Lineární algebra I

Jiří Bureš, Jarmila Novotná

1 Vektorový prostor

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1. (**Aritmetický vektor**)
Nechť T je těleso a $n \in \mathbb{N}$. Uspořádanou n-tici $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, kde $u_i \in T$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nazýváme *n-rozměrným aritmetickým vektorem* nad tělesem T. Prvek $u_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, nazýváme *$i$-tým členem* aritmetického vektoru u. Množinu všech n-rozměrných aritmetických vektorů nad T budeme značit $V_n(T)$.

Definice 1.2. (**Rovnost, sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem**)
Dva n-rozměrné aritmetické vektory $u, v \in V_n(T)$ se *sobě rovnají* (píšeme $u = v$) právě tehdy, když $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : u_i = v_i$.
Součet $u + v$ dvou aritmetických vektorů $u, v \in V_n(T)$ definujeme takto:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n).$$

Pro $\alpha \in T$ definujeme *α-násobek* aritmetického vektoru $u \in V_n(T)$ takto:

$$\alpha.u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n).$$

Definice 1.3. (**Nulový aritmetický vektor**)
Nulovým aritmetickým vektorem nad tělesem T nazýváme vektor o, jehož všechny členy jsou rovny nulovému prvku tělesa T, tj. $o = (0, 0, \ldots, 0)$.

Definice 1.4. (**Vektorový prostor**)
Nechť T je těleso a V je neprázdná množina. Označme $+$ zobrazení $V \times V \to V$ (vnitřní operace na V - sčítání vektorů) a . zobrazení $T \times V \to V$ (vnější operace na V s operátory z tělesa T - násobení vektoru skalárem).
Uspořádanou trojici $(V, +, .)$ nazveme *vektorovým prostorem nad tělesem* T, jestliže platí:

1. množina V je uzavřená vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem,
2. $(V, +)$ je komutativní grupa,
3. vnější operace . splňuje tyto podmínky:
   (a) $\forall \alpha \in T \, \forall u, v \in V : \alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$,

(b) $\forall \alpha, \beta \in T\, \forall u \in V : (\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u,$

(c) $\forall \alpha, \beta \in T\, \forall u \in V : (\alpha\beta).u = \alpha.(\beta.u),$

(d) $\forall u \in V : 1.u = u$, kde 1 je jednotkový prvek v T.

Prvky z množiny V nazýváme *vektory*, prvky z tělesa T nazýváme *skaláry.*

Označení: Protože $(V, +)$ je grupa, existuje *nulový vektor* o a ke každému $u \in V$ existuje *opačný vektor* $-u$. Místo vektorový prostor $(V, +, .)$ budeme psát pouze $V(T)$, příp. V, pokud nebude moci dojít k nedorozumění. Místo $u + (-v)$ budeme stručně psát $u - v$. Je-li $V = \{o\}$, nazýváme vektorový prostor $(\{o\}, +, .)$ nad tělesem T *nulovým vektorovým prostorem* a píšeme $\{o\}$, v ostatních případech mluvíme o *nenulových vektorových prostorech.* Nulový vektorový prostor je „nejmenším" vektorovým prostorem.

Příklad 1.1. Pojem vektorový prostor je ilustrován následujícími příklady:

- Množina $V_n(\mathbb{R})$ všech n-rozměrných aritmetických vektorů nad tělesem $\mathbb{R}$ s operací sčítání vektorů a násobení vektorů reálným číslem tvoří vektorový prostor.

- Množina všech polynomů stupně nejvýše n je uzavřená vzhledem ke sčítání polynomů a násobení polynomů skalárem a tvoří spolu s příslušnými operacemi vektorový prostor P_n.

- Množina všech polynomů stupně právě n spolu se sčítáním polynomů a násobení polynomů skalárem netvoří vektorový prostor, protože není uzavřená vzhledem ke sčítání polynomů.

Věta 1.1. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Pak platí:*

1. $\forall u \in V : 0.u = o,$

2. $\forall u \in V : -a = (-1).a,$

3. $\forall \alpha \in T : \alpha.o = o,$

4. $\forall \alpha \in T\ \forall u \in V : \alpha.u = o \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee u = o).$

Důkaz:

1. Nechť u je libovolný vektor z vektorového prostoru V. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} 1 + 0 &= 1, \qquad |.u \\ (1 + 0).u &= 1.u, \\ 1.u + 0.u &= 1.u, \\ u + 0.u &= u, \qquad | + (-u) \\ 0.u &= o. \end{aligned}$$

2. Nechť u je libovolný vektor z vektorového prostoru V. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} 1+(-1) &= 0, \qquad |.u \\ [1+(-1)].u &= 0.u, \\ 1.u+(-1).u &= o, \qquad |-u \\ (-1).u &= -u. \end{aligned}$$

3. Nechť u je libovolný vektor z vektorového prostoru V a $\alpha \in T$. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} u+(-u) &= o, \\ \alpha.[u+(-u)] &= \alpha.o, \\ \alpha.u+\alpha.(-u) &= \alpha.o, \\ \alpha.u+\alpha.[(-1).u] &= \alpha.o, \\ \alpha.u+[\alpha(-1)].u &= \alpha.o, \\ \alpha.u+[(-1)\alpha].u &= \alpha.o, \\ [\alpha+(-\alpha)].u &= \alpha.o, \\ 0.u &= \alpha.o, \\ o &= \alpha.o. \end{aligned}$$

4. Pravdivost implikace $(\alpha = 0 \vee u = o) \Rightarrow \alpha.u = o$ plyne z 1 a 3. Nyní ukážeme, že pro libovolný vektor $u \in V$ a $\alpha \in T$ platí $\alpha.u = o \Rightarrow (\alpha = 0 \vee u = o)$.
   Nejprve ukážeme, že platí: $(\alpha \neq 0 \wedge \alpha.u = o) \Rightarrow (u = o)$. Postupně dostáváme:

$$\alpha.u = o \Leftrightarrow \alpha^{-1}\alpha.u = \alpha^{-1}.o \Leftrightarrow u = \alpha^{-1}.o = o.$$

   Nyní ukážeme sporem, že platí $(u \neq o \wedge \alpha.u = o) \Rightarrow (\alpha = 0)$.
   Předpokládejme, že $(u \neq o \wedge \alpha.u = o) \wedge \alpha \neq 0$. Pak ale podle 1 dostaneme $u = o$, což je ve sporu s předpokladem, že $u \neq o$.

Definice 1.5. (**Podprostor vektorového prostoru**)
Nechť W je neprázdná podmnožina vektorového prostoru $(V,+,.)$. Uspořádanou trojici $(W,+,.)$, kde operace + a . jsou zúžením příslušných operací prostoru V na prvky množiny W, nazveme *(vektorovým) podprostorem* prostoru V.

Poznámka: Operace + a . jsou na množinách V a W definovány stejným způsobem. Zúžení operací + a . na prvky množiny W znamená, že tyto operace můžeme provádět pouze s prvky množiny W.

