20 Parciální diferenciální rovnice

20.1 Základní termíny

Definice. Vektor tvaru $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, kde $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, \dots, m$, nazvu m-dimenzionálním multiindexem **výšky** (někdy též **řádu**) $|\alpha|$, kde

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \,.$$

Definice. Pro multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ a funkci $u \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná otevřená množina, definujeme **derivaci** u **dle multiindexu** α, v bodě $x \in \Omega$,

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \,, \qquad x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega \,. \tag{1}$$

Pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme množinu (často se říká "formální vektor") všech parciálních derivací řádu k funkce $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, v bodě $x \in \Omega$,

$$D^{(k)} u(x) := \{ D^\alpha u(x);\, |\alpha| = k \} \,,$$

pro $\vec{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ píšeme podobně jako výše

$$D^\alpha \vec{f}(x) := \big(D^\alpha f_1(x), \dots, D^\alpha f_s(x) \big)^T \,,$$

$$D^{(k)} \vec{f}(x) := \{ D^\alpha \vec{f}(x);\, |\alpha| = k \} \,.$$

Definice. Buďte $d, n \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Buď dále $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina. **Parciální diferenciální rovnicí** (dále PDR) pro neznámou funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nazvu výraz tvaru

$$F\big(x, u(x), Du(x), \cdots, D^{(n-1)} u(x), D^{(n)} u(x)\big) = 0 \,, \tag{2}$$

kde

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^{d^{n-1}} \times \mathbb{R}^{d^n} \to \mathbb{R} \tag{3}$$

je daná funkce.

Poznámka. **Řádem** rovnice (2) rozumíme řád nejvyšší derivace u, která "se vyskytuje" v (2). BÚNO: řád (2) je n.

Definice. Buďte $s, d, n \in \mathbb{N}$, $s, d \geq 2$. Buď dále $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina. **Systémem** s **parciálních diferenciálních rovnic** pro neznámou vektorovou funkci $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^s$ nazvu výraz tvaru

$$\vec{F}\big(x, \vec{u}(x), D\vec{u}(x), \cdots, D^{(n-1)} \vec{u}(x), D^{(n)} \vec{u}(x)\big) = 0 \,, \tag{4}$$

kde

$$\vec{F} : \Omega \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{sd} \times \cdots \times \mathbb{R}^{sd^{n-1}} \times \mathbb{R}^{sd^n} \to \mathbb{R}^s \tag{5}$$

je daná funkce.

Poznámka. Jedna ze složek proměnné x hraje často význačnou roli tzv. časové proměnné, t. V takové situaci píšeme

$$u = u(x, t), \qquad x = (x_1, \dots, x_d) \,,$$

abychom tuto význačnou časovou proměnnou t oddělili od prostorové proměnné x. Někdy však také pro úsporu času ponecháváme časovou proměnnou jako jednu ze složek časoprostorové proměnné x, tedy například

$$u = u(x), \qquad x = (x_1, \dots, x_d, t) \,, \quad (t \equiv x_{d+1}) \,.$$

Terminologie:

Říkáme, že PDR (nebo systém PDR) je

- **stacionární**: hledané řešení není závislé na čase;
- **nestacionární (evoluční)**: hledané řešení závisí na čase.

Definice. • Parciální diferenciální rovnici (dále jen "rovnici") (2) nazveme **lineární**, lze-li ji psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|\le n} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)\,, \qquad x \in \Omega\,, \tag{6}$$

pro dané funkce a_α, f. Rovnici (6) nazveme **homogenní**, pokud $f \equiv 0$. V opačném případě jí říkáme **nehomogenní**, případně "s pravou stranou". Jsou-li všechny funkce a_α konstantní, nazýváme rovnici (6) **lineární rovnicí s konstantními koeficienty**.

Definice. • Rovnici (2) nazveme **semilineární**, lze-li ji psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|= n} a_\alpha(x) D^\alpha u = f\,, \qquad x \in \Omega\,, \tag{7}$$

pro dané funkce a_α, $f = f(x, u, Du, \dots, D^{(n-1)}u)$.

- Rovnici (2) nazveme **kvazilineární**, lze-li ji psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|= n} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{(n-1)}u) D^\alpha u(x) = f\,, \qquad x \in \Omega\,, \tag{8}$$

pro dané funkce a_α, $f = f(x, u, Du, \dots, D^{(n-1)}u)$.

Definice. • Rovnici (2) nazveme **nelineární**, pokud není lineární.

- Rovnici (2) nazveme **ryze nelineární**, je-li funkce F v (2) nelineární funkcí v některé z proměnných, do kterých dosazujeme nějakou derivací u nejvyššího řádu.

Příklad 1. *Buď $u = u(x,t)$, $t \in (0,\infty)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Potom následující evoluční PDR lze charakterizovat takto:*

- $\frac{\partial u}{\partial t} + \Big(x^2 + \cos\frac{x}{x^2+1}\Big)\Delta u = 0$ *je lineární (homogenní) rovnice 2. řádu, s nekonstantními koeficienty;*
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \Big(x^2 + \sin\big(u^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\big)^2\Big)\Delta u = 0$ *je nelineární, a přitom kvazilineární rovnice 2. řádu;*
- $\frac{\partial u}{\partial t} + x^2\Delta u + \sin\big(u^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\big)^2 = 0$ *je nelineární, a přitom semilineární rovnice 2. řádu;*
- $\frac{\partial u}{\partial t} + (\Delta u)^2 = 0$ *je ryze nelineární rovnice 2. řádu;*
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{d} a_j(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,t,u)$ *je nelineární, a přitom kvazilineární, 1. řádu.*

