Řešení rovnic a nerovnic a jejich soustav

Dostanete přiděleny dvě úlohy z I. okruhu a jednu úlohu z II. okruhu.

Doporučená literatura

- Prostudujte brožuru: Váňa, J. (1970). *O rovnicích s parametry.* Mladá fronta, Praha. Brožura obsahuje tři kapitoly. Z těchto kapitol si vyberte do své seminární práce dvě úlohy, které tam nejsou řešené (jsou řazeny na konci každé kapitoly). Jedna bude ze třetí kapitoly a druhá z druhé kapitoly.

- Podobně prostudujte kapitolu „Rovnice s celou částí" z brožury: Calda, E. (1995). *Rovnice ve škole neřešené.* Prometheus, Praha. Na konci kapitoly si pak vyberte jednu neřešenou úlohu do své seminární práce. Dále si pročtěte strany 51 – 52 a 30 – 32.

- Z časopisu *Učitel matematiky* prostudujte tyto strany (což neznamená, že nemůžete přečíst časopis celý): březen 1995 – str. 58 – 63; květen 1995 – str. 57 – 58; listopad 1994 – str. 60 – 63; únor 1994 – str. 38 – 40.

Tedy celkem bude seminární práce obsahovat **šest** úloh a **jednu** úlohu „navíc". Každá úloha bude za 5 bodů, ke splnění je nutno dosáhnout 28 bodů.

V zápočtovém testu se mohou objevit úlohy, které jsou vyznačené puntíkem v zadávacím listu, dále úlohy z brožury *O rovnicích s parametry* **příklady** první kapitoly, úloha 2, str. 25 a úloha 8, str. 40, a konečně úlohy z knihy *Odvárko, O.: Metody řešení matematických úloh* strana 87, příklad 2, strana 88, příklad 3, strana 96, příklad 3, strana 98, příklad 6, strana 102, příklad 1.

Další doporučená literatura:

Hejný, M. a kol. (1989). *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava.
Hruša, K. a kol. (1991). *Úvod do studia matematiky.* Karolinum, UK, Praha.
Herman, J., Kučera, R., Šimša, J. (1998). *Seminář ze středoškolské matematiky.* PřF MU, Brno.
Zedek, M. a kol. (1971). *Vybrané úlohy z matematické olympiády.* SPN Praha.

Zadávací list

Pokud není uvedeno jinak, všechny úlohy jsou řešeny v oboru reálných čísel. Je-li v úloze uvedeno více rovnic, jedná se o soustavu rovnic. Neznámé jsou označeny x, y, z, parametry a, b, c, m apod.

I. okruh

1. • Kořeny x_1, x_2 rovnice $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ vyhovují vztahu $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$. Určete a.

2. • Nechť x_1, x_2 jsou kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $ac \neq 0$. Vyjádřete pomocí a, b, c, aniž byste řešili danou rovnici, tyto výrazy: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, $x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^4$.

3. • Je dána kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ s kořeny x_1, x_2. Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny $y_1 = x_1^2 + x_2^2$, $y_2 = x_1^3 + x_2^3$.

4. $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=14$, $xz+yz=(xy+1)^2$.

5. $\sqrt[3]{1+\ln x}+\sqrt[3]{1-\ln x}=2$.

6. • Řešte soustavu rovnic jinak než Gaussovou metodou.

   (a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6 & x_5+x_6+x_7&=-9\\ x_2+x_3+x_4&=9 & x_6+x_7+x_8&=-6\\ x_3+x_4+x_5&=3 & x_7+x_8+x_1&=-2\\ x_4+x_5+x_6&=-3 & x_8+x_1+x_2&=2. \end{aligned}$$

   (b) $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2+x_3+x_4=0$, $x_3+x_4+x_5=0$, ...
   $x_{99}+x_{100}+x_1=0$, $x_{100}+x_1+x_2=0$.

7. $3^{|x-\frac{1}{4}|+2}-4\sin 2\pi x=5$.

8. $x^2-2x\sin xy+1=0$.

9. • V $\mathbf{R}$ řešte graficky: $1+\sin x+\cos x=0$.

10. $x^2+y=7$, $x+y^2=7$.

11. $x(x+y)+z(x-y)=6$, $y(y+z)+x(y-z)=-2$,
    $z(z+x)+y(z-x)=3$.

12. $(x^2+1)(y^2+1)=10$, $(x+y)(xy-1)=3$. Návod: Použijte substituci $xy=v$, $x+y=u$.

