1 Komplexné čísla

1.1 Vlastnosti komplexných čísel

Predpokladáme, že študent pozná komplexné čísla v rozsahu strednej školy, preto nebudeme dokazovať známe poznatky. Zopakujeme základné pojmy, zjednotíme terminológiu, označenia a zavedieme nové potrebné pojmy.

1. Komplexným číslom $\boldsymbol{z}$ nazývame usporiadanú dvojicu (x, y) reálnych čísel x a y (označujeme $z = (x, y)$). Množinu komplexných čísel označujeme $\mathbb{C}$.
Komplexné číslo tvaru $(x, 0)$ stotožňujeme s reálnym číslom x, zapisujeme $(x, 0) = x$. Takto sú reálne čísla špecifickým prípadom komplexných čísel, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Komplexné číslo $(0, 1)$ nazývame **imaginárna jednotka** a označujeme $\mathbf{i = (0, 1)}$.

2. Operácie s komplexnými číslami definujeme nasledovne.
Ak $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ potom

- rovnosť komplexných čísel: $z_1 = z_2$ nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$;
- súčet komplexných čísel: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- násobok komplexného čísla reálnym číslom $c \in \mathbb{R}$: $cz = (cx, cy)$;
- súčin komplexných čísel: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$;
- mocnina komplexného čísla z^n, $n \in \mathbb{N}$ je definovaná indukciou: $z^1 = z$, $z^{n+1} = z \cdot z^n$.

Pre mocniny imaginárnej jednotky platí: $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$,

- $\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$,
- $\mathrm{i}^3 = -1 \cdot (0, 1) = -\mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^4 = (0, -1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1, \dots$.

3. Algebrický tvar komplexného čísla. Vzhľadom na uvedené operácie a označenie môžeme komplexné číslo prepísať na tvar:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y(0, 1) = \boldsymbol{x + \mathrm{i}y}.$$

Posledný tvar sa nazýva algebraický tvar komplexného čísla. Číslo x nazývame reálna a číslo y imaginárna časť (zložka) komplexného čísla z a označujeme $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

4. Komplexne združené číslo. Číslo komplexné združené k číslu $z = x + \mathrm{i}y$, označujeme ho $\overline{z}$, definujeme takto: $\boldsymbol{\overline{z} = x - \mathrm{i}y}$.

Platí $x = \operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$. Pre ľubovoľné dve komplexné čísla z_1, z_2 je

$$\overline{(z_1+z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \text{ ak } z_2 \neq 0.$$

5. Absolútna hodnota komplexného čísla. Absolútnu hodnotu (modul, veľkosť) komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$, označujeme $|z|$, definujeme predpisom

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \geq 0.$$

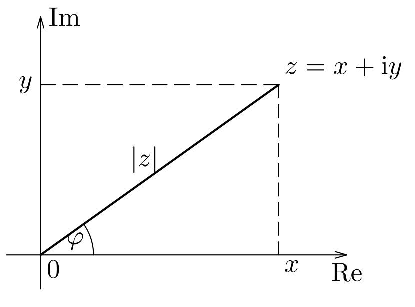
Vlastnosti absolútnej hodnoty.

1. $|z| = 0 \iff z = 0$,
2. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$, pre každé z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$,
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, pre každé z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ (trojuholníková nerovnosť),
4. z trojuholníkovej nerovnosti vyplýva nerovnosť
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \quad \text{pre každé } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Pomocou komplexne združeného čísla a absolútnej hodnoty definujeme **podiel komplexných čísel** z_1, z_2 takto:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

6. Geometrická interpretácia komplexných čísel. Medzi bodmi Euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$ a komplexnými číslami je jednoznačný vzťah. Komplexnému číslu $z = x+\mathrm{i}y$ priradíme v rovine $\mathbb{E}_2$ bod $[x, y]$ a naopak každému bodu $[x, y]$ roviny $\mathbb{E}_2$ priradíme komplexné číslo $z = x+\mathrm{i}y$. Dostávame rovinu komplexných čísel, ktorú nazývame **Gaussova rovina**. Množinu komplexných čísel tvaru $(x, 0)$ nazývame reálnou osou a množinu komplexných čísel tvaru $(0, y)$ imaginárnou osou.



