UNIVERZITA KARLOVA
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Porovnání axiomatických systémů geometrie u Euklida a Hilberta z hlediska didaktiky matematiky

Bakalářská práce

AUTOR PRÁCE: Adela Tavačová
VEDOUCÍ PRÁCE: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

Praha 2016

Čestné prohlášení:

Tuto bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Ladislava Kvasze, Dr. a s použitím odborné literatury a dalších pramenů uvedených v seznamu použité literatury. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 7. 4. 2016

Adela Tavačová

Poděkování:

Především bych ráda poděkovala svému vedoucímu prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi za odbornou pomoc, velmi cenné nápady, rady a připomínky, které mi ochotně poskytl pro vypracování této bakalářské práce.

Abstrakt

Název práce: Porovnání axiomatických systémů geometrie u Euklida a Hilberta z hlediska didaktiky matematiky

Autor: Adela Tavačová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

Cílem této práce je zpracování vývoje axiomatického pojetí geometrie a jeho využití v didaktice matematiky. Práce se skládá ze dvou hlavních částí, z nichž jedna je soustředěna na Euklida a jeho spis *Základy* a druhá na Davida Hilberta a jeho dílo *Grundlagen der Geometrie*. V práci je obsažen stručný historický kontext popisující postupný vývoj geometrie a geometrického myšlení od doby antiky až po současnost. Dále se práce věnuje vlivem *Základů* na matematiku obecně a také její vyučování, na šíření *Základů* ve světě a obzvláště v České republice. Podrobně je pozornost věnována charakteristice axiomatického systému zavedeného Euklidem a případným potížím způsobených historickým odstupem nebo překladem z řečtiny do jiných jazyků. Práce pokračuje ilustrací konkrétních logických mezer v *Základech*, které slouží jako motivace pro zavedení moderního axiomatického systému geometrie. Druhá část práce kromě opisu charakteru a struktury Hilbertova axiomatického systému nabízí i podněty pro alternativní výuku geometrie – z historického hlediska, tedy od Euklida a jeho přístupů až k stále vyššímu stupni abstrakce a formalizace, reprezentované Davidem Hilbertem.

Klíčová slova: axiom, postulát, definice, propozice, Euklides, *Základy*, David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*

Abstract

Title: Comparison of Euclid's and Hilbert's Axiomatic Systems of Geometry from the Didactic Viewpoint

Author: Adela Tavačová

Supervisor: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

The aim of this thesis is to describe the development of axiomatic systems of geometry and its applicability in didactics of mathematics. The thesis is composed of two parts, the first of which is focused on Euclid and his work *The Elements*, the second being aimed at David Hilbert and his work *Grundlagen der Geometrie.* The thesis contains a short historical context describing the gradual development of geometry and geometrical thinking, from the ancient times up to now. It will further cover the influence of *The Elements* upon mathematics as such, its teaching, and a spread across the countries of the world and the Czech Republic in particular. A detailed view is given to the characteristics of Euclid's axiomatic system and its possible difficulties caused predominantly by a vast temporal span and translations from Greek to other languages. I will continue with the analysis of the most considerable logical gaps in *The Elements*, thus paving the way for the introduction of a modern axiomatic system of geometry, represented by David Hilbert. Apart from the main features and the structure of David Hilbert's axiomatic system, the second part of the thesis highlights possible stimuli for an alternative teaching method from the historical viewpoint – from Euclid and his approach up to still increasing level of abstraction and rigid approach of David Hilbert.

Key words: axiom, postulate, definition, proposition, Euclid, *The Elements*, David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*

Obsah

Úvod

S výukou geometrie se setkává již žák základní školy a v průběhu střední školy své znalosti dále rozšiřuje. I univerzitní studijní obory s technickým zaměřením nabízí studentům široký výběr předmětů zaměřených buď na konkrétní oblast geometrie, nebo alespoň předpokládajících jistou geometrickou znalost. Předměty, které jsem měla možnost absolvovat během svého studia a jejichž cílem bylo prohloubení, resp. doplnění učiva geometrie probírané na střední škole, byly ve většině případů strukturovány jako souhrn teorie dané oblasti a její aplikace na konkrétních početních úlohách. Byly situace, kdy se učitel zmínil o historickém kontextu probírané látky, resp. upozornil na případné historické potíže spojené s danou teoretickou oblastí nebo výpočtem. Pojetí matematiky (konkrétně geometrie) z hlediska jejího historického vývoje považuji za poněkud odlišné od toho klasického, kdy je látka předávána žákům již ve *finální podobě* – tedy jako ucelený a mezi dnešními matematiky aktuálně uznávaný soubor informací o dané látce. Prvotní motivací pro mou práci bylo právě toto odlišné a méně časté pojetí matematiky – z hlediska jejího historického vývoje.

Historie matematiky jako exaktní vědy začíná Euklidem a jeho spisem *Základy*. Svým charakterem položily základy formálního, vysoce strukturovaného přístupu nejen ke geometrii, ale i k matematice obecně a také její výuce. „Jedná se o knihu, která po Bibli dosáhla vůbec největšího počtu vydání“ (Šír 2011, 100). Euklidovy *Základy* jsou tak jedno z nejvlivnějších děl všech dob a tvoří neodmyslitelnou součást naší vzdělanostní kultury. Tento obrovský význam *Základů* a jejich dlouhodobý vliv mě rovněž motivoval k napsání této práce.

Práce je rozdělená na dvě hlavní kapitoly, které jsou dále tematicky členěny na několik podkapitol. Těžištěm první kapitoly jsou Euklidovy *Základy* a kromě jejich struktury a samotného axiomatického systému je důraz kladen i na historický vývoj geometrie od předeuklidovské doby až po sepsání *Základů*. Dále se tato kapitola věnuje postavení *Základů* ve světě a jejich postupnému šíření do jednotlivých krajin, včetně České republiky.

V druhé kapitole sehrává centrální úlohu dílo *Grundlagen der Geometrie* (v překladu *Základy geometrie*) Davida Hilberta. Kapitola dokumentuje historický vývoj geometrie po Euklidovi až do současnosti. Důraz je kladen obzvlášť na vyhledání míst, jakýchsi logických mezer, kde se Euklides opíral o intuitivní myšlení a neformalizoval poznatek, na který se v důkazu odvolává, do podoby axiomu nebo postulátu. Protože důsledkem analýz těchto nedostatků je mimo jiné i zavedení nových forem geometrií, v druhé kapitole jsou tyto *neeuklidovské* geometrie stručně charakterizovány. Druhou kapitolu uzavírá pohled na danou tématiku z didaktického hlediska.

Cíle práce

Prvotním cílem této práce je zpracovat vývin axiomatického systému geometrie – počínaje Euklidem a jeho dílem *Základy*, přes nesčetné diskuze o možných nedostatcích jím zavedeného systému axiomů a postulátů, až po moderní axiomatizaci zavedenou Davidem Hilbertem, jehož vliv na geometrii je od dob Euklida nejzásadnější. Důkladné zpracování této tématiky by se mohlo stát východiskem pro didaktiku geometrie na druhém stupni základních škol, ale především na středních školách.

Druhým cílem této práce je shromáždit informace o jednotlivých matematicích, kteří svými teoriemi a přístupy vstupovali do procesu axiomatizace geometrie a zdůraznit fakt, že během celých dvou tisíciletí, které rozdělují Euklida a Hilberta, existovali mezi matematiky alternativní názory na Euklida a také kritické přístupy k jeho dílu. Za důležité považuji poukázat na tuto kontinuitu problematiky axiomatizace geometrie, aby bylo vidět, na které matematiky Hilbert navázal a kde čerpal inspiraci.

Třetím cílem je porovnání Euklidova a Hilbertova zavedení geometrie a nalezení v tvrzeních *Základů* ta místa, které nevyplynula z žádného Euklidova axiomu a přiměla tak Hilberta k rozšíření Euklidových devíti axiomů (které navíc nejsou logicky nezávislé, viz kap. 1.3.3) na jeho jednadvacet. Tyto logické mezery slouží jako motivace pro zavedení jednotlivých Hilbertových axiomů. Především se budu snažit na konkrétních příkladech, které by byli přístupné pro středoškolské studenty geometrie, tyto nedostatky předvést takovým způsobem, aby podnítili diskuzi mezi studenty. Velká část tvrzení, která budu uvádět ve své práci, patří do učebních osnov předmětu matematika na základních resp. středních školách. Jelikož je možno k nim přistupovat buď jako Euklides (tj. s využitím intuice) nebo jako Hilbert (ze striktně formálního hlediska), můžou ve výuce geometrie sloužit jako inspirace pro nastolení diskuzí ohledně těchto rozdílných přístupů. Motivování studentů prostřednictvím zajímavých problémů, úloh a alternativních přístupů, zasazených do historického kontextu sledujícího vývoj geometrie, které se jim obvykle předkládají jako hotové, tvoří jádro mé práce.

V závěru chci také hledat odpověď na otázku, do jaké míry a zda vůbec je potřebné seznamovat budoucí učitele matematiky s oběma těmito systémy.

Část I.

1 Euklidovy *Základy*

1.1 Vývoj geometrie od jejího vzniku až po Euklida

Geometrie (z řeckého *geo* = Země*, metría* = měření) má kořeny v prostém zájmu člověka o situace, kterým musel každodenně čelit. Právě při praktických činnostech, jako například měření pozemků, stavba obydlí, výroba nástrojů, oděvů, zbraní atp., získávali lidé první geometrické zkušenosti. Již pravěký člověk pozoroval množství předmětů nejrůznějších tvarů a právě jejich napodobováním, porovnáváním, příp. jejich užitím jako motiv pro dekoraci hliněných nádob, se u člověka postupně formovalo jakési geometrické myšlení. Nejstarší civilizace, tedy Mezopotámie, Egypt, Čína nebo Indie, aplikovaly své geometrické znalosti v realizaci náročných stavebních prací (chrámy, zavlažovací systémy, hradby a opevnění, pyramidy), ve výstavbě lodí a vozů, nebo v tesání z kamene (nejen kvádry, ale i složitější tělesa, příp. umělecké sochy). Jejich ne vždycky přesné výpočty (např. u obvodu kruhu) byly pro praktické účely dostačující. Navíc tam, kde si nepřesnost uvědomovaly, pokoušely se postupnou aproximací o nalezení správné hodnoty a z dnešního pohledu můžeme říct, že jejich postupy a znalosti jsou vskutku pozoruhodné. Ovšem u egyptské, mezopotamské, indické nebo čínské geometrie nemůžeme mluvit vysloveně o geometrii jako vědě, protože jejím těžištěm bylo praktické provedení konkrétní úlohy, a to bez zdůvodnění její správnosti. Přibližně v 6. století př. n. l. začali Egypťané obchodovat s Řeky. Kromě výměny tovaru došlo i k výměně myšlenek a znalostí a antické Řecko se tak dostalo do styku s geometrií. Pozdější průkopníci starořecké geometrie navštěvovali Egypt a nechávali se poučovat od egyptských duchovních (Cajori 2010, 17). Ve své vlasti pak znalosti rozvinuli a přinesli tak posun od empiricky získaných, nezdůvodněných poznatků, směrem k prvním teoretickým zásadám a požadavkům na dokazování předkládaných tvrzení.

Jedním z prvních řeckých učenců, kteří se přičinili o tuto změnu, byl Thalés z Milétu (přibližně 624-548 př. n. l.), který uspořádal některé poznatky o kružnicích a trojúhelnících. Jeho současník, Pythagoras ze Samu (přibližně 570-510 př. n. l.), spolu se svými učenci v tzv. Pythagorejské škole posunul matematiku zase o krok dál. Ačkoli je jeho jméno spojováno především s geometrií (např. Pythagorova věta), pojetí matematiky u Pythagorejců bylo především aritmetické – čísla a jejich poměry se staly východiskem pro jejich pojetí nejen matematiky, ale i celého světa. Pythagorejská teorie čísel je základem jedné z částí Euklidových *Základů.*

Z mnoha osobností antického Řecka stojí určitě za zmínku slavný filosof Platón (přibližně 429-348 př. n. l.). V průběhu života získal na svých cestách mnoho zkušeností s vědami své doby, mimo jiné i s matematikou a geometrií. Když se přibližně v roce 389 př. n. l. vrátil do Atén, založil školu, známou jako Akademie. Udělal tak obrovský krok směrem k strukturované výuce nejrůznějších věd – v té době obzvlášť filosofie, matematiky, geometrie, astronomie, dialektiky atd. (Cajori 2010, 33). Platón pozoroval, že geometrie dokáže „vycvičit mysl pro korektní a důrazné myšlení" (Cajori 2010, 34). I to může být jeden z důvodů, proč se nad vchod své Akademie rozhodl umístit nápis „Bez znalosti geometrie ať sem nikdo nevstupuje" (Cajori 2010, 33). Platónův žák a jeden z nejvýznamnějších filozofů a nejvšestrannějších učenců své doby, Aristoteles ze Stageiry (přibližně 384-322 př. n. l.), částečně navázal na svého učitele. Na rozdíl od Platóna, který se zabýval převážně otázkami člověka a lidské společnosti, se Aristoteles zaměřil i na systematizaci tehdy známých oborů a jeho filozofie tak významně ovlivnila rozvoj věd jako například astronomie, biologie, logiky, lingvistiky, meteorologie, politologie a mnoha dalších. Jedním z jeho nejvýraznějších přínosů v teorii logiky je vymezení a důkladná charakteristika indukce a dedukce jako dvou možných způsobů argumentace. Právě deduktivní teorie je to, co hraje důležitou roli u Euklida.

Zásadní změna v řeckých dějinách, tedy i ve vývoji geometrie nastala po bitvě u Chaireneie, přibližně v roce 338 př. n. l., kde se potkala vojska tehdejších řeckých městských států s vojskem makedonského krále Filipa II. a utrpěla těžkou porážku (Cajori 2010, 39). Jen o několik let později Filipův syn Alexandr Veliký (přibližně 356-323 př. n. l.) začal s dobýváním tehdy známého světa a v průběhu asi jedenácti let vybudoval obrovskou říši sahající od východní hranice dnešní Indie až po Egypt. Město Alexandrie, které založil právě v Egyptě[1], se stalo centrem helénské (řecké) kultury a tento status si udrželo i po Alexandrově smrti a nástupu Ptolemaia I. Sotéra (přibližně 367-283 př. n. l), který se prohlásil za vládce celé Egyptské říše (Cajori 2010, 40). Ptolemaios podporoval rozmach kultury a vědy v Alexandrii a založil tam univerzitu, knihovnu (dnes známou jako Alexandrijská knihovna, největší a nejslavnější knihovna starověku) nebo řadu muzeí. Alexandrie se tak na téměř šest staletí stala centrem vzdělanosti.

[1] Egyptská Alexandrie není jediné město tohoto jména, Alexandr Veliký jich založil několik.

1.2 Euklides a jeho *Základy*

Euklides žil kolem roku 300 př. n. l. v Alexandrii, tedy zhruba sto let po slavném antickém filosofovi Platónovi. Kromě faktu, že Euklides vyučoval v Alexandrii matematiku, existuje o jeho životě jen málo informací. Většinu z nich nalézáme v díle řeckého neoplatonika Prokla z Alexandrie (přibližně 428-348 př. n. l.)[2]. Proklos žil v době, kdy prestiž Alexandrie postupně zanikala a Atény ji naopak znovu nabývaly. Byl nejdřív žákem a později i učitelem na Akademii a v jeho přednáškách z geometrie analyzoval definice a věty uvedené v Euklidově nejslavnějším díle – v *Základech* (v řeckém překladu *Stoicheía – Στοιχεία*). Tyto své komentáře pak sesbíral do jednotného díla *Komentář k první knize Euklidových Základů – A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, dále jen *Komentář* (Proclus 1970). Právě Proklův *Komentář* je jedním z hlavních zdrojů informací o řecké matematice obecně, o Euklidově životě a o jeho myšlenkové výstavbě geometrie, rovněž o jednotlivých konkrétních částech první knihy *Základů*. Nalezneme zde také připomínky (nejen Proklovy, ale i jiných matematiků) k systému axiomů, postulátů a definic.

Euklidovy *Základy* ovlivnily nejen geometrii, ale i celou matematiku a také její vyučování. „Samotný termín *základy* (*stoicheía – στοιχεῖα*) je odvozen od slov *στοιχεῖον* (*stoicheíon), στοῖχος* (*stoíchos*), která v řečtině označují opracovaný blok kamene, vojáka stojícího v řadě, hlásku abecedy, obecně tedy člen doplňující řadu“ (Šír 2011, 101). Proklos zasazuje tento pojem do matematického kontextu a uvádí ho ve dvou případech – „to, co je užito při konstrukci něčeho jiného, tedy *elementem* konstruované věci a jako to, co je jednodušší a v co se složené rozkládá“ (Šír 2011, 101). Latinský překlad tohoto pojmu (*elementa*) vystihuje o něco lépe tyto rozměry než dlouhodobě užívaný český překlad *základy*.

Euklides v *Základech* sesbíral a logicky uspořádal do té doby známé poznatky z geometrie a v návaznosti na Aristotelovu teorii argumentace zavedl deduktivní budování geometrie. Euklides „uspořádal množství tvrzení Eudoxových[3], zdokonalil tvrzení Theaitetove[4] a nezpochybnitelně demonstroval pravdy, které byly do jeho času jen

[2] Anglická verze jeho díla, ze které ve své práci cituji, byla vydána pod latinským ekvivalentem Proclus, proto na něj v odkazech na citovanou literaturu referuji jménem Proclus.

[3] Eudoxos z Knidu žil na přelomu 5. a 4. století př. n. l.

[4] Theaitétos z Atén působil stejně jako Eudoxos z Knidu na přelomu 5. a 4. století př. n. l.

neúplně dokázány jeho předchůdci“ (Proclus 1970, 75). Většina tvrzení byla tedy již známá, ale výjimečnost a velikost Euklidova díla spočívá především v jeho vnitřní logické struktuře, které se podrobněji věnuji v kapitole 0.

1.2.1 Vnější struktura

Základy tvoří třináct knih a jisté období se k nim přidávaly ještě dvě. Prvních šest knih se zabývá planimetrií – geometrickými útvary v rovině obecně, jejich vlastnostmi a teorií proporcí. Knihy VII – IX jsou zaměřené na teorii čísel – důraz je kladen na prvočísla a na důkaz nekonečnosti jejich počtu. V této části také nalezneme důkaz iracionality některých čísel a algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou čísel (dnes známý pod jménem Euklidův algoritmus). Je nutno podotknout, že všechny úlohy a důkazy tvrzení v této části *Základů* byly vedené geometricky, tj. na základě délek úseček a ne rovnic a symbolických vztahů mezi veličinami tak, jak je známe dnes. S algebraickým pojetím geometrie přišel až v 17. století René Descartes (viz kap. 0). Kniha X se věnuje měření a těžištěm knih XI-XIII je geometrie prostoru.

Někdy jsou Euklidovi připisovány i knihy XIV a XV, které se objevily v některých pozdějších přepisech *Základů.* Avšak více je přijímán názor, že tyto dvě knihy věnující se převážně geometrii pravidelných mnohostěnů, byly napsány o něco později než ty Euklidovy a pak přidány k původním třinácti spisům. Autorství knihy XIV se připisuje řeckému matematikovi a astronomovi Hypsiklovi (přibližně 190-120 př. n. l.), který ji s největší pravděpodobností sepsal na základě díla Apollonia z Pergy (přibližně 260-190 př. n. l.) – údajného autora knihy XV.