Příklad 2 (Základní lineární PDR)**.** *Neznámá funkce $u = u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$:*

- *Laplaceova rovnice:* $-\Delta u = 0$*;*
- *Laplaceova-Poissonova rovnice:* $-\Delta u = f(x)$*;*

- *Helmholtzova rovnice:* $-\Delta u = \lambda u$;

Neznámá funkce $u = u(x,t)$, $t \in (0,\infty)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$:

- *Rovnice vedení tepla:* $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t)$; $\quad a > 0$;
- *Vlnová rovnice:* $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t)$; $\quad c > 0$;
- *Rovnice lineárního transportu:* $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{a}(x,t)\cdot\nabla u = f(x,t)$;

Příklad 3 (Některé nelineární PDR). *Neznámá funkce* $u = u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$:

- *Nelineární Poissonova rovnice:* $-\Delta u = f(u)$;
- *Rovnice minimální plochy:* div $\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$;

Neznámá funkce $u = u(x,t)$, $t \in (0,\infty)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$:

- *Rovnice reakce-difuse:* $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(u)$; $\quad a > 0$;
- *Rovnice porézního média:* $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta(u^\gamma) = 0$; $\quad a > 0$;
- *Nelineární vlnová rovnice:* $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathit{div}(\vec{a}(\nabla u)) = f(x,t)$; $\quad c > 0$;

20.2 Klasifikace rovnic 2. řádu, převedení na kanonický tvar

Uvažujme lineární diferenciální rovnici druhého řádu, s konstantními koeficienty

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f(x)\,, \tag{9}$$

$x \in \Omega$ (neprázdná otevřená množina), $a_{ij}, b_j, c \in \mathbb{R}$. Uvažujeme-li $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ je $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall i,j, = 1,\ldots,d$, lze proto BÚNO předpokládat $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j, = 1,\ldots,d$.

Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j,=1}^d$ je proto reálná a symetrická, a tedy diagonalizovatelná (přičemž její vlastní čísla jsou reálná). Proto existují regulární (a ortogonální) matice $\mathbf{P}$ a diagonální matice $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\gamma_j)_{j=1}^d$ takové, že

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^T = \mathbf{D}\,. \tag{10}$$

Zavedeme-li nyní novou proměnnou y substitucí

$$y = \mathbf{P}\cdot x\,, \tag{11}$$

přejde (9) v

$$\sum_{j=1}^{d} \gamma_j \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + \sum_{j=1}^{d} \beta_j \frac{\partial u}{\partial y_j} + \alpha u = \widetilde{f}(y)\,, \tag{12}$$

přičemž podle zákona setrvačnosti kvadratických forem je počet prvků γ_j na diagonále matice $\mathbf{D}$, které jsou rovny nule, resp. kladné, resp. záporné, invariantní, tedy nezávisí (až na pořadí) na konkrétní transformaci (11).

Rozložení znamének prvků γ_j na diagonále matice $\mathbf{D}$ tedy určuje typ studované rovnice. Tvar (12) nazýváme **kanonickým tvarem** rovnice (9).

Definice (Klasifikace diferenciálních rovnic druhého řádu)**.** Buď matice $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\gamma_j)_{j=1}^d$ jako výše a N počet nenulových γ_j. Řekneme, že rovnice (9) je:

1. **eliptická**, jestliže $N = d$ a znaménka všech prvků matice $\mathbf{D}$ jsou stejná. Typickým zástupcem je Poissonova rovnice: $-\Delta u = f$.
2. **hyperbolická**, jestliže $N = d$ a všechna znaménka prvků $\mathbf{D}$ jsou stejná až na jedno. Typickým zástupcem je vlnová rovnice: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$.
3. **parabolická**, jestliže je $N = d - 1$, (BÚNO $\gamma_d = 0$), všechna znaménka nenulových prvků $\mathbf{D}$ jsou stejná a koeficient rovnice (9) u $\frac{\partial u}{\partial x_d}$ je nenulový a má znaménko opačné. Typickým zástupcem je rovnice vedení tepla: $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$.

Poznámka. Pro úplnost doplňujeme někdy výše zmíněnou klasifikaci i o následující dva typy rovnic (pak jsou všechny rovnice druhého řádu klasifikovány): Řekneme, že rovnice (9) je:

- **parabolická v širším slova smyslu**, jestliže $N \leq d - 1$.
- **ultrahyperbolická**, jestliže $N = d$ a alespoň dvě znaménka prvků $\mathbf{D}$ jsou kladná a alespoň dvě záporná.

Poznámka. Transformační matici $\mathbf{P}$ lze volit tak, aby na diagonále matice $\mathbf{D}$ byla pouze čísla $\{0, 1, -1\}$. Matici $\mathbf{P}$ pak již nelze nalézt ortogonální, bude pouze regulární.

Cvičení. Ukažte: buď

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = f \tag{13}$$

lineární rovnice s konstantními koeficienty v $\mathbb{R}^2$, pro kterou je alespoň jedno z čísel a, b, c, nenulové. Potom je rovnice (13)

- eliptická $\iff b^2 - 4ac < 0$;
- parabolická (v širším slova smyslu) $\iff b^2 - 4ac = 0$;
- hyperbolická $\iff b^2 - 4ac > 0$.

Poznámka. Existují také transformace, které z rovnice (12) umějí odstranit některé členy nižšího řádu. Pomocí těchto postupů (včetně vytvoření čísel $1, -1, 0$ na diagonále) se lze vždy pomocí sady transformací dopracovat k následujícímu typickému představiteli jednotlivých základních typů rovnic druhého řádu:

- Eliptický případ: $-\Delta u + ku = f$;
- Hyperbolický případ: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + ku = f$;
- Parabolický případ: $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$.