Ďalšiu geometrickú interpretáciu komplexných čísel dostaneme, keď komplexnému číslu $z = x + \mathrm{i}y$ priradíme viazaný vektor s počiatočným bodom $[0, 0]$ a koncovým $[x, y]$. Je to z hľadiska fyziky dôležitá interpretácia, napr. súčtu dvoch komplexných čísel je priradený vektor, ktorý dostaneme podľa pravidla „o rovnobežníku síl“, známeho z mechaniky.

7. Argument komplexného čísla. V rovine môžeme od pravouhlých súradníc prejsť k polárnym súradniciam, pólom v polárnych súradniciach je počiatok a polára je nezáporná reálna polos. Nenulovému komplexnému číslu $z = (x, y) \neq 0$ priradíme dvojicu reálnych čísel $(r, \varphi) \in \langle 0, \infty) \times (-\infty, \infty)$, pričom $r = |z| \geq 0$ a φ vyhovuje rovniciam:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{1.1}$$

Každé reálne číslo φ, ktoré vyhovuje rovniciam (1.1) nazývame **hodnota argumentu** komplexného čísla z. Pre komplexné číslo $z = 0$ nie je definovaná žiadna hodnota argumentu. Z periodičnosti funkcií sínus a kosínus vyplýva, že každé nenulové komplexné číslo z má nekonečne veľa hodnôt argumentu. Ak φ_0 je jedna z nich, potom všetky ostatné sa dajú vyjadriť v tvare $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definícia 1.1.1. Nech φ_0 je jedno z reálnych čísel vyhovujúce vzťahom (1.1). Množinu reálnych čísel $\{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ nazývame **argument** komplexného čísla $z \neq 0$ a označujeme $\mathbf{Arg}\,\boldsymbol{z}$, t.j.

$$\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.2}$$

Každé $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ nazývame **hodnota argumentu** komplexného čísla. Tú z hodnôt argumentu $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, pre ktorú platí $-\pi < \varphi \leq \pi$, nazývame **hlavná hodnota argumentu** komplexného čísla z a označujeme $\mathbf{arg}\,\boldsymbol{z}$.

Ak vo vzťahu (1.2) položíme $\varphi_0 = \arg z$ dostaneme

$$\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \tag{1.3}$$

pre každé komplexné číslo $z \neq 0$. Bežne sa posledný vzťah nezapisuje v množinovom tvare ale iba v tvare $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pre hlavnú hodnotu argumentu komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ platí:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x},\ x > 0, \\ \frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x},\ x < 0,\ y \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y < 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x},\ x < 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

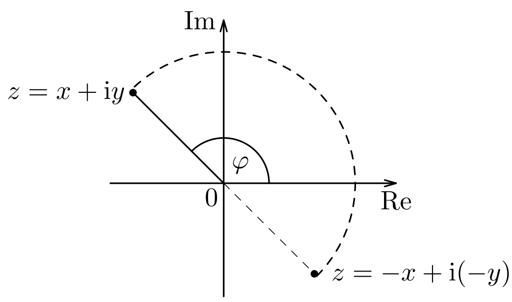
Ukážeme, že vzťah (1.4) platí. Uvažujme komplexné číslo $z = x + \mathrm{i}y$ a hlavnú hodnotu argumentu $\varphi = \arg z$.

