4 Fourierova transformace

4.1 Fourierova transformace funkcí

Fourierova transformace funkcí je jednou z takzvaných **intergrálních transformací**, které přiřazují jedné funkci jinou funkci prostřednictvím integrálu s parametrem:

$$f \mapsto \int_M f(x) \underbrace{K(x,\xi)}_{\text{integrační jádro}} \,\mathrm{d}x$$

Fourierova transformace funkcí je charakterizována integračním jádrem typu $c_1 \exp(\pm c_2 i\,(x,\xi))$, kde $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ jsou reálné konstanty a $(x,\xi) = \sum_{j=1}^m x_j \xi_j$ je skalární součin v $\mathbb{R}^m$.

Konkrétní tvary Fourierovy transformace se liší volbou znaménka a konstant c_1, c_2 (různí autoři používají různé volby). Nejběžnější volbou je $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \exp(-i\,(x,\xi))$ nebo $\exp(-2\pi i\,(x,\xi))$.

Definice (F.T. a zpětná F.T.)**.** Buď $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Definujeme

- Fourierovu transformaci (někdy též **přímou** nebo "**dopřednou**") Fourierovu transformaci funkce f předpisem
$$\mathcal{F}[f](\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i (x,\xi)} \,\mathrm{d}x; \tag{1}$$
- **zpětnou** Fourierovu transformaci funkce f předpisem
$$\mathcal{F}_{-1}[f](\xi) \equiv f^\vee(\xi) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{2\pi i (x,\xi)} \,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Poznámka.
- Je vidět, že $\widehat{f}(\xi) = f^\vee(-\xi)$, resp. $\widehat{f}(-\xi) = f^\vee(\xi)$.
- POZOR! Obecně $\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}[f]] \neq f$! Tento vztah platí jen pro některé třídy funkcí (časem budeme specifikovat pro jaké).
- Funkci $\widehat{f}$ nazýváme též **Fourierovým obrazem** funkce f, funkci $f^\vee$ nazýváme též **Fourierovým vzorem** funkce f. Ve smyslu předchozí poznámky tedy ne vždy platí, že vzor obrazu nějaké funkce je tatáž funkce.

Poznámka. Obecně lze ukázat, že pokud $2\pi AB = |c|$, tvoří transformace

$$\widehat{f}(\xi) := A^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-ci(x,\xi)} \,\mathrm{d}x \tag{3}$$

a

$$f^\vee(\xi) := B^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{ci(x,\xi)} \,\mathrm{d}x \tag{4}$$

vzájemně kompatibilní dvojici dopředné a zpětné Fourierovy transformace. (Napište jako cvičení některé z nich: nejběžnější volby jsou (a) $A = B = 1, c = 2\pi$, (b) $A = B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, c = 1$, resp (c) $A = c = 1, B = \frac{1}{2\pi}$.)

Věta 4.1 (vlastnosti symetrie pro F.T.)**.** *1. Je-li f sudá (resp. lichá) v proměnné x_j, je $\widehat{f}$ i $f^\vee$ sudá (resp. lichá) v proměnné ξ_j.*

2. Je-li $m = 1$, je

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi x\xi) f(x)\, dx \qquad \textit{pro } f \textit{ sudou,} \tag{5}$$

$$\widehat{f}(\xi) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi x\xi) f(x)\, dx \quad \textit{pro } f \textit{ lichou.} \tag{6}$$

3. Je-li f sféricky symetrická, je $\widehat{f}$ i $f^{\vee}$ sféricky symetrická a platí $\widehat{f} = f^{\vee}$.

Věta 4.2 (F.T. v $\mathbb{R}^3$). *Buď $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ sféricky symetrická funkce, $f(x) = R(r)$, $r = |x|$. Potom*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{|\xi|} \int_0^\infty r\, R(r)\, \sin(2\pi r|\xi|)\, dr\,, \qquad \xi \neq 0\,. \tag{7}$$

Věta 4.3 (posunutí a škálování). *Platí:*

$$\widehat{f(x+z)}(\xi) = e^{2\pi i(\xi,z)}\, \widehat{f}(\xi) \qquad z \in \mathbb{R}^m \tag{8}$$

$$\widehat{f(\alpha x)}(\xi) = \frac{1}{|\alpha|^m}\, \widehat{f}\Big(\frac{\xi}{\alpha}\Big) \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0. \tag{9}$$

Cvičení. Buď $\chi_{\langle -1,1\rangle}(x)$ charakteristická funkce intervalu $\langle -1,1\rangle$, tj. funkce, která nabývá na tomto intervalu hodnoty 1, a mimo něj nabývá hodnoty 0. Ukažte, že $\widehat{\chi_{\langle -1,1\rangle}(x)}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$. Pomocí tvrzení o škálování (9) ukažte dále, že $\widehat{\chi_{\langle -\frac{n}{2\pi},\frac{n}{2\pi}\rangle}(x)}(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(n\xi)}{\xi}$. Fourierovy obrazy takto "rozpínajících se charakteristických funkcí" (pro zvětšující se n) jsou tedy tlumeně a "stále více kmitající" sinusovky, které v nule (ve smyslu limity) nabývají hodnoty n.