V eliptickém a hyperbolickém případě nelze obecně zaručit, že $k = 0$. Nelze tedy například převést Helmholtzovu rovnici na rovnici Laplaceovu a naopak.

20.3 Rovnice vedení tepla

Definice (Rovnice vedení tepla)**.** Parciální diferenciální rovnici

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(k(x,t,u)\nabla u) = f(x,t) \tag{14}$$

nazýváme **obecnou rovnicí vedení tepla**. Zde $c(x)$ má význam (bodové) měrné tepelné kapacity, $\rho(x)$ je bodová hustota látky, $k(x,t,u)$ je koeficient tepelné vodivosti a $f(x,t)$ vyjadřuje hustotu tepelných zdrojů. Hodnota řešení $u(x,t)$ pak vyjadřuje hodnotu teploty v čase t a bodě x.

Poznámka. Zjednodušený model je charakterizovaný volbami $c = \rho = 1$, $k = \text{konst.} = a^2 > 0$. Potom má rovnice (14) tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t)\,. \tag{15}$$

Rovnici (14) resp. (15) často doplňujeme tzv. **počáteční podmínkou**

$$u(x,0) = g_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^m\,, \tag{16}$$

kde g_0 představuje rozložení počáteční teploty v čase $t = 0$.

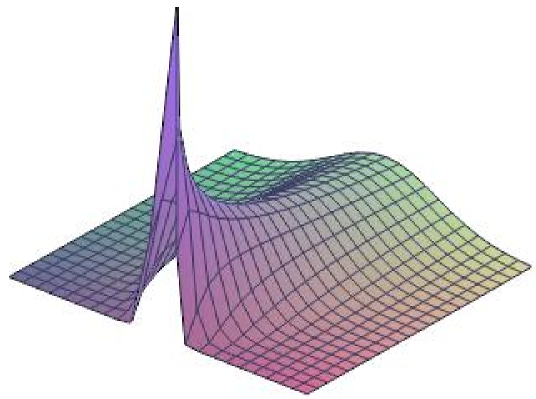
Definice (Fundamentální řešení operátoru vedení tepla)**.** Buď

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u\,, \quad a > 0\,, \tag{17}$$

operátor vedení tepla. Potom funkci (viz obrázek)

$$G(x,t) := \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^m\,, t > 0\,, \tag{18}$$

nazýváme fundamentálním řešením operátoru L.



Fundamentální řešení operátoru vedení tepla.

Věta 20.1 (Řešení RVT). • $G(x,t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times (0,+\infty))$, $\lim_{t\to 0+} G(0,t) = +\infty$, $\lim_{t\to 0+} G(x,t) = 0$ *pro všechna* $x \neq 0$.

- $\int_{\mathbb{R}^m} G(x,t)\,dx = 1$ *pro všechna* $t > 0$.
- *Je-li* g *spojitá a omezená na* $\mathbb{R}^m$, *a* f *spojitá a omezená na* $\mathbb{R}^m \times (0,T)$, *pak*

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &:= \quad \int_{\mathbb{R}^m} g(y) G(x-y,t)\,dy \\ &+ \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} f(y,\tau) G(x-y,t-\tau)\,dy\,d\tau\,, \end{aligned} \tag{19}$$

řeší na $\mathbb{R}^m \times (0,T)$ *rovnici* (15)*, a navíc splňuje počáteční podmínku* $\lim_{(x,t)\to(x_0,0+)} u(x,t) = g(x_0)$ *pro všechna* $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Poznámka. Úloze, kdy řešíme nějakou evoluční PDR **na celém prostoru** a pro $t > 0$, s počáteční podmínkou (nebo počátečními podmínkami) pro $t = 0$, říkáme **Cauchyova úloha**.

Poznámka. S využitím explicitniho tvaru funkce G lze (19) psát jako

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} g(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \,\mathrm{d}y \\ &+ \frac{1}{(4\pi a^2)^{\frac{m}{2}}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} f(y,\tau) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} \,dy\,d\tau, \end{aligned} \tag{20}$$

případně s využitím operátoru konvoluce jako

$$u(x,t) = g(x) *_{(x)} G(x,t) + (f(x,t)Y(t)) *_{(x,t)} (G(x,t)Y(t)),$$

kde Y je Heavisideova funkce, a index u operátoru konvoluce vyjadřuje, podle kterých proměnných konvoluce probíhá.

Poznámka. V jednodimenzionálním případě se často řeší speciální úlohy vedení tepla s tzv. okrajovými podmínkami (a také s počáteční podmínkou pro $t = 0$).

- Úlohu pro RVT v prvním kvadrantu s počáteční podmínkou g, zadanou pro $x > 0$, a okrajovou podmínkou $u(0,t) = 0$ pro $t > 0$ (tzv. **Dirichletova okrajová podmínka**, tj. okrajová podmínka předepisující **hodnoty** funkce), tj. tzv. **Dirichletovu úlohu**, řešíme tak, že funkci g rozšíříme **liše** na $\mathbb{R}$ a řešíme Cauchyovu úlohu (na celém $\mathbb{R}$) s takto rozšířenou počáteční podmínkou. Výsledná funkce u splňuje díky lichosti g podmínku $u(0,t) = 0$ pro $t > 0$.