1.2.2 Překlady Základů

„Na rozdíl od předchozích pokusů o sepsání základů geometrie byl Euklidův spis považován za definitivní, stal se tak předmětem mnoha opisů, překladů a komentářů a zcela nahradil předchozí verze“ (Šír 2011, 98). Ve 4. století n. l. (tedy zhruba sedm staletí po Euklidově verzi) učinil Theón z Alexandrie (přibližně 335-405) redakci *Základů* a většina dochovaných rukopisů jsou opisy právě jeho díla. Na počátku 9. století byly *Základy* přeloženy do arabštiny a „zásadním způsoben ovlivnily matematickou produkci arabského světa“ (Šír 2011, 99). Ve 12. století byly několika autory přeloženy z řečtiny do latiny – nejvlivnější byla verze anglického matematika a filosofa Adelarda z Bathu (1080-1052). Tento překlad byl v průběhu 13-15. století předmětem několika revizí, z nichž důležitou roli sehrála verze Campana z Novary (1220-1296) – jeho překlad byl roku 1482 vydán tiskem a stal se tak první tištěnou matematickou knihou.

Moderní edici řeckého textu vydal v letech 1883-1888 dánský filolog a historik Johan Ludwig Heiberg (1854-1928), v níž vycházel z nejstarších rukopisů. Anglický matematik Sir Thomas Little Heath (1861-1940) přeložil Heibergovo dílo do angličtiny a v roce 1908 vydal tři svazky *Základů* (*The Thirteen Books of the Elements – Třináct knih Základů*). Tato publikace kromě Euklidova díla obsahuje podrobný komentář ke každé definici, axiomu, postulátu i tvrzení. Shrnuje komentáře a diskuze o nich a věnuje se i rozboru jednotlivých řeckých pojmů. Heathovo dílo je v současné době zřejmě nejčastěji čtenou verzí *Základů* (Šír 2011, 100) a je i jedním z nejdůležitějších zdrojů pro mou práci. Poněvadž toto dílo nebylo do češtiny přeloženo, všechny citace jsou mými překlady.

Mezi první spolky zaměřené na matematiku založené na území dnešní České republiky, patří *Spolek pro volné přednášky z matematiky a fysiky*, který vznikl roku 1861 v Praze. V roce 1869 se tento spolek přejmenoval na *Jednotu českých matematiků* (dále jen *Jednota*) a měl velký vliv na život české matematicko-fyzikální obce (Bečvářová 2002, 113). O rok později, v roce 1870, *Jednota* připravila sjezd, jehož cílem bylo mimo jiné i strukturování látky ve vyučování matematiky a zkvalitnění výuky matematiky. Zaznělo v něm rovněž volání po „přečeštění Euklida“ (Bečvářová 2002, 113). Byla zvolena zvláštní komise, která měla připravit českou verzi *Základů.* Celý projekt bohužel ztroskotal a vytvořená komise překlad nezveřejnila. Euklidovy *Základy* byly v české verzi vydány až roku 1907 a jejich autorem byl František Servít (1848-1923), profesor klasických jazyků na vinohradském gymnáziu v Praze. Jeho překlad byl vydán *Jednotou českých matematiků* jako *Eukleidovy Základy (Elementa).* Knižní vydání doplnil František Servít krátkým úvodem, ve kterém stručně představil Euklida a jeho dílo, charakterizoval strukturu *Základů* a zmínil se také o jejich nejvýznamnějších vydáních. Český matematik Petr Vopěnka (1935-2015) v letech 2007 až 2011 znovu vydal Servítův překlad *Základů*, přičemž ho doplnil několika svými komentáři. Ve své práci vycházím ze Servítova překladu (definice a tvrzení) a překladu Richarda Maška a Adama Šmída (postuláty a axiomy), kteří vytvořili moderní překlad z řeckého originálu, vydaný roku 2011 v publikaci *Řecké matematické texty,* kterou uspořádal, úvodními studiemi a poznámkami opatřil Zbyněk Šír.

1.3 Axiomatizace geometrie podle Euklida

Jak již bylo zmíněno, největší přínos *Základů* spočívá v logické struktuře jednotlivých knih. Euklides svým deduktivním přístupem ke geometrii, kdy je ze skupiny axiomů (z řeckého *áxios* – *άχιος* = *hodnotný*) a postulátů (z latinského *postulāre* = *vyžadovat*) možno odvodit (vydedukovat, z lat. *deductio* = odvození) sadu tvrzení (vět). Terminologie není vždy jednotná a může se lišit, např. *axiom* a *postulát* se někdy považují za totéž. Podobně i termíny *tvrzení* a *věta* jsou často zaměnitelné, avšak většina matematiků pod pojmem *tvrzení* rozumí jakoukoliv skutečnost, kterou lze dokázat, pojem *věta* pak zastřešuje významná tvrzení. Zajímavý je pohled filosofa Prokla, který všechna tvrzení rozděluje na *problémy* a *věty* (viz kapitola 1.3.4). Ve své práci se budu držet Euklidova rozlišení axiomů a postulátů, přičemž pod axiomy budu rozumět zřejmě pravdivý výrok, který nevyžaduje důkaz a je společný pro více disciplín (geometrie, astronomie, optika, atp.) a pod postuláty zase tvrzení specifická pro každou disciplínu zvlášť, jejichž pravdivost se rovněž nedokazuje, spíš je od nás *vyžadováno* potvrzení jejich správnosti. Pod pojmem *axiomatický systém geometrie* rozumíme systém postulátů a axiomů, ze kterých jsou logicky odvozovány všechna tvrzení o existenci a vlastnostech jednotlivých geometrických úvarů.

Východiskem pro všechny knihy *Základů* je systém ***dvaceti tří*** definic, ***pěti axiomů*** a ***pěti postulátů*** nacházející se hned v úvodu první knihy. Euklides pak formuluje tvrzení a dokazuje jejich správnost právě z axiomů. Každé další tvrzení využívající platnost tvrzení předchozího je tak rovněž možné odvodit bezprostředně z pěti základních axiomů. V úvodu každé další knihy Euklides už pouze formuluje a dokazuje tvrzení relevantní pro obsah daného spisu a v případě, že zavádí nové pojmy, jsou jejich definice shrnuty na začátku dané knihy.

1.3.1 Definice (*oroi* – *ορoι*)

Definice hrály důležitou roli již u Platóna – jeho dialogy[5] jsou soustředěné kolem snahy najít přesné vymezení abstraktního pojmu, především nějaké lidské vlastnosti. Pro Aristotela je definice „výpověď, která říká co nějaká věc je“ (Heath 2013, 143), tedy

[5] Tímto názvem je označována sbírka přibližně čtyřiceti Platónových spisů majících formu rozhovoru, ve kterých jako hlavní postava figuruje Sokrates (Platónův učitel, žijící zhruba v 5. století př. n. l.).

ne jenom vysvětlení daného pojmu ale jednoznačná specifikace a určení vlastností dané věci. Euklides se drží Platónské tradice a vždy před použitím nějakého pojmu chce jednoznačně vymezit, co je pod daným pojmem myšleno. Hned na začátku knihy I tedy uvádí seznam dvaceti tří definic, logicky seřazených od nejobecnějších (až intuitivních) po relativně složitější a specifičtější.

Def. 1) ***Bod (semeíón – σημεῖόν)*** jest, co nemá dílu.[6]

Def. 2) ***Čára (grammé – γραμμὴ)*** je délka bez šířky.

Def. 3) Hranicemi čáry jsou body.[7]

Def. 4) ***Přímá (eýtheia – εὐθεῖα)***[8] jest čára, která se svými body táhne rovně.

Def. 5) ***Plocha (epifáneia – επιφάνεια)*** jest, co má jen délku a šířku.

Def. 6) Hranice plochy jsou čáry.

Def. 7) ***Rovinná (epípedos – επίπεδος)*** je plocha, která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.

Def. 8) Rovinný ***úhel (gonía – γωνία)***[9] je vzájemný sklon dvou čar stýkajících se v rovině a neležících na jedné přímce.

Def. 9) Když jsou čáry svírající úhel přímky, nazývá se tento úhel ***přímkový (eýthýgrammos – εὐθύγραμμος)***[10].

Def. 10) Když se postaví přímka na přímku tak, že sousední úhly činí navzájem stejnými, je každý z těch stejně velkých úhlů ***pravý (orthés – ορθής)*** a postavená přímka se nazývá ***kolmicí (káthetos – κάθετος)*** k té, na níž je postavena.

Def. 11) ***Tupý (ambleía – αμβλεῖα)*** úhel je ten, který je větší než pravý.

Def. 12) ***Ostrý (oxeía – οξεῖα)*** úhel je ten, který je menší než pravý.

---

[6] „Řecký termín s významem *značka* nahradil starší termín *stigmé* – στιγμή, znamenající *stopa po bodnutí* a odpovídající latinskému *punctum* i českému *bod*. Vidíme tedy, že došlo k posunu od konkrétnějšího termínu k abstraktnějšímu“ (Šír 2011, 110).

[7] Euklides uvádí toto vysvětlení pro logické spojení dvou předchozích definic (Heath 2013, 165), analogicky spojuje i čtvrtou a pátou definici.

[8] Přímka byla Řeky vnímána jako konečný objekt (který lze neomezeně prodlužovat na obě strany), kdežto zhruba od období renesance je přímka chápána jako nekonečný objekt, z něhož se usekávají konečné objekty – *úsečky*.

[9] Aristoteles užíval pro vyjádření úhlu pojem *klísis* – *κλίσις* překládán jako *odchylka*, *zlom* (Heath 2013, 176). Definice zahrnuje i úhly tvořené čarami obecně, nikoliv jen přímkami.

[10] Moderní terminologie uvádí pojmy *rektilineární* neboli *přímočarý*.

Def. 13) ***Mez (óros – όρος)*** je to, co je něčeho hranicí.

Def. 14) ***Útvar (schémá – σχῆμά)*** je to, co nějaká nebo nějaké meze objímají[11].

Def. 15) ***Kruh (kýklos – κύκλος)***[12] je rovinný útvar objímaný jedinou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu uvnitř útvaru vedeny přímky jsou si navzájem rovny.

Def. 16) Uvedený bod se nazývá ***střed (kéntron – κέντρον)*** kruhu.

Def. 17) ***Průměrem (diámetros – διάμετρος)*** kruhu je některá přímka vedená středem a končící se na obou stranách obvodem kruhu, jež také rozděluje kruh na polovice.

Def. 18) ***Polokruh (emikýklion – ημικύκλιον)*** je útvar omezený průměrem a částí obvodu jim usečeného; střed půlkruhu je stejný jako střed kruhu.

Def. 19) Útvary ***přímkové (eýthýgrammá – εὐθύγραμμά)*** jsou omezovány přímkami, třístranné třemi, čtyřstranné čtyřmi a mnohostranné více než čtyřmi.

Def. 20) Mezi trojstrannými útvary je trojúhelník ***stejnostranný (isópleyron – σόπλευρον)***, který má tři strany stejné, ***rovnoramenný (isoskelés – ἰσοσκελὲς)***, který má jen dvě strany stejné, a ***různostranný (skalenón – σκαληνὸν)***, který má tři strany nestejné.

Def. 21) Mimo to z útvarů třístranných je trojúhelník ***pravoúhlý (orthogónion – ὀρθογώνιον)***, který má pravý úhel, pak ***tupoúhlý (amblygónion – ἀμβλυγώνιον)***, který má úhel tupý, a ***ostroúhlý (oxygónion – ὀξυγώνιον)***, mající tři úhly ostré.

Def. 22) Ze čtyřstranných útvarů je ***čtverec (tetrágonon – τετράγωνον)***, který je stejnostranný a pravoúhlý; ***obdélník (orthogónion – ὀρθογώνιον)*** je sice pravoúhlý, avšak nestejnostranný; ***kosočtverec (rómbos – ῥόμβος)*** je stejnostranný, ne však pravoúhlý; ***kosodélník (romboeidés – ῥομβοειδὲς)***, jenž má protější strany i úhly navzájem stejné, není však ani stejnostranný ani stejnoúhlý;

---

[11] V současnosti se používá pojem *ohraničují*.

[12] Euklides (a ani ostatní řečtí matematikové) nerozlišovali mezi *kruhem* a *kružnicí*, jak tomu je i v češtině. Toto rozlišení je poměrně nepřirozené, jelikož obecně, jednodimenzionální hraniční čáry omezující rovinní geometrické objekty – např. *čtverec* a *obvod čtverce*, *trojúhelník* a *obvod trojúhelníku* atp. rozlišovány nejsou. Avšak pro větší přehlednost budu v důkazech Euklidových tvrzení používat pojem *kružnice*, jak je dnes v matematice, a rovněž v její výuce, zvykem.

mimo to pak čtyřstranné útvary nazývány buďte ***lichoběžníky (trapézia – τραπέζια)***[13].

Def. 23) ***Rovnoběžné (parálleloi – παράλληλοi)*** jsou přímky, které jsou v téže rovině a prodlouženy jsouce na obě strany *do nekonečna* (*eís ápeiron – είς άπειρον*), nikde se nesbíhají.[14]

1.3.2 Postuláty (aitémata – αἰτήματα)[15]

Jak jsem se již zmínila v úvodu této kapitoly, v některé literatuře se pojmy *axiom* a *postulát* považují za synonyma. Jejich společnou vlastností je to, že korektnost jak axiomů, tak i postulátů se nedokazuje. Avšak na rozdíl od axiomů, které jsou spíš obecnější (a nejen čistě geometrická) tvrzení, Euklidovy postuláty reprezentují počáteční geometrické konstrukce. Zajímavé je umístění postulátů mezi definice a axiomy, jelikož axiomy jsou víc obecné, kdežto postuláty specifičtější a čistě geometrické. Jejich umístění však dává smysl hlavně proto, že úzce souvisí s definicemi, jelikož vyžadují existenci definovaných geometrický objektů.

Můžeme pozorovat rozdílný charakter prvních tří a zbylých dvou postulátů. První až třetí postulát skutečně představují pouhý geometrický úkon, avšak čtvrtý a pátý připomínají svým obsahem spíš tvrzení. David Hilbert uvádí čtvrtý postulát jako větu a nabízí korektní důkaz (viz kap. 2.3.4). Problematice pátého postulátu a dlouhé diskuzi mezi matematiky o jeho nutnosti příp. závislosti na zbylých postulátech se věnuji podrobněji v kapitole 2.3.6.

Post. 1) Nechť se požaduje vést přímou čáru z každého bodu do každého bodu.[16]

---

[13] Proklos rozděluje čtyřúhelníky na rovnoběžné útvary a nerovnoběžné, u nerovnoběžných rozlišuje *trapezium – τραπέζιο* jako útvar s dvěma rovnoběžnými stranami *a trapezoid – τραπεζοειδές*, který nemá žádné strany rovnoběžné; u antického matematika, fyzika, filozofa a astronoma Archiméda ze Syrakus žijícího v 3. století př. n. l., je možné rovněž najít takové rozdělení (Heath 2013, 189).

[14] Na rozdíl od předchozích tato definice nevymezuje přímo objekt, ale vztah mezi objekty, konkrétně mezi dvěma přímými čarami. Frázi *eís ápeiron* překládanou *do nekonečna*, ovšem jedná se o *potencionální*, a nikoli *aktuální nekonečno.* „Je jí třeba rozumět spíše ve smyslu prodloužení bez omezení, tedy libovolně velkého prodloužení“ (Šír 2011, 114).

[15] Český překlad řeckého originálu je *poptávka, požadavek, žádost*.

[16] Tato formulace spolu s definicí přímky v sobě implicitně nese i to, že „dvěma body možno vést právě jednu přímku“ (Heath 2013, 195)

Post. 2) A omezenou přímou čáru souvisle prodloužit přímým směrem.[17]

Post. 3) A pro každý střed a každý rozestup[18] narýsovat kruh.

Post. 4) A aby si všechny pravé úhly byly navzájem rovny.

Post. 5) A jestliže nějaké dvě přímé čáry protne jiná přímá čára tak, že vytvoří na jedné straně vnitřní úhly menší dva pravé, pak aby se tyto přímé, budou-li prodlouženy do nekonečna, setkaly na té straně, na které jsou úhly menší než dva pravé.

1.3.3 Axiomy (axiómata – αξιώματα)[19]

Euklidovy axiomy představují obecně platné věty, aplikovatelné i na jiné vědy. V *Komentáři* je uvedeno pět základních axiomů. Proklos pozoruje, že axiomy by neměly být na sobě závislé (odvoditelné jeden z druhého), a proto vynechává čtyři axiomy uvedené v některých edicích *Základů,* např. Pappovém[20] komentáři a pravděpodobně i v původním Euklidově vydání (Heath 2013, 223).

Ax. 1) Co se rovná témuž, rovná se i navzájem.

Ax. 2) A jestliže se ke stejně velkým věcem přidají stejně velké věci, pak se celky rovnají.

Ax. 3) A jestliže se od stejně velkých věcí odeberou stejně velké věci, pak se zbytky rovnají.

Ax. 4) A co se navzájem překrývá, navzájem se rovná.

Ax. 5) A celek je větší než část.

[17] Jednoznačnost protažení je stejně jak v prvním postulátu vyjádřena implicitně.

[18] Servít ve svém překladu užívá dnes již vžitého pojmu *poloměr.*

[19] Proklos používa označení *axiomy*, avšak není jisté, že Euklides používal rovněž toto pojmenování – sám Proklos v Komentáři píše, že pojem *obecně známé* nebo *společné tvrzení (koinés énnoies – κοινές έννοιες)* byl používán u geometrů (a tedy pravděpodobně i u Euklida), kdežto *axiomy* možno nalézt spíš v aristotelské filozofické tradici (Heath 2013, 222). Richard Mašek a Adam Šmíd překládají jako *Obecné principy*.

[20] Pappos z Alexandrie byl významný matematik a astronom konce 3. a začátku 4. století n. l. a je považován za posledního velikána Alexandrijské školy, především díky svému dílu *Sbírka (Synagogé – Συναγωγή).*

Axiomy Proklem vynechané:

Ax. 6) A když se k nestejně velkým věcem přidají stejně velké věci, pak se celky nerovnají.

Ax. 7) A dvojnásobky téhož se navzájem rovnají.

Ax. 8) A poloviny téhož se navzájem rovnají.

Ax. 9) A dvě přímé čáry navzájem nesvírají plochu.[21]

1.3.4 Matematický důkaz a jeho struktura zavedená Euklidem

Euklides svým přístupem k matematickému důkazu zavedl jeho dosud aktuální logickou strukturu. Proklos tuto strukturu ve svém *Komentáři* shrnuje do šesti základních částí. První část je ***prótasis*** (*προτασις*)[22], tj. vyslovení tvrzení v obecném tvaru. Například Prop. I.46 zní „Na dané přímce narýsuj čtverec“ (Servít 1907, 24). Druhou částí je ***ekthesis*** (*εκθεσις*), tj. přeformulování tvrzení do specifického tvaru, ve kterém se zavede označení a obvykle je udělán i náčrt: „Danou přímkou buď *AB*, má se tedy na přímce *AB* narýsovati čtverec“ (Servít 1907, 24). Po *ekthesis* následuje ***diorismós*** (*διορισμος*), v rámci kterého je upřesněno, za jakých podmínek má úloha smysl. Čtvrtou částí je ***kataskeyé*** (*κατασκευη*), tj. konstrukce, při které jsou prvky dané v *ekthesis* doplňovány dalšími prvky na základě již dokázaných tvrzení s cílem vytvořit (zkonstruovat) požadovaný objekt. Následuje ***apódeiksis*** (*αποδειξης*), tj. samotný důkaz v užším smyslu, neboli čistě logická argumentace vyvozující platnost dané propozice. Posledním krokem je ***sympérasma*** (*συμπερασμα*), tj. závěr, ve kterém je zpravidla zopakované tvrzení z *protásis*: „Jest to tedy čtverec a jest narýsován na přímce *AB*, co právě bylo vykonati“ (Servít 1907, 24). Nejzákladnější a vždy přítomné jsou *protásis*, *apódeiksis* a *sympérasma*, protože „vždy je nutné předem vědět, co dokazujeme, prostřednictvím již známého to odvodit a pak shrnout, co bylo dokázáno“ (Proclus 1970, 159). Zbylé části jsou sice často přítomny, někdy je však možné je vynechat bez ztráty celistvosti důkazu.