Cvičení. Ukažte, že

$$\widehat{e^{-\pi x^2}} = e^{-\pi\xi^2}\,,$$

tedy že Fourierova transformace (tak, jak jsme ji definovali) zobrazuje funkci $e^{-\pi x^2}$ samu na sebe.

[Návod: je

$$\widehat{e^{-\pi x^2}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\, \mathrm{d}x}_{=:A(\xi)}.$$

Pro výpočet $A(\xi)$ využijte residuovou větu: integrujte funkci $e^{-\pi z^2}$ přes obvod obdélníka o vrcholech $-R, R, R+i\xi, -R+i\xi$ a ukažte, že po $R \to \infty$ dostanete identitu $A(\xi) = A(0)$, přičemž víme, že $A(0) = 1$.]

Poznámka. Mějme f integrabilní na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a 1-peridickou. Potom její komplexní Fourierův koeficient je definován jako

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i n x}\, \mathrm{d}x.$$

Pokud tutéž funkci f integrabilní na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dodefinujeme nulou mimo interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, dostaneme pro její Fourierovu transformaci

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, \mathrm{d}x,$$

a tedy s uvedenou konvencí platí $c_n = \widehat{f}(n)$.

Poznámka. Uvedená analogie pokračuje takto: pro **jisté** funkce platí, že jsou rovny své komplexní Fourierově řadě:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}\,,$$

stejně tak bude pro **jisté** funkce platit

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi}\, d\xi = (\widehat{f})^{\vee}(x).$$

Definice. O funkci $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ řekneme, že je **rychle klesající (v nekonečnu)**, pokud pro libovolný multiindex α a libovolné $q \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m} |(1+x^2)^q D^\alpha \varphi(x)| < \infty\,. \tag{10}$$

Prostoru těchto funkcí říkáme **Schwartzův prostor** (nebo **prostor rychle klesajících funkcí**) — značíme $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, resp. pouze $\mathscr{S}$, není-li hodnota m podstatná.

Poznámka.
- $e^{-|x|^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$;
- $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^1(\mathbb{R}^m)$.

Věta 4.4 (Věta o inverzi I)**.** *Buď $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ prostor rychle klesajících funkcí. Potom Fourierova transformace i zpětná Fourierova transformace zobrazují prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ **prostě** a **na** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$:*

$$\mathcal{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)) = \mathcal{F}_{-1}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\,.$$

*Navíc platí tzv. **inverzní formule pro F.T.**,*

$$\left(\widehat{f}\right)^{\vee}(x) = \widehat{\left(f^{\vee}\right)}(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$$

neboli

$$\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \mathcal{F}[\mathcal{F}_{-1}[f]](x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m).$$

Věta 4.5 (Věta o inverzi II)**.**
- *Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pak existuje $\widehat{f}(\xi)$ ve všech bodech ξ a platí: $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$, $|\widehat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$, $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. Obecně ale **nemusí** být $\widehat{f}$ prvkem prostoru $L^1(\mathbb{R}^m)$.*
- *Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ taková, že i $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pak **inverzní formule pro F.T.** platí pro skoro všechna x:*

$$\left(\widehat{f}\right)^{\vee}(x) = \widehat{\left(f^{\vee}\right)}(x) = f(x) \quad \textit{pro s.v. } x \in \mathbb{R}^m$$

neboli

$$\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \mathcal{F}[\mathcal{F}_{-1}[f]](x) = f(x) \quad \textit{pro s.v. } x \in \mathbb{R}^m.$$

Definice (konvoluce funkcí)**.** Buďte $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Pak definujeme jejich **konvoluci** jako

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) g(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{11}$$

Věta 4.6 (základní vlastnosti konvoluce)**.** *Pro $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ je*

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}^m), \qquad g * f \in L^1(\mathbb{R}^m),$$

a navíc

$$f * g = g * f\,.$$

Věta 4.7 (konvoluce a F.T.)**.**
- *Pro $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ platí*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}\,.$$

- *Pokud je $f, g, \widehat{f}, \widehat{g}, f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^m)$, platí i*

$$\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}\,.$$

Věta 4.8 (vztah F.T., konvoluce a derivace na $\mathscr{S}$)**.** *Buďte* $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$*. Potom i* $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$*,* $g * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$*,* $D^\alpha f, D^\alpha g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ *(pro jakýkoli multiindex* α*); navíc platí*

$$
\begin{aligned}
D^\alpha(f * g) &= (D^\alpha f) * g \;=\; f * (D^\alpha g) \\
\widehat{D_x^\alpha f}(\xi) &= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha\, \widehat{f}(\xi) \\
D_\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) &= (-2\pi i)^{|\alpha|}\, \widehat{x^\alpha f(x)}(\xi)
\end{aligned}
$$

kde pro $x = [x_1, \ldots, x_m]$*,* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$*, definujeme* $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$*.*

Cvičení.

- Nalezněte metodou Fourierovy transformace (jedno, partikulární) řešení ODR

$$y'' - y = e^{-x^2}.$$

- Ukažte, že jediné řešení rovnice $y'' = 0$ v prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ je identicky nulové řešení. Uvědomte si omezení, které tedy vynucuje metoda Fourierovy transformace, uvažovaná pouze v prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.