Poznámka.
- Úlohu pro RVT v prvním kvadrantu s počáteční podmínkou g, zadanou pro $x > 0$, a okrajovou podmínkou $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ pro $t > 0$ (tzv. **Neumannova okrajová podmínka**, tj. okrajová podmínka předepisující **derivace** funkce), tj. tzv. **Neumannovu úlohu**, řešíme tak, že funkci g rozšíříme **sudě** na $\mathbb{R}$ a řešíme Cauchyovu úlohu (na celém $\mathbb{R}$) s takto rozšířenou počáteční podmínkou. Výsledná funkce u splňuje díky sudosti g podmínku $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ pro $t > 0$.

Poznámka.
- Úlohu pro RVT na omezeném intervalu $\langle a,b\rangle$ s počáteční podmínkou g, zadanou pro $x \in \langle a,b\rangle$, a s nulovými okrajovými podmínkami Dirichletova a/nebo Neumannova typu – jako výše, řešíme tak, že funkci g rozšíříme **sudě** vzhledem ke krajnímu bodu, v nemž je předepsána Neumannova podmínka, a **liše** vzhledem ke krajnímu bodu, v nemž je předepsána Dirichletova podmínka. Poté ji rozšíříme periodicky na celé $\mathbb{R}$ a řešíme Cauchyovu úlohu (na celém $\mathbb{R}$) s takto rozšířenou počáteční podmínkou. K vyřešení této úlohy využijeme následující tvrzení.

Tvrzení 20.2 (vedení tepla na tyči)**.** *Nechť $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{\frac{2\pi}{p} inx}$ je p-periodická, po částech hladká omezená funkce na $\mathbb{R}$. Potom funkce*

$$u(x,t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{-\frac{4\pi^2}{p^2} a^2 n^2 t} e^{\frac{2\pi}{p} inx}$$

je řešením Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla s počáteční podmínkou g. Navíc, je-li g lichá (resp. sudá) vzhledem k bodu $a \in \mathbb{R}$, je $u(a,t) = 0$ pro $t > 0$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0$ pro $t > 0$).

20.4 Vlnová rovnice

Definice (Vlnová rovnice)**.** Parciální diferenciální rovnici

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0, \tag{21}$$

nazýváme **lineární vlnovou rovnicí**. Zde $c > 0$ má význam rychlosti šíření vlny a $f(x,t)$ vyjadřuje hustotu vnějších sil. Hodnota řešení $u(x,t)$ pak vyjadřuje hodnotu výchylky vlny v čase t a bodě x.

Poznámka. Rovnici (21) často doplňujeme **dvěma** počátečními podmínkami:

$$u(x,0) = g_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^m\,, \tag{22}$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_1(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^m\,. \tag{23}$$

Zde g_0 má význam hodnoty počáteční výchylky a g_1 má význam rychlosti počáteční výchylky.

Poznámka. Díky linearitě rovnice (21) i podmínek (22), (23) lze snadno ukázat tzv. princip superpozice řešení: úlohu (21)–(23) řeší funkce $u = u_0 + u_1 + u_2$, kde u_0 resp. u_1 resp. u_2 jsou řešení (21)–(23) postupně s daty $f = 0, g_1 = 0$ resp. $f = 0, g_0 = 0$ resp. $g_0 = 0, g_1 = 0$.

Poznámka. Dále lze (již ne tak jednoduše) ukázat, že $u_0 = E_0 *_{(x)} g_0$, $u_1 = E_1 *_{(x)} g_1$, $u_2 = E_2 *_{(x,t)} f \cdot Y(t)$, kde $Y(t)$ je Heavisideova funkce, a $E_0(x,t)$, $E_1(x,t)$, $E_2(x,t)$ splňují

$$\begin{aligned}
\widehat{E}(\xi,t) = \widehat{E_1}(\xi,t) &= \frac{\sin(2\pi c|\xi|t)}{2\pi c|\xi|},\\
\widehat{E_0}(\xi,t) &= \cos(2\pi c|\xi|t) = \frac{d}{dt}\widehat{E}(\xi,t),\\
\widehat{E_2}(\xi,t) &= c^2\frac{\sin(2\pi c|\xi|t)}{2\pi c|\xi|}\cdot Y(t) = c^2\widehat{E}(\xi,t)\cdot Y(t),
\end{aligned}$$

přičemž symbol $\widehat{\ }$ značí Fourierovu transformaci vzhledem k proměnné x.

Poznámka. Buď $\widehat{E}(\xi,t) = \frac{\sin(2\pi c|\xi|t)}{2\pi c|\xi|}$ a $E(x,t)$ buď její vzor ve Fourierově transformaci podle proměnné x. Potom

$$u(x,t) := \frac{d}{dt}\left(E *_{(x)} g_0\right) + E *_{(x)} g_1 + c^2\left(E \cdot Y(t) *_{(x,t)} f \cdot Y(t)\right)$$

je řešením vlnové rovnice (21) s pravou stranou f, které splňuje počáteční podmínky (22), (23) s funkcemi g_0, g_1.

Mlčky předpokládáme, že funkce g_0, g_1, f jsou takové, že všechny uvedené operace jsou dobře definovány. S objektem E (který nazýváme **fundamentálním řešením** vlnového operátoru) může nastat problém: někdy nejde o funkci, ale o tzv. **distribuci**, což je objekt, se kterým jsme se dosud nesetkali a v rámci této série přednášek ani nesetkáme. Viz též následující poznámku.

Věta 20.3 (Vlnová rovnice v $\mathbb{R}^1$, d'Alembertův vzorec)**.** *Buďte* $g_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $g_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times (0,T))$. *Potom*

$$\begin{aligned}
u(x,t) \quad := \quad & \frac{g_0(x+ct) + g_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_1(y)\,dy\\
& + \frac{c}{2}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau
\end{aligned}$$

je řešením vlnové rovnice (21) *s pravou stranou* f *v* $\mathbb{R}^1$, *které splňuje počáteční podmínky* (22), (23) *s funkcemi* g_0, g_1.

