Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lucia Miháliková

Neeuklidovská geometrie pro střední školy

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	PhDr. Petr Dvořák, Ph.D.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Jednooborové studium - Matematika

Praha 2014

Děkuji především svému vedoucímu PhDr. Petru Dvořákovi, Ph.D. za velmi cenné rady, nápady a připomínky při vedení bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat rodině a blízkým přátelům za podporu během studia a tvorbu potřebného zázemí. Můj dík patří rovněž kolegům za pomoc a podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením PhDr. Petra Dvořáka, Ph.D. a s použitím odborné literatury a dalších pramenů uvedených v seznamu použité literatury, pramenů a informačních zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 4. 4. 2014 Lucia Miháliková

Název práce: Neeuklidovská geometrie pro střední školy

Autor: Lucia Miháliková

Vedoucí bakalářské práce: PhDr. Petr Dvořák, Ph.D.

Abstrakt: Cílem práce je vhodné zpracování tématu neeuklidovské geometrie pro střední školy. V práci je obsažen historický úvod, který popisuje cestu k objevu neeuklidovské geometrie. Úvod je zaměřen na neúspěšné důkazy pátého Euklidova postulátu, jakož i chybám, kterých se v nich matematici dopouštěli. Práce pokračuje seznamem vět, které jsou ekvivalentní s pátým postulátem a soustřeďuje se na různé způsoby rozdělení geometrie v literatuře, a upřesněním místa neeuklidovské geometrie v těchto rozděleních. Práce také demonstruje využití neeuklidovské geometrie v každodenním životě. Důležitou částí je zavádění prvotní představy o neeuklidovské geometrii za pomocí trojrozměrných modelů této geometrie. Práce má též přiblížit čtenáři jakými způsoby můžeme ke geometrii přistupovat, a jaké jsou jejich výhody a nevýhody. Poslední část je věnovaná praktické práci s neeuklidovskou geometrií. Pro tento účel byl vybrán vhodný matematický model této geometrie, ve kterém se dá snadno pracovat i za pomoci matematických softwarů často využívaných při výuce na středních školách.

Klíčová slova: neeklidovská geometrie, Lobačevského geometrie, euklidovská geometrie, 5. Euklidův axiom, Beltrami-Kleinův model

Title: Non-Euclidean geometry for secondary schools

Author: Lucia Miháliková

Supervisor: PhDr. Petr Dvořák, Ph.D.

Abstract: The aim is appropriate elaboration of the subject non-Euclidean geometry to high school. The work includes historical introduction that describes the path to the discovery of non-Euclidean geometry. Introduction is focused on failed proof attempts of the fifth Euclidean postulate, as well as errors in them which mathematicians committed. Work continues with list of sentences that are equivalent to the fifth postulate and focuses on different ways of partitioning the geometry in the literature, and clarifying the place of non-Euclidean geometry in these distributions. The work also demonstrates the use of non-Euclidean geometry in everyday life. The important part is the introduction of the primary notion of non-Euclidean geometry using three-dimensional models of this geometry. Aim of thesis is to show the reader which ways we can use to approach geometry, what are the advantages and disadvantages of these methods. The last section is devoted to practical work with non-Euclidean geometry. For this purpose, appropriate mathematical model of this geometry was chosen, easy to operate even with the help of mathematical software often used for teaching in high school.

Keywords: Non-Euclidean geometry, geometry of Lobachevsky, Euclidean geometry, 5. axiom of Euclid, Beltrami–Klein model

Obsah

Úvod

Neeuklidovská geometrie mě zaujala na jedné z přednášek na fakultě, kde byla zařazena jako rozšiřující učivo. Protože ji zatím nebyl věnován žádný semestrální předmět, začala jsem si informace o ní hledat sama. Mé samostudium neeuklidovské geometrie nebylo snadné a z počátku bylo dosti problematické se orientovat v nalezené literatuře, neboť každý z autorů přistupoval k vysvětlování teorie jinak[1].

Téma mé práce, Neeuklidovská geometrie pro střední školy, jsem si vybrala na základě mého názoru, že by se s neeuklidovskou geometrií mohli seznámit už studenti středních škol, kteří projevili o matematiku hlubší zájem. Z vlastních zkušeností vím, že hledání vhodných informací o neeuklidovské geometrii pro člověka, který o této geometrii ještě nic neví, není snadné.

Ráda bych ve své práci podala základní představu a informace o neeuklidovské geometrii způsobem, který by byl vhodný pro rozšiřující výuku matematiky na střední škole nebo do zájmových kroužků zaměřených na matematiku a pro její hlubší porozumění. Základním cílem mé práce je seznámit se s teorií neeuklidovské geometrie, a vybrat části teorie, které jsou přiměřené vědomostem studentů na středních školách, a vytvořit text, na základě kterého by student získal základní informace o neeuklidovské geometrii, které může v případě zájmu dále rozvíjet za pomocí odborné literatury. Část mé práce bude věnována historii, ve které chci ukázat propojení euklidovské a neeuklidovské geometrie, stejně jako zajímavým skutečnostem, které tato historie přináší. V další části bych ráda ukázala využití neeuklidovské geometrie spolu se způsoby, kterými můžeme tuto geometrii zkoumat, a objasnila bych její místo z pohledu obecné geometrie. V poslední části bych ráda pracovala s praktickou geometrií a načrtla čtenáři, jak se pracuje v neeuklidovské geometrii za pomocí modelu.

[1] V knize [15] je to analytický přístup. v knize [23] je to axiomatický přístup, v knize [12] je budována geometrie za pomoci modelu.

1 Historie neeuklidovské geometrie

1.1 Začátky geometrie

Planimetrie[2], se kterou se běžně setkáváme už na prvním stupni základních škol, je známá od babylonských časů. Jde o geometrii, která vznikla z potřeb každodenního života, např. výroby nástrojů, stavby obydlí nebo práce na poli [19, s. 7]. Je velmi intuitivní a bez větších problémů se s ní dalo pracovat. Až starověcí Řekové v Alexandrii se nespokojili s konstatováním faktů jenom na základě pozorování a zkušeností, ale začali geometrii logicky odvozovat a vytvářet v ní systém. V literatuře [19, s. 8] lze najít informace, že Thalés z Milétu jako první naznačil, že tvrzení je možné odvozovat z jiných, a Pythagoras ze Samu zavedl do matematiky důkaz. V tomto období vzniká teoretická matematika. Tento přístup však vyžadoval přesné definice pojmů, o které se při odvozování a dokazování dalších skutečností dalo opřít.

V 6. století př. n. l. matematici začali shromažďovat vědomosti o matematických jevech a vytvořili tak podklady ke vzniku díla *Základy*[3], které kolem roku 300 př. n. l. napsal Eukleides [17, s. 24]. Eukleides se jako první pokusil důkladně sepsat základní pravidla a pojmy, které sjednocovaly tisíce let starou matematiku. Praktické poznatky z oblasti geometrie byly v *Základech* poskládány do systému abstraktních pojmů, které se dále rozvíjely na základě logických souvislostí, a ne jenom na základě pozorování.

Italský autor Lucio Russo se domnívá [22, s. 66], že geometrické poznatky *Základů* měly sloužit jako návod k počítání jakýchkoliv výpočtů. Podle jeho knihy dělali Řekové výpočty tak, že si je nejprve převedli na geometrický úkol, který pomocí pravítka a kružítka narýsovali, a vzniklou konstrukci nakonec odměřili. Je toho názoru, že *Základy* sloužily jenom jako manuál k výpočtům, který ukazoval, jak a k čemu se dají použít.

Jako autor *Základů* je v současnosti uváděn Eukleides, i když ruku k dílu přiložilo vícero významných matematiků. Řecký filosof Eudemus byl přesvěd-

[2]Geometrie, která se zabývá geometrickými útvary v rovině.

[3]řecky Stoicheia

čen, že bez Pythagora by dílo nevzniklo. V literatuře lze najít jeho výrok [17, s. 11]:

> „Právě Pythagoras změnil geometrii tvorbou všeobecných principů a teorií rozvoje prostřednictvím čistě abstraktní argumentace".

Tato složitě napsaná věta nám neříká nic jiného než to, že Pythagoras se jako jeden z prvních při své práci snažil vytvářet geometrii, která nebyla vůbec vázaná na naši zkušenost. Právě tento přístup se později ukázal jako nejvýznamnější krok při budování teorie neeuklidovské geometrie.

1.2 Euklidovy Základy

Základy jsou tvořeny třinácti knihami, v kterých se Eukleides věnuje geometrii v rovině, teorii čísel a geometrii v prostoru. První kniha začíná dvacetitřemi definicemi (základní objekty, se kterými pracuje), pěti pravidly (běžné vztahy) a pěti axiomy[4] (předpoklady, které přijímáme bez důkazu jejich platnosti), ze kterých logicky odvozoval další tvrzení [22, s. 61].

Nejstarší úspěšný překlad *Základů* do českého jazyka (je možno najít také na internetu [24]) je z roku 1907 od Františka Servíta, který se stal po studiu na univerzitě profesorem klasických jazyků němčiny v Praze [1]. V současnosti je nejdostupnější překlad *Základů* z edice několika knih, které vycházely v letech 2008 až 2013[5].

Když Eukleides psal *Základy*, věděl, že každý detail musí pečlivě promyslet, aby vytvořil ucelený systém geometrie. Když se zamyslíte, jakým způsobem byste definovali například tečku (bod), kterou nakreslíte na papír? Všichni určitě intuitivně víme, co je bod nebo čára, ale vyslovit nějakou definici, která by matematicky vystihovala jejich význam, není snadné.

[4]V některé literatuře se uvádí 5 postulátů a 9 axiomů, kde postulát je chápán jako požadavek [15, s. 10]. V současné literatuře označují ve většině případů axiom a postulát totéž.

[5]Knihy jsou uvedeny v seznamu literatury [6],[7],[8],[9],[10].

Eukleides definoval tyto pojmy následovně[6] [15, s. 10]:

- bod je to, co nemá žádné části,
- čára je délka bez šířky,
- přímka je ta čára, která je stejně položena vzhledem ke všem svým bodům,
- plocha je to, co má délku a šířku.

Ostatní matematici téměř hned poukazovali na některé nepřesnosti v definicích a tvrzeních, které dílo obsahovalo [18, s. 92]. Co znamená „nemá žádné části“? Neexistuje definice, která by vysvětlovala, co znamená nemít žádné části. Eukleides ve svém díle dokonce často mlčky předpokládal, nebo se odvolával na jiná tvrzení, která nikde nedokazoval a nebyla zařazena ani do axiomů [22, s. 65].

Největší diskuse byly zaměřeny právě na pět axiomů (postulátů), které tvořily jakýsi základ pro dokazování všech ostatních tvrzení. Tyto postuláty znějí následovně [15, s. 11]:

Axiom 1. Dva body lze vždy spojit jedinou přímkou.

Axiom 2. Přímou čáru omezenou lze vždy prodloužit.

Axiom 3. Z libovolného středu a poloměru lze vždy sestrojit kružnici.

Axiom 4. Všechny pravé úhly jsou mezi sebou ekvivalentní.

Axiom 5. Protíná-li příčka dvě přímky a tvoří-li s nimi na téže straně dva vnitřní úhly o součtu menším, než dva pravé, tyto dvě přímky (v případě nutnosti prodlouženy) se protínají na téže straně příčky, kde je součet zmíněných vnitřních úhlů menší než dva pravé.

---

[6] V knize [6] jsou postuláty formulovány jiným způsobem, který se mi zdál méně srozumitelný.

Poslední axiom je mnohem složitější a náročnější na pochopení než zbylé čtyři. Nazývá se také axiom o rovnoběžkách[7], protože ve skutečnosti je ekvivalentní s tvrzením, že když v rovině máme přímku a bod, který na dané přímce neleží, existuje k této přímce právě jedna rovnoběžka procházející daným bodem.

Podle autora knihy Poincarého domněnka Eukleides určitě dlouho a těžce přemýšlel, než pátý axiom na seznam přidal a jistě s ním nemohl být spokojený [22, s. 72]. Mnoho řeckých matematiků si všimlo, že značný počet tvrzení, které Eukleides dokazuje, se vůbec neopírá o pátý axiom a dokazují se jenom z prvních čtyř. A tak vznikla otázka, na kterou velmi dlouho nikdo neznal odpověď. Skutečně musíme zařadit pátý axiom mezi základní axiomy, nebo se dá dokázat z prvních čtyř? [23, s. 16] Odpověď se ale v starověkém Řecku nenašla. Nenašli ji Arabové ve středověku a dokonce ani novodobí Angličané, Italové, Němci... Všichni byli tak hluboce přesvědčeni o dokazatelnosti axiomu ze zbylých čtyř, že se při hledání důkazu dopustili mnoha chyb. Právě pátý axiom a pokusy o jeho důkaz měly zásadní vliv na vznik neeuklidovské geometrie.

1.3 Pokusy dokázat 5. axiom

Poseidonios

Jeden z prvních významnějších pokusů o důkaz byl ten, který zveřejnili Poseidonios a Aganis ještě v období před Kristem. Domnívali se, že když rovnoběžky nebudou chápat jako Eukleides[8], ale definují si je vhodnějším způsobem, důkaz bude snadný. Aby jejich definice neměla negativní tvar, zněla takto [23, s. 147]:

- Rovnoběžky jsou přímky v rovině, které mají od sebe stále tutéž vzdálenost.

[7] např. v knize [23, s. 151]

[8] Dvě přímky, které se nikdy neprotnou.

Bohužel již staří Řekové upozorňovali na to, že definice nejsou shodné a nemusí vyjadřovat totéž. Dokonce Geminos uvádí jako příklad hyperbolu a její asymptotu[9] [23, s. 147]. Tyto křivky jsou rovnoběžky podle definice Eukleida, ale nikoliv podle definice Poseidonia. Obdivuhodné znalosti geometrie již v tomto období (1. století př. n. l.) rychle odhalily chybu, které se oba matematici dopustili.

Proklos

Další významný pokus o důkaz učinil Proklos (5 století n.l.), který byl také hluboce přesvědčen, že pátý axiom je dokazatelný ze zbylých čtyř. Podařilo se mu sestrojit důkaz na základě pomocné věty, která zněla [23, s. 147]:

- Přímka, která protíná jednu ze dvou neprotínajících se přímek, protíná i druhou přímku.

Aby se mohlo říci, že důkaz skutečně platí, musel Proklos dokázat i svou pomocnou větu a tady udělal chybu. Při dokazování předpokládal, že každý bod jedné ze dvou neprotínajících se přímek má od té druhé konečnou vzdálenost [23, s. 148]. Jak se později ukázalo, toto tvrzení je ekvivalentní s euklidovým postulátem. Proklos udělal tzv. důkaz kruhem[10]. na nesprávnost důkazu kruhem poukazoval už Aristoteles, který říkal:

> „Pokud A plyne z B, B plyne z C a C plyne z A, nemůžeme říci, že pravdivost A plyne z C.“ [22, s. 73]

Nasir-Eddin

Fenomén pátého axiomu se dostal v 13. století i na Arabský poloostrov. Arabové byli velmi dobří matematici. Autorem nejzajímavějšího důkazu této doby byl Ázerbájdžánec Nasir-Eddin (1201–1274), jehož arabský překlad Eukleida byl vydán až roku 1594 [23, s. 148]. Jako první spojil pátý axiom s vědomostmi o součtu úhlů v trojúhelníku. Opírá se o tvrzení [23, s. 148]:

[9] Přímka, která se přibližuje k hyperbole, ale nikdy ji neprotne.

[10] Chybný postup důkazu, při němž se předem předpokládá to, co se chce dokazovat.

- Nechť jsou p a q takové přímky, že z bodu C, který leží na p, je spuštěná kolmice CD na přímku q, a CD tvoří s přímkou p nerovné vedlejší úhly $|\sphericalangle ECD| < |\sphericalangle ACD|$. Pak úsek kolmice spuštěné z bodu X přímky p na přímku q je kratší než CD, je-li X jakýkoliv bod na p na straně ostrého úhlu (na polopřímce CE), a větší, je-li X na p na straně tupého úhlu.

Nasir-Eddin sepsal promyšlený důkaz a každé své tvrzení skutečně dokázal. Bohužel jeden z jeho předpokladů, o který se opíral hned na začátku důkazu, byl ekvivalentní[11] s Euklidovým axiomem o rovnoběžkách [23, s. 150]. I když se mu důkaz nepovedlo sestrojit, udělal veliký krok dopředu ve zkoumání problému pátého axiomu.

