

Úpravy derivací

Nejdůležitější praktickou aplikací diferenciálního počtu je vyšetřování průběhu funkce. Jeho nezbytnou součástí je výpočet první a druhé derivace vyšetřované funkce a hledání jejich nulových bodů. Bohužel právě zjednodušování funkcí vzniklých mechanickým derivováním činí studentům značné potíže, ačkoli jde o jednoduché úpravy algebraických výrazů. Následující příklady jsou určeny právě k procvičování těchto úprav.

Ke zjednodušení některých následujících výrazů je třeba funkce signum. Ta je dána předpisem

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \text{ a} \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

a – jak název napovídá – přiřazuje argumentu jeho znaménko. Její význam spočívá v tom, že pomocí ní lze vyjádřit absolutní hodnotu vztahem

$$|x| = x \operatorname{sgn} x,$$

který je mimo jiné nezbytný pro derivování funkcí s absolutní hodnotou. Pro zjednodušování algebraických výrazů však stačí, že z něj ihned plyne rovnost

$$\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x \quad \text{pro } x \neq 0,$$

kterou používáme ke zjednodušování zlomků vlevo.

Zjednodušte výrazy a nalezněte jejich nulové body:

- I) 1.
$$\frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2} - (4-3x)\frac{(2-x)^2-2x(2-x)}{3\sqrt[3]{x^2(2-x)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(2-x)^4}}$$
2.
$$\frac{6x\sqrt[3]{x^4(x^2-1)} - (3x^2+1)\frac{4x^3(x^2-1)+2x^5}{3\sqrt[3]{x^8(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{x^8(x^2-1)^2}}$$
3.
$$\frac{3\sqrt[3]{x^2(x-2)} - (3x-2)\frac{x^2+2x(x-2)}{3\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}}}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}}$$
4.
$$\frac{(6x+6)\sqrt[3]{(x^2+2x)(x+1)^4} - (3x^2+6x+4)\frac{(2x+2)(x+1)^4+4(x^2+2x)(x+1)^3}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2(x+1)^8}}}{\sqrt[3]{(x^2+2x)^2(x+1)^8}}$$
- II) 1.
$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$
2.
$$\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{2x}{x^2+1}}} \cdot (-2)\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$
3.
$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}} \cdot (-2)\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$$
4.
$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)^2}} \cdot \frac{4x(x^4+1)-2x^2 \cdot 4x^3}{(x^4+1)^2}$$