1 Rovnice

Definice 1. Nechť L a R jsou zobrazení z množiny X do množiny Y (jinými slovy, definiční obor obou je podmnožinou X, obor hodnot podmnožinou Y). Výrokovou formu

$$E(x) \equiv L(x) = R(x), \ x \in X$$

nazýváme rovnicí v Y s neznámou x z X. $\mathcal{D}(E) = \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(R)$ nazýváme definičním oborem E, je-li prázdný, říkáme, že rovnice nemá smysl. Obor pravdivosti E, $K(E) = \{x \in X; E(x)\}$, nazýváme množinou řešení rovnice E.

Př. $2x + 3 = 2 - x^2$, $(xy, x + y) = (3, 4)$

Úmluva. Je-li Y množina uspořádaných n-tic a E je tedy ve tvaru

$$[L_1(x), L_2(x), \dots, L_n(x)] = [R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)],$$

chápeme ji jako logickou konjunkci rovnic

$$\begin{aligned} L_1(x) &= R_1(x) \\ L_2(x) &= R_2(x) \\ &\vdots \\ L_n(x) &= R_n(x), \end{aligned}$$

a nazýváme soustavou rovnic. Analogicky je-li X množinou uspořádaných n-tic a x je tedy ve tvaru

$$[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

chápeme x_i jako jednotlivé neznámé a hovoříme tedy o rovnici (případně soustavě) o n neznámých.

Otázka. Proč se rovnice (nebo alespoň některé jejich typy) často definují jen rovností $L(x) = 0$? Proč to obecně není možné?

Př. $\{\alpha \in \mathbb{R}; x < \alpha < x + 1\} = \{\alpha \in \mathbb{R}; \alpha^2 < x^2\}$

Úmluva. Máme-li rovnici

$$E(a, x) \equiv L(a, x) = R(a, x), \ a \in A, \ x \in X,$$

diskutovat z hlediska proměnné a (tedy určit, pro která a rovnice $E_a(x) = E(a, x)$ nemá smysl, pro která nemá řešení a pro která řešení má a která to jsou), hovoříme o E jako o rovnici s paramentrem a a neznámou x. Jde-li nám stejně jako u normální rovnice jen o řešení (a nikoli o odlišení případů, kdy rovnice nemá smysl a kdy nemá řešení), jde prostě jen o řešení rovnice E s neznámou v $A \times X$.

2 Úpravy rovnic

V tomto oddíle si ukážeme základní typy změn rovnic, které jsou logicky ekvivalentní nebo alespoň zachovávají množinu řešení (úpravy ekvivalentní) a zmíníme se o změnách, které množinu řešení zvětší (úpravy neekvivalentní).

Př. $x^2 = x \quad / : x$

Změny, které způsobí zmenšení původní množiny řešení, jsou z podstaty nekorektní a jako úpravy chybné. Předchozí úpravu lze zachránit rozdělením na případy – viz dále.

Hlubší pohled. Věty o ekvivalentních úpravách jsou ve dvou různých tvarech, které odpovídají dvěma typům těchto úprav: jedním je logická ekvivalence, druhým rovnost množiny řešení. Hovoříme také o tom, že úprava je ekvivalentní ve slabém smyslu (zachovává množinu řešení) nebo silném smyslu (je logicky ekvivalentní). Uvědomme si rozdíl mezi oběma ekvivalencemi: je-li úprava rovnice logicky ekvivalentní, zachovává se samozřejmě i množina řešení. Opačně tomu tak ale není, při úpravě, která řešení zachová, se nemusí zachovat celý původní definiční obor rovnice, která pak s původní logicky ekvivalentní není.

Lze na to pohlížet také tak, že v X máme tři druhy bodů: ty, pro něž rovnice nemá smysl, ty, pro něž smysl má, ale neplatí, a konečně ty, pro které má smysl a platí. Silně ekvivalentní úpravy všechny tři skupiny zachovají. Slabě ekvivalentní úpravy mohou způsobit (přesněji, nejsou-li zároveň silně ekvivalentní, pak způsobují) přesun některých či všech členů druhé skupiny do skupiny první. Mají tedy smysl jen tehdy, jde-li nám pouze o prvky třetí množiny, což je samozřejmě při řešení rovnice vždy.