Giordani Vitale

Důkaz se stal nepřekonatelným oříškem pro mnoho matematiků i na počátku novověku[12]. Většina z nich bohužel nepřišla na žádnou novou myšlenku, která by posunula snahu dokázat pátý axiom o něco blíže k úspěšnému cíli. S malým pokrokem přišel až G. Vitale (1633–1711), který důkaz spojil se čtyřúhelníkem $ABCD$, který má shodné strany AD a BC a pravé úhly při bodech A a B. Jeho hlavní myšlenkou bylo dokázat, že existuje bod E, který patří úsečce CD a má od přímky AB vzdálenost, odpovídající délce úsečky BC [23, s. 150]. Vitale se ale také dopustil chyb, které provázejí pokusy o úspěšný důkaz již několik set let. Tiše předpokládal tvrzení, jež bylo ekvivalentní s euklidovým axiomem.

Girolamo Saccherri

Nový pohled na věc přinesl až jezuita Girolamo Saccherri (1667–1733). Zkoumal veliký počet axiomů, které jsou ekvivalentní s euklidovým. Například úspěšně dokázal ekvivalenci pátého axiomu s větou [22, s. 74]:

- Součet všech úhlů v trojúhelníku je 180 stupňů.

[11] Má stejný význam, je rovnocenný.

[12] Za počátek novověku se považuje rok 1492, kdy Kryštof Kolumbus objevil Ameriku.

Ve svém díle [23, s. 151] *Euclid ad omni naevo vindicatus* (Eucleides vší poskvrny zbavený) se věnoval analýze dosavadních důkazů pátého axiomu a jako první se pokusil axiom dokázat sporem[13]. Hlavní myšlenka jeho důkazu spočívá v předpokladu, že součet všech úhlů v trojúhelníku je menší, nebo větší než 180 stupňů [22, s. 74]. Sacherri byl přesvědčený, že důkaz se mu povedlo sestrojit a skutečně přišel ke sporu[14]. I když tento důkaz byl skutečným skvostem, ani on se nevyhnul malé chybičce při dokazování. Problém nastal s chápáním výrazu „nekonečně vzdáleného bodu" [23, s. 160]. Sacherri s ním totiž pracoval jako s obyčejným bodem v konečnu, a to přineslo několik odlišností v chápání vlastností objektů při dokazování.

Louis Bertrand

Nekonečno při dokazování použil i Švýcar L. Bertrand, a také to nedopadlo úspěšně. Ve svém důkazu pracoval s pokrytím roviny. Hlavní myšlenka [23, s. 162] ukazovala, že není možné pokrýt celou (nekonečnou) rovinu konečným počtem útvarů tak, aby při jejich jiném rozložení tyto útvary danou rovinu už pokrýt nestačily. Bertrand si neuvědomil, že vlastnosti pokrytí omezené části roviny nemusí platit (a ani neplatí) při pokrývání celé roviny.

Johann Heinrich Lambert

V roce 1763 student univerzity v Göttingenu G. S. Klügel jako první připustil ve své disertační práci[15], ve které zkoumal důkazy pátého axiomu, že pohled na axiom je možná nesprávný [23, s. 164]. Jeho závěr zněl:

> „Skutečně by se mohlo stát, že by se dvě přímky, které se neprotínají, rozešly. Tuto možnost máme za absurdní, ale nikoliv kvůli přísně racionálním úvahám nebo jasným konceptům, nýbrž díky naší zkušenosti a soudu našich očí." [22, s. 75].

[13] Důkaz, při kterém se dokazuje neplatnost negace původního tvrzení, které chceme dokázat.

[14] celý důkaz v knížce [23, s. 152]

[15] Závěrečná práce studentů třetího stupně vysokoškolského studia, tedy studia doktorského.

Tato práce inspirovala švýcarského matematika J. H. Lamberta, který měl pověst prazvláštního člověka, o nemž Leonard Euler dokonce prohlásil, že je největší trouba v celém Prusku [22, s. 75]. Lambert skoro dokázal, že axiom o rovnoběžkách je ekvivalentní s tvrzením:

- Čtyřúhelník, který má tři úhly pravé, má pravý i poslední, čtvrtý úhel.

Tuto větu chtěl dokázat sporem. Vytvořil si tři hypotézy (čtvrtý úhel může být tupý, ostrý nebo pravý), které nezávisle na sobě dokazoval [23, s. 165]. Jeho důkazy jsou skutečně rozsáhlé a podrobněji zpracované, než byly ty Sacheriho. Lambert však použil následující předpoklad, který byl ekvivalentní s pátým axiomem [23, s. 170]:

- Každými třemi nekolineárními[16] body lze vést kružnici.

I když nedokázal pátý axiom, jeho práce si zaslouží veliký obdiv. Bohužel, spisy Lamberta, jakož i jeho předchůdců, upadly do zapomnění až do doby objevení neeuklidovské geometrie.

Adrien-Marie Légendre

V době Francouzské revoluce (1789–1799) A. M. Légendre vydává knihu *Eléments de géometrie* (Základy geometrie), která se má využívat hlavně ve školách [23, s. 170]. Myslel si, že našel důkaz Euklidova axiomu, ale ve skutečnosti se mu to nepodařilo. Známé jsou dvě jeho věty [23, s. 171]:

Légendrova věta 1. *V trojúhelníku je součet úhlů menší nebo roven dvěma pravým.*

Légendrova věta 2. *Je-li v jednom trojúhelníku součet úhlů menší resp. roven 180 stupňů, pak je tomuto tak v každém trojúhelníku.*

Důkazy těchto vět jsou v knize B. V. Kutuzova [18, s. 15]. Obě dokázal už Saccheri, proto se často označují jako věty Légendrovy-Saccheriovy[17]. Chtěl

[16] Body, které neleží v jedné přímce.

[17] V knize [18].

dokázat, že součet úhlů v trojúhelníku musí být 180 stupňů, protože věděl, že toto tvrzení je ekvivalentní s pátým axiomem [23, s. 171]. Nejprve dokazuje toto tvrzení analyticky, kde předpokládá, že na volbě jednotky nezáleží, což znamená, že existují podobné útvary [23, s. 172]. Tento předpoklad je ale ekvivalentní s Euklidovým axiomem. Naštěstí usoudil, že tento důkaz je příliš složitý pro jeho knihu a ve škole by nenašel pochopení [23, s. 170]. Pokusil se tedy o důkaz geometrický. V něm ale opět použil tvrzení ekvivalentní s pátým axiomem:

- Každým bodem uvnitř úhlu lze vést přímku, jež protíná obě jeho ramena.

Légendre se pokusil ještě o důkaz několikrát, každý pokus však skončil neúspěchem, i když samotný Légendre byl přesvědčen o své pravdě až do své smrti [22, s. 77].

1.4 Objev neeuklidovské geometrie

Konečně se blížíme k neeuklidovské geometrii, jejíž objev je samozřejmě úzce spojen s geometrií euklidovskou, konkrétně s dokazováním pátého axiomu. Právě dokazování sporem, při kterém se předpokládá, že pátý axiom neplatí, odhalilo existenci jiných geometrií.

V době kdy matematici ještě nepracovali s neeuklidovskou geometrií, výraz euklidovská geometrie neměl vůbec opodstatnění, protože jiná geometrie neexistovala. na začátku 19. století si stále více a více matematiků pohrávalo s myšlenkou, že pátý axiom se možná dokázat nedá a že existuje geometrie, ve které neplatí. I když na tyto závěry měli právo, věděli, že by nebyli pochopeni veřejností. A tak se stalo, že cestu k neeuklidovské geometrii našli nezávisle na sobě tři matematici, kterým se ale uznání za tenhle veliký objev dostalo až po smrti. Některé informace říkají, že se objevitelé mohli navzájem ovlivnit, ale dnes jsou podle autora O'Shea tyto dohady zcela vyvráceny [22, s. 88]. Podle mě je toto tvrzení poněkud odvážné vzhledem k tomu, že existují důkazy o korespondenční komunikaci a také různé skutečnosti, které nasvědčují, že se mohli navzájem nepřímo ovlivnit.

Johann Friedrich Gauss (1777–1855), Nikolaj Ivanovič Lobačevsky (1792–1856) a János Bolyai (1802–1860) jako první vyřešili záhadu kolem axiomu o rovnoběžkách. Za objevitele neeuklidovské geometrie je považován Lobačevsky, protože zveřejnil své myšlenky jako první už v roce 1826 a v roce 1829 publikoval svou teorii neeuklidovské geometrie [22, s. 86]. V současnosti se už ví, že Gauss rozvíjel své myšlenky dávno před Lobačevskym, ale jenom v korespondenci se svými přáteli [23, s. 195]. Jeho závěry byly tak revoluční, že si je raději nechal pro sebe a neriskoval nepochopení ostatních matematiků. Když Farkas Bolyai poslal práci svého syna Jánose v roce 1831 Gaussovi, Gauss mu odpověděl, že už před mnoha lety přišel ke stejným závěrům jako János:

> „Chválit tvého syna by znamenalo chválit sám sebe.“ [16].

János ale nechtěl uvěřit, že Gauss nezávisle na něm dospěl k neeuklidovské geometrii, dokonce obvinil svého otce, že sdělil předčasně Gaussovi jeho myšlenky [22, s. 85]. Byl názoru, že Gauss by nový objev považoval za tak důležitý, že by se objevil v tisku, nebo by se o něm alespoň někde zmínil. Dokonce když se mu do rukou později dostal Lobačevského spis o neeuklidovské geometrii, byl přesvědčen, že mu myšlenky byly ukradeny [23, s. 203].

1.4.1 Carl Friedrich Gauss

Německý matematik, který to v dětství neměl lehké. Jeho otec byl dělník a jeho matka služebná. Měl ale štěstí, že si ho všiml ve škole asistent učitele Martin Bartels, který se mu dostatečně věnoval a zařídil mu místo na gymnáziu [22, s. 78]. Později se mu podařilo získat finanční příspěvek na vzdělání (obdoba dnešního stipendia) a dostal se na univerzitu v Göttingenu [23, s. 188]. Gauss byl po dokončení školy hvězdářem. Slavným se stal, když roku 1801 vypočítal souřadnice asteroidu, který za krátký čas po objevení zmizel [22, s. 79]. Vědělo se, že dřív nebo později by se měl objevit, ale nikdo nevěděl kdy a kde. Gauss na výpočet použil svůj vlastní algoritmus[18], který jak se ukázalo, byl

[18] Přesný návod či postup, kterým lze vyřešit daný problém.

správný. Pracoval i na velikém projektu, zabývajícím se zmapováním Hannoveru, který byl poměrně zalesněný, a proto byla některá měře téměř nemožná. Při tomhle projektu se začal naplno věnovat geometrii a geometrickým představám zakřivení zeměkoule [22, s. 80]. Prohloubil si své znalosti z geometrie na zakřivených plochách a dospěl k názoru, že zakřivení plochy zásadně mění vlastnosti geometrie. Začal se do větší hloubky zabývat geometrií, již byla jiná než ta, kterou všichni znali.

1.4.2 Farkas a János Bolyai

Farkas Bolyai, otec Jánose Bolyai, byl maďarský matematik, o kterém se říká, že jím začínají dějiny matematické činnosti v Maďarsku [6]. Také studoval na univerzitě v Göttingenu, kde se seznámil s mladým Gaussem. Oba se zajímali o Euklidův pátý axiom, a tento zájem podporoval i jejich profesor G. S. Klügel [23, s. 189], který vyslovil pochybnosti o tom, že se dá dokázat. Dokazování se stalo jejich životným cílem a věnovali mu enormní množství svého času. Farkas Bolyai ale tolik úspěchů jako Gauss nezažil. Po studiích se vrátil zpět do Maďarska (prý pěšky, protože byl bez peněz). Učil na gymnáziu, psal divadelní hry, provozoval hospodu, navrhoval dlaždice, kamna,...[22, s. 81]. Svůj volný čas ale nadále věnoval pátému axiomu. Dokázal ekvivalenci s tvrzením:

- Každými čtyřmi body neležícími v rovině je možné vést kulovou plochu (nebo každými třemi body neležícími v přímce lze vést kružnici).

Když se mu narodil syn, bylo mu jasné, že z něho chce mít matematika, a sám mu dával matematické vzdělání [22, s. 81]. Farkas měl málo peněz, aby mu zabezpečil to nejlepší vzdělání. Poprosil proto svého přítele Gausse o střechu nad hlavou pro Jánose, aby mohl studovat na univerzitě v Göttingenu. Odpovědi se ale nedočkali [23, s. 198]. János vystudoval nakonec obor vojenské techniky ve Vídni a byl jedenáct let v armádě [11]. Když v roce 1820 psal svému otci o pokusech dokázat axiom, Farkas ho prosil, aby toho zanechal [23, s. 199]. János se ale nenechal odradit a pokračoval ve svém zkoumání. Roku

1832 vychází Jánosův spis o jeho poznatcích jako dodatek ke knize Farkase Bolyai, který byl poslán Gaussovi. Gaussova povzbudivá odpověď, že přišel k stejným závěrům jako János, potěšila Farkase, nikoliv jeho syna [22, s. 86].

1.4.3 Nikolaj Ivanovič Lobačevsky

Snadné to neměl ani ruský matematik Lobačevsky. Jeho tec zemřel, když byl ještě dítě, a nezanechal rodině žádný majetek. Také se mu podařilo získat stipendium pro chudé a začal navštěvovat gymnázium [22, s. 81]. Po gymnáziu studoval na Kazaňské státní univerzitě, na které učil Martin Bartels, ten samý Martin Bartels, který pomohl Gaussovi na gymnázium. Právě on má velikou zásluhu na tom, že Lobačevsky zůstal matematice věrný a nešel studovat medicínu [22, s. 81]. Po dostudování se z Lobačevského stal vedoucí katedry matematiky a fyziky, později z něho byl dokonce rektor celé univerzity [23, s. 178].

I když měl práce zajisté dost, nikdy se nepřestal věnovat problému pátého axiomu [21]. Svůj veliký objev zveřejnil v práci *O načalech geometrií*, která vycházela v univerzitním časopisu. Snaží se vysvětlit trigonometrii neeuklidovské geometrie, objemy, obsahy a mnoho jiných věcí, které poznáme z euklidovské geometrie. Také se snaží poukázat na to, že „nová“ a „stará“ geometrie jsou v harmonii, nebo se zamýšlí, jak by fungovala mechanika v prostoru ovládaném neeuklidovskou geometrií [23, s. 182]. Jeho práce však byla terčem urážek a výsměchů. Akademik Ostrogradsky dokonce napsal:

> „Autor, jak se zdá, si postavil jako cíl psát tak, aby mu nebylo vůbec rozumět...“ [23, s. 184].

Lobačevsky byl ale hluboce přesvědčen, že jeho geometrie má smysl, a nepřestal ji dále rozvíjet. Kvůli nepochopení v rodném Rusku začal své spisy publikovat ve Francii a v Berlíně [22, s. 87]. Jak dnes už víme, minimálně jeden člověk je nejen četl, ale také jim porozuměl, Gauss.

Nejpozoruhodnější skutečnost na práci Lobačevského je, že vybudoval novou geometrii skutečně do hloubky jenom na základě svého abstraktního myšlení. Neměl k dispozici žádné modely, na kterých by si představoval situace. Jeho geometrie vznikla jenom na základě bezespornosti tvrzení, se kterými pracoval. Až E. Beltrami na konci 19. století ukázal, že geometrii, které se Lobačevsky věnoval, lze realizovat na některých zakřivených plochách [14, s. 95]. na základě jeho zjištění byly sestrojeny tzv. modely, na kterých je mnohem snadnější tuto geometrii zkoumat.

2 Věty ekvivalentní s 5. axiomem

Jak jsme se už přesvědčili při pohledu do historie, nemusí být ekvivalentnost dvou tvrzení na první pohled vidět. Zde je malý přehled vět, kterým můžeme vděčit za veliké množství falešných důkazů 5. axiomu, s ním jsou ekvivalentní.

Ekvivalence 1. *Daným bodem, který neleží na dané přímce, lze vést k této přímce jednu rovnoběžku.*

Ekvivalence 2. *Každý bod jedné ze dvou neprotínajících se přímek má od té druhé konečnou vzdálenost.*

Ekvivalence 3. *Součet všech úhlů v trojúhelníku je 180 stupňů.*

Důkaz lze najít v knize [18, s. 28] nebo v knize [23, s. 96].

Ekvivalence 4. *Čtyřúhelník, který má tři úhly pravé, má pravý i poslední čtvrtý úhel.*

Ekvivalence 5. *Každými třemi nekolineárními body lze vést kružnici.*

Důkaz lze najít v knize [23, s. 102].

Ekvivalence 6. *Každým bodem uvnitř úhlu lze vést přímku, jež protíná obě jeho ramena.*

Důkaz lze najít v knize [18, s. 36] nebo v knize [23, s. 100].

Ekvivalence 7. *Existují dva podobné, nikoli shodné trojúhelníky.*

Důkaz lze najít v knize [18, s. 37].

Ekvivalence 8. *Množina všech bodů, které mají od přímky danou vzdálenost je přímka* [18, s. 50].

Ekvivalence 9. *Součet úhlů v trojúhelníku je roven téže konstantě.*

Důkaz lze najít v knize [18, s. 31].

