.), Lecture Notes in Maths. *499*, 115–142, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
DEVLIN, K. J., JOHNSBRATEN, H.
1974 The Souslin problem. Lecture Notes in Math. 405, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
DEVLIN, K. J., SHELAH, S.
1978 A weak version of $\diamond$ which follows from $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Israel J. Math. *29*, 239–247
DRAKE, F. R.
1974 Set Theory, An Introduction to Large Cardinals. North-Holland, Amsterdam
DUSHNIK, B., MILLER, E. W.
1941 Partially ordered sets. Amer. J. Math. *63*, 600–610
EASTON, W. B.
1970 Powers of regular cardinals. Ann. Math. Logic *1*, 139–178
ELLENTUCK, E.
1974 A new proof that analytic sets are Ramsey. J. Symbolic Logic *39*, 163–165
ERDÖS, P., HAJNAL, A.
1966 On a problem of B. Jónsson. Bull. Acad. Polon. Sci. *14*, 19–23
ERDÖS, P., HAJNAL, A., MÁTÉ, A., RADO, R.
1984 Combinatorial Set Theory North-Holland, Amsterdam
ERDÖS, P., HAJNAL, A., RADO, R
1965 Partition relations for cardinal numbers. Acta. Math. Acad. Sci Hungar. *16*, 93–196
ERDÖS, P., HECHLER, S. H.
1975 On maximal almost-disjoint families over singular cardinals. Infinite and Finite Sets, vol 1 (ed. A. Hajnal et al.), 597–604
ERDÖS, P., RADO, R.
1950 A combinatorial theorem. Journal London Math. Soc. *25*, 249–255
1952 Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set. Proc. London Math. Soc. (3), *2*, 417–439
1956 A partition calculus in set theory. Bull. Amer. Math. Soc *62*, 427–489

1960 Intersection theorems for systems of sets. J. London Math. Soc. *35*, 85 90

ERDÖS, P., SZEKERES, G.

1935 A combinatorial problem in geometry. Compocito Math. *2*, 464–470

ERDÖS, P., TARSKI, A.

1943 On families of mutually exclusive sets. Ann. of Math. *44*, 315–329

FELGNER, U. (editor)

1979 Mengenlehre. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt

FODOR, G.

1956 Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen. Acta Sci. Math. (Szeged) *17*, 139–42

1966 On stationary sets and regressive functions. Acta Sci. Math. (Szeged) *27*, 105–110

FRAENKEL, A. A.

1922 Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. Math. Annalen *86*, 230–237

1966 Set Theory and Logic. Addison-Wesley, Reading

FRAENKEL, A. A., BAR-HILLEL, Y., LEVY, A.

1973 Foundations of Set Theory. North-Holland, Amsterdam

FRAISSÉ, R.

1948 Sur la comparaison des types d'ordres. C. R. Acad. Sci. Paris *226*, 1330

FROLÍK, Z.

1968 Fixed points of maps of extremally disconnected spaces and complete Boolean algebras. Bull. Acad. Polon. Sci. *16*, 269–275

GALVIN, F., HAJNAL, A.

1975 Inequalities for cardinal powers. Ann. of Math. *101*, 491–498

GALVIN, F., PRIKRY, K.

1973 Borel sets and Ramsey's theorem. J. Symbolic Logic *38*, 193–198

GENTZEN, G.

1936 Die Wiederspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Annalen *112*, 493–565

GINSBURG, S.

1955 Order types and similarity transformations. Trans. Amer. Math. Soc. *79*, 341–361

GITIK, M.

1980 All uncountable cardinals can be singular. Israel J. Math. *35*, 61–88

GOODSTEIN, R. L.

1944 On the restricted ordinal theorem. J. Symbolic Logic *9*, 33–41

GÖDEL, K.

1938 The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis. Proceedings of the Nat. Acad. Sci. USA *24*, 556–557

1939 Consistency proof for the generalized Continuum Hypothesis. Proceedings of the Nat. Acad. Sci. USA *25*, 220–225

1940 The Consistency of the Axiom of Choice and of the generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory. Annals of Math. Studies 3, Princeton

GRAHAM, R. L., ROTHSCHILD, B. L., SPENCER, J. H.

1980 Ramsey theory. John Wiley, New York

GREGORY, J.

1976 Higher Souslin trees and the generalized continuum hypothesis. J. Symbolic Logic *41*, 663–671

HÁJEK, P.