Poznámka (Fundamentální řešení vlnového operátoru v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$). Pro fundamentální řešení vlnového operátoru v $\mathbb{R}^m$ platí

$$\begin{aligned}
m = 2 \quad &\Longrightarrow \quad E(x,t) = \frac{1}{2\pi c\sqrt{(c^2t^2 - |x|^2)_+}}\\
m = 3 \quad &\Longrightarrow \quad E(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\nu_{ct}
\end{aligned}$$

kde symbolem $(\dots)_+$ rozumíme: "funkce E je dodefinovaná nulou všude tam, kde by výraz pod odmocninou byl nulový nebo záporný". Objekt ν_{ct} je tzv. plošná distribuce na sféře s poloměrem ct, působící přes proměnnou $x \in \mathbb{R}^m$.

Věta 20.4 (Vlnová rovnice v $\mathbb{R}^2$)**.** *Buďte $g_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$, $g_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times (0,T))$. Potom*

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&:=\; \frac{1}{2\pi c}\frac{d}{dt}\int_{|y|\le ct} \frac{g_0(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-|y|^2}}\,dy \\ &+\frac{1}{2\pi c}\int_{|y|\le ct} \frac{g_1(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-|y|^2}}\,dy \\ &+\frac{c}{2\pi}\int_0^t\int_{|y|\le c\tau} \frac{f(x-y,t-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2-|y|^2}}\,dy\,d\tau \end{aligned}$$

je řešením vlnové rovnice (21) *s pravou stranou f v $\mathbb{R}^2$, které splňuje počáteční podmínky* (22), (23) *s funkcemi g_0, g_1.*

Věta 20.5 (Vlnová rovnice v $\mathbb{R}^3$)**.** *Buďte $g_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$, $g_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$. Potom*

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&:=\; \frac{1}{4\pi ct}\int_{S_{ct}(0)} \left(\frac{g_0}{ct}+\frac{\partial g_0}{\partial n}\right)(x-y)\,dS(y) \\ &+\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(0)} g_1(x-y)\,dS(y) \\ &+\frac{1}{4\pi}\int_0^{ct}\int_{S_r(0)} \frac{f\left(x-y,t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,dS(y)\,dr \end{aligned}$$

je řešením vlnové rovnice (21) *s pravou stranou f v $\mathbb{R}^3$, které splňuje počáteční podmínky* (22), (23) *s funkcemi g_0, g_1.*

20.5 Laplace-Poissonova rovnice

Definice. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ oblast s dostatečně hladkou hranicí. **Laplace-Poissonovou rovnicí** v Ω rozumíme rovnici

$$-\Delta u = f\,, \qquad x \in \Omega\,, \tag{24}$$

kde f je daná funkce. (Je-li $f = 0$, mluvíme o (24) jako o **Laplaceově rovnici**.) Rovnici (24) často doplňujeme o okrajové podmínky, a to **Dirichletova typu** ($u = g$ na $\partial\Omega$), **Neumannova typu** ($\frac{\partial u}{\partial n} = h$ na $\partial\Omega$), nebo **smíšeného typu**, kdy je na části $\partial\Omega$ zadána Dirichletova a na části Neumannova okrajová podmínka. Podle toho mluvíme o **Dirichletově, Neumannově** nebo **smíšené** úloze.

Věta 20.6 (Řešení Poissonovy rovnice v $\mathbb{R}^m$)**.** • *Buď U definováno takto:*

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{(m-2)\varkappa_m |x|^{m-2}}\,, \qquad m > 2\,, \\ U(x) &= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\,, \qquad m = 2\,. \end{aligned}$$

Takovouto funkci U nazýváme fundamentální řešení Laplaceova operátoru.

Buď $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $m \ge 2$. Potom funkce $u := U * f$ řeší rovnici $-\Delta u = f$.

- *Řešení rovnice $-\Delta u = f$ je určeno jednoznačně až na harmonický polynom, tedy polynom P splňující rovnici $\Delta P = 0$.*

Poznámka: Obecně funkce $u := U * f$ řeší rovnici $-\Delta u = f$ – ve smyslu rovnosti funkcí nebo distribucí – vždy, když je daná konvoluce dobře definovaná.

Věta 20.7 (Řešení Dirichletovy úlohy v Ω)**.** *Řešení rovnice $\Delta u = 0$ na oblasti Ω s (Dirichletovou) okrajovou podmínkou $u = g$ na $\partial\Omega$ je jednoznačné, pokud*

1. *$\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ je omezená oblast, nebo*
2. *$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je (obecně i neomezená) oblast a předpokládáme omezenost řešení u, nebo*
3. *$\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$ je neomezená oblast a předpokládáme, že existuje koule $B_R(0)$ a konstanta $c > 0$ takové, že $|u(x)| \leq c/|x|^{m-2}$ vně koule $B_R(0)$.*

Poznámka. Omezenost řešení ve druhém bodě je podstatná. Například funkce $u(x, y) = y$, $u(x, y) = 0$ řeší Laplaceovu rovnici na horní polorovině s okrajovou podmínkou $u(x, 0) = 0$. Bod tři je vyjádřením skutečnosti, že řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na neomezené oblasti je jednoznačné ve třídě funkcí, které "v nekonečnu klesají stejně rychle jako elementární řešení".