Ekvivalence 10. *Dvě přímky, které nemají společný bod, tvoří s libovolnou přímkou, která je obě protíná, dvojice sobě střídavých úhlů.*

Důkaz zle najít v knize [18, s. 41].

Ekvivalence 11. *Libovolnému trojúhelníku lze opsat kružnici.*

Důkaz lze najít v knize [23, s. 102].

Ekvivalence 12. *Strana pravidelného šestiúhelníka vepsaného do kružnice je rovna jejímu poloměru.*

Důkaz lze najít v knize [18, s. 42].

Ekvivalence 13. *Je-li součet vnitřních úhlů dvou přímek s příčkou po jedné její straně různý od 180 stupňů, potom se přímky protínají.*

Důkaz lze najít v knize [23, s. 94].

Ekvivalence 14. *Existuje čtyřúhelník, který má součet úhlů 360 stupňů.*

Důkaz lze najít v knize [23, s. 99].

Ekvivalence 15. *Existují trojúhelníky s libovolně velkými obsahy* [18, s. 85].

Ekvivalence 16. *Limitní čára kružnice, procházející bodem A a jejíž střed X se neomezeně vzdaluje od bodu A po polopřímce AS, je přímka.*

Důkaz lze najít v knize [23, s. 131].

3 Rozdělení geometrie

Pro většinu lidí existuje geometrie jenom jedna, ta, kterou se naučili ve škole. Tato geometrie je euklidovská, protože splňuje 5 Euklidových axiomů. Označuje se jako geometrie kružítka a pravítka, protože si s nimi vystačíme při všech konstrukcích, které chceme na papír udělat. Existují ale geometrie, ve kterých neplatí všech 5 axiomů, ale jenom některé z nich.

Poté co Lobačevsky objevil novou geometrii, ve které neplatí 5. axiom rovnoběžnosti, se začala tato geometrie označovat jako neeuklidovská. Toto značení může být trošku zmatečné, protože dnes už víme, že geometrie, kterou objevil Lobačevsky, není jediná, která nesplňuje 5 Euklidových axiomů. Tento fakt vytváří problém s chápáním pojmu neeuklidovské geometrie. V tomto směru není jednotná ani literatura, která se zabývá touto geometrií. Většinou se pod pojmem neeuklidovská geometrie chápe jenom geometrie, ve které je nahrazen Euklidův 5. axiom jiným[19].

Jenomže existuje také geometrie, která se zabývá jenom prvními čtyřmi axiomy a s rovnoběžností vůbec nepracuje (tzv. absolutní geometrie) [14, s. 95]. S touto geometrií pracovali i mnozí matematici, kteří dokazovali věty bez 5. axiomu.

na základě předchozích úvah by se dala geometrie rozdělit na tři základní podskupiny:

- absolutní geometrie,
- euklidovská geometrie,
- neeuklidovská geometrie.

Toto rozdělení lze chápat způsobem, že absolutní geometrie je jakýsi základ, a podle toho, jaký axiom k ní ještě připojíme, nám vzniknou geometrie euklidovská nebo neeuklidovská.

Do neeuklidovské geometrie bychom měli zařadit vše, co splňuje axiomy absolutní geometrie a negaci 5. axiomu Euklida.

[19]Například v knize [14].

Jestli úspěšně znegujeme větu s 5. axiomem ekvivalentní, která říká, že rovnoběžka s danou přímkou vedená daným bodem je jenom jedna, dostaneme:

- K přímce v rovině neexistuje žádná rovnoběžka, nebo existují alespoň dvě, které prochází daným bodem.

Tuto negaci ale můžeme ještě rozdělit na dva případy. Dostaneme dva různé axiomy, kterými můžeme nahradit původní 5. axiom. Tímto způsobem můžeme vytvořit dva rozdílné typy neeuklidovské geometrie. V jedné geometrii použijeme pátý axiom, který nám povoluje mít nekonečně mnoho rovnoběžek. V druhé naopak použijeme axiom, který nám říká, že rovnoběžky neexistují.

Problém nastane v případě, že chceme do našeho rozdělení zařadit ještě jiné druhy geometrií. V textech, které se věnují geometrii obecněji, můžeme pod označením neeuklidovská geometrie najít všechny geometrie, ve kterých neplatí alespoň jeden Euklidův axiom (nemusí se jednat právě o 5. axiom)[20]. Když se budeme držet tohoto kritéria, rozdělení se nám trochu změní, protože absolutní geometrie také nesplňuje všechny euklidovy axiomy, takže ji budeme považovat za neeuklidovskou.

Samozřejmě nemusíme pracovat jen s axiomem rovnoběžnosti. Můžeme také nahradit nebo dokonce úplně vynechat kterýkoliv z 5 axiomů Eukleida. Například když si vezmeme první, druhý a pátý axiom Eukleida, tak sestrojíme svět afinní geometrie [2], ve které můžeme dělat stejné konstrukce jako ve školní geometrii, ale budou nezávislé na délkách stran nebo na úhlech. V této geometrii můžeme zkoumat například vzájemnou polohu těles, ale nemůžeme nic odměřit. Existuje také projektivní geometrie, která nepoužívá úhly ani vzdálenosti, ale ani rovnoběžnost [4]. Libovolné přímky se v ní vždy protnou.

Z toho vyplývá, že geometrií, které nejsou euklidovské (ve smyslu, že v nich neplatí všech 5 axiomů) je mnohem víc, než připouští první rozdělení, ve kterém je neeuklidovská geometrie jenom ta, která má nahrazený 5. Euklidův axiom. Z těchto poznatků se dá také vytušit, že naše euklidovská geometrie, ve které žijeme a považujeme ji často za jedinou, je ve skutečnosti jenom jedna z mnoha geometrií, které existují.

[20] Například v knize [15]

4 Využití neeuklidovské geometrie

Na první pohled se může zdát, že neeuklidovská geometrie je uměle sestrojená, aby vyřešila teoretické problémy, které existovaly v matematice. Ve skutečnosti je ale všude kolem nás a v současnosti má nezastupitelný význam v naší společnosti. Používá se v navigaci (GPS), geodezii, kartografii[21], astrofyzice nebo v astronomii[22]. Právě v astronomii využil C. F. Gauss své znalosti neeuklidovské geometrie, o které se s nikým za svého života nepodělil. Dokázal za pomoci pochopení geometrie nebeských těles předpokládat jejich přesnou trajektorii, což mu přineslo nevídanou slávu a uznání v tomto oboru [22, s. 80]. Ve zmíněných vědách totiž musí člověk počítat s jistým zakřivením naší Země, které v euklidovské geometrii neexistuje.

Zakřivení hraje důležitou roli také v navigaci. Kdybychom ignorovali zakřivení naší planety při navigaci lodi, nebo auta, vyšla by nám neakceptovatelná odchylka měření od skutečnosti. Také by bylo obtížné cestovat letadlem, které při velikých vzdálenostech musí přizpůsobit svůj letový plán jevům, jež způsobuje zakřivení Země. V literatuře [22, s. 107] se uvádí příklad s letadlem. Kdybychom cestovali z Pekingu do Philadelphie po rovnoběžce (obě leží na stejné rovnoběžce), bylo by to 10 130 mil (asi 16 303 km). Letadlo, které letí z jednoho města do druhého, proletí jenom asi 6878 mil (asi 11 069 km). Reálně trasu letadel ovlivňuje daleko víc faktorů, ale nezanedbatelná je taky skutečnost, že zeměpisné rovnoběžky nejsou nejkratší vzdálenost mezi body na kouli.

Objev neeuklidovské geometrie položil také základy pro obecnou teorii relativity, na ní pracoval Einstein. Tato teorie vyžadovala jiný typ geometrie, než byla „obyčejná“ euklidova geometrie. Einsteinova teorie relativity potřebuje právě neeuklidovskou geometrii, která vysvětluje chování těles v zakřiveném časoprostoru. Teorie říká, že veliká tělesa (např. planety) vlastní hmotností zakřivují časoprostor [5, s. 111]. Toto zakřivení se projevuje jako gravitace, kterou se vzájemně tělesa přitahují.

[21] Věda, která se zabývá tvorbou map.

[22] Věda, která zkoumá vesmírná tělesa.

5 Základní představa neeuklidovské geometrie

Nevýhoda neeuklidovských geometrií spočívá v tom, že nejsou na první pohled dostatečně názorné, aby si je člověk lehce představil a pochopil. Euklidovská geometrie je pro nás názornější, protože je všude kolem nás. Nejen naše fungování v běžném životě, ale také naše představy o geometrii, vycházejí z axiomů Euklida. Prostor, ve kterém funguje euklidovská geometrie, nemá žádné zakřivení, takže si můžeme situaci, do které chceme nahlédnout, snadno zobrazit na papíru.

Právě tohle je důvod, proč objev neeuklidovské geometrie nebyl vůbec snadný. Je těžké odpoutat se od našeho papíru a představit si „svět“, ve kterém geometrie funguje jinak, než jsme zvyklí ze školy. Proto je problematické do neeuklidovských geometrií nahlédnout a pokusit se zjistit, jak fungují. Matematici si dlouho ani neuvědomovali, že jiné geometrie jsou vůbec možné. Následující text podává základní představu o existenci jiných geometrií, než je ta euklidovská. Pro tento účel jsou vhodné 3D modely, které mohou lépe pomoci vidět fungování dané geometrie v prostoru.

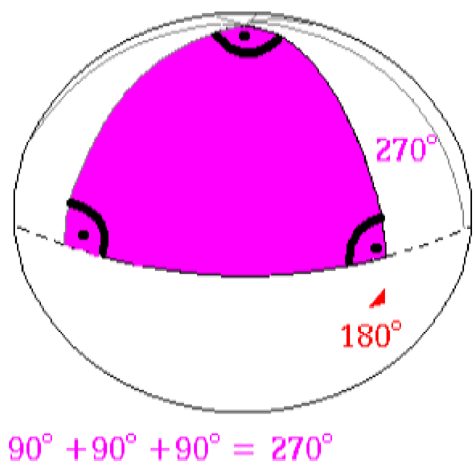
5.1 3-rozměrný model sférické geometrie

Jeden z příkladů neeuklidovských geometrií je eliptická geometrie [15, s. 46]. Této geometrii se věnoval německý matematik Georg Friedrich Bernhard Riemann. Abychom mohli pochopit, jak funguje, přeneseme se na povrch koule. Geometrie, se kterou budeme pracovat, se nazývá sférická a je speciálním případem eliptické geometrie [14, s. 99]. Právě sférická geometrie je jedna z nejpřijatelnějších pro naše smýšlení. Práci s geometrií na kouli si umíme docela dobře představit a jsme schopni rozlišit základní rozdíly s euklidovskou geometrií.

Největší rozdíl, jeho si můžeme všimnout při tomto přechodu je zakřivení povrchu, které nám přináší jiné vlastnosti útvarů, než na jaké jsme zvyklí. V našem novém světě si musíme zadefinovat, co si budeme představovat pod jednotlivými pojmy.

Ze školy jsme všichni zvyklí chápat pojem přímka jako nejkratší spojnici dvou bodů v rovině. Proto na sféře budeme pod slovem přímka, chápat jenom křivky, které vznikly jako kružnice se středem ve středu koule. Pro usnadnění pojmů, můžeme za povrch koule považovat povrch naší planety. Přímkami by tedy byly poledníky a rovník. na základě této definice přímky je zřejmé, že každé dvě přímky se protínají, a to dokonce ve dvou bodech . Proto body, které jsou souměrně sdružené podle středu koule, budeme považovat za totožné [14, s. 99].

Jak je to v tomto případě s euklidovým 5. axiomem? Už z toho, jakým způsobem jsme si zadefinovali přímky na naší kouli, je jasné, že každé dvě přímky musí mít společný bod. To znamená, že 5. axiom neplatí. Ve sférické geometrii tudíž neexistuje žádná dvojice přímek, která by byla euklidovsky rovnoběžná. Abychom zjistili, jak je to s platností 5. axiomu, tak prozkoumáme větu, která je s ním ekvivalentní. Pokusíme se zjistit, jaký je součet úhlů v trojúhelníku, který na povrchu koule sestrojíme. Za vrcholy trojúhelníku můžeme považovat například severní pól a dva průsečíky poledníků s rovníkem [22, s. 109]. Jestliže si vezmeme poledníky 0 a 90 stupňů, získáme trojúhelník, který má všechny úhly pravé. Strany našeho trojúhelníka jsou ve skutečnosti oblouky tří kružnic, jejich roviny jsou na sebe euklidovsky kolmé. Součet vnitřních úhlů v tomto trojúhelníku je 270 stupňů (viz. obr. 1/str. 21), a tudíž neplatí věta ekvivalentní s 5. axiomem, že součet úhlů v trojúhelníku je 180 stupňů.



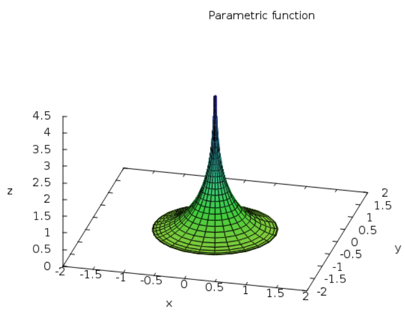
Obrázek 1: Sférický trojúhelník [26]

Máme první představu o geometrii, níž je jiná než ta, ve které běžně přemýšlíme. Ve sférické geometrii je Euklidův 5. axiom nahrazen axiomem, který tvrdí, že k přímce neexistuje žádná rovnoběžka [22, s. 110].

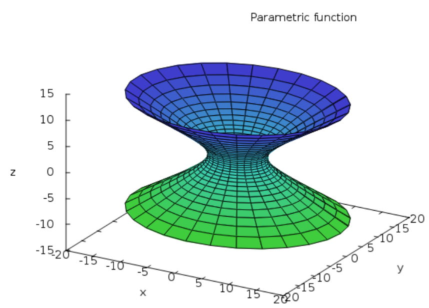
5.2 3-rozměrný model hyperbolické geometrie

Další neeuklidovská geometrie je hyperbolická geometrie [15, s. 46]. Později, po smrti Lobačevského, se ukázalo, že právě s touto geometrií pracoval Lobačevsky, a proto se často nazývá Lobačevského geometrie[23]. V této geometrii nebude naším „světem“ povrch koule, ale povrch hyperboloidu nebo pseudosféry [22, s. 120].

Povrch pseudosféry je jakoby prohnutý směrem dovnitř (viz. obr. 2/str. 22). To znamená, že má stejnou zápornou křivost v každém bodě. Hyperboloid nemá konstantní zápornou křivost a může mít více podob. Nejčastěji se zobrazuje jako jednodílný hyperboloid, ale může se zobrazit i jako dvojdílný hyperboloid.



Obrázek 2: Pseudosféra



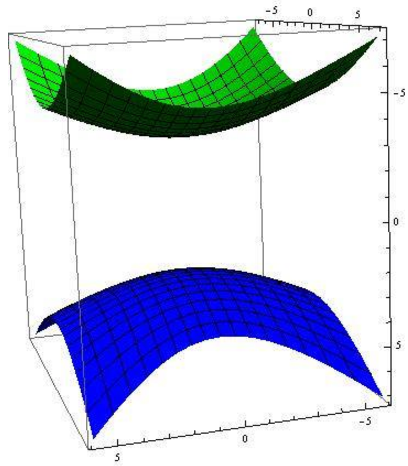
Obrázek 3: Jednodílný hyperboloid

Kdybychom pracovali s jednodílným hyperboloidem (viz. obr. 3/str. 22), tak podobně, jak tomu bylo před chvílí u sféry, ztotožníme body, které jsou souměrné podle středu hyperboloidu. Za přímky budeme považovat křivky , které vznikly stejným způsobem, jak tomu bylo u sférické geometrie, tj. průnik povrchu hyperboloidu s rovinou, která prochází středem hyperboloidu. (Ve sférické geometrii jsme mohli zmíněné průniky nazvat kružnicí, protože řez koule

[23] Například v knihách [23] a [18].

je vždy kruh.)

Povrch dvojdílného hyperboloidu (viz. obr. 4/str. 23) je o něco komplikovanější, neboť ne každá rovina musí nutně protínat hyperboloid. Tato vlastnost nám vytváří také jiný druh průniků, který máme podle nahoře zmíněného postupu považovat za přímky. Rovina řezu hyperboloidu může procházet hyperboloidem, ale také vůbec nemusí. Tímto způsobem nám vzniknou přímky, které se často označují jako nevlastní.



Obrázek 4: Dvojdílný hyperboloid

Tyto modely neeuklidovské geometrie jsou pro představivost o něco náročnější než model sférické geometrie, a proto pro názorné vysvětlení hyperbolické geometrie použijeme později jiný model. Teď si jenom řekneme, že i když v tomto světě geometrie platí první čtyři euklidovy axiomy, pátý neplatí. Daným bodem k dané přímce lze vést ne jedna, ale nekonečně mnoho rovnoběžek. Představíme-li si na povrchu pseudosféry nebo hyperboloidu trojúhelník, zjistíme, že součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180 stupňů [22, s. 116].