1966 The consistency of Church's alternatives. Bull. Acad Polon. Sci. *14*, 424–430

HAJNAL, A.

1961 Proof of a conjecture of S. Ruziewicz. Fund. Math. *50*, 123–128

HAJNAL, A., JUHÁSZ, I.

1967 Discrete subspaces of topological spaces. Indag. Math. *29*, 343–356

HALMOS, P. R.
1950 Measure theory. Van Nostrand, New York
1966 Lectures on Boolean algebras. Van Nostrand, New York
HALPERN, J. D., LEVY, A
1971 The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. Axiomatic set theory (ed. D. S. Scott), Proc. Symp. in Pure Math. Amer. Math. Soc. *13*, Part I, 83–134
HAUSDORFF, F.
1914 Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (druhé vydání Chelsea, New York 1949)
HIGMAN, G.
1952 Ordering by divisibility in abstract algebras. Proc. London Math. Soc. *2*, 226–336
JECH, T.
1967 Nonprovability of Souslin's hypothesis. Comment. Math. Univ. Carolinae *8*, 291–305
1968 ω_1 can be measurable. Israel J. Math. *6*, 367–367
1973 Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals. Ann. Math. Logic *5*, 165–198
1973 The Axiom of Choice. North-Holland, Amsterdam
1978 Set theory. Academic Press, New York
JECH, T., MAGIDOR, M., MITCHELL, W., PRIKRY, K.
1980 Precipitous ideals. Journal Symb. Logic *45*, 1–8
JECH, T., PRIKRY, K.
1979 Ideals over uncountable sets. Application of almost disjoint functions and generic ultrapowers. Memoirs Amer. Math. Soc. *24*
JENSEN, R. B.
1972 The Fine Structure of the Constructible Hierarchy. Ann. Math. Logic *4*, 229–308
JENSEN, R., KUNEN, K.
1971 Some combinatorial properties of L and V (preprint)
JORDAN, C.
1893 Cours d'Analyse. Gauthier Villars, Paris
JUHÁSZ, I.
1971 Cardinal functions in topology. Math. Centre, Amsterdam
1980 Cardinal functions in topology – ten years later. Math. Centre, Amsterdam
KAC, M., ULAM, S. M.
1968 Mathematics and Logic. Retrospect and Prospects, F A. Praeger, Publishers (český překlad SNTL, Praha 1977)
KANAMORI, A.
1982 On Silver's and related principles. Logic Colloquium *80* (ed. D van Dalen et al.), North-Holland, 153–172
KANAMORI, A., MAGIDOR, M.
1978 The evolution of large cardinal axioms in set theory. Higher Set Theory, Lecture Notes in Math *669*, 99–275
KATĚTOV, M.
1951 Remarks on Boolean algebras Coll. Math *2*, 229–235
1967 A theorem on mappings. Comment Math. Univ. Carolinae *8*, 431–433
KIRBY, L. A. S., PARIS, J.
1982 Accessible independence results for Peano Arithmetic. Bull. London Math Soc *14*, 285–293
KRIPKE, S.
1967 An extension of a theorem of Gaifman–Hales–Solovay. Fund. Math. *61*, 29–32
KUNEN, K.
1971 Elementary embeddings and infinitary combinatorics. Journal Symb. Logic *36*, 407–413
1977 Combinatorics. Handbook of Math. Logic (ed. J. Barwise), North Holland, Amsterdam, 371–401
1978 Saturated ideals. Journal Symb. Logic *43*, 65–76

1980 Set Theory, An Introduction to Independence Proofs. North Holland, Amsterdam

KURATOWSKI, K.

1958 Topologie I. PWN, Varšava (ruský překlad Mir, Moskva 1972)

KUREPA, D.

1937 Ensembles linéaries et une class de tableaux ramifiés. Publ. Math. Univ. Belgrade *6*, 129–160

1968 Around the general Suslin problem. Proc. Internat. Symp. on Top. Herceg-Novi, Beograd 1969, 239–245

LAVER, R.

1971 On Fraisse's order type conjecture. Ann. of Math. *93*, 89–111

1976 Well-quasi-orderings and sets of finite sequences. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. *79*, 1–10

1976 On the consistency of Borel's conjecture. Acta mathematica *137*, 151–169

LAVER, R., SHELAH, S.

1981 The $\aleph_2$-Souslin hypothesis. Trans. Amer. Math. Soc. *264*, 411–417

LEVY, A.