Věta 20.8 (Dirichletova úloha na horní polorovině)**.** *Buď*

$$u_0(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

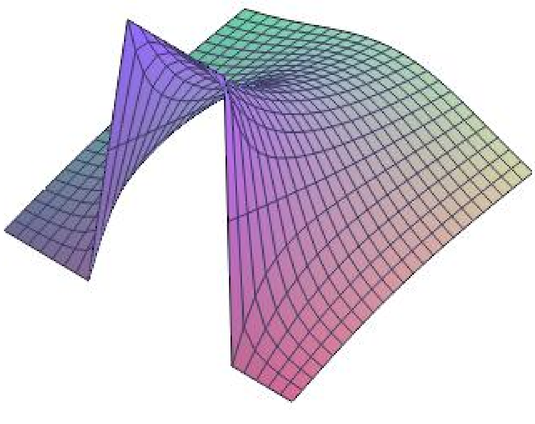
Buď dále $g = g(x)$ omezená lokálně integrovatelná funkce taková, že pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ existuje vlastní konvoluce

$$u(x, y) := g(\cdot) *_{(x)} u_0(\cdot, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt\,. \tag{25}$$

Potom funkce $u(x, y)$ je omezená, řeší rovnici $\Delta u = 0$ v horní polorovině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$, a přitom splňuje okrajovou podmínku $u(x, 0) = g(x)$ ve smyslu limity ve všech bodech spojitosti funkce g.

Příklad 4. *Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici na horní polorovině s podmínkou $u(x, 0) = g(x) = \chi_{\langle a,b\rangle}(x)$. Ukažte, že řešením je funkce*

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{b-x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} \right) .$$

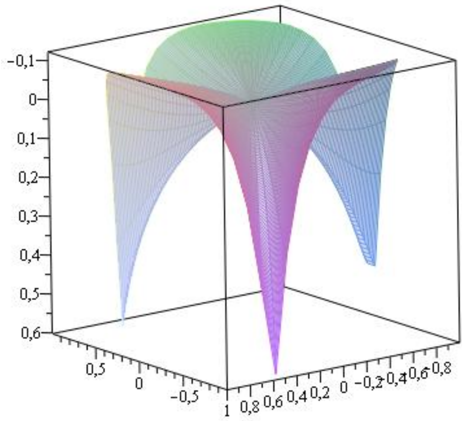


Řešení Příkladu 4

Věta 20.9 (Dirichletova úloha na kruhu - řešení řadou)**.** *Buď $K_R \subset \mathbb{R}^2$ kruh o poloměru $R > 0$ a buď $g(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\alpha}$ funkce, rovnající se součtu své Fourierovy řady pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom (sféricky symetrická) funkce $u(x,y) = u(r,\varphi)$, definovaná předpisem*

$$u(r,\varphi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\varphi}\,, \tag{26}$$

$r \in (0,R)$, $\varphi \in (0,2\pi)$, řeší (po spojitém dodefinování) rovnici $\Delta u = 0$ na K_R a splňuje okrajovou podmínku $u(R,\varphi) = g(\varphi)$ ve smyslu limity v bodech spojitosti g.



Řešení Dirichletovy úlohy na kruhu, $u(r,\alpha) = \sum_{n=1}^{40} r^n \frac{(-1)^n \cos(3n\alpha)}{n^2+4}$.

Věta 20.10 (Dirichletova úloha na kruhu - řešení integrálem)**.** *Buď $K_R \subset \mathbb{R}^2$ kruh o poloměru $R > 0$ a buď $g(t)$, $t \in \langle -\pi, \pi)$ funkce, zadaná na hranici kruhu, tj. v bodech tvaru $[R\cos t, R\sin t]$. Potom (sféricky symetrická) funkce $u(x,y) = u(r,\varphi)$, definovaná předpisem*

$$u(r,\varphi) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\varphi - t) + r^2}\, dt\,, \tag{27}$$

$r \in (0,R)$, $\varphi \in (0,2\pi)$, řeší (po spojitém dodefinování) rovnici $\Delta u = 0$ na K_R a splňuje okrajovou podmínku $u(R,\varphi) = g(\varphi)$ ve smyslu limity v bodech spojitosti g.

Věta 20.11 (Dirichletova úloha na vnějšku kruhu - řešení řadou)**.** *Buď $K_R \subset \mathbb{R}^2$ kruh o poloměru $R > 0$ a buď $g(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\alpha}$ funkce, rovnající se součtu své Fourierovy řady pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom (sféricky symetrická) funkce $u(x,y) = u(r,\varphi)$, definovaná předpisem*

$$u(r,\varphi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left(\frac{R}{r}\right)^{|n|} e^{in\varphi}\,, \tag{28}$$

*$r > R$, $\varphi \in (0,2\pi)$, řeší (po spojitém dodefinování) rovnici $\Delta u = 0$ na **vnějšku kruhu** K_R a splňuje okrajovou podmínku $u(R,\varphi) = g(\varphi)$ ve smyslu limity v bodech spojitosti g. Navíc u je omezená na svém definičním oboru.*

Věta 20.12 (Dirichletova úloha na vnějšku kruhu - řešení integrálem)**.** *Buď $K_R \subset \mathbb{R}^2$ kruh o poloměru $R > 0$ a buď $g(t)$, $t \in \langle -\pi, \pi)$ funkce, zadaná na hranici kruhu, tj. v bodech tvaru $[R\cos t, R\sin t]$. Potom (sféricky symetrická) funkce $u(x,y) = u(r,\varphi)$, definovaná předpisem*

$$u(r,\varphi) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, \frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2rR\cos(\varphi - t) + r^2}\, dt\,, \tag{29}$$

$r > R$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, řeší (po spojitém dodefinování) rovnici $\Delta u = 0$ na ***vnějšku kruhu*** *K_R a splňuje okrajovou podmínku $u(R, \varphi) = g(\varphi)$ ve smyslu limity v bodech spojitosti g. Navíc u je omezená na svém definičním oboru.*

Zajímavá otázka: je-li zadáno g na hranici kruhu $K_R \subset \mathbb{R}^2$ o poloměru $R > 0$ jako v předchozích dvou větách, a definujeme-li u uvnitř a vně kruhu řadami (26) a (28), případně integrály (27) a (29), bude pak u řešením Laplaceovy rovnice na celém $\mathbb{R}^2$?