6 Způsoby zkoumání Lobačevského geometrie

Existuje více způsobů, jakými můžeme přistupovat ke geometrii. Nejzákladnější a mnohdy i nejlehčí cestou je nahlížet na geometrii intuitivně. Však v případě neeuklidovské geometrii, jak jsme se mohli přesvědčit při pokusech o důkaz 5. axiomu, není ideální, neboť nám tato geometrie není přirozená. Opírá se totiž převážně o zkušenosti a názornost, na které se v Lobačevského geometrii nemůžeme spoléhat.

Dalším způsobem je postavit geometrii na axiomech a každou následující vědomost u nich nebo už z dakázaných vět odvozovat, přesně jako to zamýšlel Eukleides. Můžeme si tím vytvořit úplný systém axiomů dané geometrie. Tento druh zkoumání geometrie není vůbec založen na našich domněnkách a intuici, takže je zcela jistě spolehlivější a logičtější. Nevýhodou je ale časová a mnohdy i prostorová zdlouhavost či pracnost, a často je intelektuálně náročnější [12, s. 39]. Z těchto důvodů se nepoužívá ani při výstavbě euklidovské geometrie na středních školách. Základy úplné axiomatické geometrie položil David Hilbert v knize *Základy geometrie* [18, s. 97]. Hilbert postavil euklidovskou geometrii na dvacetijedna axiomech rozdělených do pěti skupin.

a) Axiomy incidence[24] [25, s. 6]:

1. Dva různé body mají společnou právě jednu přímku.
2. Přímka obsahuje alespoň dva různé body.
3. V rovině existuje alespoň jedna trojice navzájem různých nekolineárních bodů.
4. Tři nekolineární body náleží jedné rovině.
5. Rovina obsahuje alespoň jeden bod.
6. Jestliže dva různé body přímky p náleží rovině, potom všechny body přímky p náleží této rovině.
7. Existuje čtveřice různých bodů, které nenáleží stejné rovině.

[24] Vzájemná poloha geometrických útvarů majících nějakou společnou část. Tento pojem není snadný na pochopení, ale dá se intuitivně pochopit z axiomů.

8. Jestliže mají dvě různé roviny společný jeden bod, mají společný alespoň jeden další bod.

b) Axiomy uspořádání [25, s. 6]:

1. Jestliže bod B leží mezi body A a C, jsou $A,\ B,\ C$ tři různé kolineární body a platí také, že bod B leží mezi body C a A.
2. Mezi libovolnými navzájem různými dvěma body existuje alespoň jeden bod, který leží mezi nimi.
3. Ze tří různých bodů $A,\ B,\ C$ ležících na téže přímce, leží nanejvýš jeden mezi ostatními dvěma.
4. Paschův postulát [18, s. 22]: Jestliže přímka p neprochází žádným z vrcholů trojúhelníka ABC, ale protíná jednu jeho stranu ve vnitřním bode, potom přímka p musí protnout ještě jednu ze zbývajících stran trojúhelníka ABC v jejím vnitřním bodě.

c) Axiomy shodnosti [25, s. 6]:

1. Nechť je AB úsečka, CD polopřímka. Potom existuje právě jeden bod E polopřímky CD, pro který platí $AB \simeq CE$.
2. Relace shodnost úseček je ekvivalence.
3. Jestli že pro body $A,\ B,\ C,\ \bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C}$ platí: B leží mezi A a C, $\bar{B}$ leží mezi $\bar{A}$ a $\bar{C}$, úsečka AB je shodná s úsečkou $\bar{A}\bar{B}$ a úsečka BC je shodná s úsečkou $\bar{B}\bar{C}$, pak AC je shodná s $\bar{A}\bar{C}$.
4. Nechť p je libovolná polopřímka hraniční přímky poloroviny α, pak ke každému úhlu dvou přímek a, b v rovině β existuje v polorovině α právě jedna polopřímka q taková, že úhly polopřímek p, q a přímek a, b jsou shodné (přirozeně, q musí mít stejný začátek jako p).
5. Relace shodnost úhlů je ekvivalence.
6. Jestliže pro trojúhelníky ABC a $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ platí: úsečka AB je shodná s $\bar{A}\bar{B}$, AC je shodná s $\bar{A}\bar{C}$ a úhel při vrcholu A je shodný s úhlem

při vrcholu $\bar{A}$, pak úhel při vrcholu B je shodný s úhlem při vrcholu $\bar{B}$ a úhel při vrcholu C je shodný s úhlem při vrcholu $\bar{C}$.

d) Axiomy spojitosti

1. Archimedův axiom [18, s. 113]:

   Jsou.li dány dvě úsečky AB, CD, pak na polopřímce AB existuje konečný počet bodů P_1, P_2, P_3,. . .,P_k takových, že $AP_1 \simeq P_1P_2 \simeq \ldots P_{k-1}P_k \simeq CD$, $P_{n-1} \neq P_{n+1}$, pro $n = 2, 3, \ldots, k-1$ a bod B leží mezi A a P_n.

2. Cantorův axiom [23, s. 83]:

   Je-li dána nekonečná posloupnost úseček A_1B_1, $A_2B_2 \ldots$ na přímce p tak, že každá úsečka leží uvnitř úsečky předcházející a neexistuje úsečka, která by ležela uvnitř všech těchto úseček posloupnosti A_1B_1, $A_2B_2 \ldots$. Potom existuje na přímce p právě jeden bod, který leží uvnitř všech úseček posloupnosti A_1B_1, $A_2B_2 \ldots$.

e) Axiom rovnoběžnosti

1. Nechť p je libovolná přímka, A libovolný bod, který na ní neleží. Potom bodem A prochází jenom jedna rovnoběžka k přímce p.

Až na axiom rovnoběžnosti jsou to všechno axiomy absolutní geometrie, což znamená, že platí také v Lobačevského geometrii.

Geometrii můžeme zkoumat i za pomoci tzv. modelů. Model můžeme chápat jako interpretaci souboru axiomů (axiomatické teorie), který platí v dané geometrii [12, s. 12]. V případě Lobačevského geometrie z Hilbertových axiomů vyjměme axiom o rovnoběžnosti a nahradíme ho postulátem Lobačevského. Model geometrie nám umožňuje vidět teorii v jiném světle a dovoluje nám hledat a často i úspěšně nalézat základní vztahy mezi objekty, které by při čistě axiomatické výstavbě nemusely být na první pohled zřejmé. Metodu modelů jsme využívali již v předcházející kapitole, kde jsme získávali první představu o neeuklidovských geometriích. Kulová plocha, pseudosféra nebo hyperboloid jsou trojrozměrné modely, které nám přiblížily základní fungování neeuklidovské geometrie.

7 Lobačevskéhoneeuklidovská geometrie

7.1 Axiomatická výstavba

Na začátek si ukážeme, jak by to vypadalo, kdybychom chtěli Lobačevského geometrii zkoumat axiomaticky. Museli bychom začít stavět na axiomech a všímat si souvislostí nebo sporů, ke kterým přijdeme. Následující věty a důkazy budu často formulovat jiným, srozumitelnějším a podrobnějším způsobem, než je uvedeno v literatuře.

Axiomatickým základem této geometrie je Lobačevského postulát a všechny Hilbertovy axiomy euklidovské geometrie, kromě axiomu o rovnoběžnosti. Lobačevského axiom se nejčastěji uvádí následovně:

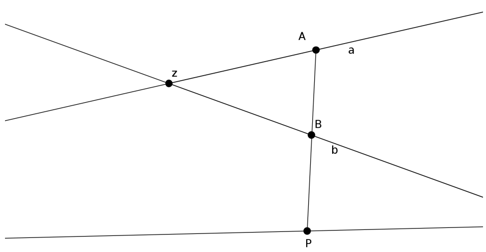
Lobačevského axiom: V rovině prochází bodem mimo přímku alespoň dvě různé s ní se neprotínající přímky. [23, s. 106]

Pokud správně pochopíme tento postulát, je nám intuitivně zřejmé, že platí následující věta, která nám dává informaci, že těchto přímek existuje nekonečně mnoho. Větu ale musíme formálně dokázat, protože se nemůžeme spoléhat na svou intuici.

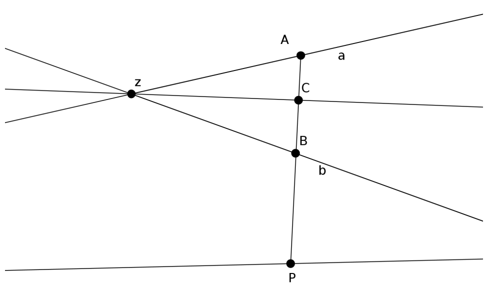
Věta 1. *Bodem Z, který neleží na dané přímce p, prochází nekonečné množství přímek, které nemají s přímkou p žádný společný bod* [18, s. 44].

Důkaz. Nechť máme přímku p, bod Z, který neleží na přímce p, a dvě přímky a, b, které procházejí bodem Z, ale neprotínají přímku p (viz. obr. 5/str. 29). To můžeme předpokládat, protože nám to povoluje Lobačevského axiom. Zvolíme si libovolný bod A na přímce a a bod P na přímce p. Vznikne přímka AP, která nám protne přímku b v bodě B. Víme, že na úsečce AB je nekonečně mnoho bodů (na základě Hilbertova axiomu, který říká, že když máme dva různé body na přímce, existuje ještě alespoň jeden bod, který leží mezi nimi (viz. str. 25)). Každým z těchto bodů můžeme vést přímku, která prochází také bodem Z. Teď musíme jenom zjistit, jestli tyto přímky skutečně neprotínají přímku p. Intuice nám říká, že to tak skutečně bude, protože jsou

„jakoby sevřené“ (ohraničené) mezi přímkami a, b, které podle předpokladů také přímku p neprotínají. Formálně to ale dokážeme na základě Paschova postulátu (viz. str. 25). Označme c jednu libovolnou přímku z přímek, jejichž existenci jsme před chvílí dokazovali. Její průsečík s úsečkou AB označme C (viz. obr. 6/str. 29). Kdyby tato přímka c protnula naši zadanou přímku p v bodě Z, neplatil by Paschův axiom. Vytvořil by se nám trojúhelník PZC a přímka b by protnula jednu jeho stranu PC ale neprotnula by žádnou jinou stranu ani vrchol tohoto trojúhelníka. Neboť v naší geometrii Paschův axiom platí, přímka c nemůže protínat přímku p [18, s. 45]. □



Obrázek 5: Přímky a,b



Obrázek 6: Přímka c

Všechny věty ekvivalentní s euklidovým 5. axiomem v Lobačevského geometrii neplatí. Tato skutečnost začíná vytvářet některé dost nepřirozené vlastnosti, při kterých naše intuice selhává. Zajímavá vlastnost vzniká z neexistence podobných útvarů v Lobačevského geometrii. Věta o existenci podobných útvarů je totiž ekvivalentní s euklidovým 5. axiomem (viz. str. 15). Absence podobnosti je nápomocná při určování jednoznačnosti daných útvarů. Jinými slovy, potřebujeme méně informací na to, abychom určili přesně, o jaký útvar se jedná. Například snadněji určíme, o jaký trojúhelník jde, když známe jenom jeho úhly. V euklidovské rovině by byly dva trojúhelníky se stejnými úhly podobné a nebylo by jasně dáno, s jakou délkou strany máme pracovat. Tuto vlastnost lze formulovat následovně [18, s. 46]:

Věta 2. *Každá úsečka v Lobačevského geometrii definuje určitý úhel* [18, s. 46].

Důkaz. V Lobačevského rovině máme dvě úsečky, které nejsou shodné. Nad každou z nich se dá sestrojit rovnostranný trojúhelník. Kdyby oba trojúhelníky měly všechny tři úhly stejné, byly by podobné. Podobnost je ale vlastnost ekvivalentní s euklidovým 5. axiomem a v Lobačevského geometrii neexistuje. Proto tyto trojúhelníky nemají stejné úhly. To znamená, že strana rovnostranného trojúhelníku jednoznačně určuje úhel, který trojúhelník bude mít [18, s. 46]. □

Tímto způsobem bychom mohli pokračovat dál a vybudovat si geometrii jenom na základě vět a definic a zkoumat, jestli někde nemáme spor. Při tomto zkoumání bychom přišli ještě k mnoha větám a novým útvarům, které nemají v euklidovské geometrii obdobu.

Např. ekvidistanta [18, s. 50] je křivka, která má od dané přímky vždy tutéž vzdálenost v každém svém bodu. Není to přímka, protože kdyby byla, platil by Euklidův 5. axiom. Tři body, které jsou na jedné ekvidistantě, mohou vytvořit trojúhelník, který bude vepsán ekvidistantě [18, s. 53].

Neboť by tato cesta byla nesmírně složitá, budeme Lobačevského geometrii budovat v dvojrozměrném modelu, se kterým se nám bude lépe pracovat.

7.2 Beltrami-Kleinův model

Existuje více modelů Lobačevského geometrie, které usnadňují zkoumání a přibližují způsob fungování této geometrie. K trojrozměrným modelům patří už zmíněná pseudosféra, jednodílný hyperboloid, dvojdílný hyperboloid, hyperbolický paraboloid nebo kuželová plocha. Existují také dvojrozměrné modely, které za pomoci euklidovské roviny modelují svět této geometrie. Jeden z nejpoužívanějších a nejznámějších modelů Lobačevkého geometrie je Beltrami-Kleinův model. Další modely jsou například Poincarého polorovinný model, polokruhový model nebo Poincarého model disku [18].

Abychom mohli začít modelovat nějakou geometrii, na začátek si musíme zadefinovat základní pojmy, se kterými budeme pracovat. Tyto pojmy nemusí mít stejný význam jako v euklidovské geometrii. Ve většině literatury se můžeme setkat se značením[25] euklidovských pojmů předponou e- a pojmů z Lobačevského geometrie předponou l-. Toto značení je logické a přirozené, a proto ho najděte i v následujícím textu. Ostatní značení v tomto textu jsou upravena podle potřeb textu pro ulehčení pochopení.

Beltrami-Kleinův dvojrozměrný model je dostatečně názorný a snadno ho lze konstruovat za pomoci základních matematických softwarů. Jeho vznik lze matematicky popsat jako průmět dvojdílního hyperboloidu ze středu hyperboloidu do roviny, která je kolmá k jeho hlavní ose a neobsahuje střed promítání [27].

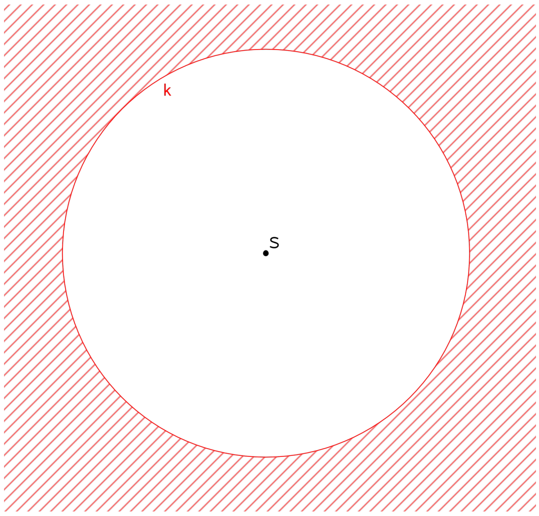
Zkusme si to popsat názorněji. Představme si dvojdílný hyperboloid, který má střed O v počátku souřadnicové soustavy $O[0,0,0]$. Kdybychom se dívali z tohoto bodu na horní díl dvojdílného hyberboloidu, který by byl nad námi a promítli si všechno, co vidíme, například do roviny α, která se dotýká hyperboloidu v bodě, který je k nám nejblíž, v této rovině α nám tímto způsobem vznikne Beltrami-Kleinův model. Když se teď budeme zespodu dívat na horní díl hyperboloidu, uvidíme vlastně jenom kruh, do kterého se nám promítne celý povrch našeho dílu hyperboloidu. Dál budeme pracovat s rovinou α, ve které budeme pracovat s již známými nástroji, neboť je to rovina euklidovská.

Základní pojmy

Celou dobu budeme pracovat v e-rovině, kde máme kružnici k se středem S a poloměrem r. Tato e-kružnice nám bude ohraničovat naší Lobačevského rovinu. V následujícím textu jsou zařazeny příklady, které jsem vytvořila jako pomůcku k prověření správného pochopení zavedených pojmů. K většině příkladů jsou taky vytvořeny aplety postupu konstrukcí v matematickém softwaru GeoGebra.

Definice 1. l-body nazveme všechny e-body, které leží uvnitř e-kružnice k. Množina všech l-bodů se nazývá l-rovina [12, s. 33].

[25]Například v [15].