1) Ak je $x > 0$, leží komplexné číslo z v I. alebo IV. kvadrante, t.j. pre hlavnú hodnotu argumentu platí

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}(\arg z) = \frac{y}{x}.$$

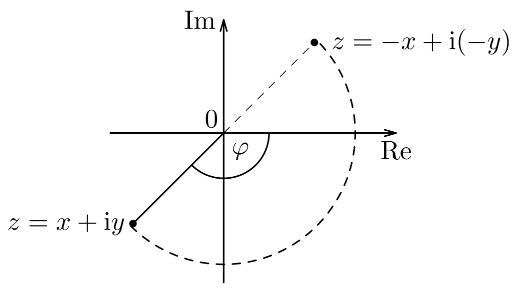
Funkcia tangens je na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ prostá, má inverznú funkciu a platí

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$



2) Ak je $x < 0$, $y > 0$ leží komplexné číslo v druhom kvadrante, hlavná hodnota argumentu je z intervalu $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$, čo je mimo intervalu, kde má funkcia tangens inverznú funkciu. Preto otočíme vektor prislúchajúci komplexnému z o uhol $-\pi$. Dostaneme komplexné číslo $-x + \mathrm{i}(-y)$, ktorého hlavná hodnota argumentu je $(\arg z - \pi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ a podľa predchádzajúceho prípadu

$$\operatorname{tg}(\arg z - \pi) = \frac{-y}{-x} \quad \Rightarrow \quad \arg z - \pi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \arg z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$



3) Ak je $x < 0$, $y < 0$ leží komplexné číslo v treťom kvadrante, hlavná hodnota argumentu je z intervalu $-\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade otočíme vektor prislúchajúci komplexnému číslu z o uhol π a dostaneme komplexné číslo $x + \mathrm{i}y$, ktorého hlavná hodnota argumentu je $(\arg z + \pi) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a platí

$$\operatorname{tg}(\arg z + \pi) = \frac{-y}{-x} \quad \Rightarrow \quad \arg z + \pi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Je viacej definícií hlavnej hodnoty argumentu komplexného čísla. Táto má tú výhodu, že $\arg \overline{z} = -\arg z$, okrem prípadu záporného reálneho čísla, vtedy $\arg \overline{z} = \arg z = \pi$.

8. Goniometrický tvar komplexného čísla. Z rovníc (1.1) vyplýva, že ak φ je niektorá hodnota argumentu nenulového komplexného čísla z, tak sa dá toto číslo zapísať v tvare

$$\boldsymbol{z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}.$$

Tento tvar nazývame **goniometrický tvar** komplexného čísla. Spravidla sa pri zápise používa hlavná hodnota argumentu, teda $\varphi = \arg z \in (-\pi, \pi\rangle$.

Nech $z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$. Pre operácie s komplexnými číslami v goniometrickom tvare platia nasledujúce vlastnosti:

- Rovnosť dvoch komplexných čísel

$$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Pre súčin komplexných čísel sa ľahko ukáže použitím súčtových vzorcov nasledujúci vzťah

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

  To znamená, že pri násobení komplexných čísel ich moduly násobíme a argumenty sčítame

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

  V poslednom vzťahu sme pre argument súčinu použili zjednodušený zápis. V skutočnosti ide o množinovú rovnosť hodnôt argumentu, pričom

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi,\ \varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1,\ \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

  Pre hlavnú hodnotu argumentu súčinu platí

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2l\pi,$$

  kde vhodne zvolíme $l \in \{0, 1, -1\}$.

- Matematickou indukciou môžeme ukázať, že

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ \ldots\ \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ \ldots\ \cdot |z_n|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot \ \ldots\ \cdot z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + + \cdots + \operatorname{Arg} z_n + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Špeciálne, ak $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, tak

$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)}.$$

  Tento vzťah sa nazýva **Moivreov vzorec**.

- Pre delenie komplexných čísel v goniometrickom tvare platí

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

  Pre modul a argument podielu komplexných čísel máme

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

9. Exponenciálny tvar komplexného čísla. Z matematickej analýzy reálnej premennej poznáme rozvoj funkcií sínus a kosínus do mocninných radov

$$\sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!},\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ak rad pre sínus násobíme imaginárnou jednotkou i a sčítame s radom pre kosínus, pričom zoberieme do úvahy vlastnosti mocnín i a absolútnu konvergenciu mocninných radov, dostaneme Eulerov vzťah $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi} &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots + \mathrm{i}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots\right) = \\ &= 1 + \frac{\mathrm{i}\varphi}{1!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^5}{5!} \dots = \boldsymbol{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \end{aligned}$$

Pomocou Eulerovho vzťahu môžeme komplexné číslo z zapísať v tvare

$$\boldsymbol{z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

ktorý nazývame **exponenciálny tvar** komplexného čísla.