Z následující věty plyne, že odpověď je záporná.

Věta 20.13 (Liouville)**.** *Buď $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$, $\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^m$, která je alespoň jednostranně omezená v $\mathbb{R}^m$. Potom u je konstantní v $\mathbb{R}^m$.*

Z Liouvilleovy věty tedy plyne, že v bodech kružnice buď nemůže být u třídy $\mathcal{C}^2$ nebo v nich nemůže splňovat Laplaceovu rovnici.

Věta 20.14 (o řešení Dirichletovy úlohy na kouli)**.** *Buď g spojitá na sféře $S_R(0) \subset \mathbb{R}^m$ a definujme funkci $u(x)$ předpisem*

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_m R} \int_{S_R(0)} g(y)\, \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^m}\, dS(y)\,, \quad |x| < R\,.$$

Potom $u \in \mathcal{C}^2(B_R(0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_R(0)})$, $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$ a $u = g$ na $S_R(0)$.

Věta 20.15 (o řešení Dirichletovy úlohy vně koule)**.** *Buď g spojitá na sféře $S_R(0) \subset \mathbb{R}^m$ a definujme funkci $u(x)$ předpisem*

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_m R} \int_{S_R(0)} g(y)\, \frac{|x|^2 - R^2}{|x - y|^m}\, dS(y)\,, \quad |x| > R\,.$$

Potom $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B_R(0)}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^m \setminus B_R(0))$, $\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^m \setminus \overline{B_R(0)}$ a $u = g$ na $S_R(0)$. Navíc existuje koule $B(0)$ a konstanta $c > 0$ takové, že $|u(x)| \le c/|x|^{m-2}$ vně koule $B(0)$.

Věta 20.16 (o průměru)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ omezená oblast, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ v Ω. Potom pro všechna $x \in \Omega$ a všechny koule $B_R(x) \subset \Omega$ platí*

$$u(x) = \frac{1}{|S_R(x)|} \int_{S_R(x)} u(y)\, dS(y) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y)\, dy\,.$$

Věta 20.17 (princip maxima a minima)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ v Ω. Potom u nabývá svého maxima a minima na hranici $\partial\Omega$.*

Věta 20.18 (o regularitě)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ omezená oblast, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ v Ω. Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

20.6 Fourierova metoda rozdělení proměnných

Fourierova metoda rozdělení proměnných slouží k hledání řešení okrajových resp. počátečně-okrajových úloh pro některé PDR (například pro Laplace-Poissonovu rovnici, rovnici vedení tepla, vlnovou rovnici...) na oblastech, které lze psát jako kartézský součin jednorozměrných intervalů. Postup budeme ilustrovat na následujících úlohách:

Příklad 5. *Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici $\Delta u(x, y) = 0$ na obdélníku $(0, a) \times (0, b)$, s okrajovými podmínkami (pro $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle)$, $g(0) = g(a) = 0$):*

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = g(x),\ x \in \langle 0, a\rangle, \qquad && u(x, b) = 0,\ x \in \langle 0, a\rangle,\\ &u(0, y) = 0, \qquad y \in \langle 0, b\rangle, && u(a, y) = 0,\ y \in \langle 0, b\rangle. \end{aligned}$$

Postup při řešení.

- Hledáme u ve tvaru $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ (s tzv. rozdělenými proměnnými), předpokládáme $X \neq 0$, $Y \neq 0$.
- Po dosazení do Laplaceovy rovnice dostaneme $\Delta u(x,y) = X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$, odkud $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda = \text{const.}$ (jde o rovnost funkce proměnné x a funkce proměnné y, proto obě musí být konstantní.)
- Má-li být $u(0,y) = X(0) \cdot Y(y) = 0$, $y \in \langle 0,b \rangle$, musí být $X(0) = 0$, podobně $X(a) = 0$.
- Okrajová úloha pro $X(x)$ tvaru $X'' = \lambda X$ na $(0,a)$, $X(0) = 0$, $X(a) = 0$, má nenulové řešení jen pro $\lambda = \lambda_n = -(\frac{n\pi}{a})^2$, potom $X_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{a}x)$ (až na násobek libovolnou konstantou).
- Podmínku $u(x,b) = X_n(x) \cdot Y(b) = 0$, $x \in \langle 0,a \rangle$ lze splnit volbou $Y(b) = 0$, podmínku $u(x,0) = X_n(x) \cdot Y(0) = g(x)$, $x \in \langle 0,a \rangle$, však obecně splnit nelze, budeme ji muset řešit jinak.
- Řešíme tedy úlohu pro $Y_n(x)$ tvaru $Y'' = -\lambda_n Y_n$ na $(0,b)$ jen s podmínkou $Y_n(b) = 0$ (s již spočtenými konstantami λ_n), a hledáme nenulové řešení. Dostaneme $Y_n(y) = 2e^{\frac{n\pi}{a}b} \sinh(\frac{n\pi}{a}(y-b))$ (až na násobek libovolnou konstantou).
- Abychom splnili i poslední okrajovou podmínku (s funkcí g), hledáme u ve tvaru
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(y)$$
s neznámými konstantami c_n.
- Víme, že $g(0) = g(a) = 0$, a předpokládejme, že g lze rozvinout na $x \in \langle 0,a \rangle$ do Fourierovy řady v systému $X_n(x)$, tj. $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n X_n(x)$. Pak z okrajové podmínky $u(x,0) = g(x)$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n X_n(x)$ dostaneme $\gamma_n = c_n Y_n(0)$, odkud spočteme dosud neznámé kostanty c_n.
- Proveďte celý výpočet a ukažte, že
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh(\frac{n\pi}{a}(b-y))}{\sinh(\frac{n\pi}{a}b)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) ,$$
kde
$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x \,.$$