[21] „Tento axiom je nepochybně pozdějším dodatkem, z jeho geometrického charakteru je patrná jeho rozdílnost od ostatních axiomů, které se týkají rovnosti (a nerovnosti)“ (Šír 2011, 117).

[22] Tímto pojmem jsou označovány Euklidova tvrzení v celých *Základech*. V překladu znamená *problém, tvrzení, návrh* neboli *propozice*. Právě označení *propozice* budu používat ve své práci. Jako značení vždy uvedu knihu, ve které se daná propozice nachází a její pořadové číslo (např. první propozice první knihy by byla zapsaná jako Prop. I.1).

Proklův *Komentář* čtenáři dále nabízí zajímavý a docela podrobný pohled na matematická tvrzení obecně, jako na jednu z více skupin předmětů geometrického bádání. Tvrdí, že každá věda je složená ze dvou částí – jedna část zkoumá výchozí předpoklady, ta druhá se ptá, co bezprostředně plyne nebo je možno sestrojit z těchto prvotních principů, resp. tezí. V oblasti geometrie se druhá část dělí na řešení problémů, resp. úloh a formulování vět. „Za problémy jsou považována ta tvrzení, jejichž cílem je vyprodukovat, uvést ve známost nebo zkonstruovat něco, co v jistém ohledu vlastně neexistuje; věty jsou tvrzení, jejichž smyslem je uvidět, identifikovat nebo demonstrovat existenci resp. neexistenci nějaké vlastnosti“ (Proclus 1970, 157).

Všech 465 tvrzení nacházejících se v *Základech* tvoří shrnutí znalostí geometrie Euklidovy doby. Protože těžištěm mé práce je vyhledat v Euklidových tvrzeních místa, která jsou neodvoditelná ze sady axiomů a postulátů, uvedu (v kap. 2.2.2) ta tvrzení, která obsahují určitou logickou mezeru a vyžadují dodatečný axiom. Jak se budu snažit ukázat v následujících kapitolách, moderní axiomatizace geometrie podle Davida Hilberta (1862-1943), poprvé uveřejněná v roce 1899 v publikaci *Grundlagen der Geometrie* (*Základy geometrie*), je výsledkem diskuzí trvajících téměř dvě tisíciletí.

Část II.

2 Hilbertovy *Grundlagen der Geometrie*

2.1 Vývoj geometrie od středověku až po novověk

V antickém Římě věda nedosáhla takového rozmachu jako v Řecku a po zániku antického světa v 5. století n. l. upadají na nějaký čas díla řeckých učenců v zapomnění (Lávička 2007, 8). Nástup mohutné islámské říše v 7. století přinesl nový rozkvět matematiky a právě tato říše, sahající již v 10. století od Španělska až po střední Asii, se stala centrem tehdejší vzdělanosti. Díky arabským překladům dodnes známe některá řecká díla, která se v původním znění nedochovala. Z množství arabských učenců uvedu alespoň některé, např. Ibn Síná (980-1037), známější pod jménem Avicenna, který se snažil o důkaz Euklidova pátého postulátu, nebo Omar Chajáám (1048-1131), jehož přínos podrobněji opisuji v kap. 2.3.6.

Ve středověké Evropě se na matematiku kladl důraz především v nově zakládaných univerzitách, ale více než originální spisy vznikaly latinské překlady arabských textů. Zásadní zlom nastal v 17. století, kdy byly René Descartesem (1596–1650) a Pierre Fermatem (1601–1665) položeny základy analytické geometrie – tj. geometrie, ve které je bod určen svou vzdáleností od dvou pevných přímek (neboli os), a útvary jsou reprezentovány algebraickými rovnicemi. Descartesovi a Fermatovi se tak podařilo „překonat ostrou hranici mezi světem čáry a světem čísel“ (Lávička 2007, 9). Geometrie bez soustavy souřadnic začala být označována jako geometrie syntetická[23].

V 17. století byla rozvinuta tzv. projektivní geometrie studující ty geometrické vlastnosti, které se středovým promítáním nemění, a vznikla i geometrie deskriptivní, prostorových útvarů do roviny. V 19. století vznikly (jako důsledek nejasností plynoucích z Euklidova postulátu) postupně tzv. neeuklidovské geometrie, kterým je věnována kapitola 2.3.7.

2.1.1 *Základy* jako předmět konstruktivní kritiky

Na první přečtení působí tvrzení v *Základech* bezchybným dojmem, poněvadž logika, se kterou Euklides postupně konstruoval stále složitější geometrické útvary a deduktivně odvozoval jejich stále komplexnější vlastnosti, je vskutku výtečně promyšlena. To, co způsobovalo dlouhé diskuze mezi matematiky, jsou především

[23] Synteze znamená slučování (myšlenek, pojmů atd.), kdy se z nejjednodušších faktů postupuje k složitějším; analýza je naopak rozbor, rozklad celku na jednotlivé prvky.

vlastnosti příp. konstrukce, jejichž pravdivost působí intuitivně zřejmě, které však neplynou přímo z Euklidovy sady postulátů a axiomů. Právě kvůli těmto mezerám vznikla potřeba zavést nový axiomatický systém geometrie, ve kterém by systém axiomů byl kompletní a umožňoval vybudovat geometrii tak, že každé tvrzení bude možné z nich odvodit a navíc jednotlivé axiomy nebudou na sobě logicky závislé.

Jak bylo již zmíněno v kapitole 1.2, Proklův *Komentář* je jedním z prvních klíčových analýz *Základů*. Ovšem Proklos využívá a odvolává se na komentáře *Základů* jiných matematiků, především Héróna[24], Porfyria[25] a Pappa (Heath 2013, 20). *Komentář* není jen opisem *Základů*, ale také diskuzí o jejich eventuálních nedostatcích. Proklos začíná obecným výkladem o *Základech* jako celku a pak se postupně zaměřuje na jejich jednotlivé aspekty – nejdřív to jsou Euklidovy definice základních pojmů, pak postuláty, axiomy a nakonec jednotlivá tvrzení. Během své analýzy se často odvolává i na jiné matematiky a shrnuje připomínky k jednotlivým logickým nejasnostem v důkazech vybraných tvrzení, které není možné odvodit ze zavedeného axiomatického systému. Jeho *Komentář* rovněž představuje teoretický podklad k postupům uvedených v *Základech*, tedy jakýsi metodický rozbor Euklidova přístupu ke geometrii. Z pozdějších středověkých rozborů Euklida stojí za zmínku například komentář perzského matematika a astronoma z přelomu 9. a 10. století Al-Nayriziho, který se často odvolává na Héróna.

První novodobé snahy vylepšit tradiční geometrii pozorujeme u německého matematika Moritza Pasche. Původně se zabýval analytickou geometrií, avšak po jistém čase se začal podrobně věnovat *Základům* a jeho pozornosti neušlo několik skrytých předpokladů, které Euklides v důkazech použil, ale neplynuly z axiomů ani postulátů. Vyjádřil také nesouhlas s některými Euklidovými definicemi (viz kap. 2.3.1). Své pozorování uveřejnil v díle *Vorlesungen über neuere Geometrie* (*Přednášky z novější geometrie*, 1882). Největším přínosem pro Hilbertův axiomatický systém jsou Paschovy komentáře k problematice uspořádání bodů na přímce (viz kap. 2.3.3).

V následujících kapitolách se budu kromě samotné Hilbertovy axiomatizace snažit ilustrovat také přínosy jiných významných matematiků, kteří byli důležitým zdrojem pro Hilbertův axiomatický systém. Mimo již zmíněné antické a středověké matematiky to jsou například Richard Dedekind a jeho spis *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*Spojitost*

[24] Hérón Alexandrijský byl matematik a vynálezce žijící přibližně v letech 10-70 n. l.

[25] Porfyrios z Tyru byl novoplatónský filosof působící zhruba v letech 232-304 n. l.

a iracionální čísla, 1872) nebo Giuseppe Veronese (1854-1917), autor knihy *Fondamenti di geometria* (*Základy geometrie*, 1891).

2.2 David Hilbert a jeho Grundlagen der Geometrie

Již mnohokrát zmiňovaný David Hilbert pocházel z Königsbergu (dnes Kaliningrad), kde po absolvování doktorského studia také vyučoval na zdejší univerzitě. V roce 1895 se přesunul na Univerzitu v Göttingenu, kde získal titul profesora a zůstal zde působit do konce svého života. Protože jeho kariéra je nesmírně bohatá na matematické úspěchy, z toho velkého množství uvedu pouze například jeho práce na teorii invariantů nebo na algebraickou teorii čísel. V roce 1899 přišel Hilbert s myšlenkou zavedení axiomatického základu pro každou oblast matematiky a začal právě s geometrií. Po důkladném a systematickém prostudování *Základů* navrhl a také obhájil význam a korektnost svých ***dvaceti jedna axiomů***. Hilbertovo formální axiomatické zavedení mělo na geometrii nejsilnější vliv od dob samotného Euklida. *Grundlagen der Geometrie* byly v průběhu více než šedesáti let několikrát revidovány – v některých pozdějších vydáních byly přidány, pozměněny, resp. opraveny některé detaily. Největší změnou bylo asi Hilbertovo přidání axiomu úplnosti (viz kap. 2.3.5), který zajišťuje celistvost jeho axiomatického systému. Ve své práci budu vycházet z anglického překladu E. J. Townsenda, vydaného v roce 1950 a přeloženého z původní německé verze.

2.2.1 Struktura a charakter

Grundlagen der Geometrie mají celkem sedm kapitol. Začínají Hilbertovým úvodem, ve kterém je stručně a srozumitelně vysvětleno, co jsou *axiomy geometrie* a co by měly splňovat. David Hilbert totiž požadoval, aby axiomatický systém, nejen geometrie ale i obecně, splňoval určité vlastnosti. První z jeho požadavků je *nezávislost*, tedy aby axiomy nebyly odvoditelné jeden od druhého. Tento požadavek nalézáme již u antických matematiků a byl i důvodem, proč Proklos ve svém *Komentáři* uvádí axiomů pět a ne devět, jak tomu bylo v některých přepisech. David Hilbert kromě jasné formulace tohoto požadavku nabízí i nástroj k systematickému důkazu nezávislosti jak jednotlivých skupin axiomů, tak i axiomů samotných – dané problematice je věnována celá druhá kapitola *Grundlagen der Geometrie* (*Die Widerspruchslosigkeit und* *gegenseitige Unabhängikeit der Axiome – Kompatibilita a nezávislost axiomů*). Použil k tomu metodu, která se následně stala standardní a využívá se dodnes – zkonstruoval modely geometrie, které nesplňují daný axiom, ale splňují všechny zbylé axiomy. S požadavkem *nezávislosti* úzce souvisí požadavek *jednoduchosti*, který Hilbert kromě úvodu *Grundlagen der Geometrie* ve zbytku knihy dále nerozvíjí: „Axiom by neměl obsahovat víc než jednu myšlenku" (Corry 2006, 148).

Třetím požadavkem je *úplnost*, která by měla být chápaná spíš jako *korektnost*, jelikož pojmu *úplnost* se díky axiomům spojitosti dostává i geometrického významu. Hilbert vyžadoval od všech axiomatických systémů, aby povolovaly odvození všech známých tvrzení příslušné vědecké disciplíny. Z axiomů v *Grundlagen der Geometetrie* je skutečně možné, jak tvrdí sám Hilbert, odvodit všechna tvrzení eukleidovské geometrie. Na rozdíl od *nezávislosti*, *úplnost* Hilbert neuměl dokázat formálněji než z počátečního systému axiomů postupně odvozovat všechny žádané tvrzení.

Dalšími kapitolami, které však netvoří obsah mé práce, jsou *Teorie proporcí*, *Teorie obsahů rovinných útvarů*, *Desarguesova věta*, *Pascalova věta* a *Geometrické konstrukce založené na axiomech skupin I-V*.

2.3 Axiomatizace geometrie podle Davida Hilberta

Na rozdíl od Euklida a jeho definic Hilbert ve svém spisu začíná uvedením primitivních pojmů, které nedefinuje. Jejich význam je dán určením vlastností v rámci následně stanovených axiomů. Dále nerozlišuje mezi postuláty a axiomy, uvádí pouze systém jednadvaceti axiomů, rozdělených do pěti skupin (v tomto pořadí):

- axiomy incidence
- axiomy uspořádání
- axióm rovnoběžnosti (Euklidův axiom)
- axiomy shodnosti
- axiomy spojitosti (Archimédův axiom a axiom úplnosti)

Skupiny axiomů se v některé literatuře uvádějí v jiném pořadí a pro větší přehlednost změním jejich pořadí i já (a tedy přizpůsobím i značení) – axiom rovnoběžnosti uvedu jako poslední, protože právě ten je i u Euklida nejkontroverznější a snahy jej dokázat vyústily ve vznik neeuklidovských geometrií.

2.3.1 Porovnání Euklidových a Hilbertových definic

Před samotným náhledem do *Grundlagen der Geometrie* na Hilbertovo pojetí bodů, přímek a rovin uvedu aspoň část diskuzí o Euklidových definicích těchto objektů, které patří již od starověku mezi ty nejdiskutabilnější. „Prvních sedm definic u Euklida tvoří sourodou skupinu vymezující primitivní objekty. Tyto definice neobsahují vlastnosti, se kterými by bylo možno přímo matematicky pracovat, a žádné tvrzení se na ně explicitně neodvolává“ (Šír 2011, 111). Proklos v *Komentáři* shrnuje poznámky více geometrů a reaguje na ně – v některých případech obhajuje Euklidův způsob definování daného pojmu a jinde zase i Proklos vyjadřuje nesouhlas a nabízí čtenáři jednu nebo i více alternativních definic.

Jedna z prvních připomínek vůči definici ***bodu*** jako toho, co „nemá dílu“ byla její negativní formulace, tj. s užitím záporu. Tato definice říká, jakou vlastnost bod nesplňuje a ne co ho naopak charakterizuje, čímž není tak úplně splněn základní požadavek definice – jednoznačnost vymezení definovaného objektu od jiných geometrických objektů. Proklos v tomto případě obhajuje Euklidův přístup, protože bod považuje za „jediný předmět studia geometrie, který je dále nedělitelný" (Heath 2013, 156). Předkládá i argument, že tato definice pravděpodobně vyplynula z představ o vícedimenzionálních[26] objektech – z prostoru (dimenze tři) byla vyčleněna rovina (dimenze dva), z ní pak čára (dimenze jedna) a z čáry nakonec bod, tedy objekt „nemající dílu", tj. s dimenzí nula. Proklovi tak Euklidova definice bodu přijde dostačující.

V novodobé geometrii reprezentované kromě Davida Hilberta i Moritzem Paschem nebo Giuseppem Veronesem, nepozorujeme snahu nalézt apriorní (předem danou) definici bodu. Místo ní jsou zmiňované určité objekty z nám známého prostředí, které svou podstatu pomáhají ilustrovat abstrakci tohoto pojmu. Němečtí matematici Heinrich Weber (1842-1913) a Julius Wellstein (1888-1978) ve své publikaci *Encyclopädie der elementaren Mathematik* (*Encyklopedie elementární matematiky*, 1905) tvrdí, že „pomocí konečných procesů aplikovaných na jakési materiální body se vyvíjí představa o charakteru geometrického bodu" (Heath 2013, 157). Příklady takových materiálních bodů jsou zrnko písku nebo velmi malá část slunečního paprsku, které se pořád zmenšují. Neustálou redukcí postupně mizí možnost určovat jejich stále menší částečky, čímž se tvoří konkrétnější představa geometrického bodu jako „jednoznačné a nedělitelné pozice v prostoru" (Heath 2013, 157). Ovšem ani tento přístup není úplně přesný, protože naše představa o podobě tohoto bodu je limitovaná jen na to, co je pro nás fyzicky viditelné. Proces zmenšování je sice možno vykonávat nekonečně dlouho, avšak nám je dostupný jen po jistou hranici. Z tohoto důvodu musí být podoba geometrického bodu pouze slovně definována a není možné ji fyzicky obsáhnout. „Bod je ryzí produkt vůle, ne rozumu" (Heath 2013, 157).

Definice ***čáry*** jako „délky bez šířky" může s „poměrně velkou jistotou být připsáno Platónské Akademii, ne-li Platónovi samotnému" (Heath 2013, 158). Stejně jako předchozí, i tato definice je formulována negativně. Avšak, jak uvádí Proklos, zatímco bod je definován ryze záporně, křivka uvádí v existenci první dimenzi, takže je do jisté míry formulována kladně a její záporný aspekt jen vylučuje existenci více dimenzí. Proklos alternativně definuje čáru jako „rozměr rozšířený do jedné strany" (Heath 2013, 158), nebo jako „dráhu pohybujícího se bodu" (Heath 2013, 159). Právě tento druhý pohled na čáru je dodnes používán ve fyzice, zejména při určování trajektorií a jejich délek. Podle Aristotela je přímka „rozměr dělitelný jen jedním způsobem" (Heath

[26] Pojem *dimenze* u Prokla nenalezneme, objevuje se až na konci 14. století z latinského *dimensio* = měření.

2013, 158), na rozdíl od roviny dělitelné dvěma způsoby a prostoru dělitelného „všemi, tedy třemi způsoby“ (Heath 2013, 158).

Čtvrtá definice se zabývá speciálním případem čáry, konkrétně ***čárou přímou*** (dnes označovanou jako ***přímka***), tj. takovou, „která se svými body táhne rovně“. Euklides se snaží vyjádřit myšlenku, že „přímá čára je taková, která představuje ten samý tvar ve všech svých bodech, bez jakýchkoliv nepravidelností nebo asymetrií, které by odlišovaly jednu její část od druhé“ (Heath 2013, 167). Z několika alternativních definic je možné zmínit například jednu z Proklových, která uvádí, že „přímka je čára, jíž všechny části padnou stejným způsobem na všechny ostatní části“ (Heath 2013, 167). Z pozdějších návrhů stojí za zmínku definice německého matematika a filozofa Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646-1716), který tvrdí, že „přímka je čára, která rozděluje rovinu na dvě části identické ve všem až na polohu“ (Heath 2013, 168). Tato definice ovšem vyžaduje znalost a zavedení roviny.

Německý matematik Christoph Pfeiderer (1736-1821) ve své sbírce *Scholia to Euclid* (*Scholia k Euklidovi*[27], 1799*)* píše, že „představa přímé čáry, kvůli její jednoduchosti, nemůže být vysvětlená definicí, protože vždy musí obsahovat nejednoznačné pojmy, jako například *pevný směr* nebo *rovnost*, a tedy neexistuje jiná možnost jak vysvětlit *přímost* někomu, kdo ji již nezná, než předložit mu obrázek nebo náčrt“ (Heath 2013, 168). Giuseppe Veronese v *Fondamenti di Geometria* postupuje přesně takovým způsobem, když píše, že „natažený provázek, neboli louč světla vstupující malým otvorem do tmavé místnosti jsou přímé objekty a jejich obraz nám poskytuje abstraktní představu o přímce“ (Heath 2013, 168). Nutno říct, že během vyučování geometrie je ve většině případů žákům poskytnut právě jednoduchý náčrt s doplněním, že přímka jako taková se táhne *do nekonečna* (což je pojem, který je na daném stupni základní školy spíš intuitivní než matematicky korektní).