1979 Basic Set Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg

MAC NEILLE, H. M

1937 Partially ordered sets. Trans. Amer. Math. Soc. *42*, 416–460

MAGIDOR, M.

1977 On the singular cardinals problem I. Israel J. Math. *28*, 1–31

1977 On the singular cardinals problem II. Ann. of Math *106*, 517–547

1978 Changing cofinality of cardinals. Fund. Math. *99*, 61–71

MAHARAM, D.

1947 An algebraic characterization of measure algebras. Ann. Math. *48*, 154–167

MARTIN, D. A., SOLOVAY, R. M.

1970 Internal Cohen extensions. Ann. Math. Logic *2*, 143–178

MATHIAS A. R. D.

1977 Happy families. Ann. Math. Logic *12*, 59–111

1979 Surrealist landscape with figures (a survey of recent results in set theory). Period. Math. Hungarica *10*, 109–175

MILLER, E. W.

1943 A note on Souslin's problem, Amer. J. Math. *65*, 673–678

MITCHELL, W. J.

1972 Aronszajn trees and the independence of the transfer property. Ann. Math. Logic *5*, 21–46

MONK, J. D., SOLOVAY, R. M.

1972 On the number of complete Boolean algebras. Algebra Univ. *2*, 365–368

MORAYNE, M.

1980 O różnickowalności funkcji Peano (preprint), Uniwersytet Wroclawski

MOSCHOVAKIS, Y. N.

1980 Descriptive Set Theory North-Holland, Amsterdam

MYCIELSKI, J.

1964 On the axiom of determinateness. Fund Math. *53*, 205–224

MYCIELSKI, J., ŚWIERCZKOWSKI, S.

1964 On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness. Fund. Math. *54*, 67–71

NASH-WILLIAMS, C. ST. J. A.

1968 On better-quasi-ordering transfinite sequences. Proc. Camb. Phil. Soc. *64*, 273–290

NEŠETŘIL, J.

1979 Teorie grafů. SNTL, Praha

OXTOBY, J. C.

1971 Measure and category. Springer-Verlag, Berlin (ruský překlad Mir, Moskva 1974)

PINCUS, D.
1974 Cardinal representatives. Israel J. Math. *18*, 321–344
POSPÍŠIL, B.
1937 Remark on bicompact spaces. Ann. of Math. *38*, 845–846
QUINE, W. V.
1963 Set theory and its logic. Cambridge, Massachusetts
RAMSEY, F. P.
1930 On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc. *30*, 264–286
RASIOWA, H., SIKORSKI, R.
1950 A proof of the completeness theorem of Gödel. Fund. Math. *37*, 193–200
RIEGER, L.
1951 On free $\aleph_\xi$-complete Boolean algebras. Fund. Math. *38*, 35–52
RUBIN, H.
1960 Two propositions equivalent to the axiom of choice only under both the axioms of extensionality and regularity. Notices Amer. Math. Soc. *7*, 381
SCOTT, D. S.
1961 Measurable cardinals and constructible sets. Bull. Acad. Polon. Sci. *9*, 521–524
1967 A proof of the independence of the continuum hypothesis. Math. Syst. Theory *1*, 89–111
SHELAH, S.
1975 A compactness theorem for singular cardinals, Free Algebras, Whitehead problem and transversals. Israel J. Math. *21*, 319–349
1979 On the successors of singular cardinals. Logic Colloquium 78 (ed. M. Boffa et al.), 357–380
1982 Proper forcing. Lecture Notes in Maths. 940, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg
SHOENFIELD, J. R.
1971 Unramified forcing. Axiomatic Set Theory (ed. D. S. Scott), Proc. Symp. in Pure Maths. Amer. Math. Soc. *13*, Part I, 357–382
1977 Axioms of Set Theory. Handbook of Mathematical Logic (ed. J. Barwise), North-Holland, Amsterdam, 321–344
SIERPIŃSKI, W.
1934 Hypothèse du Continu. Monografie Matematyczne 4, Warszawa–Lwow
1950 Sur les types d'ordre des ensembles linéaires. Fund. Math. *37*, 253–264
SIKORSKI, R.
1964 Boolean algebras. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (ruský překlad Mir, Moskva 1969)
SILVER, J.
1970 Every analytic set is Ramsey. J. Symbolic Logic *35*, 60–64
1971 The independence of Kurepa's conjecture and two-cardinal conjectures in model theory. Axiomatic Set Theory (ed. D. S. Scott), Proc. Symp. in Pure Math. Amer. Math. Soc. *13*, Part I, 383–390
1975 On the singular cardinals problem. Proc. Intern. Congress of Mathematicians, Vancouver 1974, Vol. I, 265–268
SIMPSON, S. G.
1984 BQO Theory and Fraïssé's Conjecture. In: R. Mansfield, G. Weitkamp, Descriptive Set Theory, Oxford Logic Guides, Oxford University Press
SMITH, E. C., TARSKI, A.
1957 Higher degrees of distributivity and completeness in Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. *84*, 230–257
SOLOVAY, R. M.
1966 New proof of a theorem of Gaifman and Hales. Bull. Amer. Math. Soc. *72*, 282–284
1970 A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. Ann. of Math. *92*, 1–56
1971 Real-valued measurable cardinals. Axiomatic Set Theory (ed. D. S. Scott), Proc. Symp. in Pure Math. Amer. Math. Soc. *13*, Part I, 397–428