Obrázek 7: Lobačevského rovina - červená část k ní už nepatří

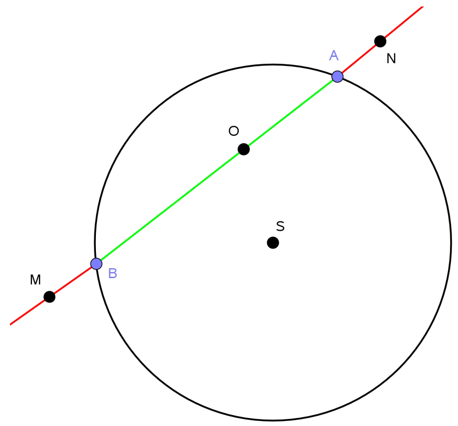
Na definici je třeba si povšimnout, že do Lobačevského roviny nepatří ani e-body, které jsou na kružnici k (viz. obr. 7/str. 32). Tyto body jsou tzv. limitně nevlastní, což znamená, že se k nim můžeme přiblížit na libovolně malou vzdálenost („limitíme" se k nim), ale nikdy nebudou patřit do l-roviny (jsou nevlastní). Pro lepší pochopení a snadnější práci v modelu se mohou pojmenovat i zbylé e-body, které nepatří do l-roviny.

Definice 2. E-body, které leží na kružnici k, nazveme k-body. E-body, které leží vně kružnice k, nazveme v-body.

Další důležitý pojem je přímka. Při definici přímky je první větší rozdíl v chápaní pojmů v obou geometriích. V Lobačevského geometrii bude stejný pojem označovat úplně jiný geometrický útvar než v euklidovské geometrii.

Definice 3. Nechť máme dva k-body A, B. l-přímkou nazveme e-úsečku, která je daná k-body A, B bez těchto dvou bodů [12, s. 33].

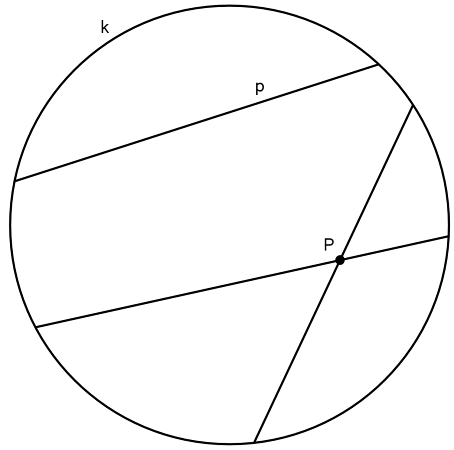
Definice 4. Nechť máme e-přímku x. Průnik e-přímky x s e-kružnicí k bude množina bodů, kterou budeme označovat $\dot{x}$. Část e-přímky x, na které neleží l-přímka x, ani body z množiny $\dot{x}$, budeme označovat symbolem $\bar{x}$ (viz. obr. 8/str. 33).



Obrázek 8: Zelená l-přímka x s l-bodem O, modré k-body, které tvoří množinu $\dot{x}$ a červená část e-přímky x značená $\bar{x}$, na které jsou v-body M, N.

Příklad 1. V l-rovině je daná l-přímka p a l-bod P, který neleží na l-přímce p. Najděte a zkonstruujte alespoň dvě l-přímky, které procházejí l-bodem P, ale neprotínají l-přímku p, tj. splňují Lobačevského axiom. (pozn.: K tomuto příkladu je na přiloženém CD vytvořen aplet v programu GeoGebra.)

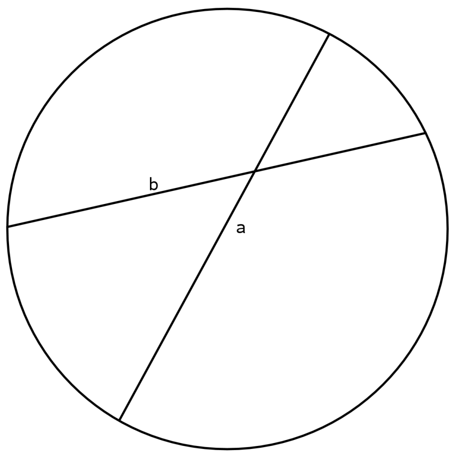
Řešení: Jestliže si uvědomíme, že pracujeme jenom ve vnitřku naší základní kružnice k, která ohraničuje l-rovinu, řešení je triviální (viz. obr. 9/str. 33).



Obrázek 9: Řešení příkladu 1

Hlavní myšlenkou příkladu 1 bylo najít alespoň 2 l-rovnoběžky k l-přímce p v l-rovině. Při postupu řešení (viz. obr. 9/str. 33) je vidět, že těchto l-přímek je nekonečně mnoho a kromě přímek, které se neprotnou, existují i přímky, které se protnou. V naší l-rovině podobně jako v e-rovině mohou být dvě přímky různoběžné, nebo rovnoběžné. Podle vzájemné polohy definujeme vztah dvou l-přímek následovně.

Definice 5. Nechť máme dvě l-přímky a, b. Tyto dvě l-přímky v l-rovině nazveme l-rovnoběžnými, když $a \cap b$ je prázdná množina. Když $a \cap b$ není prázdná množina, nazveme tyto dvě přímky různoběžné (viz. obr. 10/str. 34) [18, s. 129].



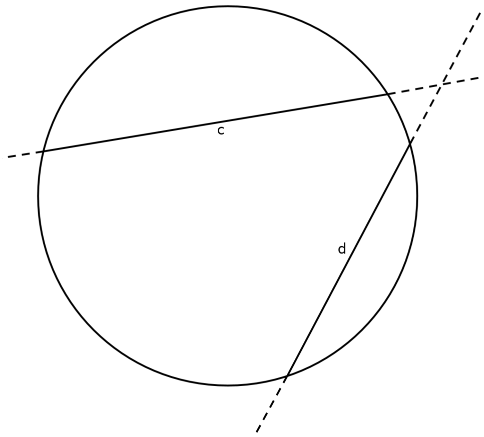
Obrázek 10: l-různoběžné přímky

Dalším velikým rozdílem je, že v Lobačevského geometrii můžeme mít různé druhy rovnoběžek.

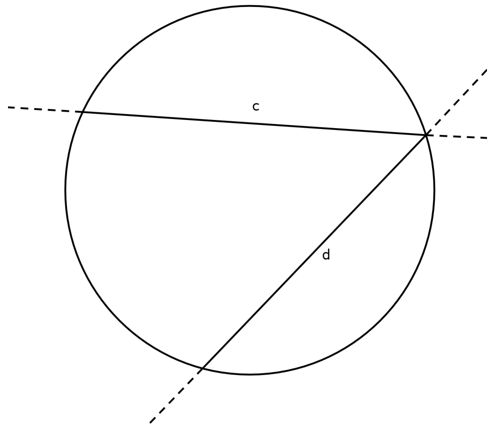
Definice 6. Nechť máme dvě l-rovnoběžky c, d. Tyto dvě l-rovnoběžky nazveme souběžky, když pro ně platí $\dot{c} \cap \dot{d} \neq \emptyset$ (viz. obr. 12/str. 35). Když platí $\dot{c} \cap \dot{d} = \emptyset$, tak je nazveme rozběžky[26] (viz. obr. 11/str. 35) [12, s. 35].

Věta 3. *Dvě různé l-přímky a, b v l-rovině jsou souběžky, rozběžky, nebo jsou navzájem různoběžné. Jiný případ nemůže nastat.*

[26] Tyto pojmy zavedl do češtiny J. B. Pavlíček



Obrázek 11: Rozběžky



Obrázek 12: Souběžky

Důkaz. Základem důkazu bude vzájemná poloha dvou přímek v e-rovině [12, s. 35]. E-přímky mohou být e-rovnoběžné, nebo e-různoběžné. Když máme e-rovnoběžné přímky, tak nemohou mít společný bod ani v l-rovině, a jsou tedy l-rovnoběžné(jsou rozběžky). Jestli jsou dvě e-přímky v e-různoběžné, jejich společný průsečík může ležet v l-rovině (jsou l-různoběžné), na kružnici k (jsou souběžky), nebo vně kružnice (jsou rozběžky). Tímto způsobem jsme probrali všechny případy, které mohou vzniknout a žádné další už nastat nemůžou. □

Následující pojmy budou definované podobně, jako v e-rovině. Také nám pomohou definovat l-úsečku jiným způsobem, než jsme si ji definovali dosud.

Definice 7. Nechť máme v l-rovině l-body B, C, k-body A, D. Body A, B, C, D leží na e-přímce p. Množinu bodů, které jsou mezi l-bodem B a k-bodem D, včetně bodu B, nazýváme l-polopřímka BD. Průnik takto definovaných l-polopřímek CA a BD je l-úsečka BC [12, s. 36].

Definice 8. Nechť máme v l-rovině l-přímku p a na ní l-body A, B a l-bod C, který na l-přímce p neleží. L-polorovinou ABC nazýváme všechny l-body X, pro které platí, že průnik l-úsečky XC (bez bodu X) a l-přímky p je prázdná množina [12, s. 36].

Definice 9. Nechť v l-rovině máme l-poloroviny ABC a CAB. l-úhlem $\sphericalangle BAC$ nazveme průnik těchto dvou polorovin [12, s. 36].

Když víme, co si máme představit pod základními útvary v l-rovině, můžeme začít pracovat s některými jejich vlastnostmi.

Kolmost přímek

Kolmost útvaru je spojena s pojmem úhlu, který jsme před chvílí definovali. V l-rovině si také můžeme představit pod pojmem kolmost pravý úhel, ale nebude pro nás vizuálně stejný jako v e-rovině, protože se úhly v tomto modelu zkreslují. Z tohoto důvodu nám při konstrukcích nepomůže úhloměr, ani pravítko s ryskou.

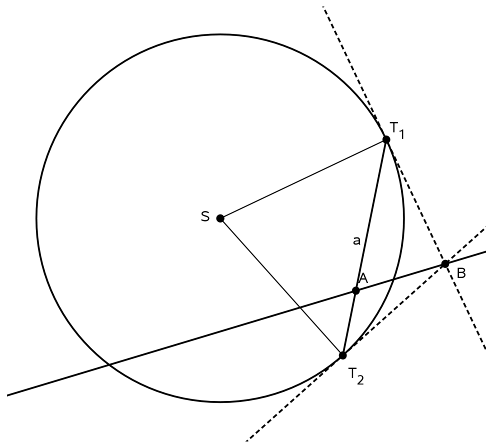
Definice 10. Nechť v l-rovině máme dvě l-přímky a, b. Tyto přímky budou navzájem l-kolmé, právě když jsou polárně sdružené vzhledem k základní kružnici [12, s. 38].

Celou teorii, definice polárního zobrazení bodů a přímek můžeme najít například v knížce [12, s. 38]. Pro naši potřebu není úplně nutné porozumět výrazu polárního zobrazení. Důležité je, vědět jak tyto přímky sestrojit v naší l-rovině, což si ukážeme na příkladu.

Příklad 2. Nechť máme v l-rovině danou l-přímku a. Pokuste se sestrojit alespoň jednu l-kolmici k této l-přímce. (pozn.: K tomuto příkladu je na přiloženém CD vytvořen aplet v programu GeoGebra.)

Řešení: E-přímka, na které bude ležet l-kolmice b k l-přímce a, musí procházet e-bodem B, který je e-průsečík e-tečen kružnice k v bodech $\dot{a}$ (viz. obr. 13/str. 37). Hledaná e-přímka musí také procházet libovolným l-bodem A na l-přímce a. Tímto popsaným způsobem můžeme sestrojit nekonečně mnoho e-přímek, na kterých budou ležet l-kolmice k l-přímce a. Tyto e-přímky budou tvořit jeden svazek e-přímek, které mají jeden společný e-bod B.

Ukázali jsme si, jak najít k jedné l-přímce všechny l-kolmice v l-rovině. Problém s nahoře uvedenou konstrukcí budeme mít jenom v případě, když naše l-přímka, ke které hledáme l-kolmice, bude procházet středem e-kružnice, která nám ohraničuje l-rovinu. V tomto případě totiž neexistuje nahoře popsaný prů-



Obrázek 13: Řešení příkladu 2

sečík e-tečen (protože budou rovnoběžné) k e-kružnici k. Hledanými l-komicemi budou všechny l-přímky e-rovnoběžné s těmito e-tečnami.

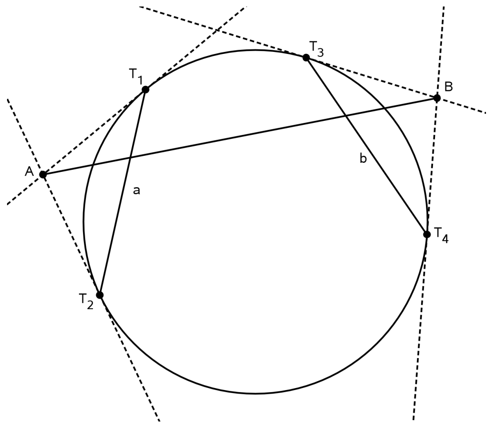
Někdy se ale můžeme ocitnout v situaci, kdy musíme sestrojit k několika l-přímkám (e-přímky, na nich leží tyto l-přímky, tvoří svazek e-přímek) nějakou společnou l-kolmici. Proto si ukážeme, jakým postupem je lze najít.

Příklad 3. Nechť máme v l-rovině n rozběžek, které leží na e-přímkách a tvoří svazek e-přímek. Najděte k nim l-kolmici. (pozn.: K tomuto příkladu je na přiloženém CD vytvořen aplet v programu GeoGebra.)

Řešení: Z rozběžek, které máme dané, si vybereme dvě l-přímky a a b (můžeme i víc, ale dvě postačí). Sestrojíme e-tečny ke kružnici k v bodech $\dot{a}$ a $\dot{b}$ (viz. obr. 14/str. 38). E-průsečík e-tečen v bodech $\dot{a}$ si označíme A a průsečík e-tečen v bodech $\dot{b}$ si označíme B. Hledaná l-kolmice je jenom jedna a je to průnik e-přímky AB s l-rovinou. na začátku řešení příkladu jsme si zvolili dvě libovolné l-přímky z několika rozběžek. Zatím ale nevíme, jestli náš výběr nějak neovlivní naši nalezenou l-kolmici k nim. Když ale uvedený postup zopakujeme s jiným párem rozběžek, zjistíme, že nám pokaždé vyjde ta samá l-kolmice.

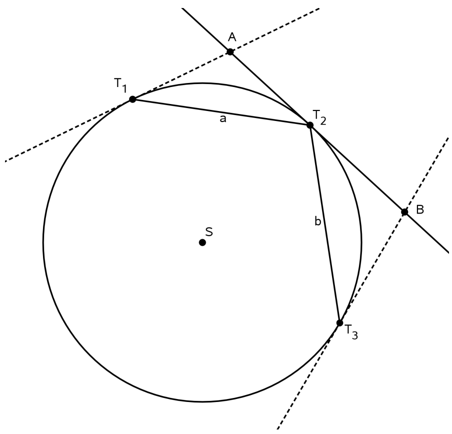
Věta 4. *V l-rovině mají dvě rozběžky jednu společnou kolmici* [18, s. 129].

Věta 5. *V l-rovině dvě souběžky ani dvě různoběžky společnou kolmici nemají* [18, s. 129]. (pozn.: K této větě je na přiloženém CD vytvořen aplet v programu GeoGebra.)

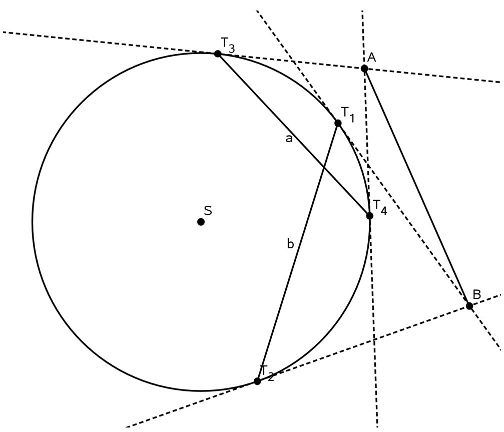


Obrázek 14: Řešení příkladu 3

Důkaz. Stejným způsobem, jako v předcházejícím příkladu 3, se pokusíme sestrojit taky l-kolmici souběžek a různoběžek. Při konstrukci zjistíme, že v případě souběžek je tato „l-kolmice“ tečna ke kružnici k (viz. obr. 15/str. 38) a v případě různoběžek je tato „l-kolmice“ vně kružnice k (viz. obr. 16/str. 38). V obou případech „l-kolmice“ neleží v naší l-rovině, tudíž tyto l-kolmice neexistují. □



Obrázek 15: „l-kolmice“ souběžek



Obrázek 16: „l-kolmice“ různoběžek

Věta 6. *Neexistuje čtyřúhelník, který má všechny úhly pravé* [12, s. 42].