Príklad 1.1.2. K daným komplexným číslam $z_1 = -1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$ určte zvyšné tvary.

Riešenie. Určíme modul a hlavnú hodnotu argumentu komplexného čísla z_1

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Goniometrický a exponenciálny tvar komplexného čísla z_1 je napr.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$

Vzhľadom na Eulerov vzťah je exponenciálny tvar komplexného čísla z_2: $z_2 = 2e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}$. Potrebujeme určiť algebrický tvar komplexného čísla z_2. Pretože $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dostaneme

$$\operatorname{Re} z_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \operatorname{Im} z_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

□

10. *n*-tá odmocnina komplexného čísla.

Nech je daná rovnica

$$z^n = a, \quad a \in \mathbb{C},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Riešenie rovnice (1.5) nazývame ***n*-tá odmocnina** komplexného čísla a, označujeme $\sqrt[n]{a}$. Ak označíme

$$z = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \quad \text{a} \quad a = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

použijeme Moivreov vzorec a dosadíme do rovnice (1.5) dostaneme

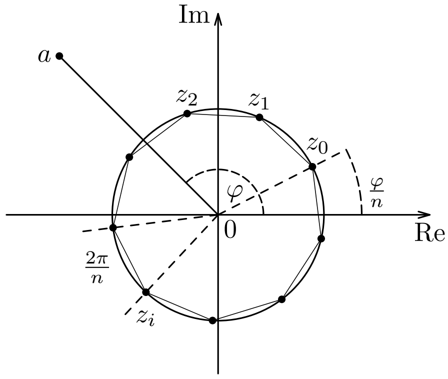
$$\rho^n(\cos n\psi + \mathrm{i}\sin n\psi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Z rovnosti komplexných čísel vyplýva, že

$$\rho^n = r, \qquad n\psi = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Riešenie rovnice (1.5) môžeme potom zapísať v tvare

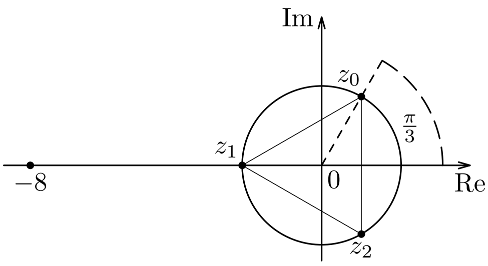
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$



Medzi týmito hodnotami existuje práve n navzájom rôznych hodnôt, $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Pre rozdiel hlavných hodnôt argumentov dvoch za sebou nasledujúcich hodnôt n-tej odmocniny máme $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \frac{2\pi}{n}$, čo znamená, že hodnoty n-tej odmocniny komplexného čísla a v Gaussovej rovine tvoria vrcholy pravidelného n-uholníka vpísaného do kružnice so stredom v bode nula a polomerom $\sqrt[n]{|a|}$.

Príklad 1.1.3. Určte hodnoty $\sqrt[3]{-8}$.

Riešenie.



Určíme veľkosť, argument čísla -8 a zapíšeme ho v goniometrickom tvare.

$$|-8| = 8,\ \mathrm{Arg}(-8) = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

a tak

$$-8 = 8\big(\cos(\pi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi + 2k\pi)\big).$$

Potom rôzne hodnoty $\sqrt[3]{-8}$ sú:

$$\sqrt[3]{-8} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right),$$

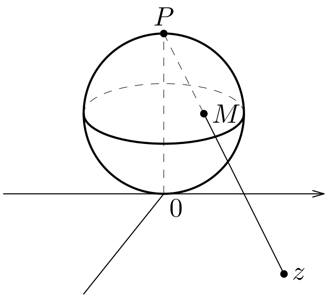
pre $k = 0, 1, 2$.