1974 Strongly compact cardinals and the GCH. Proc. Tarski Symposium (ed. L. Henkin). Amer. Math Soc. Proc. Symposia Pure Math *25*, 365-372

SOLOVAY, R. M., TENNENBAUM, S.

1971 Iterated Cohen extensions and Souslin's problem. Ann. of Math. *94*, 201–245

SPECKER, E.

1949 Sur un problème de Sikorski. Colloq. Math. *2*, 9–12

STONE, M. H.

1934 Boolean algebras and their application to topology. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *20*, 197–202

1936 The representation theorem for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. *40*, 37–111

1937 Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. *41*, 375–481

SUSLIN, M. Ja.

1920 Problème 3. Fund. Math. *1*, 223

SZEMERÉDI, E.

1975 On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Arith *27*, 199-245

ŠTĚPÁNEK, P.

1981 Souslin's Hypothesis, Borel's Conjecture and the inner model HOD. Bull. Acad. Polon. Sci. *29*, 193–197

ŠTĚPÁNEK, P., BALCAR, B.

1977 Embedding theorems for Boolean algebras and consistency results on ordinal definable sets. J. Symbolic Logic *42*, 64–76

ŠTĚPÁNEK, P., VOPĚNKA, P.

1967 Decomposition of metric spaces into nowhere dense sets. Comp. Math. Univ. Carolinae *8*, 387–403

TARSKI, A.

1924 Sur les ensembles finis. Fund. Math. *6*, 45–95

TODORČEVIĆ, S.

1981 Trees, subtrees, and order types. Ann. Math. Logic *20*, 233–268

1981 Some consequences of MA + $\neg$wKH. Top. and its Appl. *12*, 187–202

1984 Trees and linearly ordered sets. Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam

ULAM, S.

1930 Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre. Fund. Math. *16*, 140–150

VAN DER WAERDEN, B. L.

1927 Beweis einer Baudetschen Vermutung. Nieuw Arch. Wisk *15*, 212–216

1971 How the proof of Baudet's conjecture was found. Studies in Pure Mathematics (ed L Mirsky) Academic Press, New York, 251–260

VAN DOUWEN, E. K.

1984 The integers and topology. Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam

VAN MILL, J.

1984 An introduction to $\beta\omega$ Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam

VLADIMIROV, D. A.

1969 Bulevy algebry. Nauka, Moskva

VON NEUMANN, J.

1923 Zur Einführung der transfiniten Zahlen J von Neumann Collected Works, Pergamon Press, Oxford, London 1961

VOPĚNKA, P.

1965 On ∇-model of set theory. Bull. Acad. Polon. Sci. *13*, 611–614

1967 General theory of ∇-models. Comment. Math. Univ. Carolinae *8*. 145–170

1979 Mathematics in the Alternative Set Theory. B G. Teubner, Leipzig (ruský překlad Mir, Moskva 1983)

VOPĚNKA, P., HÁJEK, P.
1972 The Theory of Semisets. North-Holland, Amsterdam a Academia, Praha
VOPĚNKA, P., HRBÁČEK, K.
1966 On strongly measurable cardinals. Bull. Acad. Polon. Sci. *14*, 587–591
WAGE, M. L.
1979 Almost disjoint sets and Martin's axiom. Journal Symb. Logic *44*, 313–318
WEGLORZ, B.
1979 Some σ-fields of subsets of reals. Logic Colloquium 78 (ed. M. Boffa et al.), North-Holland, Amsterdam, 427–434
WEISS, W.
1978 The Blumberg problem. Trans. Amer. Math. Soc. *230*, 71–85
WILLIAMS, N. H.
1977 Combinatorial Set Theory. North-Holland, Amsterdam
ZERMELO, E.
1908 Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. Math. Annalen *65*, 261–281
ZORN, M.
1935 A remark on metod in transfinite algebra. Bull. Amer. Math. Soc. *41*, 667–670