Definice plochy a rovinné plochy logicky korespondují s definicemi čáry a přímé čáry, jelikož přidáním druhého rozměru k čáře vznikne plocha. Speciálním případem této plochy je *rovinná plocha* neboli *rovina*. Tedy připomínky k definicím daných dvourozměrných objektů jsou podobné jako připomínky k jejich jednorozměrným protějškům. Jak bylo již zmíněno, Aristoteles představuje plochu jako „rozměr dělitelný

[27] „Scholia“ je množné číslo od *scholion – σχόλιον*, což je pojem, který označuje poznámku na okraj neboli komentář v antických spisech. V novodobějším slova smyslu je to sbírka komentářů k nějakému (nejčastěji historickému) dílu.

dvěma způsoby“ nebo její aposteriorní opis jako „hranici pevného tělesa“ (Heath 2013, 170). Co se týče rovinné plochy, Proklos ji představuje jako „takovou plochu, na kterou přilne přímka všemi způsoby (tj. jakkoliv umístěná)“ (Heath 2013, 172). Podobnou definici, „rovinná plocha je plocha taková, že pro přímku procházející dvěma jejími body platí, že celá v ní leží každým svým bodem“ (Heath 2013, 172), uvádí Hérón a velice pravděpodobně vznikla již v 1. století n. l. Tato definice je obvykle připisována Skotskému matematikovi Robertu Simsonovi (1687-1786), který v roce 1756 vydal latinskou edici *Základů*.

Bod, ***přímku*** ani ***rovinu*** David Hilbert nedefinuje. Předkládá je jako prvotní, nedefinované pojmy a kromě nich dodává i nedefinované relace mezi nimi. Hned v úvodu první kapitoly *Grundlagen der Geometrie* uvažuje David Hilbert tři různé systémy objektů. Prvky prvního systému nazývá ***body*** a zavádí značení velkými písmeny latinské abecedy (*A*, *B*, *C*, atd.), prvky druhého systému jsou ***přímky***, značené malými písmeny latinské abecedy (*a*, *b*, *c*, atd.) a prvky třetího systému nazývá ***roviny***, jejichž značení bude malými písmeny řecké abecedy (α, β, γ, atd.) (Hilbert 1950, 2). Mezi body, přímkami a rovinami existují určité vzájemné vztahy, které vyjadřujeme prostřednictvím relací ***náleží***, ***jsou mezi***, ***jsou rovnoběžné***, ***jsou shodné***, ***jsou spojité*** (Hilbert 1950, 2). Úplná charakteristika těchto relací plyne z axiomů. Jinak řečeno, axiomy nám přesně říkají, jaké vlastnosti nedefinovaných pojmů můžeme používat ve svých argumentech resp. v důkazech tvrzení.

2.3.2 Axiomy incidence

První Euklidův postulát zní, že je možné „od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vést přímku“ a druhý postulát zase umožňuje „přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužit“. Ani jeden z postulátů neříká jasně o tom, zda se na dané přímce nachází ještě nějaký jiný bod. Ačkoli taková námitka může působit absurdně, může způsobit zmatek v případě, že by se našel někdo, kdo má o vztahu bodů a přímky jinou představu, než je ta intuitivní. Konstrukce přímek spojujících dva různé body a jejich prodloužení se nachází v důkazu každého Euklidova tvrzení. Euklides tento vztah, že na každé přímce existuje aspoň jeden bod, který jí ***náleží***, používá zcela automaticky.

První dva axiomy incidence (I, 1-2) upravují a formalizují intuitivní představu o přímce a bodech na ní ležících a doplňují tak Euklidův první a druhý postulát. Zbylé axiomy incidence řeší analogický nedostatek v rovině resp. prostoru (I, 3-7), tedy vzájemné vztahy bodu, přímky a roviny.

I, 1. Dvěma navzájem různými body prochází právě jedna přímka. Píšeme $AB = a$, nebo $BA = a$.

I, 2. Libovolné dva navzájem různé body ležící na přímce jednoznačně určují tuto přímku; tedy jestli $AB = a$ a zároveň $AC = a$, kde $B \neq C$, tak platí také $BC = a$.

I, 3. Tři body neležící na jedné přímce jednoznačně určují rovinu α. Píšeme $ABC = \alpha$.[28]

I, 4. Libovolné tři body roviny α neležící na jedné přímce jednoznačně určují tuto rovinu.

I, 5. Náleží-li dva body A, B přímky a rovině α, pak každý bod přímky a náleží rovině α.

I, 6. Mají-li dvě roviny α, β společný bod A, pak musí mít společný ještě alespoň jeden bod.

I, 7. Na každé přímce existují alespoň dva různé body, v každé rovině alespoň tři body neležící na jedné přímce, a v prostoru alespoň čtyři body neležící v jedné rovině.

Z axiomů I, 3-7 Hilbert odvozuje tvrzení o vzájemné poloze dvou přímek, přímky a roviny a dvou rovin. Poslední dva případy se týkají již prostorové geometrie, uvádím proto tvrzení týkající se geometrie v rovině:

Tvrzení (vzájemná poloha dvou přímek).
Dvě přímky v rovině mají buď jeden, nebo žádný společný bod.
Důkaz: Předpokládejme, že dvě různé přímky a, b mají společné alespoň dva body, označme A, B. Axiom I, 1 říká, že dva různé body určují jedinou přímku, a proto musí platit $a = b$, což je spor. Proto dvě různé přímky mají společný nejvýše jeden bod. Q. E. D.

Existence průsečíku dvou přímek je u Euklida nepřímo naznačena v pátém postulátu, který říká, že za určitých podmínek se dvě přímky protnou.

[28] Je také možné říct, že body *A*, *B*, *C* ***leží*** v rovině *α*.

2.3.3 Axiomy uspořádání

Axiomy incidence nám umožňují rozhodnout, zda bod na přímce leží nebo neleží, resp. jaké jsou vzájemné polohy dvou přímek. Neumíme z nich však říct, kolik bodů se vlastně na přímce nachází a jak jsou uspořádané. Pro lepší ilustraci uveďme Euklidovu desátou propozici:

Propozice I. 10

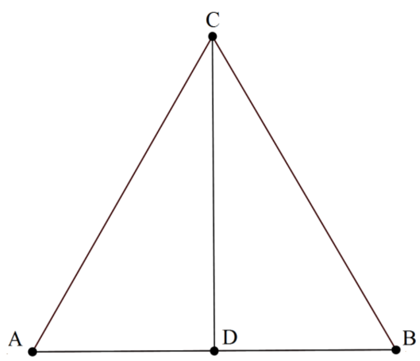
Danou přímku omezenou jest rozpůliti.

Danou přímkou omezenou buď *AB*; tedy má se omezená přímka *AB* rozpůliti.

Sestrojen buď na ní trojúhelník rovnostranný *ABC* a úhel *ACB* přímku *CD* buď rozpůlen; pravím, že přímka *AB* jest v bodě *D* rozpůlena.

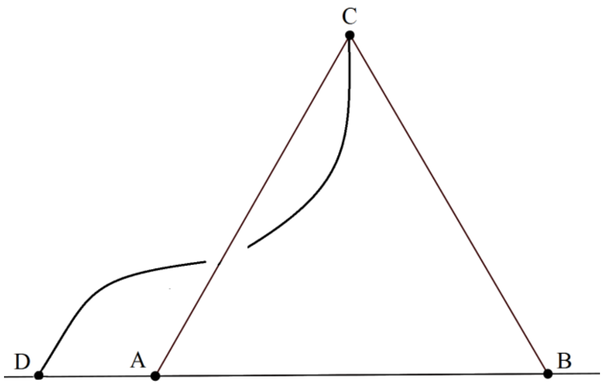
Neboť ježto *AC* = *CB*, společnou pak *CD*, obě tedy *AC, CD* oběma *BC, CD* jsou střídavě rovny; též ∠*ACD* = ∠*BCD*; tedy základna *AD* rovná se základně *BD*.

Daná tedy omezená přímka *AB* je v *D* rozpůlena; což právě bylo vykonati.



Obr. 1 Prop. I.10

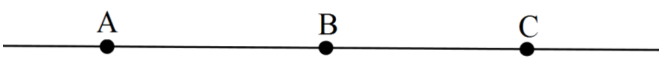
Problém je v poloze bodu *D*. Jak můžeme vědět, že osa úhlu u vrcholu *C* protne přímku *AB* v bodě *D* ležícím ***mezi*** body *A* a *B*? Nemůže se stát, že by bod *D* ležel mimo úsečku *AB* (Obr. 2)?



Obr. 2 Uspořádání bodů na přímce

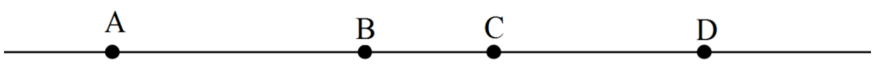
Druhá skupina Hilbertových axiomů utváří představu o vztahu ***být mezi***, který mají mezi sebou body na přímce. Na základě této představy axiomy „umožňují zavést ***pořadí*** posloupnosti bodů na přímce, v rovině i prostoru" (Hilbert 1950, 3). Jak uvádí i sám David Hilbert v úvodní poznámce před samotnými axiomy, první, kdo se touto problematikou zabýval, byl Moritz Pasch ve *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Pátý axiom této skupiny (II, 5) je obzvláště jeho přínosem a v literatuře nese i jeho jméno.

II, 1. Jsou-li *A*, *B*, *C* tři různé body ležící na jedné přímce a bod *B* leží mezi *A* a *C*, pak *B* leží také mezi body *C* a *A* (Obr. 3).



Obr. 3 Axiom II, 1

II, 2. Leží-li body *A* a *C* na jedné přímce, potom existuje alespoň jeden bod *B* ležící mezi *A* a *C* a alespoň jeden bod *D* umístěný tak, že *C* leží mezi *A* a *D* (Obr. 4).



Obr. 4 Axiom II, 2

II, 3. Ze tří různých bodů přímky leží právě jeden mezi ostatními dvěma.

II, 4. Každá čtveřice bodů *A, B, C, D* přímky může být uspořádaná tak, že bod *B* leží mezi body *A* a *C* a rovněž mezi body *A* a *D* a zároveň *C* leží mezi body *A* a *D* a taky mezi body *B* a *D*[29] (Obr. 4).

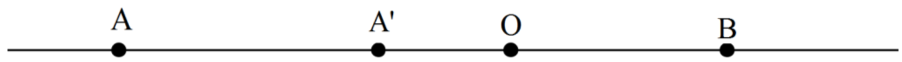
Před uvedením posledního axiomu této skupiny je možné pomocí vztahu ***býti mezi*** definovat další užitečné pojmy:

Definice (úsečka, polopřímka, úhel).

Úsečka *AB* (resp. *BA*) je systém bodů *A* a *B* ležících na přímce; body ležící ***mezi*** *A* a *B* se nazývají ***body ležící v úsečce*** *AB* nebo ***body úsečky*** *AB*. Všechny ostatní body dané přímky se nazývají ***body ležící mimo úsečku*** *AB*. Body *A* a *B* se nazývají ***krajní body*** úsečky *AB*.

Jsou-li *A, A', O, B* body přímky *a*, kde bod *O* leží mezi body *A* a *B* ale ne mezi *A* a *A'*, řekneme, že body *A, A'* jsou umístěny ***na přímce na jedné a téže straně od*** bodu *O*, a body *A, B* jsou umístěny ***na přímce na různých stranách*** od bodu *O* (Obr. 5).

Polopřímka s počátečním bodem *O* (Obr. 5) je soubor všech bodů ležících na jedné straně od bodu *O*. Tedy každý bod rozděluje přímku na dvě polopřímky (navzájem ***opačné polopřímky***). Analogicky by se řeklo, že přímka rozděluje rovinu na dvě ***poloroviny*** a tato rozdělující přímka se nazývá ***hraniční přímka***.



Obr. 5 Definice polopřímky

Nechť α je rovina a *h, k* dvě různé polopřímky ležící v α se společným počátečním bodem *O*. Systém tvořený těmito polopřímkami se nazývá ***úhel*** a značí se $\angle(h, k)$ nebo $\angle(k, h)$. Polopřímky *h, k* se nazývají ***ramena úhlu*** a bod *O* se nazývá ***vrcholem*** úhlu. Rozlišujeme ***vnitřní*** a ***vnější část*** úhlu (*h, k*). ***Vnitřní část*** úhlu (*h, k*) je část roviny,

[29] Americký matematik Eliakim H. More (1862-1932) roku 1902 dokázal, že tento axiom není nezávislý s předchozími a je tedy nadbytečný.

na které leží ty body, jež můžeme spojit úsečkou neprotínající ani jedno z ramen *h, k*. Zbylá část roviny je vnější část úhlu (*h, k*). Označme *h, k* dvě polopřímky v trojúhelníku *ABC* s počátečním bodem *A* procházející body (v daném pořadí) *B, C*. Úhel (*h, k*) je pak úhel s rameny *AB, AC* a obsahuje všechny vnitřní body trojúhelníku *ABC*. Značíme ∠*BAC*, resp. ∠*A*.

Dva úhly *CAB* a *CAD*, jejichž ramena *AB* a *AD* jsou opačnými polopřímkami, se nazývají ***vedlejší úhly***. Jsou-li *AB'*, *AC'* opačné polopřímky k polopřímkám *AB, AC*, úhly *B'AC'* a *BAC* nazýváme ***vrcholové úhly***.

Uveďme nyní poslední axiom druhé skupiny:

II, 5. **(Paschův axiom):** Buďte *A, B, C* tři body neležící na přímce a *p* přímka v rovině daná body *A, B, C*, která neprochází ani jedním z těchto bodů. Prochází-li přímka *p* bodem ležícím na úsečce *AB*, prochází i bodem buď na úsečce *AC* nebo úsečce *BC*.

Snadno můžeme odvodit jiné znění Paschova axiomu, a to:

Alternativní formulace Paschova axiomu.

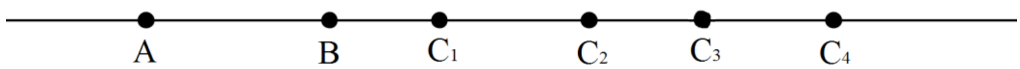
Je-li *ABC* trojúhelník a *p* přímka neprocházející žádným z vrcholů a protínající stranu *AB*, tak potom *p* protíná také buď stranu *BC* nebo stranu *AC*.

Z axiomů uspořádání lze vyvodit řadu tvrzení, která nám pomůžou zformalizovat Euklidovu intuitivní představu o uspořádání bodů na přímce:

Tvrzení (počet bodů na přímce).

Na každé přímce leží nekonečně mnoho navzájem různých bodů.

Důkaz: Uvažujme přímku *AB*. Podle axiomu II, 2 vždy existuje bod C_1 takový, že bod *B* leží mezi body *A* a C_1; dále existuje bod C_2 takový, že bod C_1 leží mezi body *A* a C_2, existuje bod C_3 takový, že bod C_2 leží mezi body *A* a C_3, atd. (Obr. 6). Q. E. D.



Obr. 6 Počet bodů na přímce

Tvrzení (věta o rozdělení roviny).

Nechť l je libovolná přímka. Potom množina bodů neležících na l může být rozdělena na dvě neprázdné a navzájem disjunktní podmnožiny H_1, H_2 tak, že patří-li body A, B

a) oba buď do podmnožiny H_1 nebo podmnožiny H_2, tak úsečka AB neprotíná přímku l,

b) do dvou různých podmnožin H_1, H_2, tak úsečka AB protne přímku l.

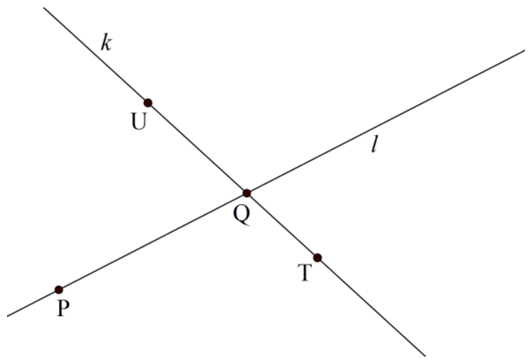
Tvrzení (Ekvivalence věty o rozdělení roviny a Paschova axiomu).

Věta o rozdělení roviny a Paschův axiom jsou logicky ekvivalentní.

Důkaz:

i) Pasch => věta o rozdělení roviny

Předpokládejme nejprve platnost Paschova axiomu. Nechť l je libovolná přímka roviny. Chceme rozdělit zbývající body roviny do dvou disjunktních podmnožin. Z axiomu I, 3 můžeme předpokládat, že body P a Q leží na přímce l a bod S neleží na l. Nechť k je přímka na níž leží body Q a S (I, 1). Existuje bod T na k tak, že Q leží mezi S a T (II, 2). Použijeme body S a T k definování dvou žádaných podmnožin. Nechť H_1 je množina obsahující všechny body X dané roviny takové, že úsečka SX neprotíná l. Podobně, H_2 nechť je množina obsahující všechny body Y dané roviny takové, že úsečka TY neprotíná l. Potřebujeme dokázat, že H_1 a H_2 splňují požadované vlastnosti (Obr. 7).



Obr. 7 Důkaz ekvivalence Paschova axiomu a věty o rozdělení roviny

Nejprve ukážeme, že úsečka spojující body jedné z množin H_1, H_2 neprotíná přímku l. Nechť U, W jsou prvky H_1 a předpokládejme, že l protíná úsečku UW v bodě Z. Potom pro trojúhelník SUW jsou splněny podmínky Paschova axiomu (resp. jeho alternativní formulace): l vstupuje do trojúhelníku v bodě Z a neobsahuje žádný z jeho vrcholů. Avšak z definice H_1 plyne, že l neobsahuje bod ani úsečky SU, ani SW, dostáváme se tedy ke sporu a platí původní předpoklad. Analogicky postupujeme pro H_2.

Nyní uvažujme bod *U* z množiny H_1 a trojúhelník *SUT*. Protože *l* protíná *ST*, z Paschova axiomu protíná i úsečku *SU* nebo *TU*. Víme však, že *l* neprotíná *SU*, takže musí protnout *TU*. Tedy žádný bod roviny v H_1 a zároveň v H_2. Analogicky pro bod *U* z H_1 a bod *W* z H_2, trojúhelník *TUW* je protnut přímkou *l* ve dvou bodech a víme, že úsečku *TW* neprotíná, tedy *l* protíná *UW*. Množiny H_1 a H_2 tedy splňují požadované vlastnosti.

Musíme ještě ukázat, že každý bod roviny je buď v jedné z množin H_1, H_2, nebo na přímce *l*. Nejdřív ukážeme, že přímka neprocházející vrcholy libovolného trojúhelníka *ABC* nemůže protnout všechny jeho strany. Předpokládejme pro spor, že *l* protíná stranu *AB* v bodě *D*, stranu *AC* v bodě *E* a stranu *BC* v bodě *F*. Z axiomu II, 3 plyne uspořádání bodů *D, E, F.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že *E* leží mezi body *D* a *F*. Protože úsečky *AB* a *BC* jsou na různých přímkách, body *B, D* a *F* neleží na jedné přímce. Přímka *AC* protíná trojúhelník *BDF* na straně *DF* v bodě *E*. Takže musí protnout buď úsečka *BD*, což je část přímky *AB*, nebo úsečku *BF*, což je část přímky *BC*. Ale přímka *AC* již protíná přímky *AB* i *BC*, takže ani jednu z nich nemůže protnout podruhé. Dostáváme se zde ke sporu. Platí tedy, že přímka nemůže protnout všechny tři strany trojúhelníka.