□

11. Nevlastné komplexné číslo je také číslo, ktoré nemá zavedený pojem, reálnej, imaginárnej zložky, argumentu a ktorého absolútna hodnota je väčšia ako absolútna hodnota ktoréhokoľvek komplexného čísla.

Komplexné čísla môžeme reprezentovať aj takto. Uvažujeme sféru S s jednotkovým priemerom, ktorá sa dotýka Gaussovej roviny v bode $z = 0$. Nech bod P je bod sféry ležiaci na priamke, ktorá spája bod $z = 0$ so stredom sféry. Každému bodu $z = x + \mathrm{i}y$

Gaussovej roviny priradíme bod M na sfére S, ktorý je priesečníkom sféry a priamky, ktorá spája bod z s bodom P a naopak každému bodu sféry $M \in S$, $M \neq P$ priradíme bod $z = x + \mathrm{i}y$ Gaussovej roviny, ktorý je priesečníkom priamky PM s Gaussovou rovinou.



Tak je dané vzájomne jednoznačné zobrazenie Gaussovej roviny (t.j. komplexných čísel) na sféru S. Takéto zobrazenie sa nazýva **stereografická projekcia** sféry S (nazýva sa Riemannova sféra) na Gaussovu rovinu. Bodu P priradíme v Gaussovej rovine nekonečne vzdialený bod. Tento bod nazývame **nevlastný bod**, alebo nekonečno a označujeme ho symbolom ∞. Gaussovu rovinu s pridaným bodom ∞ nazývame **uzavretá Gaussova rovina**, označujeme $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, bez tohto bodu ju nazývame **otvorená Gaussova rovina**, označujeme ju $\mathbb{C}$. Operácie s nevlastným číslom ∞ definujeme takto:

1. $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$, pre každé $z \in \mathbb{C}$,
2. $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$, pre každé $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$,
3. $\frac{z}{\infty} = 0$, pre každé $z \in \mathbb{C}$,
4. $\frac{z}{0} = \infty$, pre každé $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$,
5. $\frac{\infty}{z} = \infty$, pre každé $z \in \mathbb{C}$,
6. $\infty^n = \infty$, $\infty^{-n} = 0$, $0^{-n} = \infty$, pre každé $n \in \mathbb{N}$,
7. $|\infty| = \infty$, $\overline{\infty} = \infty$.

Nedefinujeme výrazy: $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

12. Niektoré vlastnosti množín v $\mathbb{C}$

Ak definujeme v Gaussovej rovine $\mathbb{C}$ metriku predpisom

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|\,,$$

dostaneme metrický priestor, ktorý je izometrický s Euklidovou rovinou $\mathbb{E}_2$. Pre metrický priestor $\mathbb{C}$ môžeme využiť známe metrické vlastnosti roviny $\mathbb{E}_2$ a všetky vlastnosti metrického priestoru.

Niektoré pojmy a označenia, ktoré budeme potrebovať. Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ - pevné a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$:

- množinu bodov $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \delta\}$ nazývame kružnica so stredom v bode z_0 a polomerom δ;

- množinu bodov $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$ nazývame δ–okolím bodu z_0, označujeme $U_\delta(z_0)$. Okolie bodu z_0, pri ktorom nezáleží na veľkosti polomeru budeme označovať $U(z_0)$;
- prstencovým (redukovaným) δ–okolí bodu z_0 nazývame množinu $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \delta\}$, označujeme $U^*_\delta(z_0)$;
- množinu bodov $\{z \in \mathbb{C}_\infty; |z| > \frac{1}{\delta}\}$ nazývame δ–okolím bodu ∞.