Dodatek k seznamu literatury

ABRAHAM, U., MAGIGOR, M

2001 Cardinal arithmetic. Handbook of Set Theory (ed. M. Foreman, A. Kanamori, M Magidor), v tisku

BALCAR, B., SIMON, P

1988 On collections of almost disjoint families. Comm. Math. Univ. Carolinae *29(4)*, 631–646

1989 Disjoint refinement. Handbook of Boolean Algebras (ed. J. D. Monk a R. Bonnet), vol *2*, North-Holland, 333–386

2001 The name for Kojman-Shelah collapsing function. Ann. Pure Appl. Logic *1329*, v tisku

BARTOSZYŃSKI, T., JUDAH, H

1995 Set Theory: On the structure of the real line. A. K. Peters, Wellesley, Massachusets

BAUMGARTNER, J E.

1983 Iterated forcing. Surveys in Set Theory (ed. A. R. D. Mathias), Cambridge Univ. Press, 1–59

BURKE, M R., MAGIDOR, M

1990 Shelah's pcf theory and its applications. Ann. Pure Appl. Logic *50(3)*, 207–254

CICHOŃ, J., KAMBURELIS, T., PAWLIKOWSKI, J

1985 On dense subsets of the measure algebra Proc Amer Math Soc *94*, 142–146

DEVLIN, K.J

1984 Constructibility. Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin

DORDAL, P L

1987 A model in which the base-matrix tree cannot have cofinal branches. J Symbolic Logic *52*, 651–664

DOW, A

1995 More set-theory for topologists. Top. and Appl. *64*, 243–300

DOW, A., HART, K P

1994 Co-absolutes of $U(\omega_1)$. Top. and Appl. *55*, 185–194

DŽAMONJA, M., SHELAH, S

1999 Similar but not the same: various versions of the club principle J. Symbolic Logic *64*, 180–198

FARAH, I

2000 Analytic Quotients. Memoirs of the Amer. Math. Soc. *702*

FOREMAN, M., MAGIDOR, M., SHELAH, S

1988 Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters. Part I. Ann Math. *127*, 1–47

FOREMAN, M., WOODIN, W H

1991 The generalized continuum hypothesis can fail everywhere. Ann. Math. *133*, 1–35

FREMLIN, D H

1989 Measure algebras. Handbook of Boolean algebras (ed. J. D. Monk a R Bonnet), vol *3*, North-Holland, 877–980

1993 Real-valued-measurable cardinals. Set Theory of Reals (ed. H. Judah), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 151–304

HOLZ, M., STEFFENS, K., WEITZ, E.

1999 Introduction to Cardinal Arithmetic. Birkhäuser Verlag, Basel

JECH, T.

1986 Multiple Forcing. Cambridge Univ. Press

1992 Singular cardinal problem: Shelah's theorem on $2^{\aleph_\omega}$. Bulletin of the London Mathematical Society, vol. *24*, 127–139

1995 Singular cardinals and the pcf theory. Bull. Symb. Logic *1*, 408–424

KANAMORI, A.

1994 The Higher Infinite. Springer-Verlag

KOJMAN, M.

1995 The abc of pcf. rukopis

1998 Exact upper bounds and their uses in set theory. Ann. Pure Appl. Logic, *92*, 267–282

KOJMAN, M., SHELAH, S.

2001 Fallen cardinals. Ann. Pure Appl. Logic *1329*, v tisku

KUNEN, K.

1976 Some points in βN. Proc. Cambridge Phil. Soc. *80*, 385–398

1998 Bohr topologies and partition theorems for vector spaces. Top. and Appl. *90*, 97–107

MILLER, E. W.

1982 The Baire category theorem and cardinals of countable cofinality. J. Symbolic Logic *47*, 275–288

MONK, J. D., BONNET, R. (editoři)

1989 Handbook of Boolean Algebras, Vol. *1–3*, North-Holland

NYIKOS, P. J.

1980 A provisional solution to the normal Moore space problem. Proc. Amer. Math. Soc. *78*, 429–435

SHELAH, S.