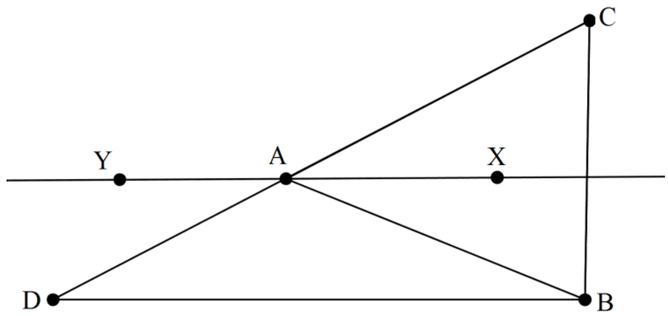
Nechť *X* je libovolný bod dané roviny. Ukážeme, že *X* je prvkem H_1, H_2, nebo přímky *l*. Jestliže bod *X* patří do H_1 nebo leží na přímce *l*, jsme hotovi. Předpokládejme tedy, že v H_1 ani na přímce *l* neleží. Přímka *l* protíná trojúhelník *STX* na úsečce *ST*, a protože *X* nepatří H_1, přímka *l* protíná *SX*. Tedy *l* neprotíná úsečku *TX*, bod *X* patří H_2, jak bylo požadováno, a platí věta o rozdělení roviny.

ii) věta o rozdělení roviny => Pasch

Předpokládejme, že platí PST a že přímka *l* vstupuje do libovolného trojúhelníka *ABC* takového, že *A, B, C* neleží na *l*, v bodě *D* na straně *AB*. Z věty o rozdělení roviny platí, že *A* a *B* jsou na opačných stranách *l*, tedy že jsou v různých podmnožinách H_1, H_2. Platí, že bod *C* je jen v jedné z podmnožin H_1, H_2, tedy právě jedna z úseček *AC*, *BC* protne *l*, což je bod kde *l* vystoupí z trojúhelníka *ABC* a platí tak Paschův axiom. Q. E. D.

Dokázali jsme tedy, že věta o rozdělení roviny a Paschův axiom jsou navzájem ekvivalentní. V některé literatuře se jako pátý Hilbertův axiom uvádí právě axiom o rozdělení roviny a Paschův axiom je formulován jako věta (Paschova věta). Vzhledem k jejich ekvivalenci nezáleží na tom, kterou z formulací volíme jako axiom a kterou jako větu. Ovšem věta o rozdělení roviny nabízí praktický náhled na body roviny – každá přímka rozděluje body roviny do dvou disjunktních podmnožin a můžeme tedy říct, které body (a tedy i úsečky) jsou na ***stejné straně*** vzhledem k dané přímce, a naopak, které body ***leží na opačných stranách*** dané přímky. I pomocí této terminologie můžeme odvodit klíčové tvrzení pro napravení nedostatku v Euklidovém důkazu Prop. I.10:

Tvrzení (průsečík přímky a strany trojúhelníka).
Nechť *X* je bod roviny ležící uvnitř úhlu *BAC* (tedy v části roviny ohraničené přímkami *BA* a *AC*). Potom polopřímka *AX* protíná úsečku *BC*.
Důkaz (Obr. 8):



Obr. 8 Průsečík přímky *AX* a úsečky *BC*

Zvolme bod *D* tak, že bod A bude ležet mezi body *B* a *D* (II, 2). Aplikací Paschova axiom na trojúhelník *CDB* můžeme usoudit, že přímka *AX* protne buď úsečku *BC* nebo úsečku *DC*. Přímka *AC* rozděluje všechny body podle věty o rozdělení roviny na dvě množiny bodů. Body *D* a *X* leží na opačných stranách přímky *AC,* a tedy i všechny body úsečky *DC* leží na straně přímky *AC* opačné ke všem bodům polopřímky *AX*. Z toho vyplývá, že polopřímka *AX* neprotne úsečku *DC*. Ještě musíme vyloučit možnost, že opačná polopřímka k *AX,* tedy *AY*, protne buď úsečku *CD* nebo *BC*. K tomu stačí pozorování, že obě tyto úsečky leží na opačných stranách přímky *BD* než polopřímka *AY*. Polopřímka *AX* tedy protne úsečku *BC*. Q. E. D.

Toto tvrzení, odvozené postupně z axiomů uspořádání, zaručuje průnik osy vnitřního úhlu v trojúhelníku a protější strany. V Euklidově Prop. I.10, uvedené na začátku této kapitoly, bude tedy bod *D* existovat uvnitř strany *AB*. Tato propozice není ani zdaleka jediná, která využívá axiomy uspořádání – Euklides předpokládal uspořádání bodů na přímce zcela intuitivně ve všech tvrzeních.

Jedna ze základních charakteristik *Základů* je použití samotné konstrukce jako metody důkazu existence geometrických útvarů majících určité vlastnosti. Protože Euklides vycházel především z konstrukce (resp. náčrtu), je pochopitelné, že nepovažoval za potřebné předpoklad plynoucí z tvrzení o průsečíku přímky a strany trojúhelníka podložit axiomy – z obrázku je jasně vidět, jak se osa úhlu u vrcholu *C* bude chovat a že protilehlou stranu protne. Abstrakce geometrického myšlení tak sehrála důležitou roli ve vývoji geometrie jako takové. Ovšem co se týče výuky geometrie (obzvlášť na základních a středních školách), kreslení náčrtů a konstruování konkrétních útvarů (a používání tak intuitivních předpokladů neplynoucích z předem daných axiomů) stále převažuje před abstrakcí, což je správné.

2.3.4 Axiomy shodnosti

Další dlouho diskutovaný problém zahrnuje problematiku shodnosti geometrických útvarů. Euklidův čtvrtý axiom („Co se navzájem kryje, navzájem rovno jest") uvádí tzv. princip superpozice, tj. princip, kdy pro zjištění shodnosti dvou útvarů uvažujeme přemístění jednoho z nich v rovině a umístění na druhý útvar. První propozice, která se odvolává na tento axiom, je Prop. I.4:

Propozice I. 4

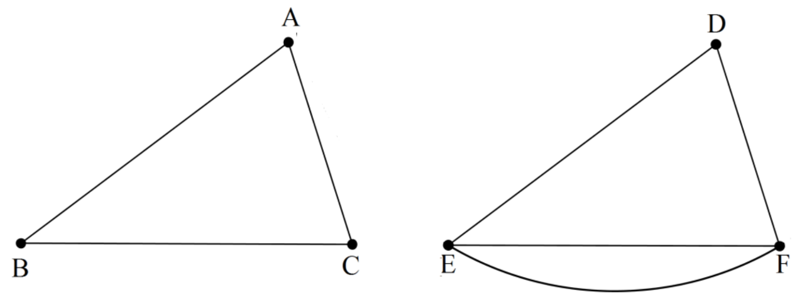
Když mají dva trojúhelníky dvě strany (střídavě) s dvěma stranami stejné a úhly stejnými stranami sevřené mají stejné, budou i základnu základně míti rovnou a trojúhelník s trojúhelníkem bude stejný i ostatní úhly s ostatními úhly, proti nimž leží stejné strany, (střídavě) budou stejné.

Buďte dva trojúhelníky *ABC, DEF* mající dvě strany *AB, AC* se dvěma stranami *DE, DF* jednotlivě stejné, a to *AB* s *DE, AC* pak s *DF* a $\angle BAC$ s $\angle DEF$ stejný (Obr. 9); pravím, že i základna *BC* rovná se základně *EF*, i trojúhelník *ABC* s trojúhelníkem *DEF* bude stejný i ostatní úhly budou střídavě stejné s ostatními úhly, proti nimž leží stejné strany, úhel pak $\angle ABC$ s $\angle DEF$ a $\angle ACB$ s $\angle DFE$.

Neboť přikládáme-li trojúhelník *ABC* na *DEF* a klademe-li bod *A* na bod *D* a přímku *AB* na *DE*, také bod *B* bude krýti bod *E*, ježto *AB* = *D*; a když *AB* bude krýti

DE, též přímka *AC* bude krýti *DF*, ježto ∠*BAC* = ∠*EDF*; a tak i bod *C* bude krýti bod *F*, protože opět *AC* = *DF*. Avšak zajisté *B* krylo *E*; a tak základna *BC* krýti bude *EF*. Neboť bude-li se krýti *B* s *E* a *C* s *F*, nikoli však základna *BC* s *EF*, dvě přímky budou místo omezovati, což právě nemožno. Bude se tedy základna *BC* krýti s *EF* a bude jí rovna; a tak i celý trojúhelník *ABC* bude se krýti s celým trojúhelníkem *DEF* a bude mu roven, i ostatní úhly budou se krýti s úhly ostatními a budou jim rovny, ∠*ABC* = ∠*DEF*, ∠*ACB* = ∠*DFE*.

Když mají dva trojúhelníky dvě strany (střídavě) s dvěma stranami stejné a úhly stejnými stranami sevřené mají stejné, budou i základnu základně míti rovnou a trojúhelník s trojúhelníkem bude stejný i ostatní úhly s ostatními úhly, proti nimž leží stejné strany, (střídavě) budou stejné.



Obr. 9 Prop. I.4

Mezi antickými geometry nenacházíme námitky vůči tomuto postupu určování shodnosti útvarů (Heath 2013, 225). Německý matematik Wilhelm Killing (1847-1923) ve své publikaci *Einführung in die Grundlagen der Geometrie (Úvod do základů geometrie,* 1893) staví do protikladu s antickými geometry postoj filozofů, kteří se na rozdíl od geometrů shodli s celkovým vyloučením jakéhokoli pohybu z geometrie. Killing svá tvrzení staví na Aristotelově výroku, že „matematika je teoretická věda zabývající se nehybnými objekty, kromě případu astronomie, ve které je i pohyb předmětem studia“ (Heath 2013, 226). Ovšem není zřejmé, že Aristoteles vylučoval jakýkoliv pohyb geometrických objektů, poněvadž i on sám ve svých dílech využívá princip superpozice.

Giuseppe Veronese rozlišuje intuitivní princip pohybu útvaru od tzv. „pohybu bez deformace“, tj. takového, při kterém je každý bod daného útvaru prostorem přemístěn do jiného bodu téže roviny s tím, že vzájemné vztahy mezi jednotlivými body útvaru jsou zachovány, ale vztahy mezi nimi a jinými body roviny se mění (jinak by nebyl možný pohyb). Ovšem princip superpozice, i se zahrnutím principu pohybu bez deformace, je čistě praktickou ukázkou shodnosti a není tak vhodný pro teorii geometrie. Dalším problémem, který z tohoto principu plyne, nastává v případě, když zmíněné trojúhelníky jsou opačně orientované. Pak nelze jejich přemístění uskutečnit v rovině, ale až v trojrozměrném prostoru.

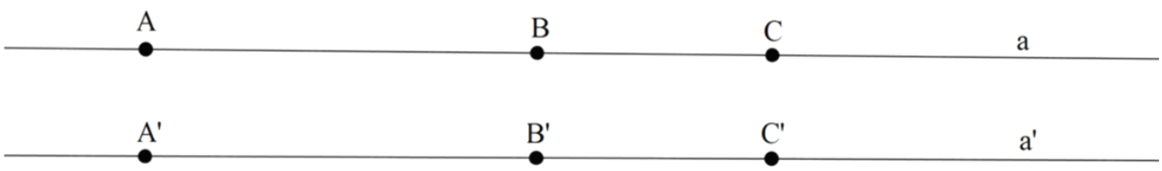
Axiomy shodnosti David Hilberta dávají význam relaci ***být shodný***, kterou mezi sebou mohou mít úsečky resp. úhly. Hilbert, na rozdíl od Euklida, neuvažuje hned shodnost trojúhelníků (resp. jiných geometrických útvarů), ale odvozuje ji ze shodnosti úseček a úhlů. Také se částečně odvolává na Euklidovu myšlenku přemísťování trojúhelníků, když uvádí alternativní formulaci axiomů III, 1 a III, 4.

III, 1. Nechť A, B jsou body na přímce a. Je-li A' bod ležící na a, nebo na jiné přímce a', potom existuje na polopřímce s počátečním bodem A' právě jeden bod B' tak, že úsečka AB (resp. BA) je shodná s úsečkou $A'B'$. Značíme $AB \equiv A'B'$. Zároveň platí, že každá úsečka je shodná sama se sebou, tedy že $AB \equiv AB$.

Axiom III, 1 je možné stručněji formulovat tak, že každá úsečka může být ***umístěná*** na danou stranu od bodu daného přímce právě jedním způsobem.

III, 2. Jestli platí, že $AB \equiv A'B'$ a zároveň $AB \equiv A''B''$, pak $A'B' \equiv A''B''$

III, 3. Nechť AB a BC jsou úsečky na přímce a, nemající žádný společný bod kromě bodu B a zároveň nechť $A'B'$ a $B'C'$ jsou úsečky buď na přímce a, nebo na jiné přímce a', nemající žádný společný bod kromě bodu B'. Jestli platí $AB \equiv A'B'$ a $BC \equiv B'C'$, tak platí $AC \equiv A'C'$ (Obr. 10).



Obr. 10 Shodnost úseček

III, 4. Nechť je v rovině α dán úhel (h, k) a nechť přímka p' je dána v rovině α'. Dále nechť v rovině α existuje úsečka přímky p'. Označme h' polopřímku ležící na p' s počátečním bodem v O', potom v rovině α' existuje právě jedna polopřímka k' taková, že úhel (h, k) je shodný s úhlem (h', k') a zároveň všechny vnitřní body úhlu (h', k') leží na dané úsečce přímky p'. Zapisujeme:

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

Zároveň platí, že každý úhel je shodný sám se sebou, tedy že:

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k),$$

resp.

$$\angle(h, k) \equiv \angle(k, h).$$

Stručněji řečeno, každý úhel v rovině může být ***umístěn*** na vybranou stranu dané polopřímky právě jedním způsobem.

III, 5. Platí-li $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ a zároveň $\angle(h, k) \equiv \angle(h'', k'')$, pak $\angle(h', k') \equiv \angle(h'', k'')$.

III, 6. Platí-li ve dvou trojúhelnících ABC, $A'B'C'$:

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

pak platí i

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \text{a} \angle ACB \equiv \angle A'C'B'.$$

Před uvedením vět o shodnosti trojúhelníků (jako důsledku axiomů shodnosti), je potřeba definovat, co vlastně shodnost trojúhelníků je:

Definice (shodné trojúhelníky).

Řekneme, že ***dva trojúhelníky ABC, A'B'C' jsou shodné***, jestliže platí

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C', BC \equiv B'C'$$

$$\angle A \equiv \angle A',\ \angle B \equiv \angle B',\ \angle C \equiv \angle C'.$$

Tvrzení (první věta o shodnosti trojúhelníků)[30].

Platí-li pro dva trojúhelníky *ABC, A'B'C'* shodnosti

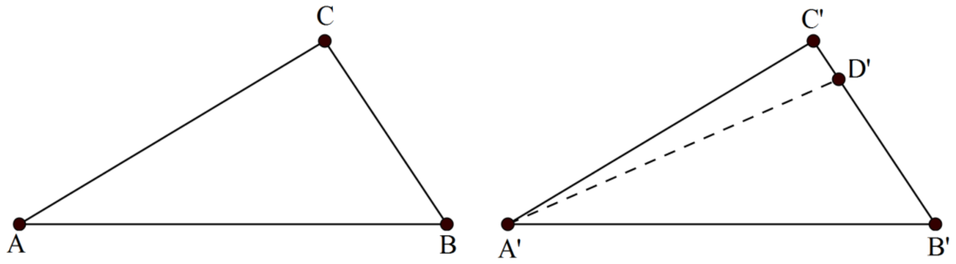
$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle A \equiv \angle A'$$

tak trojúhelníky *ABC, A'B'C'* jsou shodné.

Důkaz:

Z axiomu přímo III, 6 plyne, že shodnosti $\angle B \equiv \angle B'$, $\angle C \equiv \angle C'$ jsou splněny, a tedy postačuje dokázat $BC \equiv B'C'$.

Postupujeme sporem. Na straně *B'C'* zvolíme bod *D'* tak, že $BC \equiv B'D'$ (Obr. 11).



Obr. 11 Věta *sus*

Trojúhelníky *ABC* a *A'B'D'* splňují předpoklady axiomu III, 6 a úhly *BAC* a *B'A'D'* jsou tedy shodné. Tudíž podle axiomu III, 5, úhly $\angle B'A'C'$ a $\angle B'A'D'$ musí být shodné. Tohle ovšem není možné, protože z axiomu III, 4 plyne, že úhel v rovině může být ***umístěn*** na danou stranu dané polopřímky právě jedním způsobem a dostáváme se tedy ke sporu. Platí tedy, že $BC \equiv B'C'$ a tvrzení je tak dokázáno. Q. E. D.

Podobně by se dokazovala i **věta *usu* (úhel-strana-úhel):**

Tvrzení (druhá věta o shodnosti trojúhelníků).[31]

Mají-li dva trojúhelníky shodnou jednu stranu a dva přilehlé úhly, jsou navzájem shodné.

Jak bylo uvedeno již v úvodu kapitoly o Euklidových postulátech, čtvrtý postulát svým charakterem připomíná spíš tvrzení, než obecně platnou geometrickou konstrukci.

[30] U Euklida nacházíme toto tvrzení jako Prop. I.4.

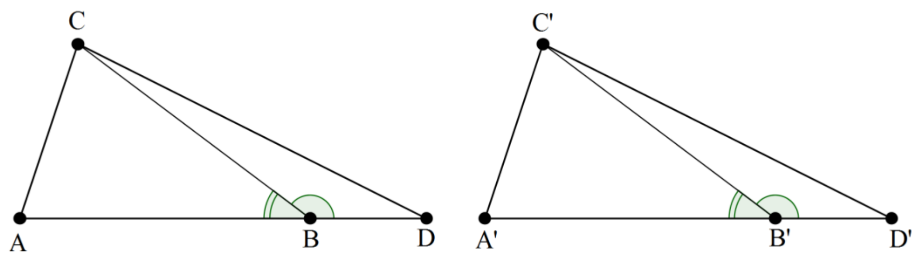
[31] V *Základech* je toto tvrzení uvedeno jako Prop. I.26.

Díky axiomům shodnosti lze odvodit sérii tvrzení, které vedou ke korektnímu důkazu právě tohoto postulátu.

Tvrzení (vedlejší úhly shodných trojúhelníků).

Jsou-li ***dva trojúhelníky ABC, A'B'C' shodné***, vedlejší úhly $\angle CBD$ a $\angle C'B'D'$ jsou shodné.

Důkaz (Obr. 12)**:**



Obr. 12 Vedlejší úhly shodných trojúhelníků

Uvažujme body A', C', D' na straně procházející bodem B' tak, že

$$A'B' \equiv AB,\ C'B' \equiv CB,\ D'B' \equiv DB.$$

Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ splňují předpoklady druhé věty o shodných trojúhelnících, jsou tedy shodné a platí:

$$AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'.$$

Jelikož z axiomu III, 3 platí $AD \equiv A'D'$, z druhé věty o shodných trojúhelnících plyne, že trojúhelníky CAD, $C'A'D'$ jsou shodné a platí

$$CD \equiv C'D',\ \angle ADC \equiv \angle A'D'C'.$$

Jsou tedy splněny předpoklady axiomu III, 6 a platí, že úhly $\angle CBD$ a $\angle C'B'D'$ jsou shodné. Q. E. D.

Jednoduchým důsledkem tohoto tvrzení je:

Tvrzení (vlastnost shodných úhlů).