Predpokladáme, že čitateľ pozná pojmy:

- bod množiny - vnutorný, vonkajší, hromadný, izolovaný, hraničný;
- vnútro množiny A^o, uzáver množiny $\overline{A}$, hranica množiny $\partial(A)$;
- množina - ohraničená, otvorená, uzavretá.

Nech z_1, z_2 sú komplexné čísla. Množinu $\{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in \langle 0, 1\rangle\}$ nazývame **úsečka** s koncovými bodmi z_1 a z_2 a označujeme $z_1 z_2$.

Nech $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$ sú komplexné čísla. Množinu, ktorá sa skladá z úsečiek s koncovými bodmi $z_0\, z_1,\ z_1\, z_2,\ \ldots,\ z_{n-1}\, z_n$ nazývame **lomená čiara**.

Množiny A, B nazývame **oddelené**, ak $\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B}$. Množinu nazývame **súvislá**, ak sa nedá vyjadriť ako zjednotenie dvoch neprázdných oddelených množín. Súvislú otvorenú množinu nazývame **oblasť**. Dá sa ukázať, že otvorená množina $A \subset \mathbb{C}$ je oblasť práve vtedy, keď každé jej dva rôzne body vieme spojiť lomenou čiarou, ktorá leží v množine A.

1.2 Postupnosti komplexných čísel

Uvažujme postupnosť konečných komplexných čísel

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots \quad \text{kde} \quad z_n = x_n + \mathrm{i}y_n. \tag{1.6}$$

Postupnosť komplexných čísel budeme označovať $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ alebo $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vzhľadom na izometriu Gaussovej roviny komplexných čísel s dvojrozmernou Euklidovou rovinou môžeme preniesť vlastnosti postupnosti bodov v $\mathbb{E}_2$ na postupnosť komplexných čísel. Preto uvedieme len definície pojmov a tvrdenia bez dôkazov.

Definícia 1.2.1. Postupnosť komplexných čísel (1.6) sa nazýva **ohraničená**, ak existuje nezáporné reálne číslo $K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|z_n| \leq K$.

Definícia hovorí, že postupnosť je ohraničená, ak všetky jej členy ležia vo vnútri nejakého kruhového okolia bodu 0.

Príklad 1.2.2. Vyšetrite ohraničenosť nasledujúcich postupností:

$$\text{a)} \left\{\mathrm{i}+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}; \quad \text{b)} \left\{(2n+1)\mathrm{i}-1\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Riešenie.
a) Postupnosť $\left\{\mathrm{i}+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, pretože

$$\left|\mathrm{i}+\frac{1}{n}\right| \leq |\mathrm{i}| + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2, \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

b) Postupnosť $\{(2n+1)\mathrm{i}-1\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená, lebo pre každé nezáporné $K \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{K}{2}$ také, že

$$|(2n+1)\mathrm{i}-1| \geq |(2n+1)\mathrm{i}| - 1 = 2n+1-1 = 2n > K.$$

□

Veta 1.2.3. *Postupnosť komplexných čísel (1.6) je ohraničená práve vtedy, keď postupnosti reálných zložiek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a imaginárnych zložiek $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sú ohraničené.*

Definícia 1.2.4. Konečné (vlastné) komplexné číslo z_0 nazývame **limita postupnosti** (1.6), ak $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \to |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Túto limitu označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ a hovoríme, že postupnosť (1.6) konverguje k číslu z_0, čo zapisujeme $z_n \to z_0$. Postupnosť, ktorá má limitu, nazývame **konvergentná**. Postupnosť, ktorá nemá limitu nazývame **divergentná.**

Tak ako pri konvergencii bodov v $\mathbb{E}_2$ namiesto postupnosti $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a jej limity môžeme vyšetrovať dve postupnosti reálnych čísel $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a ich limity.

Veta 1.2.5. *Nech $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, kde x_n, y_n, $n = 1, 2, \ldots$, x_0, y_0 sú reálne čísla. Postupnosť $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k z_0 vtedy a len vtedy, ak postupnosť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k x_0 a postupnosť $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k y_0.*

Definícia 1.2.6. Bod $z \in \mathbb{C}$ nazývame **hromadný bod** postupnosti (1.6), ak v každom okolí $U(z)$ bodu z leží nekonečne veľa členov tejto postupnosti.