Důkaz. Kdyby takový čtyřúhelník $ABCD$ existoval, tak by strany AB a CD měly dvě společné l-kolmice a to strany BC a DA. To není možné, protože AB a CD jsou rozběžky a mají jenom jednu společnou l-kolmici. □

Metrika, vzdálenost dvou bodů

Další pojem, který je velice potřebný pro geometrii je metrika. Metrika nám umožňuje měřit vzdálenost. na střední škole se ji většinou vůbec nevěnuje speciální pozornost, protože v e-rovině ji chápeme intuitivně a není tady nutné se zabývat vlastnostmi, které musí metrika splňovat. Proto se na chvíli přeneseme do e-roviny a nejprve řekněme, co formálně metrika je. Pak si ukážeme, jak je definovaná v našem model, a také si ukážeme, že splňuje všechny vlastnosti, které musí metrika z definice mít.

Definice 11. Nechť máme množinu M a $x, y, z \in M$. Metrika λ je zobrazení z $M \times M$ do množiny reálných čísel takové, že platí [20]:

1. $\lambda(x, y) \geq 0$
2. $\lambda(x, y) = 0$, právě když $x = y$
3. $\lambda(x, y) = \lambda(y, x)$
4. $\lambda(x, z) \leq \lambda(x, y) + \lambda(y, z)$.

K zadefinování l-délky budeme potřebovat ještě vědět, co je dělicí poměr. Dělicí poměr nese informaci o vztahu (poměru) vzdáleností třech kolineárních bodů, a pomáhá tedy vyjádřit vztah mezi těmito body. Metrika v Beltrami-Kleinovu modelu bude využívat právě této charakteristiky. V následujícím textu pracujeme v e-rovině, ve které si zadefinujeme dělící poměr a dvojpoměr.

Definice 12. Nechť máme body A, B, C na přímce p tak, že bod C leží mezi body A a B. Pak dělícím poměrem (ABC) nazýváme číslo $\frac{|AC|}{|BC|}$ [3, s. 120].

Definice 13. Nechť máme body A, B, C, D na přímce p tak, že bod C leží mezi body A a B a bod D leží mezi body C a B. Pak číslo

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{|AC|}{|BC|}}{\frac{|AD|}{|BD|}} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|}$$

nazýváme dělícím dvojpoměrem $(ABCD)$ [3, s. 121].

Při definování l-délky l-úsečky se využívá právě zadefinovaný dvojpoměr. Při výpočtu délky l-úsečky a na e-přímce b se počítá logaritmus dvojpoměru bodů $\dot{b}$ a koncových bodů l-úsečky a.

Definice 14. Nechť máme v l-rovině l-úsečku AB, která leží na e-přímce p. Body $\dot{p}$ označíme X a Y. l-délkou l-úsečky AB je číslo $\lambda(A,B)$, pro které platí:

$$\lambda(A,B) = |\log(XYAB)| = \left|\log\left(\frac{|XA|}{|YA|} : \frac{|XB|}{|YB|}\right)\right| = \left|\log\frac{|XA|\cdot|YB|}{|YA|\cdot|XB|}\right|,$$

kde absolutní hodnota z AX je chápána euklidovsky, tzn. e-délka e-úsečky AX [12, s. 43].

Nahoře uvedený zlomek je vždy kladný, neboť body $\dot{p}$ nikdy nemohou ležet na l-úsečce AB, a tím pádem se nám nikdy ve jmenovateli neobjeví nula a logaritmus má vždy smysl.[27]

Když už máme způsob jakým bychom mohli vyjádřit délku, je potřebné si ověřit, jestli skutečně splňuje podmínky, které musí metrika z definice mít.

Věta 7. *l-délka je metrika.*

Důkaz. V l-rovině máme l-body A, B, C, které leží na l-přímce p. Z definice metriky musí platit:

1. $\lambda(A,B) \geq 0$
2. $\lambda(A,B) = 0$ právě když $A = B$
3. $\lambda(A,B) = \lambda(B,A)$
4. $\lambda(A,C) \leq \lambda(A,B) + \lambda(B,C)$

Výraz $\lambda(A,B)$ můžeme podle definice l-délky nahradit výrazem

$$\lambda(A,B) = \left|\log\frac{|XA|\,.\,|YB|}{|YA|\,.\,|XB|}\right|,$$

kde l-body X, Y jsou z množiny $\dot{p}$.

První podmínka se dokazuje snadno. Výraz $\lambda(A,B)$ je vždy nezáporný, protože obsahuje součin a podíl absolutních hodnot. Druhá podmínka platí jenom

[27] Základ logaritmu se uvádí v literatuře různě, nejčastější je logaritmus o základu e.

tehdy, když výraz, ze kterého děláme logaritmus, bude roven 1. Z toho plyne rovnost $|XA| \,.\, |YB| = |YA| \,.\, |XB|$, která platí, právě když $A = B$. Třetí podmínka je založená na záměně bodů A a B, která nám nezmění hodnotu logaritmu, jenom jeho znaménko. Logaritmus je ale v absolutní hodnotě, což znamená, že záměna bodů nijak nezmění jejich l-vzdálenost. Čtvrtá podmínka závisí na pořadí bodů, jako už napovídá vztah rovnosti nebo nerovnosti výrazů. Výraz $\lambda(A, B) + \lambda(B, C)$ je součet logaritmů, který můžeme zapsat jako logaritmus součinu.

$$\lambda(A, B) + \lambda(B, C) = \left|\log \frac{|XA| \cdot |YB|}{|YA| \cdot |XB|}\right| + \left|\log \frac{|XB| \cdot |YC|}{|YB| \cdot |XC|}\right| =$$

$$= \left|\log \frac{|XA| \cdot |YB| \cdot |YC| \cdot |XB|}{|YA| \cdot |XB| \cdot |XC| \cdot |YB|}\right| = \left|\log \frac{|XA| \cdot |YC|}{|YA| \cdot |XC|}\right| = \lambda(A, C)$$

To znamená, že když bod B leží mezi body A a C, nastane rovnost. Když bod B leží až za bodem C (C leží mezi body A a B), můžeme využít už dokázaný vztah $\lambda(A, C) + \lambda(C, B) = \lambda(A, B)$, který dosadíme do výrazu $\lambda(A, B) + \lambda(B, C) = \lambda(A, C) + \lambda(C, B) + \lambda(B, C)$. Podle 3. podmínky $\lambda(C, B) = \lambda(B, C)$ a podle první podmínky $\lambda(A, B) \geq 0$ je tato hodnota je větší než nula, nebo se nule rovná. Z toho vyplývá $\lambda(A, C) + \lambda(C, B) + \lambda(B, C) > \lambda(A, C)$ a následně $\lambda(A, B) + \lambda(B, C) > \lambda(A, C)$ [12, s. 44]. □

Obecně platí, že v Beltrami-Kleinově modelu se délky a úhly zkreslují, pokud se na ně díváme euklidovsky. Zajímavá vlastnost tohoto modelu je, že úhly, které mají vrchol ve středu S kružnice k, mají euklidovskou velikost a žádným způsobem se nezkreslují. Úsečky, které mají počáteční bod ve středu S a jsou si rovné, jsou si ve skutečnosti také euklidovsky rovné [18, s. 128].

Příklad 4. Nechť l-rovina má střed S. Ověřte výpočtem, zda množina bodů X, pro kterou platí $\lambda(S, X) = a$, existuje [12, s.45] (tj. vzdálenost bodu X od bodu S je a). Jestli ano, rozhodněte, jaký útvar tvoří.

Řešení: Na začátek si musíme výpočtem zjistit, zda l-bod X skutečně leží v l-rovině. Nechť l-bod X_1 patří množině, kterou hledáme. Vzdálenost hledaného bodu $\lambda(S, X_1) = a$ leží na přímce p_1. Body p_1 označíme A, B. Vzdálenost

a si vyjádříme podle definice

$$a = \lambda(S, X_1) = |\log(BASX_1)| = \log \frac{|BS| \cdot |X_1A|}{|X_1B| \cdot |SA|}.$$

Jednotlivé vzdálenosti si umíme vyjádřit jinak. $|SA| = |SB| = r$, kde r je poloměr kružnice k, která ohraničuje l-rovinu. Platí:

$$|X_1B| = r - |SX_1|$$

$$|X_1A| = r + |SX_1|.$$

Po dosazení dostaneme vztah

$$a = \lambda(S, X_1) = \log \frac{r \cdot (r + |SX_1|)}{r \cdot (r - |SX_1|)}.$$

Po odlogaritmování dostaneme

$$10^a = \frac{(r + |SX_1|)}{(r - |SX_1|)} \Longrightarrow |SX_1| = r \cdot \frac{10^a - 1}{10^a + 1} < r.$$

Tímto způsobem jsme dokázali, že bod X existuje vždy, nezávisle na vzdálenosti a, protože bod X je vždy l-bod (je vždy uvnitř kružnice, která nám ohraničuje l-rovinu). Pokud bychom bodem B cestovali po celé kružnici k, která ohraničuje l-rovinu, dostali bychom množinu bodů, která obsahuje všechny body X, které mají stejnou l-vzdálenost od bodu S. Z euklidovské geometrie víme, že tato množina bodů by měla být kružnice se středem v bodě S a poloměrem a. na otázku jestli múžeme e-kružnici považovat taky za l-kružnici, dávají odpověď následující definice.

Definice 15. L-kružnice je množina všech l-bodů, které mají od l-bodu X stejnou l-vzdálenost.

Definice 16. L-kružnicí se středem v l-bodě S (střed l-roviny) budeme chápat e-kružnici se středem v l-bodě S. V případě, že l-kružnice nemá střed v l-bodě S, nemůžeme ji chápat jako e-kružnici [18, s. 129].

Věta 8. *Neeuklidovská l-vzdálenost může být libovolně veliká* [18, s. 127].

Důkaz. Opět si vezměme úsečku AB, která je na přímce p, a body $\dot{p}$ jsou X a Y. Pak

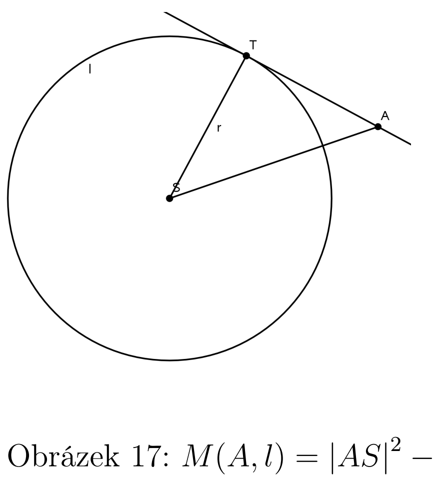
$$\lambda(A,B) = \left|\log\left(\frac{|XA|}{|YA|} : \frac{|XB|}{|YB|}\right)\right|.$$

Když se bod A bude přibližovat k bodu Y, pak zlomek $\frac{|XA|}{|YA|}$ se bude zvětšovat, ale zlomek $\frac{|XB|}{|YB|}$ zůstane stejný. Tímto způsobem může logaritmus nabývat libovolně velikých hodnot [18, s. 127]. □

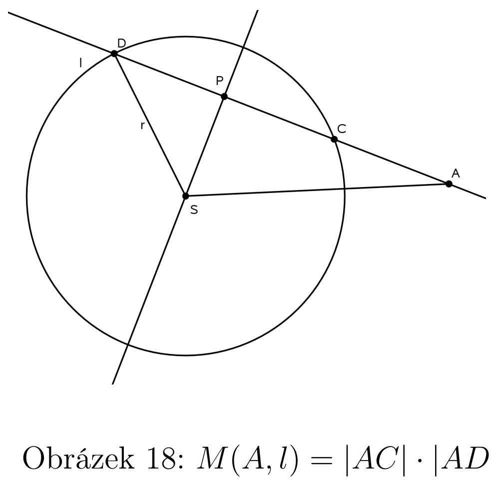
Definice 17. Dvě l-úsečky AB a CD jsou shodné, jsou-li jejich délky stejné $\lambda(A,B) = \lambda(C,D)$.

Další užitečná věc, která je spojena s délkou a vzdáleností je střed nějaké úsečky. Nebude to ale tak snadné jako v e-rovině, kde nám stačí rozdělit délku úsečky na půl za pomoci pravítka. Potřebujeme nástroj, kterým propojíme dvojpoměr, definující l-vzdálenost s našimi možnostmi konstrukce e-roviny. Proto je vhodné zadefinovat si v e-rovině mocnost bodu ke kružnici, která nám pomůže sestrojit l-střed l-úsečky za pomoci euklidovské roviny.

Definice 18. Nechť je v rovině dána kružnice l se středem S a poloměrem r a bod A, který leží mimo kruh, který kružnice vytváří. Bod T, který je bodem dotyku kružnice l a tečny t ke kružnici l, vedené bodem A (viz obr. 17/str. 43). Pro pravoúhlý trojúhelník STA platí z Pythagorovy věty: $|AT|^2 = |AS|^2 - r^2$. Výraz $|AS|^2 - r^2$ se nazývá mocnost bodu ke kružnici a značí se $M(A,l)$ [3, s. 86].



Obrázek 17: $M(A,l) = |AS|^2 - r^2$



Obrázek 18: $M(A,l) = |AC| \cdot |AD|$

Věta 9. *Nechť je v rovině dána kružnice l se středem S a poloměrem r a bod A, který leží mimo kruh, který kružnice vytváří. Máme libovolnou sečnu kružnice l, která prochází bodem A. Průsečíky sečny a kružnice l jsou body C, D. Mocnost bodu ke kružnici se dá vyjádřit také jako $|AC| \cdot |AD|$* [3, s. 86].

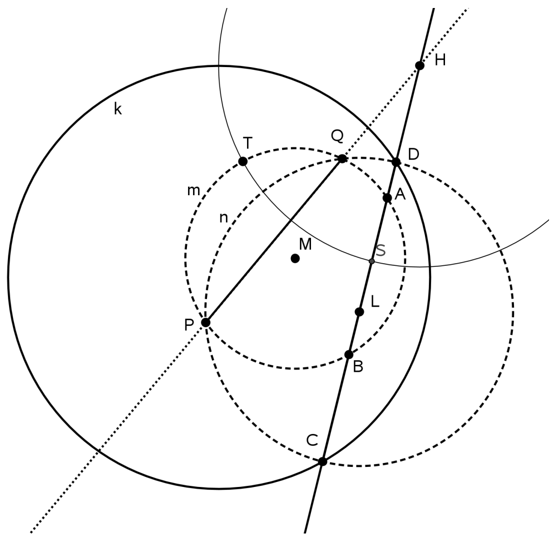
Důkaz. Když označíme P patu kolmice na sečnu, která prochází bodem S. Pak si umíme vyjádřit $|AD| = |AP| + |PD|$ a $|AC| = |AP| - |PC|$. Protože délky $|PD| = |PC|$ jsou stejné (viz obr. 19/str. 43), dostaneme

$$|AC| \cdot |AD| = |AP|^2 - |PC|^2 = |AS|^2 - |SP|^2 - (r^2 - |SP|^2),$$

což je hledaný výraz $|AS|^2 - r^2$ z definice [3, s. 86]. □

na následujícím příkladu si ukážeme, jak nám mocnost bodu ke kružnici pomůže při konstrukci středu strany v l-rovině.

Příklad 5. Mějme e-přímku p, která má v l-rovině l-body A, B a k-body C, D. Najděte l-střed S l-úsečky AB. (pozn.: K tomuto příkladu je na přiloženém CD vytvořen aplet v programu GeoGebra.)



Obrázek 19: Střed l-úsečky AB

Řešení: Jako první krok si musíme sestrojit pomocné kružnice l a m. Kružnice l bude mít průměr stejný, jako je e-vzdálenost bodů $|CD|$. Kružnice m

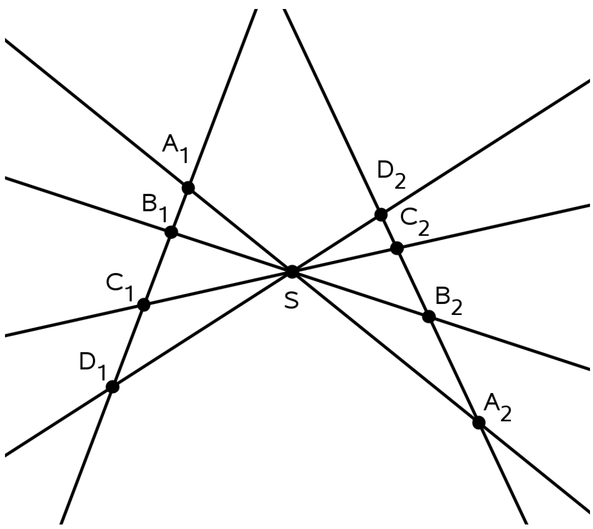
má podmínku, že body A, B na ní musí ležet a musí mít průsečíky s kružnicí l. Vzniknou nám průsečíky kružnic l a m, které označíme P, Q (viz. obr. 19/str. 44). Chceme sestrojit bod H, který bude mít stejnou mocnost k oběma kružnicím. Tento bod je e-průsečík e-přímek AB a PQ. Námi hledaný l-střed S l-úsečky AB bude ležet na e-kružnici n, která má e-střed v e-bodě H a prochází tečným e-bodem T, který nám vznikne jako e-dotykový e-bod e-tečny vedené z e-bodu H k e-kružnici m. Protože náš hledaný střed S má být také na l-úsečce AB, dostaneme ho jako $AB \cap n$ [12, s. 45].