Věta 1.2. ***(Podprostor vektorového prostoru)***
Nechť W je neprázdná podmnožina vektorového prostoru $(V,+,.)$. $(W,+,.)$ je podprostorem prostoru V právě tehdy, když platí:

1. $\forall u, v \in W : u + v \in W,$

2. $\forall \alpha \in T\, \forall u \in W : \alpha.u \in W.$

Důkaz: Je-li W podprostorem vektorového prostoru V, mají operace + a . ve W stejné vlastnosti jako v prostoru V. Pokud pro podmnožinu W prostoru V platí podmínky z věty 1.2, jsou na ní definovány operace + a . stejným způsobem jako na množině V. Operace + je tedy komutativní a asociativní a zároveň platí vlastnosti 3 a - d z definice 1.4. Podle předpokladu je množina W neprázdná, a obsahuje tedy aspoň jeden prvek $u \in W$. Podle věty 1.1 platí $0.u = o$ a množina W obsahuje nulový vektor o. Pro libovolný vektor $v \in W$ platí $(-1).v = -v$, a tedy množina W obsahuje ke každému vektoru vektor k němu opačný. $(W, +)$ je tedy komutativní grupa a $(W, +, .)$ je podprostorem prostoru V.

Věta 1.3. *Průnik konečného počtu podprostorů vektorového prostoru V je podprostor prostoru V.*

Důkaz: Označíme U průnik konečného počtu podprostorů prostoru V. Každý podprostor obsahuje nulový vektor o, a tedy množina U je neprázdná. Pokud jsou vektory u, v prvky množiny U, musí být také prvky každého z uvažovaných podprostorů. Podle věty 1.2 leží v každém z podprostorů i vektory $u+v$ a $\alpha.u, \alpha \in T$, které tedy leží i v průniku uvažovaných podprostorů a U je podprostorem V.

Definice 1.6. (**Lineární kombinace**)
Nechť $u_1, \dots, u_n$ jsou vektory z V. Řekneme, že vektor v je *lineární kombinací* vektorů $u_1, \dots, u_n$, jestliže existují skaláry $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ takové, že

$$v = \alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_n.u_n.$$

Skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazýváme *koeficienty* této lineární kombinace.

Věta 1.4. *Nechť $u_1, \dots, u_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Pak množina*

$$M = \{\alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_n.u_n;\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T\}$$

tvoří spolu s příslušnými operacemi podprostor prostoru V.

Důkaz: Množina M je zřejmě neprázdná a uzavřená vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem. Množina M tedy tvoří podprostor vektorového prostoru V.

Definice 1.7. (**Lineární obal**)
Nechť A je podmnožinou vektorového prostoru V. Průnik všech podprostorů prostoru V, které obsahují množinu A, nazveme *lineárním obalem množiny A*.

Poznámka: Lineární obal množiny A značíme $[A]$.

Věta 1.5. *Nechť A je podmnožinou vektorového prostoru V. Pak platí:*

1. *Je-li $A = \emptyset$, pak lineární obal množiny A obsahuje pouze nulový vektor prostoru V.*

2. *Je-li A neprázdná podmnožina V, pak $[A]$ je množina všech lineárních kombinací všech vektorů z A.*

Důkaz:
1. Tvrzení plyne přímo z definice 1.7.
2. Předpokládejme, že A neprázdná podmnožina V. Označíme B množinu všech lineárních kombinací všech vektorů z A a ukážeme, že $[A] \subset B \wedge B \subset [A]$, a tedy $[A] = B$.

1. Nejprve ukážeme, že $[A] \subset B$. Každý vektor $u \in A$ můžeme napsat jako $u = 1.u$, a tedy $A \subset B$. $[A]$ je podle definice 1.7 průnikem všech podprostorů obsahujících množinu A, a tedy i $[A] \subset B$, protože množina B je podle věty 1.4 podprostorem V.

2. Dále ukážeme, že $B \subset [A]$. Označme B' podprostor V, který obsahuje množinu A. Jelikož B' obsahuje množinu A, obsahuje také všechny lineární kombinace vektorů z A, a tedy $B \subset B'$ a $B \subset [A]$.

Definice 1.8. (**Množina generátorů**)
Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá *množinou generátorů prostoru* V právě tehdy, když $[M] = V$.

Poznámka: Je-li M množina generátorů prostoru V, říkáme také, že množina M generuje vektorový prostor V.

Příklad 1.2. Následující množiny tvoří množiny generátorů příslušného vektorového prostoru:

- $P = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ je množina generátorů vektorového prostoru P_n.
- $M_1 = \{(0,1), (1,0)\}, M_2 = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$ jsou množiny generátorů vektorového prostoru $V_2(\mathbb{R})$.

Věta 1.6. *Nechť $u_1, \ldots, u_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V, $M = [u_1, \ldots, u_n]$. Provedeme-li na skupinu vektorů $u_1, \ldots, u_n$ některou z následujících změn, dostaneme novou skupinu vektorů, která generuje stejný vektorový prostor M:*

1. *změna pořadí vektorů,*
2. *nahrazení libovolného vektoru z M jeho α-násobkem, kde $\alpha \in T, \alpha \neq 0$,*
3. *nahrazení libovolného vektoru z M jeho součtem s lineární kombinací ostatních vektorů z M,*
4. *vynechání vektoru, který je lineární kombinací ostatních vektorů,*
5. *přidání vektoru, který je lineární kombinací vektorů z M.*

Důkaz přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Věta 1.7. *Nechť $u_1, \ldots, u_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Vektor $v \in V$ je lineární kombinací vektorů $u_1, \ldots, u_n$ právě tehdy, když*

$$[u_1, \ldots, u_n] = [u_1, \ldots, u_n, v].$$

Důkaz: Označíme $M = [u_1, \dots, u_n]$ a $N = [u_1, \dots, u_n, v]$ a ukážeme, že $M = N$. Postupně dokážeme obě implikace:
I. ($\Rightarrow$) Pokud v je lineární kombinací $u_1, \dots, u_n$, pak $v \in M$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je vektor $u_i = 0.u_1 + \dots + 1.u_i + \dots + 0.u_n$ prvkem M, tj. $N \subset M$.
Libovolný vektor $w \in M$ lze vyjádřit jako $w = \gamma_1.u_1 + \dots + \gamma_n.u_n + 0.v$, a tedy $M \subset N$. Ukázali jsme, že $(M \subset N) \wedge (N \subset M)$, a tedy $M = N$.
II. ($\Leftarrow$) Pokud $M = N$, pak $v \in M$ a v je lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_n$.

Definice 1.9. (**Triviální a nulová lineární kombinace**)

1. Nechť $u_1, \dots, u_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Jsou-li všechny koeficienty lineární kombinace $\alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_n.u_n$ rovny nulovému skaláru, nazveme danou lineární kombinaci *triviální*. V opačném případě mluvíme o *netriviální lineární kombinaci.*

2. Jestliže platí $\alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_n.u_n = o$, nazýváme tuto lineární kombinaci *nulovou.*

1.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice 1.10. (**Lineární závislost vektorů**)
Nechť $u_1, \dots, u_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Jestliže existuje nulová netriviální lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_n$, nazýváme tyto vektory *lineárně závislými*, v opačném případě *lineárně nezávislými.*

Příklad 1.3. Příklady lineárně závislých a lineárně nezávislých množin vektorů:

1. Vektory $(1, 1), (2, 2), (1, 2)$ jsou lineárně závislé, protože existuje netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, např. $-2.(1, 1) + (2, 2) + 0.(1, 2) = (0, 0)$.

2. Uvažujme jeden vektor vektorového prostoru V. Je-li tento vektor nenulový, je lineárně nezávislý, je-li nulový, je lineárně závislý.

3. Dva vektory u, v jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého: Pokud $\alpha_1.u + \alpha_2.v = o$, $\alpha_1, \alpha_2 \in T$, a např. $\alpha_1 \neq 0$, pak $u = (-\alpha_2 {\alpha_1}^{-1}).v$. Pokud existuje $k \in T$ takové, že $u = k.v$ pak $1.u - k.v = o$ a vektory jsou lineárně závislé.