Nejjednodušší úpravou, kterou lze vždy ekvivalentně provést, je záměna stran. Tam, kde je množina Y alespoň okruh, ji lze nahradit úpravami následujícími (odečtením součtu obou stran a vynásobením -1).

2.1 Záměna stran.

Věta 1. $L(x) = R(x) \Leftrightarrow R(x) = L(x)$.

Důkaz. Relace $=$ je symetrická. $\square$

Další známé ekvivalentní úpravy jsou např. přičtení konstanty, vynásobení nenulovým číslem nebo složení s některými funkcemi (zevnitř, jinými slovy dosazujeme obě strany rovnice do funkce) jako e^x či $\sqrt[3]{x}$. První dvě, ačkoli je zpravidla chápeme jako operace, jsou speciálním případem dosazení do funkce. Například v rovnici $x - 2 = 3$ je úprava, kterou známe jako „převedení dvojky na druhou stranu“, přičtením čísla 2 k oběma stranám, neboli dosazením obou stran rovnice do funkce $U(y) = y + 2$ (v řeči funkcí $U = \mathrm{Id} + 2$). Tato úprava je ekvivalentní, protože zachová množinu řešení, stejně jako třeba „odlogaritmování“ rovnice $\ln x = 2 = \ln \mathrm{e}^2$ na $x = \mathrm{e}^2$, což je (jednodušeji) dosazení obou stran rovnice do funkce $U(y) = \mathrm{e}^y$ ($U = \exp$).

Ne každá funkce však konstituuje evivalentní úpravu. Například rovnice $x = 1$ má jedno řešení, použijeme-li na ni funkci $U = \mathrm{Id}^2$, má výsledná rovnice řešení dvě, použijeme-li $U = \sin$, pak dokonce nekonečně mnoho. Zkoumejme, čím se tyto funkce liší od předchozích.

Má-li dosazení do funkce zachovat množinu řešení, musí platit, že pro čísla, pro něž se rovná levá a pravá strana rovnice před úpravou, se rovnají i po úpravě, a obráceně. První podmínka je splněna automaticky, dosazuji-li do jedné funkce stejnou hodnotu (pravé a levé strany), dostávám opět stejnou hodnotu, pokud tedy hodnota obou stran je v definičním oboru upravující funkce. Ta tedy musí být definována přinejmenším na množině hodnot (například) levých stran pro všechna řešení. Druhá podmínka nám dává podstatnou charakteristiku ekvivalentních úprav: dosazením dvou různých stran musí vzniknout opět dvě různé strany, jinými slovy, upravující zobrazení musí být prosté. To je právě rozdíl mezi výše uvedenými funkcemi konstituujícími ekvivalentní, resp. neekvivalentní úpravy. Zcela konkrétně například umocníme-li $x = 2$ na třetí, množina řešení se zachová, protože Id^3 je prostá funkce, ale při umocnění výsledné rovnice $x^3 = 8$ na druhou se dvě různé hodnoty levých stran, -8 a 8, které vyjdou pro $x = -2$ resp. $x = 2$, zobrazí na stejnou hodnotu, 64. Protože 2 byla řešením už před úpravou a pravá strana se tedy rovná také 64, je nyní řešením i -2. Toto řešení nelze vyloučit jinak, než návratem k původní rovnici (zkouškou).

Před formální formulací předchozích úvah si ještě uvědomme, že při úpravách často požíváme i neznámou (třeba „převedení x na druhou stranu“), a upravující funkce tedy bude mít dvě proměnné – jednou bude neznámá $x \in X$, druhou hodnota levé či pravé strany rovnice, tedy prvek Y.