1984 On cardinal invariants of the continuum. Contemporary Mathematics *31*, 183–207

1994 Cardinal Arithmetic. Clarendon Press, Oxford

1998 Proper and Improper Forcing. Springer-Verlag

SHELAH, S., SPINAS, O.

1998 The distributivity numbers of finite products of $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$. Fund. Math. *158*, 81–93

SIMON, P.

1993 Products of sequentially compact space. Rend. dell'Inst. di Mat. Univ. Trieste *XXV*, 447–450

TODORCEVIC, S.

1989 Partition Problems in Topology. Contemporary Mathemetics *84*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island

TODORCEVIC, S., FARAH, I.

1995 Some Applications of the Method of Forcing. Mathematical Institute, Belgrade and Yenisei, Moscow

WOODIN, W. H.

1999 The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal. Walter de Gruyter. Berlin, New York

Seznam symbolů

Kapitola I

$=$	rovnost 1.4
$\in$	náležení 1.4
$\neg$	negace 1.4
$\&, \vee$	konjunkce a disjunkce 1.4
$\rightarrow$	implikace 1.4
$\leftrightarrow$	ekvivalence 1.4
$\forall$	obecný kvantifikátor 1.4
$\exists$	existenční kvantifikátor 1.4
$\varphi(x)$	formule s volnou proměnnou x 1.10
$\subseteq$	inkluze 2.3
$\subset$	ostrá inkluze 2.3
$\{x \in a: \varphi(x)\}$	množina všech prvků z a, pro které platí φ 2.6
$\cap$	průnik dvou množin 2.7
0	prázdná množina 2.8
$\{a, b\}$	dvouprvková množina 2.11
$\{a\}$	jednoprvková množina 2.11
$\langle a, b\rangle$	uspořádaná dvojice 2.13
$\bigcup$	suma množiny (třídy) 2.18
$\cup$	sjednocení dvou množin 2.19
$\mathscr{P}(a)$	potence množiny a 2.22
$\{x: \varphi(x)\}$	třída všech množin, pro které platí φ 3.1
$\mathbf{V}$	univerzální třída 3.10
$-A$	doplněk třídy A 3.10
$\bigcap$	průnik množiny (třídy) 3.12
$A \times B$	kartézský součin 4.8
X^n	třída všech uspořádaných n-tic prvků z X 4.13
$\mathbf{E}$	$\in$-relace 4.16
$\mathbf{Id}$	relace identity 4.16

$\mathrm{Dom}(X)$	definiční obor relace 4.17
$\mathrm{Rng}(X)$	obor hodnot relace 4.17
$X''Y$	obraz třídy Y daný relací X 4.19
$X \upharpoonright Y$	zúžení relace X na třídu Y 4.19
R^{-1}	relace inverzní k R 4.25
$R \circ S$	skládání relací 4.25
$F: X \to Y$	F je zobrazení X do Y 4.28
gf	složení zobrazení f a g 4.29
$(\exists x \in A), (\forall x \in A)$	relativizované kvantifikátory 4.32
$F[X]$	obraz třídy X daný zobrazením F 4.33
$f^{\to}, f^{\leftarrow}$	indukovaná zobrazení mezi potenčními množinami 4.34
${}^{a}A$	třída všech zobrazení množiny a do třídy A 4.36
$\langle F_j : j \in J \rangle$	soubor množin 4.39
$\bigcup_{j \in J} F_j$	sjednocení souboru množin 4.40
$\bigcap_{j \in J} F_j$	průnik souboru množin 4.40
$\bigtimes_{j \in J} F_j$	kartézský součin souboru množin 4.43
$\leq$	relace uspořádání 5.4
$<$	relace ostrého uspořádání 5.4
max, min	největší a nejmenší prvek 5.8
sup, inf	supremum, infimum 5.8
$[x, \to)$	hlavní filtr v uspořádané množině 5.16
$(\leftarrow, x]$	hlavní ideál v uspořádané množině 5.16
$[u]_R$	třída ekvivalence, ve které leží u 5.35
A/R	faktorizace množiny A podle relace R 5.37
$\ll$	zjemnění rozkladu 5.39
$x \approx y$	množiny x, y mají stejnou mohutnost 5.43
$\preccurlyeq, \prec$	srovnávání mohutností 5.43
$\mathrm{Fin}(x)$	x je konečná množina 6.2
Fin	třída všech konečných množin 6.7
ω	množina všech přirozených čísel 6.15
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{I}$	uzavřený interval reálných čísel $0 \leq x \leq 1$
$s(n)$	přirozené číslo bezprostředně následující za n 6.17
$x \triangle y$	symetrický rozdíl množin 6.28
$[A]^{<\omega}$	množina všech konečných podmnožin množiny A 6.31
${}^{<\omega}A$	množina všech konečných posloupností prvků z A 6.31