13. $ax+y=1$, $x+ay=1$.

14. Určete graficky všechny uspořádané dvojice (x,y) celých čísel, které vyhovují soustavě nerovnic: $y-|4-2^{-x}|<0$, $y-1>|x|$.

15. Jak máme zvolit parametr p v kvadratické rovnici $px^2+(2p-1)x-2=0$, aby její kořeny byly z intervalu $\langle -2,2\rangle$?

16. Graficky najděte všechna řešení: $|x+y|\geq 2$, $|x|+|y|<4$.

17. Graficky najděte všechna řešení: $x^2+y^2<11-2(x-2y)$, $x^2+4x\geq 2y-y^2+4$.

18. • $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$

19. $x^2+xy+y^2=4$, $x+xy+y=2$

20. • $x+y=1$, $x^4+y^4=7$

21. • Proveďte diskusi řešitelnosti soustavy $x^2+y^2=4$, $(x+m)^2+(y-m)^2=1$. (Řešte graficky. Stačí diskuse vzhledem k počtu řešení, nemusíte ta řešení hledat.)

22. • $ax-y+2=0$, $x+y-b=0$.

23. $x(x+1)(3x+5y)=144$, $x^2+4x+5y=24$.

24. $x+y=4$, $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=280$

25. $ax + y = a^3$, $x + ay = 1$.

26. $x + xy + y = 11$, $x^2y + xy^2 = 30$.

27. $x + y + z = 3$, $x^3 + y^3 + z^3 = 27$

28. • $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$, $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 19$.

29. • $x_1(x_1 + x_2) = 9$, $x_2(x_1 + x_2) = 16$.

30. • $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = -8$.

31. • $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{13}{6}$, $x_1 + x_2 = 5$.

32. • $x_1^2 + 2x_2^2 = 9$, $(x_1 + 1)^2 + 2(x_2 + 1)^2 = 22$.

33. • $5x_1 + 5x_2 + 2x_1x_2 = -19$, $3x_1x_2 + x_1 + x_2 = -35$.

34. • $x_2^2 - x_1 - 5 = 0$, $\frac{1}{x_2-1} - \frac{1}{x_2+1} = \frac{1}{x_1}$.

35. • $x_1^2 - x_1x_2 = 28$, $x_2^2 - x_1x_2 = -12$.

36. • Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$

37. • Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$

38. • Řešte pomocí vhodné substituce. $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$

39. • Řešte pomocí vhodné substituce. $2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3(x + 4)$

40. • Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6$

41. • Řešte pomocí vhodné substituce. $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$

42. • Řešte pomocí vhodné substituce. $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1} = 4$

43. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x + 3 + 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 5$

44. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$

45. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$

46. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$

47. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$

II. okruh

1. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých x, y, z v závislosti na parametrech a, b, c:

   $x - y + z = 0$, $abx - acy + bcz = 1$, $(a + b)x - (a + c)y + (b + c)z = 0$.

2. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých x, y, z s parametry a, b, c pro $a+b+c$ různé do nuly:

   $(b+c)(y+z)-ax=b-c$, $(c+a)(z+x)-by=c-a$, $(a+b)(x+y)-cz=a-b$.

3. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých x, y, z v závislosti na parametrech a, b, $c>-1$:

   $y+z+yz=a$, $z+x+zx=b$, $x+y+xy=c$.

4. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých x, y, z v závislosti na parametrech a, b, $c>0$:

   $x(x+y+z)=a^2$, $y(x+y+z)=b^2$, $z(x+y+z)=c^2$.

5. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých x, y, z v závislosti na parametrech a, b, c:

   $a=\frac{yz}{bz+cy}$, $b=\frac{xz}{cx+az}$, $c=\frac{xy}{ay+bx}$.

6. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých x, y, z v závislosti na parametrech a, b, c:

   $x^2+y^2=axyz$, $y^2+z^2=byzx$, $z^2+x^2=czxy$.

7. $x+y+z=13$, $x^2+y^2+z^2=61$, $2yz=x(y+z)$.

8. $x(y+z)=5$, $y(z+x)=8$, $z(x+y)=9$.

9. $x^2+y^2+z^2=14$, $xy+xz-yz=7$, $x+y+z=6$.

10. $x+y+z=0$, $x^2+y^2-z^2=20$, $x^4+y^4-z^4=560$.

11. $x^4+y^4+3\,x^2y^2=109$, $x^2+y^2+xy=13$, $z(x+y)=z+x+y$.