Příklad 6. *Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici $\Delta u(x,y) = 0$ na obdélníku $(0,a) \times (0,b)$, s okrajovými podmínkami*

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g_1(x),\ x \in \langle 0,a \rangle, \quad & u(x,b) &= g_2(x),\ x \in \langle 0,a \rangle, \\ u(0,y) &= g_3(y),\ y \in \langle 0,b \rangle, \quad & u(a,y) &= g_4(y),\ y \in \langle 0,b \rangle. \end{aligned}$$

Přitom předpokládáme, že funkce $g_j(x)$, $j = 1,2,3,4$ jsou spojité na svých definičních intervalech a ***jsou nulové v krajních bodech těchto intervalů****.*

Postup při řešení.

- Hledáme u ve tvaru $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, kde $\Delta u_j(x,y) = 0$ na obdélníku $(0,a) \times (0,b)$ pro všechna $j = 1,2,3,4$, a přitom $u_j = g_j$ na odpovídající části hranice obdélníku a na ostatních částech hranice je u_j nulová.

- Tímto stojíme před čtyřmi úlohami předešlého typu, které vyřešíme jako v předcházejícím příkladě.

Příklad 7. *Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici* $\Delta u(x,y) = 0$ *na obdélníku* $(0,a) \times (0,b)$, *s okrajovými podmínkami*

$$u(x,0) = g_1(x),\ x \in \langle 0,a \rangle, \qquad u(x,b) = g_2(x),\ x \in \langle 0,a \rangle,$$
$$u(0,y) = g_3(y),\ \ y \in \langle 0,b \rangle, \qquad u(a,y) = g_4(y),\ \ y \in \langle 0,b \rangle.$$

Přitom předpokládáme, že funkce $g_j(x)$, $j = 1,2,3,4$ *jsou spojité na svých definičních intervalech,* ***mají v rozích obdélníka obecně nenulové hodnoty****, přičemž ovšem okrajová podmínka je spojitá na obvodu celého obdélníka, tedy* $g_1(0) = g_3(0)$, $g_1(a) = g_4(0)$, $g_2(0) = g_3(b)$, $g_2(a) = g_4(b)$.

Postup při řešení.

- Hledáme u ve tvaru $u(x,y) = v(x,y) + c(x,y)$, kde $c(x,y) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy$.
- Potom $\Delta c(x,y) = 0$ na obdélníku $(0,a) \times (0,b)$ a vhodnou volbou konstant c_1, c_2, c_3, c_4 lze dosáhnout toho, aby funkce $c(x,y)$ měla v rozích obdélníka stejné hodnoty jako funkce g_j.
- Tím jsme úlohu převedli na úlohu pro neznámou funkci $v(x,y)$, splňující $\Delta v(x,y) = 0$ na obdélníku $(0,a) \times (0,b)$ s novou okrajovou podmínkou na všech čtyřech stanách obdélníka, která má však v rozích nulové hodnoty, tj. na úlohu předešlého typu.

Příklad 8. *Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplace-Poissonovu rovnici* $\Delta u(x,y) = f(x,y)$ *na obdélníku* $(0,a) \times (0,b)$, *s nulovými okrajovými podmínkami. Přitom předpokládáme, že funkci* f *lze (alespoň pro skoro všechna* $y \in (0,b)$*) rozvinout do sinové Fourierovy řady vzhledem k proměnné* x, *tj.*

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) ,$$

kde tedy

$$f_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x,y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \,.$$

Postup při řešení.

- Hledáme u ve tvaru $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$.
- Dosazením u a f do původní rovnice a porovnáním koeficientů ve Fourierových řadách dostaneme rovnice pro neznámé funkce c_n

  $$c_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(y) = f_n(y)$$

  a okrajové podmínky, které mají splňovat:

  $$c_n(0) = c_n(b) = 0 \,.$$

- Dořešte úlohu.

Poznámka. Z uvedených příkladů je jasné, že libovolnou Dirichletovu úlohu pro Laplace-Poissonovu rovnici na obdélníku, s pravou stranou f a spojitou okrajovou podmínkou g, lze řešit rozdělením na šest úloh: (1) úlohu s pravou stranou a nulovou okrajovou podmínkou, (2) úlohu s nulovou pravou stranou a s okrajovou podmínkou, která vynuluje hodnoty původní o.p. v rozích obdélníka, (3) čtyři úlohy s nulovou pravou stranou a okrajovou podmínkou nulovou na třech stranách obdélníka.

Poznámka. Podobně (rozdělením proměnných, nalezením rovnic pro takto separované funkce a jejich opětovným spojením přes nekonečnou řadu) lze řešit i úlohu pro Laplace-Poissonovu rovnici na kvádru, úlohu pro rovnici vedení tepla a vlnovou rovnici na časoprostorovém obdélníku nebo kvádru, atd.

Tyto úlohy zde však z časo-prostorových důvodů už nebudeme podrobněji rozebírat a tuto dlouhou kapitolu zde ukončíme.

A to je vše v rámci tohoto čtyřsemestrálního kurzu matematiky.
Přeji další úspěšné studium.