2.2 Složení s prostým zobrazením.

Věta 2. *Nechť zobrazení U z $X \times Y$ do Z je definováno alespoň na $K(E) \times L(K(E))$ a je prosté vzhledem k druhé proměnné (neboli pro pevné x je zobrazení $U_x(y) = U(x, y)$ prosté). Pak $K(E) = K(E_U)$, kde*

$$E_U(x) \equiv U(x, L(x)) = U(x, R(x)),\ x \in X.$$

Důkaz. Vzhledem k prostotě U_x je zobrazení $U_x|_{K(E)}$ bijekce mezi $L(K(E))$ a $U(L(K(E)))$, z čehož plyne, že ta $x \in X$, která nebyla řešeními E, nejsou ani řešeními E_U (buď pro ně rovnice nemá smysl, nebo se levá strana nerovná pravé) a naopak. $\square$

Tato věta shrnuje předchozí úvahy do tvrzení, že dosazení obou stran rovnice do nějakého zobrazení je ekvivalentní úpravou jen tehdy, bude-li toto zobrazení prosté a definované alespoň pro všechny levé strany, které vzniknou dosazením řešení (což jsou z definice řešení i pravé strany). Matematicky maximalistické, ale nepříliš užitečné, protože při řešení samozřejmě nebudeme vědět, které prvky definičního oboru rovnice jsou řešeními. Budeme tedy používat zobrazení definovaná přinejmenším na na celém $L(X) \cap R(X)$, tedy průniku oborů hodnot pravé a levé strany. Ta x, která jsou v oboru hodnot jen jedné ze stran rovnice, samozřejmě nemohou být řešeními, a můžeme je z definičního oboru rovnice vyloučit.
Př. $\sqrt{x+1} = x - 1$
Definiční obor i obor hodnot obou stran se liší. Tam, kde není alespoň jedna strana definována, řešení být nemohou, máme tedy z levé strany $x \geq -1$. K vypočtení řešení bychom se potřebovali zbavit odmocniny, tedy umocnit rovnici na druhou. To není obecně ekvivalentní úprava, neboť příslušná funkce Id^2 není prostá. Můžeme však využít oborů hodnot. Odmocnina, vnější funkce levé strany, nabývá pouze nezáporných hodnot. Ta x, pro která je pravá strana záporná ($(-\infty, 1)$), tedy můžeme klidně vyloučit. Tím bude už pravá strana také vždy nezáporná a umocnění rovnice na druhou je ekvivalentní úprava. Dostáváme kvadratickou rovnici, která má v intervalu $\langle 1, \infty)$ jediné řešení, 3. Tento postup, stanovení podmínek, je

cestou ekvivalentních úprav. Alternativně lze použít systém neekvivalentní úpravy a zkoušky – nezkoumat tedy obor hodnot jednotlivých stran rovnice, umocnit ji na druhou neekvivalentně a na zjištěných kandidátech na řešení provést zkoušku. To lze, je-li množina falešných řešení rozumně velká. Například umocnění na druhou má ke každému obrazu dva vzory, proto úprava počet řešení maximálně zdvojnásobí. Problém se vzory vzniká u periodických funkcí jako sinus, vzorů hodnot z definičního oboru je pak nekonečně mnoho. Naprostým extrémem je použití úprav jako je násobení nulou – úprava je neekvivalentní, protože po jejím provedení budou rovnici splňovat nejen všechny dosavadní řešení, ale i všechna ostatní čísla z definičního oboru rovnice. Ta samozřejmě nelze zkouškou vyloučit.

V některých případech – jako je následující příklad – není upravující funkce U prostá vzhledem k druhé proměnné pro všechny hodnoty x, nebo je požadovaná úprava platná (jinými slovy upravující funkce definovaná) jen na části definičního oboru rovnice:
Př. $x^2 = 2x$
a) převodem na $x^2 - 2x + 1 = 1$, dále $|x - 1| = 1$ a rozdělení na dva případy,
b) rozdělením na dva případy podle toho, zda $x = 0$, v kladném dosazení, v záporném dělení rovnice x,
c) vytknutím na $x(x - 2) = 0$, z čehož $x = 0 \vee x = 2$ (okruh bez dělitelů nuly).