$\mathscr{F}$	filtr na množině 8.5
$\mathscr{I}$	ideál na množině 8.6
$\mathscr{F}^*$	duální ideál k filtru $\mathscr{F}$ 8.9
$\mathscr{I}^*$	duální filtr k ideálu $\mathscr{I}$ 8.9
$\mathscr{F}_{\mathrm{F}}, \mathscr{I}_{\mathrm{F}}$	Fréchétův filtr a ideál na množině přirozených čísel 8.11
$d(A), d^*(A), d_*(A)$	hustota, horní a dolní hustota množiny A přirozených čísel 8.11
βX	množina všech ultrafiltrů na X 8.19
$\mathscr{U}(X)$	množina všech uniformních ultrafiltrů na X 8.20
$\mathscr{F}$-lim	limita posloupnosti podle filtru $\mathscr{F}$ 8.23
η, ν	konečně aditivní míry na $\mathscr{P}(\omega)$ 8.29
LIM	Banachova limita pro omezené posloupnosti reálných čísel 8.34
βf	indukované zobrazení ultrafiltrů 8.48

Kapitola II

On	třída ordinálních čísel 1.4
$\alpha, \beta, \gamma \ldots$	proměnné pro ordinální čísla 1.11
$\alpha + \beta, \alpha \,.\, \beta$	součet a součin ordinálních čísel 3.12
$\alpha + 1$	následník ordinálního čísla 3.13
α^β	mocnina ordinálních čísel 3.23
ε_0	nejmenší ε-číslo 3.24
Cn	třída kardinálních čísel 4.2
$\lvert x \rvert$	mohutnost množiny x 4.2
$\varkappa, \lambda, \ldots$	proměnné pro kardinální čísla 4.2
$\varkappa^+$	následník kardinálního čísla 4.7
$\aleph$	funkce alef 4.8
$\omega_\alpha, \aleph_\alpha$	α-té nekonečné kardinální číslo 4.9
$\varkappa + \lambda, \varkappa \,.\, \lambda$	součet a součin kardinálních čísel 4.12
cf	kofinál 4.20
$\varkappa^\lambda$	mocnina kardinálních čísel 5.2
$\sum_{i \in I} \varkappa_i, \prod_{i \in I} \varkappa_i$	součet a součin souboru kardinálních čísel 5.7
$[X]^\lambda, [X]^{<\lambda}$	množina všech částí množiny X, které mají mohutnost λ (menší než λ) 5.9
$\varkappa^{<\lambda}$	slabá mocnina kardinálních čísel 5.11
$\gimel$	funkce gimel 5.20
$\bar{U}_R(u)$	R-tranzitivní obal množiny u 6.8
ϱ_R	typová funkce fundované relace R 6.13

V_α	kumulativní hierarchie 6.16
WF	fundované jádro 6.16
L_α	hierarchie konstruovatelných množin 7.3
L	třída konstruovatelných množin 7.3
Con (T)	teorie T je bezesporná 7.11

Kapitola III

$\chi(\mathscr{F})$	charakter filtru 1.9
$c(\ )$	Suslinovo číslo topologického prostoru nebo uspořádané množiny 1.22
Cub (δ)	filtr uzavřených neomezených podmnožin δ 2.8
$E(\nu)$	množina ordinálů s kofinalitou ν 2.11
ΔA_α	diagonální průnik 2.13
π_i	projekce na i-tou složku součinu 2.39
$\diamondsuit$	diamantový princip 2.40
$\diamondsuit_\lambda, \diamondsuit_\lambda(E)$	diamantové principy pro kardinál λ a stacionární množinu E 2.43
$\diamondsuit'_\lambda(E), \diamondsuit^*_\lambda(E)$	2.44, 2.47
$\square_\lambda, \square$	2.50
tp (L)	typ lineárně uspořádané množiny 3.2
φ^*	inverzní typ k typu φ 3.4
η, λ	typy uspořádání racionálních čísel a reálné přímky 3.5
$F \mid X$	zúžení systému množin 3.22
$H_T(x), H(T)$	výška vrcholu ve stromu a výška stromu 3.31
T_α	α-tá hladina stromu T 3.31
st (x)	stupeň větvení vrcholu x 3.49
$\varkappa \to (\lambda)^r_\mu$	rozkladová šipka 4.3
$\varkappa \to (\varkappa, \omega)^2$	4.70
$\varkappa \to (\lambda)^r_{<\mu}$	4.76
$\varkappa \to (\alpha)^{<\omega}_2$	5.21
$\mathscr{E}$	Ellentuckův systém 4.30
$\mathscr{R}$	systém ramseyovských množin 4.30
$A(>t)$	4.32
$\exp^n \varkappa$	n-tá iterace mocniny $2^\varkappa$ 4.72
Cub $(\varkappa, \lambda)$	filtr uzavřených neomezených množin na $[\lambda]^{<\varkappa}$ 5.37