4. Pokud daná množina M vektorů obsahuje dva stejné vektory, jsou vektory množiny M lineárně závislé.

5. Pokud daná množina M vektorů obsahuje nulový vektor, jsou vektory lineárně závislé.

6. Pokud z dané množiny lineárně nezávislých vektorů vybereme libovolnou podmnožinu, jsou vybrané vektory lineárně nezávislé.

Věta 1.8. *Nechť $u_1, \dots, u_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Pak vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje index $i, i \in \{1, \dots, n\}$, takový, že vektor u_i je lineární kombinací ostatních vektorů.*

Důkaz: Postupně dokážeme obě implikace:
I. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně závislé. Pak existují $\alpha_k \in T$, $k \in \{1, \dots, n\}$, a $\alpha_i \neq 0$ tak, že $\alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_i.u_i + \dots + \alpha_n.u_n = o$. Potom $u_i = (-\alpha_1 {\alpha_i}^{-1}).u_1 + \dots + (-\alpha_n {\alpha_i}^{-1}).u_n$.
II. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že vektor u_k je lineární kombinací ostatních vektorů, a tedy existují koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ takové, že $u_k = \alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_{k-1}.u_{k-1} + \alpha_{k+1}.u_{k+1} + \dots + \alpha_n.u_n$.
Potom $\alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_{k-1}.u_{k-1} + (-1).u_k + \alpha_{k+1}.u_{k+1} + \dots + \alpha_n.u_n = o$ a vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně závislé.

Věta 1.9. *Nechť $u_1, \dots, u_n, v$ jsou vektory z vektorového prostoru V a nechť vektor v je lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_n$ a vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně nezávislé. Pak skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ v rovnosti $\alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_n.u_n = v$ jsou určeny jednoznačně.*

Důkaz: Předpokládejme, že koeficienty příslušné lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_n$ nejsou určeny jednoznačně. Pak existují různé n-tice $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ a $\beta_1, \dots, \beta_n \in T$ takové, že $v = \alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_n.u_n = \beta_1.u_1 + \dots + \beta_n.u_n$. Potom $o = (\alpha_1 - \beta_1).u_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n).u_n$. Jelikož vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně nezávislé, dostáváme $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$, což je spor s předpokladem, že n-tice $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ a $\beta_1, \dots, \beta_n \in T$ jsou různé. Koeficienty lineární kombinace jsou tedy určeny jednoznačně.

Definice 1.11. (**Báze vektorového prostoru**)
Množina $\mathcal{B} \subset V$ se nazývá *báze* prostoru V právě tehdy, když jsou vektory z množiny $\mathcal{B}$ lineárně nezávislé a množina $\mathcal{B}$ generuje V.

Příklad 1.4. U některých vektorových prostorů lze snadno stanovit aspoň jednu bázi. Existují ale také prostory, které nemají bázi. Následující příklady vektorových prostorů ilustrují různé případy, které mohou nastat:

- Nechť $V_n(\mathbb{R})$ je aritmetický vektorový prostor. Pak jedna z bází $V_n(\mathbb{R})$ je $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}$.
- Nechť P_n je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše n. Pak $\mathcal{B}(P_n) = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$.
- Vektorový prostor, který obsahuje pouze nulový vektor, nemá bázi.

Definice 1.12. (**Souřadnice vektoru vzhledem k bázi**)
Označme $\mathcal{B}$ skupinu vektorů $\{u_1, \dots, u_n\}$ v tomto pořadí a nechť $\mathcal{B}$ je báze vektorového prostoru V, $v \in V$. Uspořádanou n-tici skalárů $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ takovou, že platí

$$v = \alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_n.u_n,$$

nazýváme *souřadnicemi vektoru v vzhledem k bázi $\mathcal{B}$* a píšeme $v_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Poznámka: Podle věty 1.9 jsou souřadnice vektoru vzhledem k bázi určeny jednoznačně.

1.3 Steinitzova věta o výměně a její důsledky

Věta 1.10. ***Steinitzova věta.***
Nechť vektory $a_1, \ldots, a_n$ generují vektorový prostor V nad tělesem T. Nechť vektory $b_1, \ldots, b_k$ z prostoru V jsou lineárně nezávislé. Pak platí:
a) $k \leq n$,
b) existuje $n-k$ vektorů z $\{a_1, \ldots, a_n\}$, které spolu s vektory $b_1, \ldots, b_k$ generují V.

Důkaz: Indukcí pro k.

1) Položme $k=1$.

Jelikož $1 \leq n$, platí tvrzení a), a tedy $k \leq n$. Jelikož vektory $a_1, \ldots, a_n$ generují vektorový prostor V, pak existují skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$ takové, že $b_1 = \alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n$. Protože $b_1 \neq o$, existuje index $i \in \{1, \ldots, n\}$ takový, že $\alpha_i \neq 0$. Z vlastností tělesa T plyne, že existuje také prvek inverzní k prvku α_i, který označíme α_i^{-1}. Postupně dostáváme:

$$\alpha_i.a_i = b_1 - \alpha_1.a_1 - \alpha_{i-1}.a_{i-1} - \alpha_{i+1}.a_{i+1} - \ldots - \alpha_n.a_n,$$

$$a_i = \alpha_i^{-1}.b_1 - (\alpha_i^{-1}\alpha_1).a_1 - (\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}).a_{i-1} - (\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}).a_{i+1} - \ldots - (\alpha_i^{-1}\alpha_n).a_n.$$

V množině generátorů $\{a_1, \ldots, a_n\}$ můžeme tedy vektor a_i nahradit vektorem b_1, a tedy $[a_1, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, a_{i+1}, \ldots, a_n]$ a vektory $a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, a_{i+1}, \ldots, a_n$ generují vektorový prostor V.

2) Předpokládejme, že $k > 1$ a že tvrzení platí pro $k-1$ vektorů, tj. $k-1 \leq n$, a při vhodném přečíslování vektorů je $[a_1, \ldots, a_n] = [b_1, \ldots, b_{k-1}, a_k, \ldots, a_n]$. Ukážeme, že tvrzení platí pro k vektorů. Podle indukčního předpokladu můžeme vyjádřit vektor b_k jako lineární kombinaci vektorů $b_1, \ldots, b_{k-1}, a_k, \ldots, a_n$:

$$b_k = \alpha_1.b_1 + \cdots + \alpha_{k-1}.b_{k-1} + \alpha_k.a_k + \cdots + \alpha_n.a_n.$$

Ukážeme, že $k-1 < n$, a tedy $k \leq n$. Kdyby $k-1 = n$, pak by $V = [b_1, \ldots, b_{k-1}]$, protože podle předpokladu existuje množina generátorů mající právě n prvků. Vektor b_k by tedy byl lineární kombinací vektorů $b_1, \ldots, b_{k-1}$, což je ve sporu s lineární nezávislostí vektorů $b_1, \ldots, b_k$, a tedy $k \leq n$.
Pokud by každý z koeficientů $\alpha_k, \ldots, \alpha_n$ byl roven 0, byl by vektor b_k lineární kombinací vektorů $b_1, \ldots, b_{k-1}$, což je opět ve sporu s lineární nezávislostí vektorů $b_1, \ldots, b_k$. Proto existuje index $p, k \leq p \leq n$, takový, že $\alpha_p \neq 0$. Vektory vhodně seřadíme a označíme tak, aby $\alpha_p = \alpha_k$, a dostáváme

$$a_k = \alpha_k^{-1}.b_k - \alpha_k^{-1}\alpha_1.b_1 - \ldots - \alpha_k^{-1}\alpha_{k-1}.b_{k-1} - \alpha_k^{-1}\alpha_{k+1}.a_{k+1} - \ldots - \alpha_k^{-1}\alpha_n.a_n,$$

a tedy

$$[b_1, \ldots, b_{k-1}, a_k, \ldots, a_n] = [b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n].$$

Ukázali jsme tedy, že tvrzení platí pro každé $k \leq n$.