2.3 Rozdělení na případy.

Věta 3. *Je-li $X_1 \cup X_2 = X$, je $K(E) = K(E|_{X_1}) \cup K(E|_{X_2})$.*

Důkaz. Zřejmý. □

Toto jsou veškeré úpravy, které pracují se samostanou rovnicí. Následují úpravy soustav, jak však uvidíme, některé z nich se skrytě používají i při řešení jednotlivých rovnic.

Zcela zásadní roli hraje u soustav rovnic dosazení. Nemusí jít jen o vyjádření neznámé a dosazení jejího vyjádření za ní. Protože je rovnice tvrzením o rovnosti dvou výrazů, můžeme (slabě) ekvivalentně kterýkoli z nich kdekoli v soustavě nahradit jiným.

2.4 Dosazení (substituce).

Věta 4. *Nechť soustava rovnic S s neznámou v X obsahuje rovnici $S_1(x) = S_2(x)$. Dále mějme rovnici*

$$E_1(x) \equiv L(x, S_1(x)) = R(x)$$

a označme

$$E_2(x) \equiv L(x, S_2(x)) = R(x),$$

obě též s neznámou v X. Pak $K(S \wedge E_1) = K(S \wedge E_2)$.

Důkaz. Je-li $S_1(x) = S_2(x)$ (což je např. tehdy, je-li x řešení soustavy), pak vlastně nedosazujeme, neboť dosazovaná hodnota je stejná jako původní, takže je-li x řešením původní soustavy, je i řešením soustavy vzniklé dosazením. Pokud $S_1(x) \neq S_2(x)$, pak x řešením není a jediné, co může substituce změnit, je zmenšit definiční obor rovnice o toto x (neboť funkce L může být pro $(x, S_1(x))$ definována, ale pro $(x, S_2(x))$ nikoli). □

Věta je formulována jen jako dosazení levé strany do levé strany, ale díky záměně stran (úprava 1) můžeme samozřejmě dosazovat stranově libovolně. Uvědomte si, že tato úprava nám kromě samotného dosazování umožňuje též dělat úpravy jako přičtení jedné rovnice k druhé. Ta je ve skutečnosti přičtením levé strany první rovnice k oběma stranám druhé (úprava 2) a substituce pravé strany první rovnice za levou na pravé straně vzniklého součtu.

Poslední úprava je často jaksi neviditelná. Použili jsme ji třeba výše při úpravě rovnice $x^2 - 2x + 1 = 1$ na $(x - 1)^2 = 1$. Takovou náhradu – přestože je zřejmě ekvivalentní – nám žádná z dosavadních úprav neumožňuje.

2.5 Přidání či odebrání tautologie.

Věta 5. *Nechť S je soustava a E rovnice takové, že $K(S) \subset K(E)$ (jinými slovy, E je platná alespoň na všech řešeních S). Pak $K(S) = K(S \wedge E)$.*

Důkaz. Zcela zřejmý, $K(S \wedge E) = K(S) \cap K(E) = K(S)$. □

Protože nebudeme množinu řešení znát, budeme stejně jako při skládání funkcí používat takové rovnice E, které jsou platné na všech x, u kterých nemůžeme vyloučit, že jsou řešeními, neboli na těch, pro něž $L(x), R(x) \in L(X) \cap R(X)$.

Jak nám tato úprava umožní výše zmiňovanou náhradu? Z rovnice uděláme přidáním tautologie

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,$$

platné v celém $\mathbb{C}$, soustavu, v ní provedeme dosazení a tautologii opět odebereme. Toto použití – ekvivalentní úpravy algebraických výrazů v rovnicích – je vůbec nejdůležitější. Často tuto úpravu používáme i k vynechání zjevných tautologií ze soustavy, typicky rovnice $0 = 0$.