Příklad 6. Mějme e-přímku p, která má v l-rovině l-body A, B a k-body C, D. Najděte l-střed S l-úsečky AB, přičemž l-vzdálenost AC je stejná jako BD.

Řešení: Můžeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě. Byl by to ale zbytečně složitý postup, protože na základě e-souměrnosti tohoto modelu, bude l-střed l-úsečky AB také e-střed e-úsečky AB, takže ho můžeme sestrojit euklidovskou metodou, jak jsme zvyklí z e-roviny [12, s. 45].

Přenášení vzdáleností

Další významná věc, která je podstatná pro základní konstrukce, je přenášení délek. Základem je tzv. Pappova věta, která říká, že středovým promítáním v e-rovině se dvojpoměr nemění.



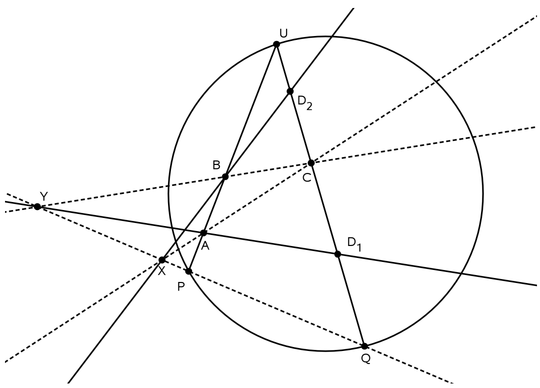
Obrázek 20: Pappova věta

Věta 10. *Nechť máme dvě různé přímky p a q a čtyři přímky a, b, c, d, které se protínají v jednom bodě S, který neleží na přímce p, ani na přímce q. Průsečíky přímek a, b, c, d s přímkou p jsou body A_1, B_1, C_1, D_1 a průsečíky přímek a, b, c, d s přímkou q jsou body A_2, B_2, C_2, D_2 (viz. obr. 20/str. 45). Pak platí následující rovnost* [13]*:*

$$\frac{|A_1C_1|}{|A_1D_1|} : \frac{|B_1C_1|}{|B_1D_1|} = \frac{|A_2C_2|}{|A_2D_2|} : \frac{|B_2C_2|}{|B_2D_2|}$$

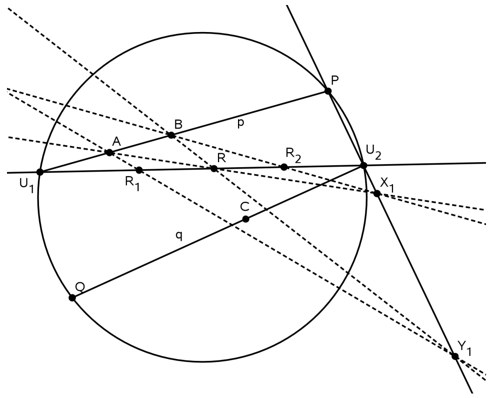
Způsob, jak využít této vědomosti pří přenášení l-délky l-úseček je ukázán v následujícím příkladu.

Příklad 7. Budeme mít dané dvě různé l-přímky p, q, přičemž body A, B jsou na l-přímce p a bod C leží na l-přímce q. Najděte bod D na přímce q tak, aby l-délka l-úsečky AB byla stejná jako l-délka l-úsečky CD [12, s. 48]. (pozn.: K tomuto příkladu je na přiloženém CD vytvořen aplet v programu GeoGebra.)

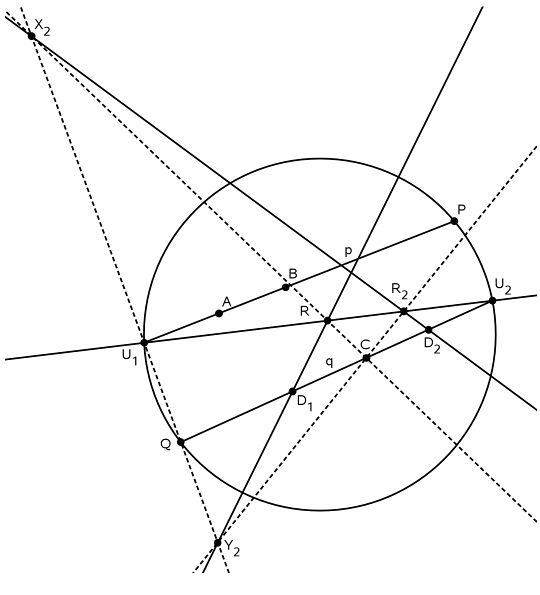


Obrázek 21: Přenesení vzdálenosti

Řešení: Podle toho, jestli jsou p, q souběžky nebo rozběžky, dostaneme dvě řešení. Nejprve se věnujme možnosti, kdy l-přímky p, q jsou souběžky (viz. obr. 21/str. 46). To znamená, že mají jeden společný k-bod, který označíme U. Další dva body, ve kterých přímky protínají základní kružnici k, označíme P a Q. Bod X je průsečík e-přímky PQ a e-přímky AC. Bod Y je průsečík e-přímky BC a e-přímky PQ. Teď využijeme Pappovy věty, která nám přesně říká, jak máme sestrojit bod D tak, aby se zachoval dvojpoměr, který v našem modelu určuje vzdálenost dvou bodů. Následně nám stačí vést e-přímku body Y a A a průsečík této přímky s l-přímkou q je náš hledaný bod D. Bod s hledanými vlastnostmi můžeme dostat také jako průsečík e-přímky, která prochází body X a B, s l-přímkou q. Hledané body jsou tedy $D_1 = q \cap AY$ a $D_2 = q \cap BX$ (viz. obr. 21/str. 46). Když p a q nejsou souběžky, situace se trochu zkomplikuje, vzhledem k tomu, že nemáme souběžku s l-přímkou q, na kterou bychom vzdálenost hned přenesli. Pro tento případ sestrojíme pomocnou přímku l, která je souběžná s oběma zadanými rozběžkami. Pak aplikujeme postup z předchozího řešení na souběžky p, l (viz. obr. 22/str. 47), a pak na souběžky l, q (viz. obr. 23/str. 47).



Obrázek 22: Přenesení vzdálenosti z přímky p na přímku l



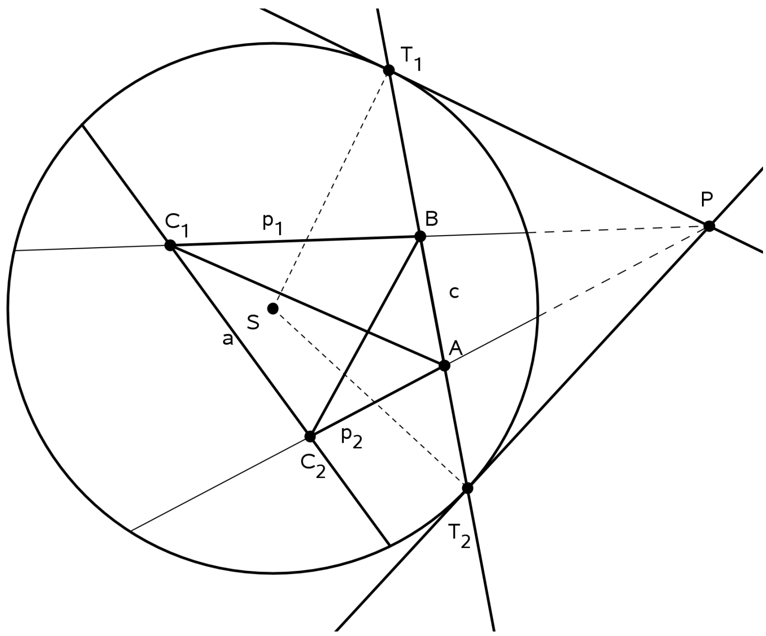
Obrázek 23: Přenesení vzdálenosti z přímky l na přímku q

7.3 Příklady na procvičení

Následující příklady jsou určeny k upevnění znalostí z Beltrami-Kleinova modelu. Ke všem příkladům jsou vytvořeny aplety v programu GeoGebra, které můžete najít na přiloženém CD.

Příklad 8. Máme dané l-body A, B a l-přímku p. Sestrojte l-pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož strana c je l-úsečka AB a l-bod C leží na l-přímce p.

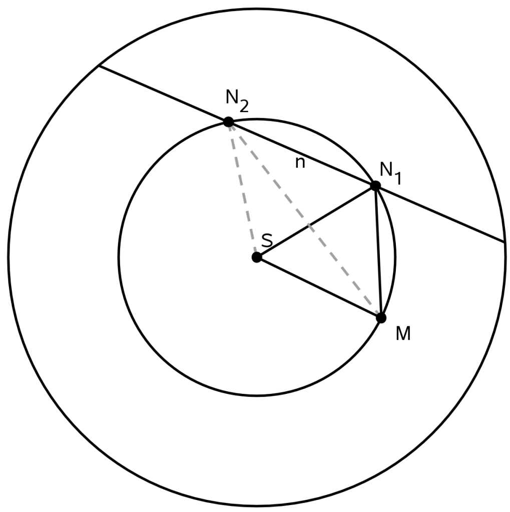
Řešení: Sestrojíme kolmice k l-úsečce AB v bodech A a B (viz. obr. 24/str. 48). Body $\dot{c}$ označíme T_1 a T_2. Z těchto bodů sestrojíme tečny ke kružnici k. Tečny se protnou v bodě P. Hledané l-kolmice leží na e-přímkách p_1 a p_2, přičemž p_1 prochází body P a B a p_2 prochází body P a A. Bod C je průsečík l-přímky p s l-kolmicí l-úsečce AB, která prochází l-bodem B, nebo l-bodem A.



Obrázek 24: Řešení příkladu 8

Příklad 9. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník SMN, jeho jeden jeho vrchol je střed S l-roviny. Druhý vrchol má být zadaný l-bod M a třetí l-bod N má ležet na dané l-přímce n.

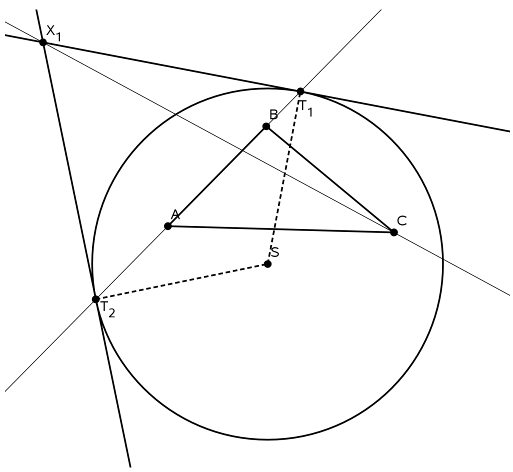
Řešení: Rovnoramenný trojúhelník má stejnou délku dvou stran, což znamená, že dva vrcholy mají stejnou vzdálenost od třetího vrcholu trojúhelníku. Využijeme vlastnost tohoto modelu, že l-kružnici se středem v l-bodě S můžeme sestrojit jako e-kružnici se středem v tomto bodě. Sestrojíme l-kružnici m se středem v l-bodě S, která prochází l-bodem M (viz. obr. 25/str. 49). na této kružnici bude ležet také l-bod N. Jestli se nám kružnice m protne s l-přímkou n, tento průsečík bude hledaný l-bod N.



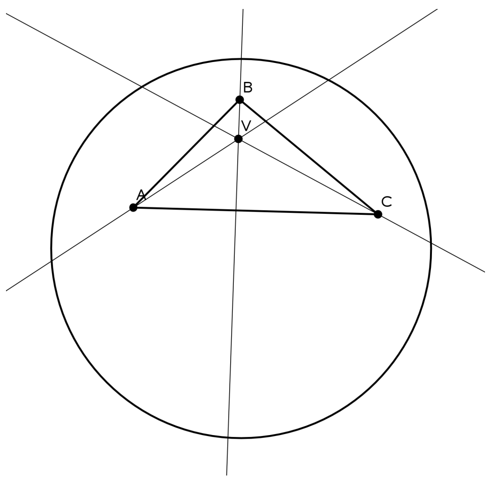
Obrázek 25: Řešení příkladu 9

Příklad 10. Nechť máme v l-rovině dán trojúhelník ABC. Sestrojte průsečík jeho výšek. (Pod pojmem výška rozumíme kolmici na stranu vedenou protilehlým vrcholem trojúhelníku tak, jak jsme zvyklí z e-roviny.)

Řešení: Z euklidovské roviny známe obecný postup hledání tohoto průsečíku, ortocentra. Ke každé straně daného trojúhelníku najdeme kolmici, která prochází třetím vrcholem trojúhelníku, který neleží na této straně. Místo, kde se protnou tyto kolmice, je hledané ortocentrum. Stejný postup použijeme také v l-rovině. Najdeme l-kolmice ke straně c za pomoci e-tečen k základní e-kružnici k z k-bodů $\dot{c}$ (viz. obr. 26/str. 50). Průsečík těchto tečen je e-bod X_1. Všechny l-kolmice k l-úsečce AB prochází e-bodem X_1 a mají s l-úsečkou AB společný l-bod. Z množiny všech těchto l-kolmic k této l-úsečce vybereme tu, která prochází l-bodem C. Stejným postupem najdeme l-kolmice ke stranám b a c. Průsečík těchto tří l-kolmic je náš hledaný průsečík V výšek trojúhelníku ABD (viz. obr. 27/str. 50).



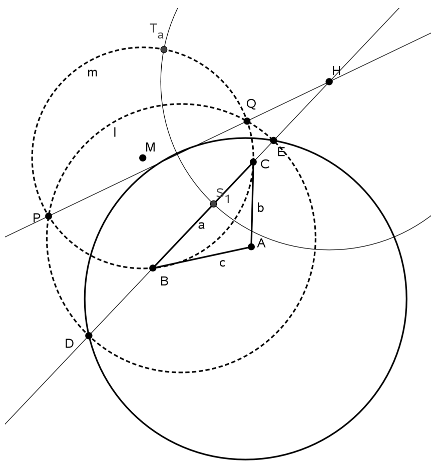
Obrázek 26: Kolmice na stranu c



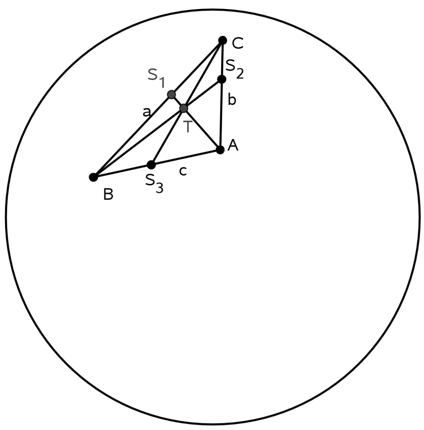
Obrázek 27: Průsečík výšek V

Příklad 11. Nechť máme v l-rovině dán trojúhelník ABC. Sestrojte průsečík těžnic. (Těžnice chápeme jako spojnice středů stran s protilehlými vrcholy trojúhelníka, stejně jako v e-rovině.)

Řešení: Z euklidovské roviny víme, že průsečík přímek, na kterých leží spojnice středů stran a protilehlých vrcholů trojúhelníka, je těžiště. Tuto myšlenku shodně použijeme v l-rovině. Sestrojíme l-střed strany a daného trojúhelníka, který pak spojíme s protilehlým vrcholem A. l-střed strany a najdeme pomocí pomocných e-kružnic l a m (viz. obr. 28/str. 51). E-kružnice l má střed v l-bodě L, který je e-střed e-úsečky E, D, a prochází k-body E, D, které patří $\dot{a}$. Kružnice m má libovolný střed M na e-ose l-úsečky CB tak, aby kružnice m měla průsečíky s kružnicí l. Průsečíky kružnic l a m jsou e-body P, Q. Průsečík e-přímky PQ a e-přímky a je bod H. Bod T_a je bod dotyku tečny z bodu H ke kružnici m. Střed S_1 l-úsečky CB leží na kružnici, která má střed v bodě H a prochází bodem T_a. Postup zopakujeme také se stranami b a c. Průsečík T těchto těžnic je hledaný bod (viz. obr. 29/str. 51).