Pretože definícia 1.2.4 konvergencie a limity postupnosti komplexnýxh čísel je analogická definícii konvergencii a limity reálnej postupnosti, sú vety o konvergentných komplexných postupnostiach a ich dôkazy analogické vetám a dôkazom pre reálne postupnosti. Preto uvedieme tvrdenia bez dôkazov. Platí:

1. Každá postupnosť komplexných čísel má nanajvýš jednu limitu.
2. Každá konvergentná postupnosť komplexných čísel je ohraničená.
3. Postupnosť (1.6) je konvergentná a jej limita je bod z_0 práve vtedy, keď z_0 je jediný hromadný bod postupnosti (1.6).
4. Ak postupnosť $z_n \to z_0$, potom každá vybraná postupnosť $z_{n_k} \to z_0$.
5. Postupnosť (1.6) je konvergentná práve vtedy, keď je Cauchyovská, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, \, n \geq n_0, m \geq n_0 \to |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

6. Nech $z_n \to z_0$, $w_n \to w_0$ potom $z_n \pm w_n \to z_0 \pm w_0$, $z_n w_n \to z_0 w_0$. Ak naviac $w_0 \neq 0$ tak $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z_0}{w_0}$.
7. Nech $z_n \to z_0$ potom $|z_n| \to |z_0|$.
8. Nech $|z_n| = r_n \neq 0$, $\arg z_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Ak $r_n \to r$ a $\varphi_n \to \varphi$ potom $z_n = r_n e^{\mathrm{i}\varphi_n} \to z = re^{\mathrm{i}\varphi}$.

Obrátené tvrdenia k tvrdeniam 6. a 7. neplatia.

Napríklad postupnosť $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ je divergentná (má dva rôzne hromadné body 1, -1) avšak postupnosť $r_n = |(-1)^n| = 1 \to 1$.

Postupnosť $z_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$, ale postupnosť argumentov

$$\arg z_n = \varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{pre } n \text{párne} \\ \pi, & \text{pre } n \text{nepárne} \end{cases}$$

nie je konvergentná.

Konvergenciu postupnosti komplexných čísel v uzavretej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$ definujeme takto:

Definícia 1.2.7. Hovoríme, že postupnosť bodov $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}_\infty$ konverguje k bodu $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, ak ku každému okoliu $U(z_0)$ bodu z_0 existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$ platí $z_n \in U(z_0)$. Bod $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ nazývame limita postupnosti $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Táto definícia konvergencie a limity postupnosti rozširuje Definíciu 1.2.4. Podľa Definície 1.2.7 má zmysel zápis $z_n \to \infty$, $z_n \in \mathbb{C}$. Môžeme ho definovať napr. takto:

$$z_n \to \infty,\ z_n \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \to |z_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dá sa dokázať, že pre $z_0 = \infty$ platia tvrdenia 1., 3., 4., tvrdenie 7. dokonca v tvare ekvivalencie $z_n \to \infty \Leftrightarrow |z_n| \to \infty$. Ostatné tvrdenia buď neplatia alebo nemajú zmysel. Na rozdiel od reálnej analýzy platí: $z_n \to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \to \infty$.

Príklad 1.2.8. Určte a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-\mathrm{i})\mathrm{i}}{n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (3-4\mathrm{i})^n$.