Důsledky Steinitzovy věty:

Věta 1.11. *Všechny báze prostoru V konečné dimenze mají stejný počet prvků.*

Důkaz: Označme $\mathcal{B} = \{a_1, \dots, a_k\}$ a $\mathcal{B}' = \{b_1, \dots, b_n\}$ dvě báze prostoru V. Množina $\mathcal{B}$ je množinou generátorů prostoru V a množina $\mathcal{B}'$ je lineárně nezávislá. Podle Steinitzovy věty platí $k \leq n$. Obdobně můžeme uvažovat množinu $\mathcal{B}'$ jako množinu generátorů prostoru V a množinu $\mathcal{B}$ jako lineárně nezávislou množinu, a tedy $n \leq k$. Platí tedy zároveň $k \leq n$ i $n \leq k$. Z antisymetrie relace $\leq$ plyne $k = n$ a všechny báze prostoru V mají stejný počet prvků.

Definice 1.13. (**Konečně rozměrný a nekonečně rozměrný vektorový prostor**)
Vektorový prostor nazýváme *konečně rozměrným*, jestliže má aspoň jednu konečnou množinu generátorů. V opačném případě ho nazýváme *nekonečně rozměrným*.

Definice 1.14. (**Dimenze vektorového prostoru**)
Nechť V je vektorový prostor. *Dimenzí* nenulového konečně rozměrného prostoru V nazýváme počet prvků některé jeho báze. Dimenze nulového vektorového prostoru je 0. Dimenze nekonečně rozměrného vektorového prostoru je ∞. Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Příklad 1.5. Množina $V_3(\mathbb{R})$ všech 3-rozměrných aritmetických vektorů nad tělesem $\mathbb{R}$ tvoří spolu s příslušnými operacemi vektorový prostor dimenze 3, protože např. $V_3(\mathbb{R}) = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ a vektory $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ jsou lineárně nezávislé. Množina všech konvergentních posloupností nad tělesem $\mathbb{R}$ spolu s operacemi sčítání posloupností (člen po členu - sčítání členů posloupnosti se stejným indexem) a násobení reálným číslem (každý člen posloupnosti je vynásoben daným reálným číslem) tvoří vektorový prostor nekonečné dimenze.

Věta 1.12. *Nechť $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ je báze vektorového prostoru V a nechť $a_1, \dots, a_k$ jsou vektory z V. Pokud $k > n$, pak vektory $a_1, \dots, a_k$ jsou lineárně závislé.*

Důkaz: Pokud by vektory $a_1, \dots, a_k$ byly lineárně nezávislé, pak by byla splněna nerovnost $k \leq n$, což je ve sporu s předpokladem $k > n$.

Věta 1.13. *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze $n \geq 1$ a vektory $b_1, b_2, \dots, b_k$ z V jsou lineárně nezávislé. Pokud $k = n$, pak je množina $\{b_1, \dots, b_k\}$ bází prostoru V. Pokud $k < n$, pak existuje ve V $n - k$ vektorů takových, že jejich přidáním k množině $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ vznikne báze prostoru V.*

Důkaz: Nechť $\{a_1, \dots, a_n\}$ je báze V. Pokud $k = n$, můžeme podle Steinitzovy věty postupně vyměnit všechny vektory a množina $\{b_1, \dots, b_k\}$ je bází prostoru V. Pokud $k < n$, doplníme k množině $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ $n - k$ vhodně zvolených vektorů množiny $\{a_1, \dots, a_n\}$ tak, aby výsledná množina obsahovala n lineárně nezávislých vektorů a tvořila bázi prostoru V.

Steinitzovu větu a její důsledky využijeme při řešení konkrétních úloh zejména v podobě následujících tvrzení. Nechť $\dim V = n$. Pak platí:

1. Jsou-li $b_1, b_2, \ldots, b_k \in V, k < n$, lineárně nezávislé vektory, lze je doplnit na bázi prostoru V.

2. Vektory $a_1, \ldots, a_n \in V$ tvoří bázi V právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé.

3. Vektory $a_1, \ldots, a_n \in V$ tvoří bázi V právě tehdy, když generují V.

4. Vektory $a_1, \ldots, a_n \in V$ tvoří bázi V právě tehdy, když libovolný vektor $u \in V$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinaci vektorů $a_1, \ldots, a_n$.

1.4 Lineární a direktní součet podprostorů

Věta 1.14. *Nechť U, W jsou podprostory vektorového prostoru V.*
Potom množina $U + W = \{a + b\,; a \in U, b \in W\}$ je podprostorem vektorového prostoru V.

Důkaz: Postupně ověříme všechny vlastnosti podprostoru podle věty 1.2:

1. $(o \in U \wedge o \in W) \Rightarrow (o = o + o \in U + W)$, a tedy množina $U + W$ je neprázdná.

2. $z_1, z_2 \in U + W \Rightarrow \exists u_1, u_2 \in U\ \exists w_1, w_2 \in W : z_1 = u_1 + w_1, z_2 = u_2 + w_2$. Postupně dostáváme $z_1 + z_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$ a množina $U + W$ je uzavřená vzhledem ke sčítání vektorů.

3. $\alpha \in T, z \in U + W \Rightarrow \exists u \in U\ \exists w \in W : z = u + w$.
   Postupně dostáváme $\alpha.z = \alpha.(u + w) = \alpha.u + \alpha.w \in U + W$ a množina $U + W$ je uzavřená vzhledem k násobení vektorů skalárem.

Množina $U + W$ je tedy podle věty 1.2 podprostorem V.

Definice 1.15. (**Lineární a direktní součet**)

1. Nechť U, W jsou podprostory vektorového prostoru V. Podprostor $U + W$ nazýváme *lineárním součtem* podprostorů U, W.

2. Nechť $U \cap W = \{o\}$. Potom lineární součet $U + W$ nazýváme *direktním součtem* podprostorů U, W a píšeme $U \oplus W$.

Věta 1.15. *Nechť $U = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a $W = [b_1, b_2, \ldots, b_k]$ jsou podprostory vektorového prostoru V. Pak platí:*

$$U + W = [a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k].$$

Důkaz je zřejmý.