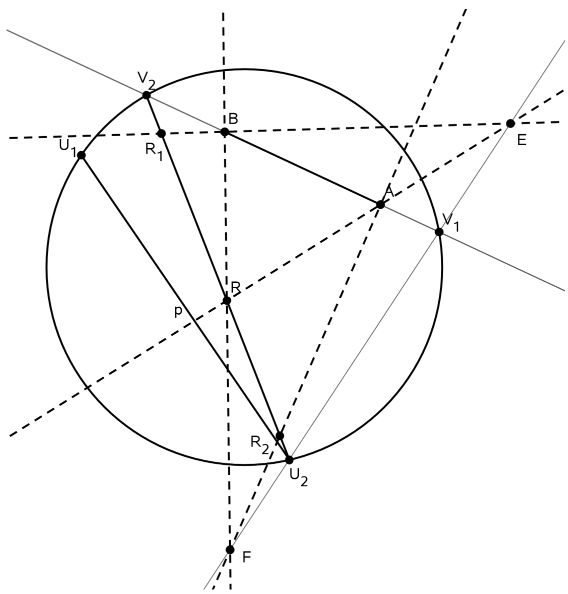


Obrázek 28: Střed úsečky CB

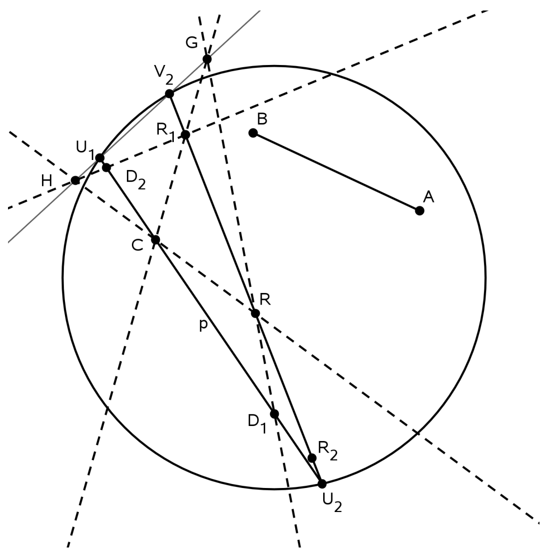


Obrázek 29: Těžiště T trojúhelníka

Příklad 12. Nechť jsou dány l-body A, B a l-přímka p, na které leží bod C. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, který bude mít protilehlé strany AB a CD stejně l-dlouhé. l-bod D leží také na přímce p.

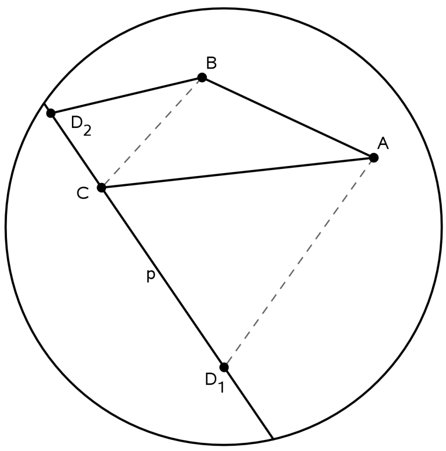


Obrázek 30: Přenášení vzdáleností na pomocnou l-přímku



Obrázek 31: Přenášení vzdáleností na l-přímku p

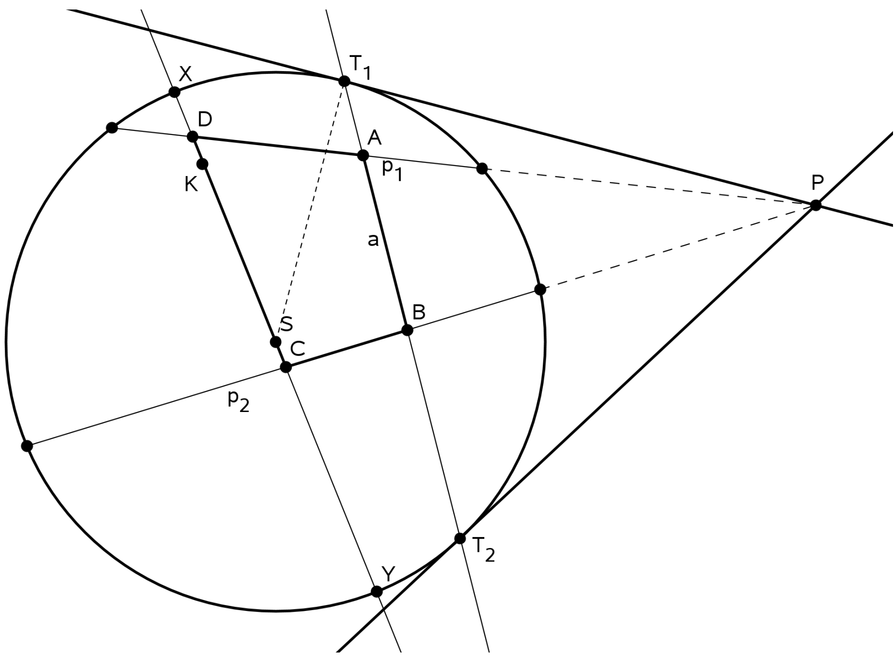
Řešení: Jestli že jsou l-přímka, na které leží body A, B, a l-přímka p, souběžky, stačí nám přenést vzdálenost AB na přímku p od bodu C. Jestli že jsou rozběžky, musíme si zvolit pomocnou l-přímku, která bude souběžná s oběma rozběžkami. V tomto případě musíme vzdálenost AB přenést nejprve na pomocnou l-přímku od libovolného l-bodu R, který na ní leží (viz. obr. 30/str. 52). Vzniknou nám dva l-body R_1 a R_2, které mají od zvoleného l-bodu R požadovanou vzdálenost. Dál pracujeme už jenom s bodem R_1, nebo R_2. Pokud jsme postupovali správně, nezáleží na tom, který si zvolíme. na obrázku (viz. obr. 31/str. 52) pracujeme s bodem R_1. V dalším kroku přeneseme tuto vzdálenost z pomocné l-přímky na l-přímku p, na které leží bod C. Vzniknou nám dva body D_1 a D_2. Dostaneme dvě řešení, protože oba body vyhovují zadání (viz. obr. 32/str. 53).



Obrázek 32: Řešení příkladu 12

Příklad 13. Nechť máme v l-rovině dané l-body A, B a l-bod K. Bod S je střed základní kružnice k. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ tak, aby l-body K, L ležely na l-přímce CD, strany AD a BC byly kolmé na stranu AB a strany AB a CD rovnoběžné.

Řešení: Nejprve sestrojíme l-kolmice na stranu a (úsečka AB), které budou procházet l-body A a B (viz. obr. 33/str. 54). To uděláme za pomoci e-tečen ke e-kružnici k v bodech $\dot{a}$. E-průsečík e-tečen si označíme jako bod P. Tímto bodem kterým procházejí všechny l-kolmice k úsečce a. Naše hledané l-kolmice b, d budou ležet na e-přímkách, které procházejí e-bodem P a l-bodem A (kolmice d) resp. l-bodem B (kolmice b). Teď už jen stačí udělat rovnoběžku se stranou a, která prochází l-body K a S. Jestli tato rovnoběžka protne l-kolmice b (vznikne bod C) a d (vznikne bod D), můžeme sestrojit hledaný čtyřúhelník. V opačném případě příklad nemá řešení.



Obrázek 33: Řešení příkladu č.13

Závěr

Ve své práci jsem se zabývala neeuklidovskou geometrií. Při psaní práce jsem se seznámila s touto geometrií a získala přehled v literatuře, která se této neeuklidovské geometrii věnuje. Myslím, že se mi podařilo dané téma zpracovat způsobem, který je vhodný pro výklad na střední škole pro studenty, kteří o neeuklidovské geometrii nemají žádné předcházející vědomosti. Právě seznámení s tímto tématem by mohlo pomoci studentům středních škol pochopit význam a fungování geometrie euklidovské a podpořit jejich geometrickou představivost a smýšlení. V úvodu píši o dlouhé cestě k objevení neeuklidovské geometrie, která je ovlivněna neúspěšnými důkazy. V této části jsem se snažila poukázat na rozdíly mezi euklidovskou a neeuklidovskou geometrií, za pomoci chybných předpokladů, které byly použité při neúspěšných důkazech.

Při hledání těchto informací jsem objevila v literatuře veliké množství zmínek o různých větách, které jsou ekvivalentní s euklidovým 5. axiomem. Tyto věty jsem následně přehledně sepsala ve druhé kapitole. V literatuře jsem objevila také dva pohledy na neeuklidovskou geometrii, na které jsem ve třetí kapitole upozornila a vysvětlila místo neeuklidovské geometrie v každém z nich.

Při hledání zdrojů jsem zjistila, že se jenom těžce dá najít větší množství informací o využití neeuklidovské geometrie. Předpokládám, že je to asi tím, že obory a způsoby využití nejsou úplně běžné a snadné na pochopení. Pokusila jsem se najít a uvést několik druhů využití, které ovlivňují každodenní život lidí bez toho, aby si to uvědomovali.

Pro samotné seznamování s novou geometrií jsem napsala nejprve kapitolu, ve které čtenář o ní získá základní představu za pomoci 3D modelů. Tato představa je podle mě důležitá pro uvědomění si základních odlišností od geometrie euklidovské. Protože zkoumání geometrie za pomoci modelů nemusí být pro čtenáře běžné, v šesté kapitole se věnuji způsobům, kterým můžeme geometrii zkoumat, popisuji jejich výhody a nevýhody.

Pro samotnou práci v neeuklidovské rovině jsem vybrala Beltrami-Kleinův model, protože je podle mě nejnázornější a lehce se v něm dá pracovat i za pomoci volně dostupných matematických softwarů, které v dnešní době výrazně pomáhají při výuce matematiky na školách. V tomto modelu jsem zavedla vlastní (podle mě intuitivnější) značení a popsala základní objekty a vlastnosti, se kterými později pracuji v konkrétních příkladech. Tyto příklady jsem vymyslela tak, aby pomohly k procvičení nových znalostí a v případě neúspěchu řešení těchto příkladů odhalily, které informace o práci v Beltrami-Kleinovu modelu čtenáři v předcházejícím textu unikly.

K příkladům jsem vytvořila aplety v matematickém programu GeoGebra. Tyto aplety názorně ukazují postupy konstrukcí a umožňují zkoumat řešitelnost příkladů při různých polohách zadaných objektů.

Eventuální návazná práce na tuto bakalářskou práci by se mohla věnovat více Beltrami-Kleinovu modelu, zavést ještě některé o něco náročnější pojmy jako jsou například hyrocykl a hypocykl. Také by mohla být věnována jiným modelům, které by mohly být navzájem porovnány.

Seznam použitých symbolů a zkratek

n. l. našeho letopočtu

obr. obrázek

př. n. l. před naším letopočtem

str. strana

t.j. to jest

tzv. takzvaný

viz. odkaz na jinou stránku

3D trojrozměrný

l- útvar v Lobačevského geometrii

e- útvar v euklidovské geometrii

k-bod bod ležící na kružnici k, která ohraničuje Lobačevského rovinu

v-bod bod ležící vně kružnice k, která ohraničuje Lobačevského rovinu

log logaritmus o základu 10

$\bar{x}$ množina v-bodů e-přímky x

$\dot{x}$ množina k-bodů e-přímky x

$\cap$ průnik

$\emptyset$ prázdná množina

$\in$ patří, náleží

$\square$ konec důkazu

Seznam použité literatury, pramenů a informačních zdrojů

[1] BEČVÁŘOVÁ, Martina. *České překlady a čeští překladatelé euklidových Základů* [online]. [cit. 2013-08-07]. Dostupné z: `http://www.old-kfi.zcu.cz/akce/2008/eukleides/becvarova.pdf`

[2] BLASCHKE, Wilhelm. *Analytische Geometrie.* Birkhäuser, 1954. ISBN 978-3764300319.

[3] BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF; *Planimetrie.* 1. vyd. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 2009. ISBN 978-807290-404-4.

[4] COXETER, H.S.M.. *Projective Geometry.* Springer, 2003. ISBN 978-0387406237.

[5] CRILLY, Tony; *Matematika-50 myšlenek, které musíte znát.* 1. vyd. Jozef Koval. Praha: Slovart, 2009. Alias Press. ISBN 978-80-7391-409-7.

[6] EUKLEIDES. *Základy. Knihy I-IV.* 1. vyd. Praha: OPS, 2008, ISBN 80-903773-6-X.

[7] EUKLEIDES. *Základy. Knihy V-VI.* 1. vyd. Praha: OPS, 2009, ISBN 978-80-87269-05-3.

[8] EUKLEIDES. *Základy. Knihy VII-IX.* 1. vyd. Praha: OPS, 2010, ISBN 978-80-87269-11-4.

[9] EUKLEIDES. *Základy. Kniha X.* 1. vyd. Praha: OPS, 2013, ISBN 978-80-87269-26-8.

[10] EUKLEIDES. *Základy. Knihy XI-XII.* 1. vyd. Praha: OPS, 2012.

[11] Farkas Bolyai. SCHOOL OF MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL SCIENCES UNIVERSITY OF ST ANDREWS. *TURNBULL.* [online]. [cit. 2013-08-07]. Dostupné z: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bolyai_Farkas.html`

[12] GATIAL, Jan a Milan HEJNÝ. *Stavba Lobačevského planimetrie.* 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1969. Škola mladých matematiků, sv.24.

[13] HAŠEK, Roman. *home.pf.jcu.cz.* [online]. [cit. 5.2.2014]. Dostupný na WWW: `http://home.pf.jcu.cz/~hasek/ZS/pappova.pdf`

[14] HAVLÍČEK, Karel et al. *Cesty moderní matematiky.* 1. vyd. Praha, 1960.

[15] HLAVATÝ, Václav. *Úvod do neeuklidovské geometrie.* 2. vyd. Praha: Jednota československých metematiků a fysiků v Praze, 1949. Kruh, svazek 3.

[16] Johann Carl Friedrich Gauss. SCHOOL OF MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL SCIENCES UNIVERSITY OF ST ANDREWS. *TURNBULL*, Scotland. [online]. [cit. 2013-08-07]. Dostupné z: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gauss.html`

[17] KULCZYCKI, Stefan. *Non-euclidean geometry.* Poland, 1961.

[18] KUTUZOV, B.V. *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie.* 1. vyd. Praha: Československá akademie věd, 1953.

[19] LÁVIČKA, Miroslav. *Syntetická geometrie* [online]. Plzeň, 2007 [cit. 2013-08-07]. Dostupné z: `http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/SG/texty/sg_text.pdf`

[20] Metrický prostor: Definice. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2014-02-16]. Dostupné z: `http://cs.wikipedia.org/wiki/Metrick%C3%BD_prostor`

[21] Nikolai Ivanovich Lobachevsky. SCHOOL OF MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL SCIENCES UNIVERSITY OF ST ANDREWS. *TURNBULL* [online]. [cit. 2013-08-07]. Dostupné z: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Lobachevsky.html`

[22] O'SHEA, Donal; *Poincarého domněnka.* 1. vyd. Tomáš Znamenáček. Praha: Academia, 2009. GALILEO, sv.41. ISBN 978-80-200-1658-4.

[23] PAVLÍČEK, J.B. *Základy neeuklidovské geometrie Lobačevského*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1953

[24] SERVÍT, František. *euklidovy Základy (elementa)* [online]. Praha, 1907 [cit. 2014-01-27]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Eukleides.pdf

[25] ŠEDIVÝ, Ondrej a Dušan VALLO. *Základy neeuklidovskej geometrie: Lobačevského planimetrie*. Nitra, 2010. Prírodovedec č. 431. ISBN 978-80-8094-803-0. [online]. [cit. 2013-09-05]. Dostupné z: http://www.km.fpv.ukf.sk/upload_publikacie/20110517_183528__1.pdf

[26] TICHÁNEK, Bohumír. *tichanek.cz*. [online]. [cit. 5.2.2014]. Dostupný na WWW: http://www.tichanek.cz/g10/10obr9.PNG

[27] WILDBERGER, N.J.. *Math History 12: Non-euclidean geometry*. [video]. [cit. 2013-08-07] 2011. Dostupné z: http://www.youtube.com/watch?v=zHh9q_nKrbc

Přílohy

K této práci je přiloženo CD s přílohami. Přílohy jsou soubory s příponou .ggb (pro přímé spuštění v programu GeoGebra) nebo s příponou .html (pro spuštění je nutno mít povolen JavaScript v prohlížeči), které obsahují také postup konstrukce.

- Priklad1.ggb
- Priklad1.html
- Priklad2.ggb
- Priklad2.html
- Priklad3.ggb
- Priklad3.html
- Priklad5.ggb
- Priklad5.html
- Priklad7-rozbezky.ggb
- Priklad7-soubezky.ggb
- Priklad7-rozbezky.html
- Priklad7-soubezky.html
- Priklad8.ggb
- Priklad8.html
- Priklad9.ggb
- Priklad9.html
- Priklad10.ggb
- Priklad10.html

- Priklad11.ggb
- Priklad11.html
- Priklad12.ggb
- Priklad12.html
- Priklad13.ggb
- Priklad13.html
- Veta5-ruznobezky.ggb
- Veta5-ruznobezky.html
- Veta5-soubezky.ggb
- Veta5-soubezky.html