Riešenie. a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-\mathrm{i})\mathrm{i}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\mathrm{i}\right) = 0 + 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i}.$$

b) Pre $z_n = (3-4\mathrm{i})^n$ platí $|z_n| = |(3-4\mathrm{i})^n| = |3-4\mathrm{i}|^n = 5^n$. Keďže

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} 5^n = \infty \quad \text{tak} \quad \lim_{n\to\infty} (3-4\mathrm{i})^n = \infty.$$

□

1.3 Rady komplexných čísel

Nech je daná postupnosť konečných komplexných čísel $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, potom výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \tag{1.7}$$

nazývame radom komplexných čísel alebo **komplexným radom**. Súčet prvých n-členov tohto radu nazývame ***n*-tý čiastočný súčet** radu (1.7), označujeme

$$s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n. \tag{1.8}$$

Pre $n = 1, 2, \dots$ rad $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} z_k$ nazývame **zvyšok radu** (1.7) po n-tom člene.

Definícia 1.3.1. Súčtom komplexného radu (1.7) nazývame konečnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov (1.8) a zapisujeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Rad (1.7) sa nazýva **konvergentný**, ak konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov (1.8). Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame **divergentný**.

Nech $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, $n \in N$. Z viet o konvergencii postupnosti dostávame tvrdenie.

Veta 1.3.2. *Rad (1.7) je konvergentný práve vtedy, keď konvergujú rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. *Ak označíme súčty radov* $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, $s_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $s_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *potom* $s = s_1 + \mathrm{i}s_2$.

Definícia 1.3.3. Hovoríme, že rad (1.7) je **absolútne konvergentný**, ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Hovoríme, že rad (1.7) je **relatívne konvergentný**, ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ diverguje.

Veta 1.3.4. *Rad (1.7) absolútne konverguje práve vtedy, keď absolútne konvergujú rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z nerovností

$$|\operatorname{Re} z_n| \le |z_n| \le |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n|\,, \;\; |\operatorname{Im} z_n| \le |z_n| \le |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n|$$

a porovnávacieho kritéria pre reálne rady s nezápornými členmi. □

Pre komplexné rady platia niektoré tvrdenia ako pre reálne rady. Ich dôkazy sú analogické a preto ich vynecháme. Sú to:

1. Konvergencia radu sa nezmení, ak vynecháme alebo pridáme, zmeníme konečný počet členov.
2. Ak konverguje rad (1.7), potom $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.
3. Rad (1.7) konverguje práve vtedy, keď $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} z_n = 0$.
4. Platí Cauchyho-Bolzanovo kritérium: Rad (1.7) konverguje práve vtedy, keď
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \;\forall n, m \in \mathbb{N}, n \ge n_0 \;\to\; \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k \right| < \varepsilon.$$
5. Ak rad (1.7) absolútne konverguje, potom konverguje.
6. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = w$ sú konvergentné rady. Potom rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz_n$, kde c je konečné komplexné číslo, sú konvergentné a platí
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n) = s + w$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz_n = cs$.

Vidíme, že namiesto vyšetrovania konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, môžeme vyšetrovať konvergenciu dvoch reálnych radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ alebo radu absolútnych hodnôt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, čo je tiež reálny rad a na to už máme vybudovanú teóriu.

Príklad 1.3.5. Rozhodnite o konvergencii radov:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}; \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-\mathrm{i})^n}{3^n}; \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}}}{n}.$$

Riešenie.

a) Pozrime sa na absolútnu konvergenciu.

$$|z_n| = \left|\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \quad \text{a rad} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ je divergentný.}$$

To znamená, že daný rad nie je absolútne konvergentný.

Relatívna konvergencia. Rozdeľme rad na reálnu a imaginárnu časť,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Podľa Leibnizovho kritéria sú obidva rady konvergentné, a tak daný komplexný rad je relatívne konvergentný.

b) Zoberme rad absolútnych hodnôt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-\mathrm{i})^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n.$$

Rad absolútnych hodnôt je geometrický rad s kvocientom $q = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$, ktorý je konvergentný, a teda daný komplexný rad je absolútne konvergentný.

c) Rozdeľme rad na reálnu a imaginárnu časť:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}}{n} + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n}.$$

Reálna časť radu je divergentný rad, pretože $0 < \cos 1 \leq \cos\frac{1}{n} < 1$ a minorantný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 1}{n}$ diverguje. To znamená, že daný komplexný rad je divergentný. □