Věta 1.16. *Nechť U, W jsou podprostory vektorového prostoru V konečné dimenze. Pak platí:*

$$\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W).$$

Důkaz: Pokud $(U \subset W) \vee (W \subset U)$, věta zřejmě platí.
Předpokládejme nyní, že U není podprostorem W a W není podprostorem U. Nechť $U \cap W = [z_1, \ldots, z_t]$, kde $z_1, \ldots, z_t$ je báze prostoru $U \cap W$. Pokud $U \cap W$ obsahuje pouze nulový vektor, platí $\dim (U \cap W) = 0$. V ostatních případech jsou vektory $z_1, \ldots, z_t$ lineárně nezávislé a dají se podle Steinitzovy věty doplnit na bázi $\{z_1, \ldots, z_t, u_1, \ldots, u_s\}$ prostoru U, kde $\{u_1, \ldots, u_s\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů prostoru U, i bázi $\{z_1, \ldots, z_t, w_1, \ldots, w_r\}$ prostoru W, kde $\{w_1, \ldots, w_r\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů prostoru W.
Ukážeme sporem, že sjednocení množin generátorů $\{z_1, \ldots, z_t, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_r\}$ prostoru $U + W$ je lineárně nezávislá množina, a tvoří tedy bázi prostoru $U + W$.
Předpokládejme, že vektory $\{z_1, \ldots, z_t, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_r\}$ jsou lineárně závislé. Pak existují koeficienty $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$, kde $i \in \{1, \ldots, t\}, j \in \{1, \ldots, s\}, k \in \{1, \ldots, r\}$, z nichž aspoň jeden je nenulový, takové, že lineární kombinace $\gamma_1.z_1 + \cdots + \gamma_t.z_t + \alpha_1.u_1 + \cdots + \alpha_s.u_s + \beta_1.w_1 + \cdots + \beta_r.w_r$ je rovna nulovému vektoru. Kdyby byly všechny koeficienty $\beta_1, \ldots, \beta_r$ rovny 0, byly by vektory $\{z_1, \ldots, z_t, u_1, \ldots, u_s\}$ lineárně závislé. Proto existuje $\beta_j \neq 0$ a vektor w_j lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů, tj.

$$w_j = -\gamma_1'.z_1 - \ldots - \gamma_t'.z_t - \alpha_1'.u_1 - \ldots - \alpha_s'.u_s - \beta_1'.w_1 - \beta_{j-1}'.w_{j-1} - \beta_{j+1}'.w_{j+1} - \ldots - \beta_r'.w_r,$$

kde koeficienty $\alpha_i', \beta_j', \gamma_k'$ vynásobením původních koeficientů prvkem $\beta_j^{-1} \neq 0$. Z předchozí rovnosti plyne rovnost

$$-w_j - \beta_1'.w_1 - \beta_{j-1}'.w_{j-1} - \beta_{j+1}'.w_{j+1} - \ldots - \beta_r'.w_r = \gamma_1'.z_1 + \cdots + \gamma_t'.z_t + \alpha_1'.u_1 + \cdots + \alpha_s'.u_s.$$

Vektor vyjádřený oběma stranami rovnosti označíme p. Vektor p je tedy lineární kombinací vektorů báze W

$$p = -w_j - \beta_1'.w_1 - \beta_{j-1}'.w_{j-1} - \beta_{j+1}'.w_{j+1} - \ldots - \beta_r'.w_r$$

i báze U

$$p = \gamma_1'.z_1 + \cdots + \gamma_t'.z_t + \alpha_1'.u_1 + \cdots + \alpha_s'.u_s,$$

a tedy patří do $U \cap W$. Bází $U \cap W$ je $\{z_1, ..., z_t\}$, proto lze vektor p vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $z_1, ..., z_t$: $p = \delta_1.z_1 + \cdots + \delta_t.z_t$. Nahradíme-li pravou stranu rovnosti

$$-w_j - \beta_1'.w_1 - \beta_{j-1}'.w_{j-1} - \beta_{j+1}'.w_{j+1} - \ldots - \beta_r'.w_r = \gamma_1'.z_1 + \cdots + \gamma_t'.z_t + \alpha_1'.u_1 + \cdots + \alpha_s'.u_s$$

vyjádřením vektoru p pomocí vektorů báze $U \cap W$, dostáváme

$$w_j = -\beta_1'.w_1 - \beta_{j-1}'.w_{j-1} - \beta_{j+1}'.w_{j+1} - \ldots - \beta_r'.w_r - \delta_1.z_1 - \ldots - \delta_t.z_t.$$

Vektor w_j je tedy lineární kombinací vektorů $w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_r, z_1, \ldots, z_t$, což je spor s předpokladem, že vektory $w_1, \ldots, w_r, z_1, \ldots, z_t$ jsou lineárně nezávislé. Ukázali jsme, že vektory $\{z_1, \ldots, z_t, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_r\}$ jsou tedy lineárně nezávislé a tvoří bázi prostoru $U+W$. Dostáváme $\dim\ (U+W) = t+s+r$, $\dim\ (U \cap W) = t$, $\dim U = t+r$ a $\dim\ W = t+s$, a tedy $\dim\ U + \dim\ W = \dim\ (U+W) + \dim\ (U \cap W) = 2t + r + s$.

Věta 1.17. *Nechť U, W, Z jsou podprostory vektorového prostoru V konečné dimenze. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *Z je direktním součtem podprostorů U, W.*

2. *Z je lineárním součtem podprostorů U, W a $\dim Z = \dim U + \dim W$.*

3. *Je-li $\{u_1, \dots, u_n\}$ báze U a $\{w_1, \dots, w_k\}$ báze W, pak je $\{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_k\}$ báze Z.*

4. *Z je lineárním součtem podprostorů U, W a každý vektor $z \in Z$ lze vyjádřit jediným způsobem ve tvaru $z = u + w$, kde $u \in U, w \in W$.*

Důkaz: K důkazu věty stačí místo důkazu všech ekvivalencí dokázat následující řetězec implikací: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

- ($1 \Rightarrow 2$) Podle definice direktního součtu $U + W$ je tento součet i lineárním součtem a platí, že $\dim (U \cap W) = 0$.
  Dostáváme $\dim U + \dim W = 0 + \dim (U + W) = \dim (U + W)$.

- ($2 \Rightarrow 3$) Označme $\dim U = n$ a $\dim W = k$. Nechť $\{u_1, \dots, u_n\}$ je libovolná báze U a $\{w_1, \dots, w_k\}$ libovolná báze W. Potom podle věty 1.15 je $U+W = [u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_k]$. Jelikož $\dim (U + W) = k + n$, vektory $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_n\}$ tvoří bázi $U + W$.

- ($3 \Rightarrow 4$) Podle předpokladu je $U + W = [u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_k]$. Předpokládejme dále, že existují dvě různá vyjádření vektoru $z = u + w = u' + w'$, kde $u, u' \in U, w, w' \in W$. Potom $z - z = (u - u') + (w - w') = o = \alpha_1.u_1 + \dots + \alpha_n.u_n + \beta_1.w_1 + \dots + \beta_k.w_k$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k \in T$. Vektory $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_k$ tvoří bázi $U + W$, a tedy všechny koeficienty této lineární kombinace jsou rovny 0. Proto $u = u'$ a $w = w'$, což je spor s předpokladem, že obě vyjádření vektoru z jsou různá.

- ($4 \Rightarrow 1$) Označme $z \in U \cap W$. Pak můžeme vyjádřit z jednak jako $z = z + o$, kde $z \in U, o \in W$, jednak také jako $z = o + z$, kde $z \in W, o \in U$. Porovnáním obou vyjádření dostáváme $z = z + o = o + z$. Podle 4 je takové vyjádření jednoznačné a $z = o$. Potom platí, že $U \cap W = \{o\}$ a $Z = U \oplus W$.

1.5 Úlohy k procvičení

1. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Své tvrzení odůvodněte.

   (a) Množina všech vektorů vázaných v počátku soustavy souřadnic spolu se sčítáním vektorů a násobením vektorů reálným číslem.

   (b) Množina všech reálných funkcí jedné reálné proměnné na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ spolu se sčítáním funkcí a násobením funkcí reálným číslem.

   (c) Množina všech konvergentních číselných posloupností spolu se sčítáním posloupností a násobením posloupností reálným číslem.

   (d) Množina všech divergentních číselných posloupností spolu se sčítáním posloupností a násobením posloupností reálným číslem.

(e) $M = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ nad $\mathbb{Q}$, nad $\mathbb{R}$.