Kapitola IV

$\wedge, \vee, -$	booleovské operace průseku, spojení a komplementu 1.1
0, **1**	nejmenší a největší prvek Booleovy algebry 1.1

$\mathrm{CO}(X)$	algebra obojetných množin topologického prostoru X 1.2(e)
$\mathrm{RO}(X)$	algebra regulárních otevřených množin topologického prostoru X 1.24, 1.5
$\bigwedge, \bigvee$	nekonečné operace průseku a spojení 1.16
$\mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{int}(A)$	uzávěr a vnitřek množiny A v topologickém prostoru
$\mathrm{r}(A)$	regularizace 1.23
$\mathrm{Borel}(X)$	σ-algebra borelovských množin 1.29(a)
$\mathrm{Baire}(X)$	σ-algebra množin s Baireovou vlastností 1.29b
$B \mid b$	zúžení Booleovy algebry 2.1
$x \perp y$	disjunktní prvky algebry 2.2
$\mathrm{c}(B)$	Suslinovo číslo algebry B 2.3
$\mathrm{sat}(B)$	saturovanost algebry 2.4
$\mathrm{cm}(B)$	zúplnění algebry B 2.18
B^+	množina nenulových prvků algebry B 2.23
$B_1 \odot B_2$	volný součin algeber 2.23
$F(I, J)$	množina konečných funkcí 2.25(a)
$C(I, J)$	úplná Booleova algebra určená množinou $F(I, J)$ 2.25(a)
$F(I, J, \lambda)$	systém funkcí 2.25(f)
$C(I, J, \lambda)$	úplná Booleova algebra určená množinou $F(I, J, \lambda)$ 2.25(f)
$\leqslant$	zjemnění rozkladů 2.27
$\mathrm{Ult}(B)$	množina ultrafiltrů v B 2.52
φ^M	relativizace formule φ 3.1
M, N	modely teorie množin 3.3
$\mathscr{P}^M$, V_α^M	relativizace operace potence a kumulativní hierarchie 3.16
$\mathrm{Ob}(\sigma, M)$	třída obrazů množiny σ přes relace z M 3.18
$M[G]$	generické rozšíření modelu M 3.27, 3.53
$\omega_1^M, (2^\omega)^M$	kardinální čísla ω_1, 2^ω v modelu M 3.31
$M_\alpha^{(B)}$	hierarchie jmen 3.52
$M^{(B)}$	booleovské univerzum 3.52
$\mathrm{typ}_B(a)$	typová funkce hierarchie jmen 3.52
$\check{x}$	kanonické jméno množiny x 3.52
i_G	interpretace jmen 3.53
$\lVert \varphi \rVert$	booleovská hodnota formule 3.54
$\Vdash$	relace forsingu 3.57

Rejstřík

RNDr. BOHUSLAV BALCAR, DrSc.
prof. RNDr. PETR ŠTĚPÁNEK, DrSc.

TEORIE MNOŽIN

Vydala Academia, nakladatelství AV ČR,
Legerova 61, 120 00 Praha 2
s podporou
Akademie věd České republiky,
firmy Hewlett Packard, spol. s r. o.,
a Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy
České republiky, MSM 11 00 00 00 1

Vazbu navrhl Oleg Man
Redaktorka publikace RNDr. Alena Hanáková
Redaktor 2. vydání Mgr. Aleš Baďura
Technický redaktor Miroslav Konečný
Technická redaktorka 2. vydání Kateřina Stejskalová
Všechny dodatky byly vysázeny počítačovou sazbou programem TEX
Tisk **SERIFA**, s. r. o., Jinonická 80, Praha 5

Vydání 2., opravené a rozšířené. 2001
Ediční číslo 1560
ISBN 80-200-0470-X

Knihy si můžete zakoupit