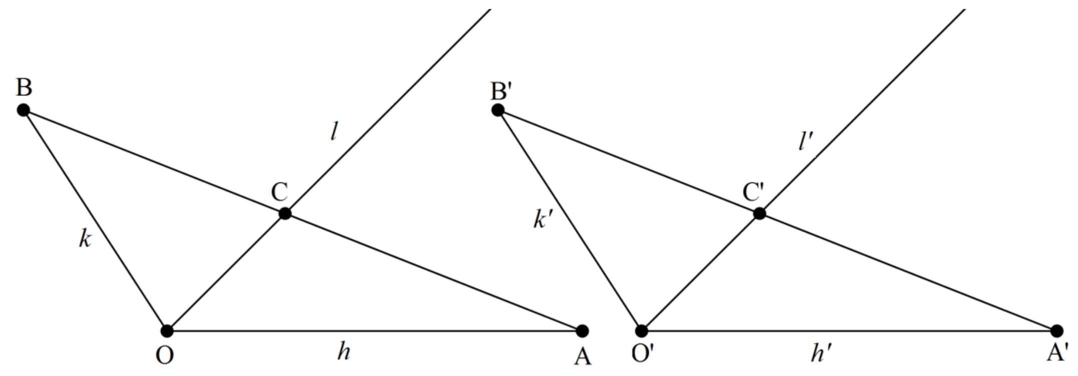
Nechť úhel (h, k) v rovině α je shodný s úhlem (h', k') v rovině α' a navíc, nechť l je polopřímka s počátečním bodem ve vrcholu úhlu (h, k), ležící uvnitř úhlu (h, k). Potom v rovině α' existuje polopřímka l' s počátečním bodem ve vrcholu úhlu (h', k') a ležící uvnitř toho úhlu tak, že platí:

$$\angle(h, l) \equiv \angle(h', l'),\ \angle(k, l) \equiv \angle(k', l').$$

Důkaz (Obr. 13):

Označme O, O' vrcholy úhlů (h, k), (h', k') a na stranách h, k, h', k' zvolme body A, B, A', B' tak, aby platilo

$$OA \equiv O'A',\ OB \equiv O'B'.$$



Obr. 13 Vlastnost shodných úhlů

Ze shodnosti trojúhelníků OAB, $O'A'B'$ plyne

$$AB \equiv A'B',\ \angle OAB \equiv \angle O'A'B',\ \angle OBA \equiv \angle O'B'A'.$$

Nechť přímka AB protne přímku l v bodě C. Na úsečce $A'B'$ vezměme bod C' tak, že $A'C' \equiv AC$. Potom $O'C'$ je hledaná polopřímka. Z uvedených shodností a axiomu III, 3 plyne $BC \equiv B'C'$. Kromě toho, trojúhelníky OAC a $O'A'C'$ jsou navzájem shodné a také trojúhelníky OCB a $O'C'B'$, čímže je tvrzení dokázáno. Q. E. D.

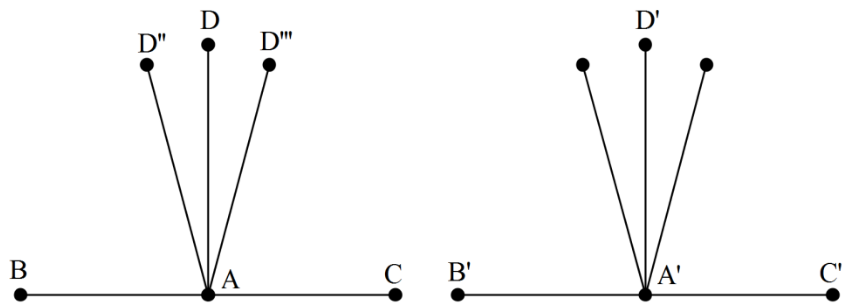
Pomocí posledních dvou tvrzení lze dokázat Euklidův čtvrtý postulát:

Tvrzení (Euklidův čtvrtý postulát).

Všechny pravé úhly jsou navzájem shodné.

Důkaz:

Nechť úhel $\angle BAD$ je shodný se svým vedlejším úhlem $\angle CAD$ a stejně tak úhly $\angle B'A'D'$ a $\angle C'A'D'$. Tedy úhly $\angle BAD$, $\angle CAD$, $\angle B'A'D'$ a $\angle C'A'D'$ jsou všechny pravé úhly. Předpokládejme pro spor, že úhly $\angle BAD$ a $\angle B'A'D'$ nejsou shodné. Umístíme úhel $\angle B'A'D'$ na polopřímku $\angle AB$ tak, že strana $\angle AD''$ bude buď uvnitř úhlu $\angle BAD$, nebo úhlu $\angle CAD$. Předpokládejme, že nastane první případ. Protože $\angle B'A'D' \equiv \angle BAD''$, z věty o vedlejších úhlech v shodných trojúhelnících plyne, že $\angle C'A'D' \equiv \angle C'A'D''$, a protože $\angle B'A'D' \equiv C'A'D'$, i axiomu III, 5 plyne, že $\angle BAD'' \equiv \angle C'A'D''$ (Obr. 14).



Obr. 14 Důkaz Euklidova čtvrtého postulátu

Protože $\angle BAD \equiv \angle CAD$, lze najít polopřímku AD''' uvnitř úhlu CAD tak, že $\angle BAD'' \equiv \angle C'A'D'''$ a také $\angle DAD'' \equiv \angle DAD'''$. Jsou tedy splněny podmínky axiomu III, 5 a platí, že $\angle CAD'' \equiv \angle CAD'''$. Tohle ovšem není možné, protože podle axiomu III, 4, úhel může být jednoznačně umístěn na určenou stranu dané polopřímky. Dostáváme se tedy ke sporu, úhly $\angle BAD$ a $\angle B'A'D'$ jsou shodné a tvrzení je dokázáno. Q. E. D.

2.3.5 Axiomy spojitosti

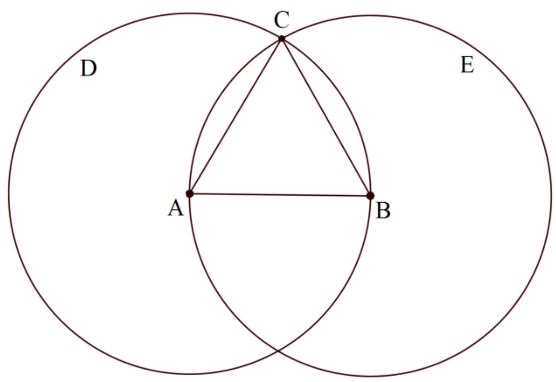
Z axiomů uspořádání víme, že na přímce leží nekonečně mnoho bodů. Ovšem z toho nevyplývá skutečnost, že na ní některé body nechybí, tedy že přímka není „děravá“. Důkazy v *Základech* stojí na tvoření konstrukcí, prováděných pomocí přímek a kružnic sestrojených v souladu s prvními třemi postuláty. Jejich podstata spočívá v tom, že průsečíky daných přímek a kružnic určují vedle již existujících i další body a tyto body určují zase další přímky atd.). Kdyby nebyla zaručena existence bodů průniku (přímky a kružnice, kružnice a kružnice), propozice ji využívající by obecně neposkytovaly vyžadované důkazy existence útvarů, které mají být zkonstruovány. Hned v první propozici (a tedy v každé další, která se na ní odvolává) narážíme na tento problém.

Propozice I. 1

Na dané omezené přímce postav trojúhelník rovnostranný.

Danou omezenou přímkou buď *AB*, má se tedy na přímce *AB* postavit rovnostranný trojúhelník.

Ze středu *A* poloměrem *AB* buď narýsován kruh *BCD*, a opět ze středu *B* poloměrem *BA* buď narýsován kruh *ACE*, a od bodu *C*, v němž se kruhy protínají, k bodům *A*, *B* buďte vedeny spojnice *AC*, *CB* (Obr. 15). Ježto bod *A* středem kruhu *CDB*, *AC* je stejné s *AB*, ježto dále bod *B* je středem kruhu *CAE*, jest *BC* stejné s *BA*. Bylo pak dokázáno, že i *CA* je stejné *AB*. Tedy jedna i druhá z *CA*, *CB* je stejná s *AB*. Veličiny však témuž rovné i navzájem rovny jsou; tedy též *CA* jest stejná s *CB*; ty tři teda, *CA*, *AB*, *BC*, jsou si rovny a *ABC* je rovnostranný trojúhelník.



Obr. 15 Prop. I.1

Celá staletí se matematici snažili dodat axiom, který by zaručil existenci bodu *C* (tedy průniku dvou kružnic). Stejně tak způsoboval problémy průnik přímky a kružnice (Prop. I.12):

Propozice I. 12

K dané neomezené přímce buď z daného bodu mimo ni spuštěna kolmice.

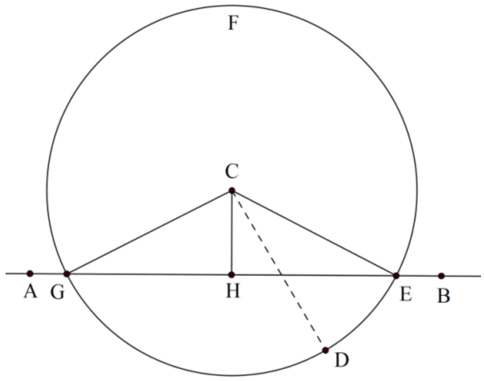
Danou neomezenou přímkou buď *AB*, daným pak bodem mimo nic *C*; má se tedy k dané neomezené přímce *AB* z daného bodu *C* mimo ni spustit kolmice.

Vezměme na druhé straně přímky *AB* kterýkoli bod *D* a ze středu C poloměrem *CD* opišme kruh *EFG* a rozpulme přímku *EG* v *H* a veďme spojnice *CG, CH, CE* (Obr. 16);

tvrdím, že na danou přímku neomezenou *AB* z daného bodu mimo ni *C* spuštěna jest kolmice *CH*.

Neboť ježto *GH = HE, HC* pak společná, patrně obě přímky *GH, HC* rovny jsou jednotlivě oběma *EH, CH*, též základna *CG = CE*; tedy úhel *CHG = EHC*.

Když se pak postaví přímka na přímku tak, že tvoří vedlejší úhly navzájem stejné, každý z těchto úhlů jest pravý, a postavená přímka zve se kolmicí té, na které stojí.
K dané přímce neomezené AB z daného mimo ni bodu C spuštěna jest kolmice CH, což právě bylo vykonati.



Obr. 16 Prop. I.12

Před nahlédnutím na tento problém z hlediska moderní geometrie si uveďme Hilbertovu definice kružnice:

Definice (kruh a kružnice).

Nechť M je libovolný bod roviny. Sjednocení všech bodů *A*, které mají od bodu *M* danou vzdálenost *r,* se nazývá ***kružnice.*** Bodu *M* říkáme ***střed*** kružnice a vzdálenost *r* se nazývá ***poloměr*** kružnice.

Průkopníkem v řešení nedostatku průniku přímky a kružnice, resp. dvou přímek byl německý matematik Richard Dedekind (1831-1916), který ve své publikaci *Stetigkeit und irrationale Zahlen* popisuje tzv. ***Princip kontinuity*** *(Principle of continuity)*, zvaný také ***Dedekindův axiom***. Jeho myšlenka je následující:

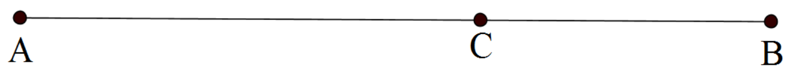
Předpokládejme, že na úsečce *AB* existuje bod *C*, který určuje dvě úsečky *AC, CB* (Obr. 17). Nechť bod *C* leží na právě jedné z úseček *AC*, *CB*, dostáváme rozdělení úsečky *AB* na dvě části s následujícími vlastnostmi:

i. každý bod úsečky *AB* patří do právě jedné ze dvou částí,

ii. bod *A* patří do jedné z částí (označme ji „první“), bod *B* do druhé, bod *C* může bez újmy na obecnosti patřit do jedné nebo druhé, záleží na našem předpokladu,

iii. každý bod první částí předchází (tedy v pořadí od A do B) každý bod části druhé.

V případě, že bod *C* splývá s bodem *A* resp. *B*, opět dostáváme dvě části splňující vlastnosti i-iii, přičemž jedna z částí je samotný bod *A* resp. *B*.



Obr. 17 Princip kontinuity

Nyní uvažujme opačné tvrzení, ve kterém Dedekind „nachází podstatu kontinuity (plynulosti, souvislosti, nepřetržitosti) přímky“ (Dedekind 1872, 5).

Dedekindův axiom (Heath 2013, 236)[32]:

Jestli je úsečka *AB* rozdělena na dvě části tak, že:

i. každý bod úsečky *AB* patří do právě jedné ze dvou částí,

ii. krajní bod *A* patří do první části, *B* do druhé části,

iii. libovolný bod první částí předchází každý bod části druhé,

pak existuje bod *C* úsečky *AB* (který může patřit do libovolné z částí) takový, že každý bod *AB* předcházející *C* patří do první části a každý bod, který následuje bod *C*, patří do druhé části

Richard Dedekind v *Stetigkeit und irrationale Zahlen* uvádí toto znění:

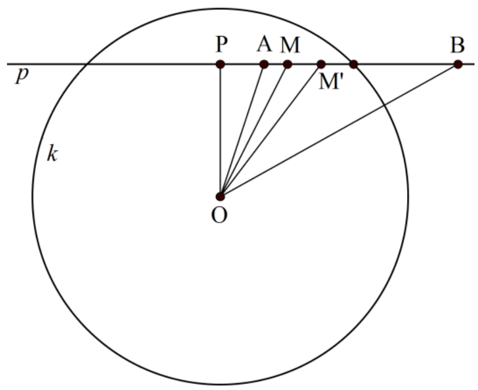
Rozdělíme-li všechny body přímky do dvou tříd S_1, S_2 tak, že každý bod první třídy leží vlevo od každého bodu druhé třídy, pak existuje právě jeden bod, který vytváří

[32] Alternativní znění Dedekindova axiomu, tak jak ho uvádí Thomas Heath ve svém překladu *Základů*.

toto rozdělení bodů mezi dvě třídy, resp. rozříznutí dané přímky na dva kusy (Dedekind 1872, 5).

Dedekindův axiom odpovídá naší intuitivní představě o úsečce, tedy že když ze dvou bodů postupně vedeme proti sobě úsečku (od bodu *A* do bodu *B* a naopak), tyto úsečky se potkají v bodě (a vytvoří tak úsečku *AB*). Jinak řečeno, každé rozdělení bodů přímky bodem *O* na dvě části (analogicky s větou o rozdělení roviny) je jednoznačné. Dvě třídy S_1, S_2 ve znění axiomu se nazývají ***Dedekindovy řezy přímky***. Použitím Dedekindova axiomu lze dokázat existenci jak průsečíku dvou kružnic, tak i průsečíku přímky a kružnice. Důkaz uvádím pouze k prvnímu ze zmiňovaných tvrzení.

Tvrzení (průnik přímky a kružnice).
Jestli má přímka jeden bod vevnitř a jeden bod mimo danou kružnici, existují dva body, jež má přímka společné s kružnicí (Heath 2013, 237).
Důkaz (Heath 2013, 237):



Obr. 18 Průnik přímky a kružnice

Nechť *k* je kružnice se středem *O* a poloměrem $\underline{R}$ a přímka *p* s jedním bodem *A* vevnitř *k* a jedním bodem *B* mimo *k* (Obr. 18). Z definice kružnice, $OA < \underline{R}$ a zároveň $OB < \underline{R}$. Veďme přímku kolmou na *p*, procházející středem *O* a její průsečík s přímkou *p* označme *P*.
Pak $OP < OA$, a tedy *OP* je vždy menší než $\underline{R}$, a *P* je tak uvnitř kružnice *k*. Úsek *AB* na přímce *p* může být rozdělen na dvě části tak, že platí:

- **i.** první část obsahuje všechny body *H* takové, že $OH < \underline{R}$ (tedy body uvnitř *k*),

ii. druhá část obsahuje všechny body C takové, že $OC \geq \underline{R}$ (body na kružnici k nebo mimo ní).

Podle Dedekindova axiomu existuje na úsečce PB bod M takový, že všechny body, které ho předcházejí, patří do první části a ty, co jsou až za ním, patří do druhé části. Tvrdím, že M je společný bod kružnice k a přímky p, tedy že

$$OM = \underline{R}.$$

Předpokládejme, že $OM < \underline{R}$. Pak existuje délka (označme σ) menší než rozdíl $\underline{R}$ a velikosti OM. Uvažujme bod M' jako jeden z těch bodů, co následují za M, tak, že $MM' = \sigma$. Protože velikost každé strany trojúhelníku je menší než součet dvou zbývajících stran, platí:

$$OM' < OM + MM'.$$

Avšak

$$OM + MM' = OM + \sigma < \underline{R},$$

a tedy

$$OM' < \underline{R},$$

což je spor.

Analogicky bychom postupovali v případě, že $OM > \underline{R}$.

Platí tedy, že $OM = \underline{R}$ a bod M tak leží zároveň na kružnici a přímce p (a je tedy jejich průsečíkem). Je zřejmé, že druhý bod splňující tuto vlastnost je středově souměrný s M podle P. Q. E. D.

Tvrzení (průnik dvou kružnic).
Jestliže jeden bod kružnice k leží uvnitř jiné kružnice k' a druhý bod kružnice k leží vně kružnice k', potom se kružnice k a k' protínají ve dvou bodech.

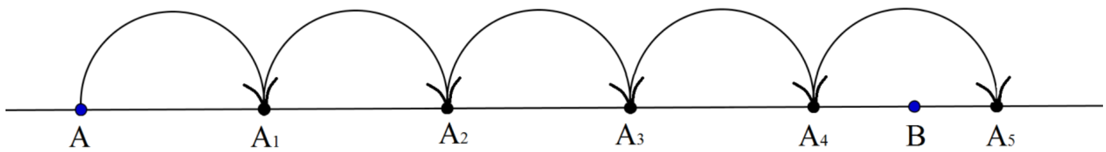
Ukázali jsme tedy, že Dedekindův axiom řeší nedostatek Euklidova předpokladu o průniku přímky a kružnice a průniku dvou kružnic. Ovšem David Hilbert si pro spojitost geometrických útvarů nezvolil Dedekindův axiom, uvádí tzv. ***Archimédův axiom.***

IV, 1 (Axiom spojitosti neboli Archimédův axiom).

Nechť A_1 je libovolný bod přímky s náhodně zvolenými body A, B. Vezměme body A_2, A_3, A_4,…takové, že A_1 leží mezi A a A_2, A_2 leží mezi A_1 a A_3, A_3 mezi A_2 a A_4 atd. Navíc, nechť úsečky

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$$

jsou navzájem shodné (řekneme, že jsou ***stejné***). Potom mezi těmito body vždy existuje bod A_n takový, že bod B leží mezi A a A_n (Obr. 19).



Obr. 19 Archimédův axiom

Je zřejmé, že Archimédův axiom se používá pro měření úseček. Vezmeme-li úsečku *CD* jako jednotku vzdálenosti (tedy vzdálenost AA_1 podle znění axiomu), potom každá úsečka na dané přímce má vzhledem k této jednotce konečnou velikost (tedy délka *AB* vzhledem k *CD* je nanejvýš *n* jednotek). Lze dokázat, že Archimédův axiom vyplývá z Dedekindova axiomu.

David Hilbert považoval v původní verzi *Grundlagen der Geometrie* Archimédův axiom za dostatečný pro zaručení spojitosti přímky. Toto se však brzo po publikaci ukázalo jako mylné, a proto v *Les Principes fondamentaux de la* Géométrie, tedy ve francouzském překladu *Grundlagen der Geometrie* vydaném roku 1900, David Hilbert tento nedostatek opravil a přidal tzv. ***axiom úplnosti*** (***Vollständigkeitaxiom***), který vyžaduje, aby zavedený systém axiomů (včetně axiomu rovnoběžnosti uvedeném v následující kapitole) byl považován za uzavřený, tj. aby ho nebylo možno doplnit dalšími prvky. Z teoretického hlediska tento axiom umožňuje *vzájemně jednoznačné zobrazení*[33] mezi body na přímce a osou reálných čísel. Axiom úplnosti společně s Archimédovým axiomem jsou tedy ekvivalentní s Dedekindovým axiomem.

[33] Takové zobrazení (nazýváno i *bijektivní zobrazení* neboli *bijekce*) je *prosté* a *na*.

IV, 2 Axiom úplnosti (*Vollständigkeitaxiom*).

Body, přímky a roviny tvoří systém, který nelze doplnit novými prvky tak, aniž bychom narušili dříve uvedené axiomy a vytvořili tak novou geometrii splňující všechny předchozí axiomy.

2.3.6 Axiom rovnoběžnosti (Euklidův axiom)

Nejkontroverznější oblast Euklidovy axiomatizace je rozhodně jeho pátý postulát („A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých“). I sám Euklides si pravděpodobně uvědomoval spornost tohoto postulátu a snažil se co nejvíce oddálit jeho aplikaci. První propozice, ve které se využívá, je Prop. I.29.