(f) Množina všech soustředných kružnic s daným středem v rovině (operace sčítání: sečteme poloměry kružnic, zachováme střed; operace násobení: poloměr kružnice vynásobíme reálným číslem, zachováme střed).

2. Určete, zda následující množiny spolu s příslušnými operacemi tvoří vektorový podprostor vhodně vybraných prostorů uvedených v Úloze 1:

- množina všech vektorů ležících na ose prvního a třetího kvadrantu;
- množina všech vektorů s délkou 1,
- množina všech funkcí, jejichž graf prochází bodem $[1, 0]$; množina všech funkcí, jejichž graf prochází bodem $[0, 1]$,
- množina všech posloupností, které konvergují k 0; množina všech posloupností, které konvergují k 2.

3. Zjistěte, která lineární kombinace vektorů $a = (2, 0, -1), b = (0, -2, 1), c = (3, 0, 0)$ je rovna vektoru $j = (0, 0, 1)$.

4. Zjistěte, zda $f(x) = 2 + x + x^2$ patří do lineárního obalu funkcí $g(x) = 1 - 2x^2$, $h(x) = 1 - x$.

5. Zjistěte, zda každý vektor $(x, y, z) \in V_3(\mathbb{R})$ je lineární kombinací vektorů množiny M, kde $M = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$. V kladném případě určete koeficienty lineární kombinace.

6. Zjistěte, zda jsou vektory lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. Své tvrzení odůvodněte.

- $V_2(\mathbb{R})$, $a = (2, 3), b = (1, -5)$,
- $V_2(\mathbb{R})$, $a = (2, 3), b = (1, -5), c = (0, 1)$,
- $V_4(\mathbb{R})$, $a = (5, -3, 0, 1), b = (4, 0, 1, -1), c = (7, 3, 3, -4)$.

7. Rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi v uvedeném vektorovém prostoru:

- $V_3(\mathbb{R})$, $a_1 = (1, 5, 3), a_2 = (2, 7, 3), a_3 = (3, 9, 4)$,
- $V_4(\mathbb{R})$, $a_1 = (2, 3, 4, -6), a_2 = (1, 8, -2, -16), a_3 = (12, 5, -14, 5), a_4 = (3, 11, 4, -7)$.

8. Nalezněte aspoň jednu bázi lineárního obalu vektorů a_1, a_2, a_3: $[a_1 = (0, 1, 1, -3), a_2 = (3 - \mathrm{i}, 1 - 2\mathrm{i}, 5\mathrm{i} - 7, 4 + 3\mathrm{i}), a_3 = (1 + 3\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}, -6 - 7\mathrm{i}, 4\mathrm{i})]$.

9. Ověřte, že $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{(2, 1, 0), (1, 0, 1), (-1, 3, 1)\}$ jsou báze $V_3(\mathbb{R})$. Vypočítejte souřadnice vektoru $(5, 2, 3)$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}_2$.

10. Pomocí Steinitzovy věty o výměně doplňte množinu $\{(1, 1, 2), (2, 1, 3)\}$ na bázi $V_3(\mathbb{R})$.

2 Matice

2.1 Matice, hodnost matice

Definice 2.1. (**Matice**)
Nechť T je těleso. Obdélníkovou tabulku prvků z T sestavených do m řádků a n sloupců nazýváme *maticí typu* (m, n) nad tělesem T. Je-li $m = n$, hovoříme o *čtvercové matici n-tého řádu, případně n-tého stupně.*

Poznámka: Matice A přiřazuje každé dvojici (i, j), kde $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, prvek z T, který označujeme a_{ij} a nazýváme *prvkem matice* A v i-tém řádku a j-tém sloupci. Matici A zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nebo zkráceně

$$A = (a_{ij}); i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Pokud je z textu známo m, n, píšeme pouze $A = (a_{ij})$. Aritmetický vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, se nazývá *i-tý řádek*, aritmetický vektor $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ *j-tý sloupec matice A*. *Vedoucím prvkem i-tého řádku* matice A rozumíme jeho první nenulový prvek zleva. Jinými slovy: Je-li a_{ij} vedoucí prvek i-tého řádku a $k < j$, je $a_{ik} = 0$. Nulový řádek nemá žádný vedoucí prvek.

Poznámka: V některých textech se jednotlivé prvky matice oddělují čárkou stejně jako u aritmetických vektorů.

Definice 2.2. (**Rovnost matic**)
Matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) a $B = (b_{ij})$ typu (r, s) se sobě *rovnají*, právě když platí: $m = r,\ n = s,\ a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definice 2.3. (**Transponovaná matice**)
Transponovaná matice k matici $A = (a_{ij})$ typu (m, n) je matice $A^{\mathrm{T}} = (b_{ij})$ typu (n, m), pro kterou platí

$$a_{ij} = b_{ji},\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Poznámka: Transponovanou matici A^{T} dostaneme z matice A tak, že vzájemně vyměníme řádky a sloupce v matici A.

Definice 2.4. (**Hlavní diagonála matice**)
Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n). Aritmetický vektor $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr})$, kde $r = \min\ (m, n)$, se nazývá *(hlavní) diagonála* matice A. Prvky $\mathrm{a}_{ii},\ i = 1, 2, \ldots, r$, se nazývají *diagonální prvky.*

Definice 2.5. (**Zobecněná trojúhelníková matice**)
Matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) se nazývá *zobecněná trojúhelníková matice*, právě když
a) má pouze nenulové řádky,

b) jsou-li $a_{ij},\ a_{rs}$ vedoucí prvky takové, že $i < r$, pak $j < s$.
Zobecněná trojúhelníková matice A typu (m, n) se nazývá *redukovaná trojúhelníková matice*, právě když
a) každý vedoucí prvek je roven 1,
b) jsou-li $a_{ij},\ a_{rs}$ vedoucí prvky takové, že $i < r$, pak $j < s$,
c) všechny ostatní prvky matice jsou rovny 0.
Matice A typu (m, n) se nazývá *horní*, resp. *dolní trojúhelníková matice*, právě když všechny prvky ležící pod diagonálou, resp. nad diagonálou jsou nulové (tj. $a_{ij} = 0$ pro všechna $i > j$, resp. $i < j$).

Poznámka: S rostoucím řádkovým indexem se vedoucí prvek každého dalšího řádku vyskytuje stále více vpravo. V literatuře se pro zobecněnou trojúhelníkovou matici někdy také používají pojmy *matice ve stupňovitém tvaru*, případně *odstupňovná matice*.

Definice 2.6. (**Nulová matice**)
Matici $O = (o_{ij})$ typu (m, n), kde $o_{ij} = 0$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$, nazýváme *nulovou maticí typu* (m, n).

Definice 2.7. (**Diagonální matice**)
Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice. Jsou-li všechny nediagonální prvky matice A nulové (tj. $a_{ij} = 0$ pro všechna $i \neq j$), řekneme, že A je *diagonální matice*.

Definice 2.8. (**Jednotková matice**)
Jednotkovou maticí n-tého řádu nazýváme diagonální matici $E = (e_{ij})$ n-tého řádu, pro niž platí $e_{ii} = 1$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definice 2.9. (**Řádkový prostor matice**)
Řádkovým prostorem matice A typu (m, n) rozumíme podprostor vektorového prostoru $V_n(T)$ generovaný všemi řádky matice A. *Sloupcovým prostorem matice* A typu (m, n) rozumíme podprostor vektorového prostoru $V_m(T)$ generovaný všemi sloupci matice A.