<u>**Propozice I. 29**</u>

Přímka protínající rovnoběžky tvoří střídavé úhly navzájem stejné a úhel vnější vnitřnímu protějšímu rovný a vnitřní na téže straně dvěma pravým rovné.

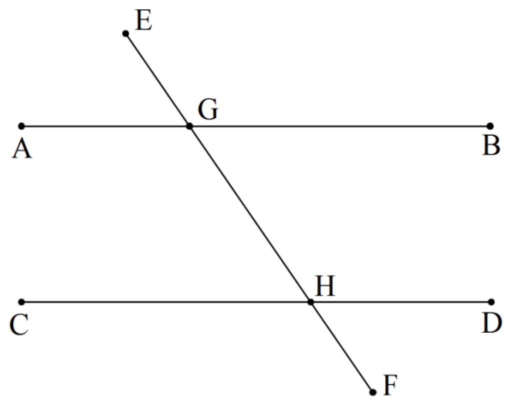
Nuže protínej rovnoběžky *AB*, *CD* přímka *EF*; pravím, že tvoří střídavé úhly ∠*AGH*, ∠*GHD* stejné a vnější úhel ∠*EGB* rovný vnitřnímu protějšímu (souhlasnému) ∠*GHD* a vnitřní na téže straně (přilehlé) ∠BGH + ∠*GHD* rovné dvěma pravým (Obr. 20).

Neboť není-li ∠*AGH* = ∠*GHD*, jeden z nich jest větší. Větším buď ∠*AGH*; společným buď BGH; tedy (∠*AGH*+∠*BGH*)> (∠*BGH* + ∠*GHD*). Avšak ∠*AGH* + ∠*BGH* = 2 R[34] . Tedy (∠*BGH* + ∠*GHD*) < 2 R. Avšak ramena menších úhlů než dva pravé, prodlužovány jsouce do nekonečna, se stýkají; tedy *AB*, *CD*, prodlužovány jsouce do nekonečna, se setkají; avšak nestýkají se, ježto je pokládáme za rovnoběžky; tedy ∠*AGH* není neroven ∠*GHD*; tedy roven. Avšak ∠*AGH* = ∠*EGB*; tedy též ∠*EGB* = ∠*GHD*. Společným buď ∠*BGH*; tedy ∠*EGB* + ∠*BGH* = ∠*BGH* + *GHD*. Avšak ∠*EGB* + ∠*BGH* = 2 R; tedy též ∠*BGH* + ∠*GHD* = 2 R.

Tedy přímka protínajíc rovnoběžky tvoří střídavé úhly navzájem stejné a úhel vnější vnitřnímu protějšímu rovný a vnitřní na téže straně dvěma pravým rovné.

---

[34] R označuje pravý úhel.



Obr. 20 Prop. I.29

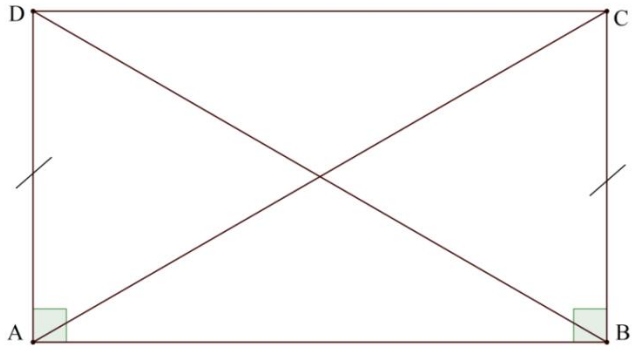
Před rozborem samotných snah dokázat tento postulát uvedu jednu z alternativních formulací, které jsou logicky ekvivalentní s Euklidovým postulátem. V průběhu století se jich nasbíralo víc, já uvádím jenom jednu, dnes známou pod názvem ***Playfairův axiom***, pojmenovanou podle skotského matematika Johna Playfaira (1748-1819). Právě tuto formulaci si volí David Hilbert ve svém axiomatickém systému geometrie (rozdíl je však ve faktu, že Hilbert soustavou axiomů předcházejících tento axiom zajišťuje jeho korektnost):

V. (Playfairův axiom).

V rovině α může být libovolným bodem A ležícím mimo danou přímku p vedena právě jedna přímka p' neprotínající přímku p. Řekneme, že přímka p' je **rovnoběžná** s přímkou p.

Diskuze o pátém postulátu trvaly od časů Euklida až do poloviny 19. století. Již řečtí vykladači *Základů* pozorovali rozdílný charakter pátého postulátu, který se svou složitostí zjevně odlišuje od ostatních. Rovněž si všimli, že řada vět je dokázána bez jeho použití, což způsobilo dohady o jeho závislosti na ostatních postulátech. Navzdory četným snahám antických geometrů, např. Ptolemaia (cca 100-170 n.l.) nebo Prokla, starověk neposkytl odpověď na otázku, jak to ve skutečnosti je s pátým postulátem. V středověku pozorujeme obdobné snahy arabských učenců, např. Omara Chajjáma nebo Nasir al-Din al-Tusiho (1201-1274), ovšem rovněž neúspěšné.

Uvedu pokus Omara Chajjáma, jelikož ten sehrál důležitou roli u novověkých matematiků zabývajících se touto problematikou. Vycházel ze zkonstruovaného čtyřúhelníku (Obr. 21) a snažil ukázat, že pátý postulát je nadbytečný. Začal konstrukcí úseček *AD* a *BC* stejné délky, kolmých na úsečku *AB*. Vypozoroval, že když se mu povede dokázat, že vnitřní úhly čtyřúhelníku u vrcholů *C* a *D* jsou pravé, pak by dokázal rovnoběžnost přímek *DC* a *AB*. Trojúhelník *ABD* je shodný s trojúhelníkem *BAC* (protože mají dvě odpovídající si strany a jimi svírající úhel shodný??). Tedy i *AC* je shodné s *BD*, z čehož plyne, že trojúhelníky *ADC* a *BCD* jsou shodné (mají všechny strany stejné délky). Tudíž úhel *ADC* je shodný s úhlem *BCD*. Ovšem nepovedlo se mu dokázat, že jsou pravé, což z jejich shodnosti nevyplývá.



Obr. 21 Chajjámův (resp. Chajjámův-Saccheriho) čtyřúhelník

Vlna neúspěšných pokusů pokračovala až do novověku, kdy v roce 1574 italský matematik Christopher Clavius (1538-1612) a o několik let později, v roce 1680, i Giordano Vitale (1633-1711), ukázali, že pátý postulát je ekvivalentní s tvrzením, že přímka každým bodem stejně vzdálená (ekvidistantní) od dané přímky, je také přímka (Fraser). V díle *Euclide restituto (Euklides obnoven)*, Vitale navázal na Chajjáma a jeho čtyřúhelník a dokázal, že jestli jsou na přímce *AB* tři body, které mají stejnou vzdálenost od *CD*, pak přímky *AB* a *CD* jsou stejně vzdálené ve všech bodech (Fraser).

Mnohem významnější se ukázala být publikace italského Jezuitu a profesora matematiky na Univerzitě v Pavii Giovanniho Girolama Saccheriho (1667-1733), *Euklides zbaven všech chyb (Euclides ab Omni Naevo Vindicatus)* z roku 1733 (Heath 2013, 211). Saccheri rovněž navázal na Omara Chajjáma a jeho čtyřúhelník a snažil se sporem ukázat, že úhly u vrcholů *C* a *D* jsou pravé. Rozdělil tedy situaci na tři případy – dané úhly jsou pravé (hypotéza a pravém úhlu), tupé (příp. jeden pravý a druhý tupý; hypotéza o tupém úhlu) nebo ostré (příp. jeden pravý a jeden ostrý; hypotéza o ostrém úhlu). Pro každou z hypotéz deduktivně odvodil řadu tvrzení a očekával (ovšem neúspěšně), že důsledky posledních dvou hypotéz vedou k logickému sporu.

Mezi nejdůležitější důsledky jeho hypotéz o úhlu patří tvrzení o velikosti součtu úhlů v trojúhelníku: „Jestli jsou hypotézy o pravém/tupém/ostrém úhlu pravdivé, pak součet vnitřních úhlů trojúhelníku je roven/větší/menší než dva pravé úhly" (Heath 2013, 211). Touto problematikou se zabýval rovněž Adrien Marie Legendre (1752-1833), kterému se bez použití pátého postulátu povedlo dokázat, že součet úhlů v trojúhelníku je roven nejvýše dvěma pravým úhlům. U Euklida nacházíme tuto větu jako Prop. I.32, ale jelikož se Euklidův důkaz opírá o postulát rovnoběžnosti, není zcela korektní.

Tvrzení (Sacheriho-Legendrova věta).
Součet úhlů v trojúhelníku je roven nejvýše dvěma pravým úhlům (Heath 2013, 213).

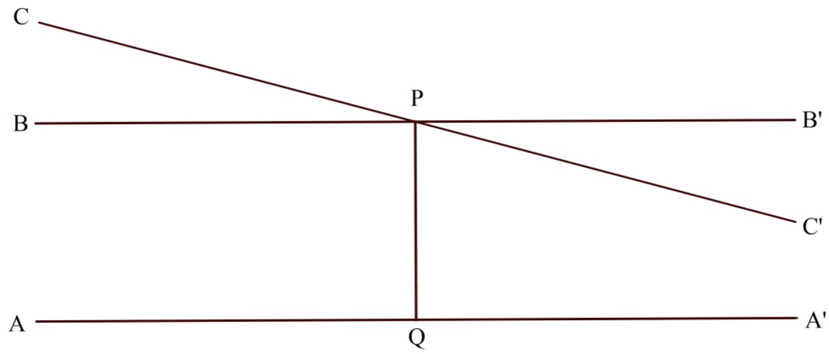
Saccheriho tvrzení odvozené z hypotéz o úhlu v čtyřúhelníku položila základy neeuklidovských geometrií, protože, jak se ukázalo, v případě ostrého úhlu u vrcholů *C* nebo *D*, čtyřúhelník vede k hyperbolické geometrii, později zavedenou Nikolajem Lobačevským (1792-1856) a Jánosem Bolyaiem (1802-1860)[35]. V případě tupého úhlu důkaz pokládá základy geometrie eliptické, někdy také zvané Riemannova geometrie – podle německého matematika Bernharda Riemanna (1826-1866). Speciálním případem eliptické geometrie, které se ve své práci zabývám, je geometrie sférická (na kulové ploše).

2.3.7 Stručná charakteristika hyperbolické a sférické geometrie

Euklidův pátý postulát (resp. jeho alternativní formulace) znamená rozdělení geometrie na klasickou euklidovskou a neeuklidovskou; Lobačevského rétorikou je to rozdělení na geometrii *užitečnou* a *obraznou* nebo *pan-geometrii*[36] (Shirokov 1963, 11). V základu euklidovské geometrie leží předpoklad, že „bodem neležícím na zadané přímce lze v rovině vést právě jednu přímku, která neprotíná zadanou přímku" (axiom V)

[35] Již Carl Friedrich Gauss (1777-1855) uvažoval takovou geometrii, jeho spisy se však našly až později, poněvadž je nikdy nezveřejnil. Lobačevskij a Bolyai vypracovali teorii hyperbolické geometrie nezávisle na sobě; Lobačevskij byl první, kdo své poznatky zveřejnil.

[36] Předpona *pan-* (παν-) má význam *celková, absolutní*.



Obr. 22 Postulát o rovnoběžnosti

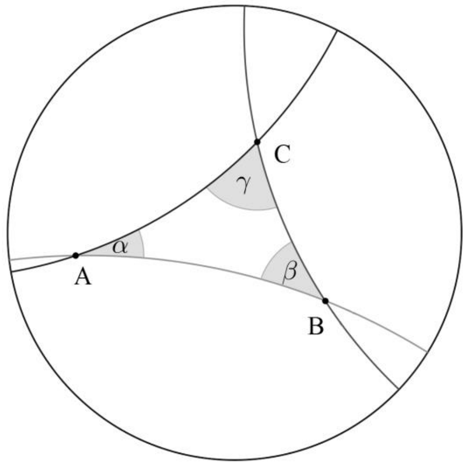
Skutečnost, že bodem neležícím na zadané přímce prochází alespoň jedna přímka, která zadanou přímku neprotíná, patří do *absolutní geometrie*, tj. může být dokázána bez pomoci postulátu o rovnoběžných přímkách – stačí vzít v úvahu, že dvě přímky kolmé ke třetí přímce se neprotínají. Tedy přímka *BB'* (Obr. 22), procházející bodem P a kolmá na přímku *PQ*, neprotíná přímku *AA'*. V neeuklidovských geometriích je pátý postulát vynechán a nahrazen jiným.

V případě hyperbolické geometrie první čtyři Euklidovy postuláty zůstávají platné, posledním postulátem je:

Lobačevského postulát o rovnoběžnosti.
Bodem neležícím na zadané přímce lze v rovině vést aspoň dvě přímky, které neprotínají zadanou přímku (Shirokov 1963, 12).

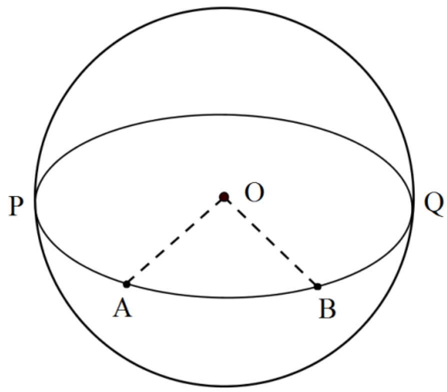
Z tohoto postulátu přímo vyplývá, že existuje nekonečně mnoho takových přímek. Uvažujíc, že přímka *CC'* (Obr. 22) neprotíná *AA'*, pak všechny přímky ležící uvnitř úhlů $\angle BPC$ a $\angle B'PC'$ rovněž neprotínají *AA'*. Stejně jako v případě Euklidovy verze, tento postulát je logicky ekvivalentní s tvrzením:

Tvrzení (věta o součtu úhlů v (hyperbolickém) trojúhelníku).
Součet velikostí vnitřních úhlů (hyperbolického) trojúhelníku (Obr. 23) je menší než dva pravé úhly (Shirokov 1963, 15).



Obr. 23 Hyperbolický trojúhelník[37]

Sférická (a také obecně eliptická) geometrie má s tou euklidovskou ještě o něco méně společného, než hyperbolická – kromě pátého postulátu pozměňuje i první a druhý. Ve sférické geometrii se za přímky považují tzv. hlavní kružnice, tj. kružnice vzniklé průnikem kulové plochy a roviny procházející středem kulové plochy (Obr. 24). Přímka spojující body A a B na povrchu kulové plochy je spojnice bodů A a B s nejkratší vzdáleností. Kružnice na kulové ploše vzniklé řezem roviny neprocházející středem kulové plochy se nazývají vedlejší kružnice. Z Hilbertova axiomu o uspořádaní II, 3 přímo vyplývá, že přímka nemůže být ve tvaru kružnice, jelikož ze tří bodů musí vždy jeden ležet mezi dvěma zbývajícími, což na kružnici není možné.



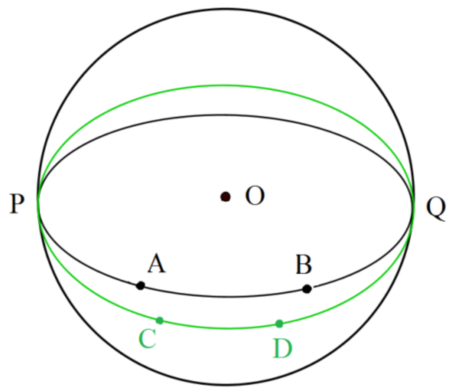
Obr. 24 Hlavní kružnice

[37] Daná plocha představuje jeden z modelů hyperbolické geometrie, splňující Lobačevského postulát. Nazývá se Poincarého model disku, podle francouzského matematika Henri Poincarého (1854-1912). Nejedná se tedy o klasický kruh jako v Euklidově geometrii ani kulovou plochu.

První Euklidův postulát říká, že „dvěma body možno vést právě jednu přímku“. V eliptické geometrii je upraven na:

EP1) Dvěma body lze vést alespoň jednu přímku (Gray et al).

Tedy ne pouze jednu – například body *P, Q* (Obr. 25) prochází nekonečně mnoho přímek (na obr. ilustrované jenom dvě – přímky *AB* a *CD*). Zároveň platí, že dvěma body neležícími na pólech prochází právě jedna přímka.



Obr. 25 Přímky procházející dvěma danými body na kulové ploše

Druhý postulát říká, že „přímku omezenou možno nepřetržitě prodloužit“. Ve sférické geometrii je tento postulát mírně modifikován, jelikož přímka je tvořená hlavní kružnicí a má tedy konečnou délku. Avšak kdybychom chtěli úsečku neustále prodlužovat, pohybujeme se stále po téže kružnici, a můžeme ji tedy prodloužit nekonečně mnohokrát.

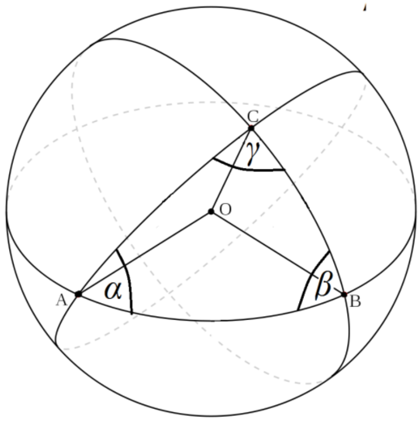
Jelikož přímky jsou vlastně hlavní kružnice na dané kulové ploše, vždy se protnou ve dvou (protilehlých) bodech. Tato myšlenka tvoří základ pátého postulátu pro eliptickou geometrii:

Postulát o (eliptické) rovnoběžnosti.
Je-li dána přímka a bod na ní neležící, všechny přímky procházející tímto bodem mají s danou přímkou společný bod – tedy neexistují navzájem rovnoběžné přímky (Gray et al).

Z tohoto postulátu plyne:

Tvrzení (o součtu úhlů v (sférickém) trojúhelníku).

Součet velikostí vnitřních úhlů (sférického) trojúhelníku (Obr. 26) je vždy větší než dva pravé úhly (Gray et al).



Obr. 26 Sférický trojúhelník

První tvrzení, které není platné ve sférické geometrii, je Prop. I.16:

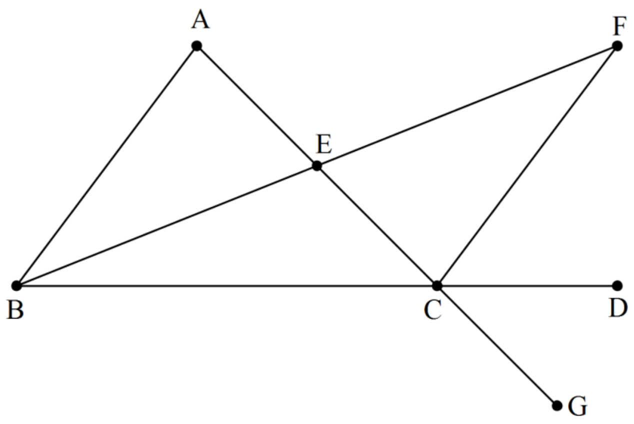
<u>Propozice I. 16</u>

V každém trojúhelníku, jehož jedna strana se prodlouží, vnější úhel větší jest než kterýkoli protější úhel vnitřní.

Trojúhelníkem buď *ABC*, a prodloužena buď jedna jeho strana *BC* do *D*; pravím, že vnější úhel $\angle ACD$ je větší než kterýkoli z protějších úhlů vnitřních $\angle CBA$, $\angle BAC$.

Rozpůlena buď *AC* v *E* a spojnice *BE* prodloužena buď (v přímce) do *F*, a buď $BE = EF$ a vedena buď spojnice *FC*, a buď *AC* prodloužena do *G* (Obr. 27). Ježto tedy $AE = EC$ a $BE = EF$, patrně $AE + EB = CE + EF$ a $\angle AEB = \angle FEC$, neboť jsou vrcholové; základna tedy $AB = FC$. Trojúhelníky *ABE* a *FEC* jsou shodné, tedy i zbývající úhly zbývajícím úhlům, proti nimž leží stejné strany, jeden druhému se rovnají; tedy $\angle BAE = \angle ECF$. Avšak $\underline{\angle ECD > \angle ECF}$, tehdy $\angle ACD > \angle BAE$. Podobně ovšem, když se rozpůlí *BC*, též $\angle BCG$, tj. $\angle ACD > \angle ABC$.

V každém tedy trojúhelníku, jehož jedna strana se prodlouží, vnější úhel větší jest než kterýkoli protější úhel vnitřní.



Obr. 27 Prop. I.16

Podtržená část ($\angle ECD$ > $\angle ECF$) neplatí pro obecný trojúhelník ve sférické geometrii, protože přímka *CF* nemusí ležet v části vymezené úhlem $\angle ACD$ (*F* může ležet na přímce *CD*).

2.4 Moderní axiomatické systémy geometrie z hlediska didaktiky matematiky

Jan Vyšín (1908-1983), český matematik a průkopník didaktiky matematiky, charakterizoval geometrii jako „sjednocování a zpřesňování všech objektivních přístupů k matematice" (Koman et al 1986, 81). Skutečně, geometrie si vyžaduje značnou dávku preciznosti a soustředění, což ji činí důležitým prvkem ve vývoji jak abstraktního, tak i konkrétního myšlení. Její vyučování v rámci matematiky na základních a středních školách tak hraje důležitou roli.

Jak bylo zmíněno hned v první kapitole, geometrie se vyvinula z praktické zkušenosti člověka. Právě tato skutečnost by neměla být pomíjena i v její výuce a žák by měl být ke geometrii veden prostřednictvím pro něj známého světa – skrze ty objekty, které může vnímat obzvlášť svým zrakem nebo hmatem. Nelze však popřít, že zájmem dnešního žáka není měření pozemků nebo výstavba obydlí. Ovšem i úlohy na měření vzdáleností a velikosti geometrických objektů můžou být formulovány tak, že budou pro žáka zajímavé. Je ovšem nutné je řešit nejen početně, ale i jakýmsi kontaktem s daným geometrickým objektem, jelikož východisko pro výuku geometrie by nemělo být čistě matematické (např. kreslení, rýsování apod.), ale i empirické (hraní se s modely těles, stavění a porovnávání objektů různých tvarů). Právě během prostého kreslení se dítě poprvé setkává s myšlenkou vyplňování, resp. dělení roviny, což jsou významné oblasti rovinné geometrie. Historie geometrie nám jasně říká, jak se postupně vyvíjelo geometrické myšlení – od konkrétních konstrukcí, přes Euklida a částečné zteoretizování geometrických postupů, až po Davida Hilberta a úplnou formální axiomatizaci geometrie jako vědy. Tedy ačkoli Hilbertovo zavedení geometrie je z matematického hlediska korektní, v historickém vývoji mu předcházela geometrie založená na Euklidově přístupu. Vynořuje se tak otázka, zdali je přirozenější pro žáka (resp. i pro učitele) postupovat ve výuce geometrie v souladu s jejím historickým vývojem – tedy od praktických úloh a ne vždy korektně definovaných (ale více-méně intuitivních) pojmů, směrem k formální axiomatizaci, nebo je nutné předkládat žákům *vědeckou* představu o geometrii, resp. od jakého věku je začít s touto formalizací seznamovat.

Před samotným studiem nějakého objektu nebo jevu je nutné mít jednotnou terminologii, tj. jasnou představu o tom, co jsou a jaké vlastnosti mají ty objekty, s nimiž pracujeme. Definicím prvotních pojmů jak u Euklida tak Hilberta byla věnována kap.

2.3.1. Ačkoli se Euklides snaží definovat i ty nejjednodušší útvary, jako bod, přímka, nebo rovina, všechny jeho definice předpokládají nějakou předchozí znalost a zkušenost žáků s těmito objekty. Na rozdíl od tohoto přístupu, axiomaticky koncipované učebnice nepředpokládají žádnou předchozí znalost studované oblasti, protože „ta je plně definována příslušnými axiomy a jakékoli představy o daných pojmech studiu spíše škodí, než napomáhají“ (Kuřina 2012, 244). Fakt, že axiomy dávají jednoznačný význam nedefinovaným pojmům, je výstižně vyjádřen výrokem Davida Hilberta, který říká, že „v axiomech a matematických větách lze nahradit slova *bod, přímka, rovina* např. slovy *stůl, židle* a *tácek*“ (Kuřina 2012, 244). Těžko si představit, že bychom žáky ve škole přiměli zapomenout na jejich intuitivní představu o bodech, přímkách, nebo dalších geometrických útvarech a snažili se nejdřív ze sady axiomů vyvodit vlastnosti, které jim jsou předem víceméně zřejmé. Nejvýstižnější pro demonstraci bodů, přímek, polopřímek, úhlů nebo mnohoúhelníků je jednoznačně jejich vyobrazení (resp. jejich částí, např. v případě přímky a polopřímky) prostřednictvím náčrtu, nebo již připraveného obrázku. U žáka tak vzniká konkrétní představa o tom, jak daný objekt vypadá, a která je pro konstrukční úlohy, resp. odvozování některých jednodušších tvrzení dostačující. Vyslovení definice totižto nemusí znamenat žákovo osvojení si daného pojmu, to nastává až pracovním kontaktem. „Významnou roli přitom hrají zkušenosti, představy, předběžné znalosti, ale například i ambice žáka“ (Kuřina 212, 244).

I po definování a vysvětlení geometrických pojmů se můžou vyskytnout určité nejasnosti vedoucí k žákově chybě. Problémovými jevy může být například otázka rozdílu mezi přímkou a úsečkou (resp. polopřímkou). V náčrtu, případně během konstrukce, je rozdíl zřejmý – žák rozlišuje mezi úsečkou ohraničenou dvěma body a přímkou, která se v náčrtech body neohraničuje a co naznačuje její nekonečnost. Může se ovšem stát, že žák nebude tyto pojmy ve svých odůvodněních rozlišovat a bude mluvit například o *délce přímky*, případně že v rozboru konstrukce nesprávně užije naučeného matematického značení pro přímku, úsečku nebo polopřímku a z formálního hlediska napíše něco, co není terminologicky správně. Učitel pak musí uvážit, je-li to chyba a případně jakým způsobem, zda vůbec, žáka *opravit*. Analogická situace může nastat v případě pojetí kružnice a kruhu. Jak jsem zmiňovala v poznámce k Euklidově definici kružnice v kap. 1.3.1, česká terminologie rozlišuje mezi kružnicí a kruhem, což ovšem neplatí ve všech jazycích a navíc toto rozlišení neexistuje ani v češtině u jiných geometrických objektů, jako například u čtverce nebo dalších mnohoúhelníků. Žák se může dopustit terminologické *chyby*, když bude uvažovat o *délce kruhu*, případně *obsahu kružnice*. Stejně tak je diskutabilní správnost tvrzení, že „průnik přímky a kruhu jsou buď dva body, jeden, nebo žádný bod“. Rozlišení mezi přímkou a úsečkou, resp. kružnicí a kruhem dává smysl a častokrát je během rozborů úloh i užitečné, ovšem historický vývoj znova nabízí otázku, zda není toto rozdělení víc než předpokladem správnosti nějakého tvrzení spíše pomůckou, resp. nástrojem pro detailnější (nikoli správnější) rozbor dané úlohy.

Postupným vývojem žákova (abstraktního a konkrétně i geometrického) myšlení je možno přecházet od praktické, konstrukční výuky geometrie k postupnému představování formální a abstraktní stránky geometrického světa. Velice zajímavý je citát studenta učitelství, který má již znalosti z matematické analýzy i algebry a začíná se hloubkově věnovat geometrii: „Přímka neexistuje, protože prostor je zakřiven; a bod taky neexistuje, protože i nejmenší částečku lze dělit“ (Kuřina 1999, 75). Tato myšlenka vystihuje charakteristickou črtu matematiky, konkrétně že „matematika vzniká jako duševní konstrukce ve vědomí toho, kdo jí studuje“ (Kuřina 1999, 75). Základní úlohou učitele je právě tuto konstrukci rozvíjet. Toto je ovšem poměrně dlouhodobý proces vyžadující trpělivého a geometricky zdatného učitele a samozřejmě i poctivého žáka se zájmem o matematiku a geometrii. Učitel může vhodnými úlohami „navozovat selhání intuice“ (Kuřina 1975, 162) a postupně tak přivádět žáka k odhodlání budovat geometrii formálněji a uvědomení si významu dokazování i na první pohled zřejmě platných tvrzení. Pro žáka se zájmem o matematiku se tak „každá definice stává výzvou, proč je pojem právě takovým způsobem zaveden, každá věta je vyjasněním souvislostí, které chce poznat, a každý důkaz nejen odpovědí na otázku, proč věta platí, ale i jejím zařazením do systému“ (Kuřina 1999, 75). Formální pojetí výuky geometrie prostřednictvím systému axiomů, definic, vět a důkazů je pro žáky spíše „hotovou matematikou“, tedy takovou, kterou se mají pouze naučit a umět reprodukovat. Zdá se však, že je výhodnější žákům „připravit systém úloh, otázek a problémů, které mají samostatně řešit a tak postupně pro sebe matematiku vytvářet – což je přístup, který nazýváme konstruktivní výuka matematiky“ (Kuřina 1999, 75). Velikost *Základů* spočívá i v tom, že právě tyto konstruktivní přístupy, tak důležité a praktické pro učitelskou praxi, v sobě obsahují. „Nejen, že je v nich věnována systematická péče geometrickým konstrukcím, ale směs intuice, logického uvažování, slovních formulací a obrázků umožňuje, aby každý, kdo se ponoří do jejich studia, si pro sebe zkonstruoval bohatý svět matematiky“ (Kuřina 1999, 77).

Jakýmsi kompromisem mezi Euklidem a Hilbertem by ve výuce matematiky mohl být přístup francouzského matematika Jacquesa Hadamarda (1865-1963), který v roce 1898 (tedy pouze jeden rok před Davidem Hilbertem) vydává obsáhlé dílo *Leçons de géométrie élémentaire* (*Přednášky z elementární geometrie*), v němž je geometrie podávaná velice poutavým a přirozeným způsobem – „klasické přístupy jsou citlivě vyváženy s moderními postupy" (Kuřina 2012, 239). Hadamard všechna tvrzení dokazuje, avšak jeho kniha není, na rozdíl od Hilberta, koncipována axiomaticky. Dalším rozdílem je, že Hadamard využívá zkušenosti studentů s prostorem, ve kterém žijí. Prvním pojmem, který uvádí, je pojem ***tělesa*** jako „ohraničené části prostoru" (Hadamard 2008, 1). „Společnou částí dvou části prostoru" pak nazývá **plocha** a uvádí hned konkrétní příklad – list papíru nám může dát přibližnou představu o tom, co je to **plocha**, ovšem není to striktně vzato plocha jako taková, jelikož dané části prostoru jsou navíc ohraničeny i „tloušťkou" tohoto listu. Jako plochu si tak můžeme představit „list papíru, jeho tloušťka se nekonečně zmenšuje" (Hadamard 2008, 1). ***Čárou*** pak nazývá „společnou část dvou ploch" (Hadamard 2008, 1), ale opět zdůrazňuje, že čáry, které nakreslíme nám můžou dát jenom přibližnou představu o geometrické čáře, jelikož vždy budou mít jistou šířku, kterou geometrická čára nemá. Nakonec ***bodem*** nazve „průsečík dvou čar" (Hadamard 2008, 1). Hadamard pak dále v Euklidově duchu, ovšem velice svěžím způsobem, pokračuje v systematickém dokazování základních tvrzení. Každou kapitolu uzavírá sérií úloh rozšiřujících probíranou teorii. Navíc současná vydání obsahují i CD s interaktivními dokumenty doplňující a demonstrující Hadamardovy postupy. Toto dílo tak svou strukturou i obsahem poskytuje Euklidově geometrii moderní rozměr a může tak být velice kvalitním zdrojem pro výuku geometrie na základních a středních školách.

Podle mého názoru je důležité, aby se výuka geometrie přidržovala historického vývoje geometrického myšlení, protože právě to dokumentuje postupný rozvoj charakterizace geometrického světa. Pro žáka je přirozenější budovat si „svou geometrii" od praktické zkušenosti a přes konkrétní úlohy se postupně dostávat (samozřejmě v případě zájmu) k stále vyššímu stupni abstrakce. Ovšem zastávám postoj, že učitel by měl být obeznámen jak s praktickou a intuitivní geometrii, tak i s její moderní axiomatizací, tedy s Davidem Hilbertem a jeho *Grundlagen der geometrie*, aby mohl případným zvědavým a zaníceným žákům předkládat i tuto stránku geometrie aby byl obeznámen s předmětem, který vyučuje, v co nejvyšší míře. Jan Vyšín napsal pro vzdělávání učitelů *v hilbertovském* duchu učebnici *Elementární geometrie* (1952), v úvodu které varuje, že „čtenář si musí být vědom toho, že solidní studium základů geometrie, byť se mu zdálo nezábavným, protože zdánlivě nepřináší nové poznatky, je pro něho jako pro učitele geometrie nezbytně nutné, má-li této disciplíně vyučovati na vědeckém podkladě“ (Kuřina 2012, 243).

3 Závěr

Cílem této práce bylo zdokumentovat axiomatické systémy geometrie z historického hlediska – od Euklidových *Základů* po Hilbertovy *Grundlagen der Geometrie* – s důrazem na vyhledání možných nedostatků v Euklidově díle a jejich možným využitím jako motivačních úloh ve výuce geometrie na druhém stupni základních škol a především na středních školách. Mohli jsme si všimnout, že geometrie se vyvíjela postupně, od opírání se o intuitivní poznatky, přes množství diskusí a výzkumů, až po striktně formální přístup ke geometrickým úvahám a znalostem v nich využívaných. Ve své práci jsem se snažila poukázat na některé významné matematiky, kteří přispěli k tomuto vývinu a přičinili se tak o dnes již matematicky korektní zavedení geometrie. Kapitoly byly strukturovány tak, aby čtenář mohl pozorovat, na která díla kterých matematiků Hilbert navázal a následně aplikoval ve svém systému.

Rozsáhlá a myšlenkově bohatá historie geometrie nabízí množství problémů a úloh, které dlouhá staletí vzbuzovaly mezi matematiky otázky, nejasnosti a dohady, čímž upozorňovaly na důležitost logicky správných postupů, opírajících se o pevný teoretický základ. Právě na tyto logické problémy poukazovala tato práce. Jedním z alternativních přístupů k výuce geometrie na středních školách by mohlo být nabídnutí těchto otázek studentům a vhodnými dotazy a doplňujícími úlohami je přivést k řešení. I v případě, že by student k řešení nedospěl, je možné nastolené problémy využít jako motivaci pro představení moderního axiomatického systému geometrie představovaného Davidem Hilbertem a jeho pěti skupinami axiomů. Otázkou je, zdali by se student raději držel euklidovského přístupu, postaveném z nemalé části na intuitivním myšlení, nebo by měl zájem zabývat se rozborem na první pohled triviálních úkolů a důkazy (intuitivně) zřejmě platných tvrzení.

V průběhu studování materiálů pro svou práci a jejich zpracování jsem měla možnost pochopit komplexnost této tematiky, a bylo proto místy náročné všechny dostupné informace zpracovat a dát jim takovou strukturu a obsah, které by dostatečně tuto problematiku uchopily a nabídly čtenáři aspoň částečnou představu o její podstatě a složitosti. Uvědomuji si, že kromě mnoha odpovědí a nových znalostí, které mi příprava této práce poskytla, toto bohaté téma nabízí mnoho dalších podnětů k dalšímu studiu, následnému zpracování a především k aplikaci tohoto přístupu v učitelské praxi.

4 Seznam použité literatury

Tištěné zdroje

Bečvářová, Martina. *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady.* Praha: Prometheus, 2002.

Cajori, Florian. (1909): *A History of Mathematics.* London: Macmillan & Co.,Ltd., 2010.

Dedekind, Richard. (1892): *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Přeložil Wooster Woodruff Beman: *Continuity of Irrational Numbers.* Chicago: Open Court Publishing Company, 1901.

Greenberg, Marvin J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry. Development and History.* New York: W.H. Freeman and Company, 2008.

Hadamard, Jacques. (1947): *Leçons de géométrie élémentaire.* Přeložil Mark Saul: *Lessons in Geometry.* Providence: American Mathematical Society, 2008.

Heath, Thomas L. (1908): *Euclid: The Thirteen Books of Elements.* New York: Dover Publications, 2013.

Hilbert, David. (1899): *Grundlagen der Geometrie.* Přeložil Edgar. J. Townsend: *The Foundations of Geometry.* La Salle: Open Court Publishing, 1950.

Kolman, Arnošt. *Dějiny matematiky starověku.* Praha: Československá akademie věd, 1968.

Koman Milan, Kuřina František, Tichá Marie. „Some problems concerning teaching geometry to pupils aged 10 to 14.“ *Studies in Mathematics Education,* editor: Robert Morris. Vendôme: Unesco, 1986. s. 81-97.

Kuřina, František. „Hilbert nebo Hadamard?“ *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*: ročník 2012, s. 239-253.

Kuřina, František. „Některé otázky vyučování geometrii pro 12-15leté žáky.“ *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, ročník 1975: 161-164.

Kuřina, František. „Transformační pojetí školské geometrie a konstrukční přístupy k vyučování matematice.“ *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, ročník 1999: 75-83.

Proclus. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Přeložil Glenn R. Morrow. New Jersey: Princeton University Press, 1970.

Servít, František. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Praha: Albert Malíř, 1907.

Shirokov, Pyotr Alekseevich. (1943): *Kratkiĭ ocherk osnov geometrii Lobachevskogo.* Přeložil Leo F. Boron: *A Sketch of the Fundamentals of Lobachevskian Geometry.* Groningen: P.Noordhoff Ltd., 1964.

Sibley, Thomas Q. *Thinking Geometrically. A Survey of Geometries.* Washington, D.C.: MAA Press, 2015.

Šír, Zbyněk. *Řecké matematické texty. Řecko-česky.* Přeložili Richard Mašek a Adam Šmíd. Praha: OIKOYMENH, 2011.

Vopěnka, Petr. *Eukleides: Základy.* Nymburk: OPS, 2008.

Elektronické zdroje

Corry, Leo. *The origins of Hilbert's Axiomatic Method.* (2006). [online]. Citováno 4.4.2016.
Dostupné z:http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Hilbert%20Kluwer.pdf

Fraser, Craig G. *Mathematics in the 17th and 18th Centuries.* [online]. Citováno 12. 1. 2016.
Dostupné z: http://www.britannica.com/topic/mathematics/Mathematics-in-the-17th-and-18th-centuries#ref536369

Gray, Jeremy J. *Mathematics in the 19th and 20th Centuries.* [online]. Citováno 12. 1. 2016. Dostupné z: http://www.britannica.com/topic/mathematics/Mathematics-in-the-19th-and-20th-centuries

Gray, Jeremy J. Esplen, Matthew F. Brennan, David A. (2012): *Geometry. Second Edition.* Cambridge. [online]. Citováno 10. 1. 2016.
Dostupné z: https://www.safaribooksonline.com/library/view/geometry-second-edition /9781107487185/

Lávička, Miroslav. *Syntetická geometrie.* [online]. Plzeň, 2007. Citováno 3. 1. 2016.
Dostupné z http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/SG/texty/sg_text.pdf