Definice 2.10. (**Elementární úpravy matice**)
Elementární řádkovou, resp. *sloupcovou úpravou matice* A rozumíme některou z těchto úprav:
a) změnu pořadí řádků, resp. sloupců matice A;
b) nahrazení řádku, resp. sloupce matice A jeho α-násobkem, kde $\alpha \in T$, $\alpha \neq 0$;
c) nahrazení řádku, resp. sloupce matice A jeho součtem s α-násobkem, $\alpha \in T$, jiného řádku matice A;
d) vynechání řádku, resp. sloupce, který je lineární kombinací ostatních řádků, resp. sloupců;
e) přidání řádku, resp. sloupce, který je lineární kombinací řádků, resp. sloupců matice.

Věta 2.1. *Elementární řádkové (resp. sloupcové) úpravy nemění řádkový (resp. sloupcový) prostor matice.*

Důkaz: Tvrzení je přímým důsledkem věty 1.6.

Definice 2.11. (**Ekvivalentní matice**)
Dvě matice jsou *ekvivalentní*, právě když lze jednu z druhé získat konečným počtem elementárních řádkových (resp. sloupcových) úprav.

Věta 2.2. *Každá matice A je ekvivalentní s aspoň jednou horní trojúhelníkovou maticí.*

Důkaz: Tvrzení dokážeme matematickou indukcí: Matice typu $(1, n)$ je horní trojúhelníková matice. Předpokládejme, že tvrzení platí pro matici typu $(m-1, n)$.
Nechť k-tý sloupec je první nenulový sloupec této matice. Potom existuje nejmenší index i takový, že $a_{ik} \neq 0$. Pokud existuje $j > i$ takové, že $a_{jk} \neq 0$, pak vynásobíme i-tý řádek prvkem a_{jk} a j-tý řádek prvkem a_{ik} a místo j-tého řádku napíšeme rozdíl těchto vynásobených řádků. V takto vzniklé matici je na místě a_{jk} nulový prvek. Stejnou operaci provedeme se všemi prvky $a_{jk}, j > i$. Poté vyměníme první a i-tý řádek. Podle indukčního předpokladu platí tvrzení v matici A', která vznikne vynecháním prvního řádku, tj. platí pro každou matici A.

Definice 2.12. (**Hodnost matice**)
Hodností matice $A = (a_{ik})$ typu (m, n) nazýváme dimenzi jejího řádkového prostoru. Píšeme $h = \text{hod } A$.

Věta 2.3. *Hodnost matice A je rovna počtu řádků zobecněné trojúhelníkové matice B ekvivalentní s A.*

Důkaz: Převedení matice A na zobecněnou trojúhelníkovou matici B nemění řádkový prostor matice (podle věty 2.1) a řádky zobecněné trojúhelníkové matice jsou zřejmě lineárně nezávislé. Hodnost matice B je tedy rovna počtu jejích řádků a hodnost matice A je rovna hodnosti matice B.

Věta 2.4. *Hodnost matice A je rovna hodnosti matice A^{T} transponované k matici A.*

Důkaz: Pro nulovou matici věta zřejmě platí. Nechť $A = (a_{ij})$ je nenulová matice typu (m, n). Označme dále A^{T} matici typu (n, m) transponovanou k matici A. Hodnost matice A^{T} je podle definice 2.12 rovna dimenzi řádkového prostoru V matice A^{T}, a tedy počtu vektorů libovolné báze V. Matici A upravíme pomocí elementárních úprav na redukovanou trojúhelníkovou matici A', která má podle věty 2.3 stejnou hodnost jako matice A. Řádky matice A' jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi řádkového prostoru matice A', a tedy i bázi řádkového prostoru matice A. Hodnost matice A je tedy rovna číslu k, které představuje počet lineárně nezávislých řádků matice A. Hodnost matice A^{T} je tedy rovna počtu lineárně nezávislých řádků matice A', a tedy hodnosti matice A'. Vytvoříme-li matici $(A')^{\mathrm{T}}$, jejíž sloupce jsou stejné jako řádky matice A', můžeme ji pomocí elementárních sloupcových úprav upravit na matici A^{T}. Jelikož sloupce matice A^{T} vzniknou pomocí lineárních kombinací sloupců matice $(A')^{\mathrm{T}}$, a tedy řádků matice A', mají příslušné prostory stejnou dimenzi a matice A' a A^{T} mají stejnou hodnost. Proto mají i matice A a A^{T} stejnou hodnost.
Poznámka: Důsledkem věty 2.4 je, že řádkový i sloupcový prostor matice mají stejnou dimenzi.

Definice 2.13. (**Regulární matice**)
Čtvercová matice A n-tého řádu se nazývá *regulární*, resp. *singulární*, jestliže $\text{hod } A = n$, resp. $\text{hod } A < n$.

2.2 Operace s maticemi

Definice 2.14. (**Součet matic**)
Nechť jsou dány matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ téhož typu (m, n) nad týmž tělesem T. *Součtem matic* A a B nazýváme matici $C = (c_{ij})$ typu (m, n) definovanou předpisem

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Píšeme $C = A + B$.

Věta 2.5. *Nechť A, B, C jsou matice stejného typu nad týmž tělesem T a O je nulová matice téhož typu. Pak platí:*

1. $A + B = B + A$,
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$,
3. $A + O = O + A = A$,
4. $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$,
5. $-A = (-a_{ij})$, *kde* $-a_{ij}$ *je opačný prvek k* a_{ij} *v tělese* T, *je matice opačná k matici* A, *tj. platí* $A + (-A) = O$.

Důkaz: Tvrzení je přímým důsledkem vlastností operace sčítání v tělese T.
Poznámka: a) Z předchozí věty plyne, že množina všech matic daného typu (m, n) nad tělesem T spolu s operací sčítání matic tvoří komutativní grupu.
b) Místo $A + (-B)$ píšeme krátce $A - B$ a mluvíme o *rozdílu matic* A, B (v tomto pořadí).

Definice 2.15. (**Násobení matice skalárem**)
Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) nad tělesem T. *Součinem prvku* $\alpha \in T$ a *matice* A (α*-násobkem matice* A) nazýváme matici $C = (c_{ij})$ typu (m, n) definovanou předpisem

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \ \ i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Píšeme $C = \alpha A$.

Věta 2.6. *Nechť A, B jsou matice stejného typu nad tělesem T. Nechť $\alpha, \beta \in T$ a 1 je jednotkový prvek v T. Pak platí:*

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
4. $1A = A$,
5. $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$.

Důkaz: Podle definice 2.15 je násobení matice prvkem $\alpha \in T$ definováno vztahem $c_{ij} = \alpha a_{ij},\ i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$. Tvrzení plyne přímo z vlastností operací sčítání a násobení v tělese T.

Poznámka:

1. Matice typu $(1, n)$ nad tělesem T jsou vlastně n-rozměrné aritmetické vektory nad T. V tomto případě sčítání matic a násobení matice prvkem z T odpovídá příslušným operacím s aritmetickými vektory.

2. Množina všech matic typu (m, n) nad tělesem T tvoří vektorový prostor vzhledem ke sčítání matic a násobení matice prvkem z T. Dimenze tohoto vektorového prostoru je mn.

Definice 2.16. (**Symetrická a antisymetrická matice**)
Matice A se nazývá *symetrická*, jestliže platí $A = A^{\mathrm{T}}$. Matice A se nazývá *antisymetrická*, jestliže platí $A = -A^{\mathrm{T}}$.

Věta 2.7. *Pro každou čtvercovou matici A je $A + A^{\mathrm{T}}$ symetrická matice a $A - A^{\mathrm{T}}$ antisymetrická matice.*

Důkaz: Označme $B = A + A^{\mathrm{T}}$ a $C = A - A^{\mathrm{T}}$. Podle definice matice transponované k matici A platí pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\} : b_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = b_{ji}$ a matice B je symetrická. Dále platí pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\} : c_{ij} = a_{ij} - a_{ji} = -(a_{ji} - a_{ij}) = -c_{ji}$ a matice C je antisymetrická.
Poznámka: Každou čtvercovou matici A lze psát jako součet symetrické a antisymetrické matice, neboť např. $A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}})$.

Definice 2.17. (**Násobení matic**)
Nechť je dána matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) a matice $B = (b_{ij})$ typu (n, p), obě nad týmž tělesem T. *Součinem matic* A, B (v tomto pořadí) nazýváme matici $C = (c_{ij})$ typu (m, p) definovanou předpisem

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, p\}.$$

Píšeme $C = A\,B$.

Poznámka: Podmínku pro typy matic při násobení si můžeme zapamatovat pomocí formálního vztahu

$$(m, n)(n, p) = (m, p).$$

Věta 2.8. *Nechť jsou dány matice A, B, C nad tělesem T a prvek $\alpha \in T$. Pokud jsou příslušné součiny matic definovány, platí:*

1. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

2. $A(BC) = (AB)C$,

3. $A(B+C) = AB + AC$,

4. $(A+B)C = AC + BC$,

5. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$,

6. $AE = A$, $EA = A$,

7. $AO = O$, $OA = O$.

Důkaz:
1. Tvrzení plyne přímo z vlastností násobení v tělese T.
2. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m,n), $B = (b_{jk})$ je matice typu (n,p) a $C = (c_{kl})$ je matice typu (p,r). Matice $(AB)C$ má v i-tém řádku a l-tém sloupci prvek $\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl}$. Matice $A(BC)$ má v i-tém řádku a l-tém sloupci prvek $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right)$. Násobení prvků tělesa T je distributivní vzhledem k sčítání, a tedy $(AB)C = A(BC)$.
3. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m,n), $B = (b_{jk})$ a $C = (c_{jk})$ jsou matice typu (n,p). Matice $A(B+C)$ má v i-tém řádku a k-tém sloupci prvek $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$. Matice $AB + AC$ má v i-tém řádku a k-tém sloupci prvek $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}$. Rovnost obou prvků plyne opět z vlastností operací sčítání a násobení v tělese T a $A(B+C) =$ $= AB + AC$.
4. Tvrzení se dokáže obdobně jako tvrzení 3.
5. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m,n), $B = (b_{jk})$ je matice typu (n,p). Matice $(AB)^{\mathrm{T}}$ je typu (p,m). V k-tém řádku a i-tém sloupci má matice $(AB)^{\mathrm{T}}$ prvek $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, který má matice AB v i-tém řádku a k-tém sloupci. Matice B^{T} má v k-tém řádku a j-tém sloupci prvek b_{jk} a matice A^{T} má v j-tém řádku a i-tém sloupci prvek a_{ij}. V součinu matic $B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$ je v k-tém řádku a v i-tém sloupci prvek $\sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij}$, v matici $(AB)^{\mathrm{T}}$ je v k-tém řádku a v i-tém sloupci prvek $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, a tedy $B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = (AB)^{\mathrm{T}}$.
6. Zřejmé.
7. Zřejmé.
Poznámka: Násobení matic není komutativní. Oba součiny AB i BA jsou definovány, právě když A je typu (m,n) a B je typu (n,m). Je-li $m \neq n$, nemůže nastat rovnost $AB = BA$. Ani pro čtvercové matice neplatí obecně $AB = BA$.

Definice 2.18. (**Záměnné matice**)
Matice A, B nad tělesem T, pro které platí $AB = BA$, se nazývají *záměnné*.

Definice 2.19. (**Inverzní matice**)
Nechť A je čtvercová matice n-tého řádu nad tělesem T. Čtvercovou matici A^{-1}, pro niž platí

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

nazýváme *inverzní maticí* k matici A.

Věta 2.9. *Nechť A, B jsou čtvercové matice n-tého řádu nad tělesem T a E je jednotková matice n-tého řádu nad tělesem T.*

1. *K matici A existuje nejvýše jedna inverzní matice.*
2. *$E^{-1} = E$.*
3. *$(A^{-1})^{-1} = A$, pokud existuje A^{-1}.*
4. *$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, jakmile je alespoň jedna strana příslušné rovnosti definována.*
5. *Jestliže pro matice A, B platí $AB = E$, jsou matice A, B navzájem inverzní.*

Důkaz:

1. Sporem. Předpokládejme, že existují matice $B \neq C$ inverzní k matici A. Pak platí zároveň $AB = BA = E$ a $AC = CA = E$. S využitím asociativity násobení matic dostáváme $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$, což je spor s předpokladem $B \neq C$.
2. Zřejmé.
3. Podle definice 2.19 platí $A^{-1}A = E$. Obě strany rovnosti vynásobíme zleva maticí $(A^{-1})^{-1}$ a dostáváme $(A^{-1})^{-1}A^{-1}A = (A^{-1})^{-1}E$. Po úpravě dostáváme $EA = (A^{-1})^{-1}$, a tedy $A = (A^{-1})^{-1}$.
4. Ukážeme, že platí $AB(B^{-1}A^{-1}) = E$. Postupně dostáváme
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$
5. Zřejmé.

Postup při výpočtu inverzní matice, tzv. Gaussova-Jordanova eliminace: Matici A převedeme ekvivalentními řádkovými úpravami na jednotkovou matici a zároveň tytéž úpravy provádíme s jednotkovou maticí stejného řádu. Na konci procesu získáme z A jednotkovou matici E a z jednotkové matice E matici A^{-1}. Schematicky zapsáno:

$$(A|E) \sim (E|A^{-1}).$$

Poznámka: Popsané úpravy „dvojmatice" $(A|E)$ vedoucí k inverzní matici provádíme pouze s řádky matice. Sloupce zde totiž znamenají koeficienty u neznámých v soustavách lineárních rovnic, jejichž pravé strany jsou aritmetické vektory s jedním prvkem rovným jednotkovému prvku z T a ostatní nulovému prvku z T. Změnami sloupců bychom změnili význam neznámých. S řešením soustav rovnic se podrobně seznámíme v kapitole 3.

Věta 2.10. *Nechť A je čtvercová matice. Pak k ní existuje inverzní matice A^{-1}, právě když je A regulární.*

Větu uvádíme bez důkazu. Myšlenka důkazu vychází z Gaussovy-Jordanovy eliminace, kde prováděné úpravy matice $(A|E)$ nemění hodnost matice A. Jelikož matice E má hodnost n, musí mít matice A také hodnost n, a je tedy regulární.

2.3 Úlohy k procvičení

1. Určete hodnost následujících matic (případně v závislosti na reálném parametru c):

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \\ 11 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & c \end{pmatrix}$,

2. Vypočítejte součin následujících matic (v obou možných pořadích, pokud je to možné):

a) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Vypočtěte, pokud existují, inverzní matice k následujícím maticím:

$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

3 Soustavy lineárních rovnic

3.1 Základní pojmy

Definice 3.1. (**Soustava rovnic**)
Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T nazýváme soustavu

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots, & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \qquad (*)$$

kde $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$ jsou prvky z T. Symboly $x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$, se nazývají *neznámé*, prvky $a_{ik},\ i = 1, 2, \dots, m,\ k = 1, 2, \dots, n$, *koeficienty* u neznámých, prvky $b_i,\ i = 1, 2, \dots, m$, *pravé strany rovnic.*

Definice 3.2. (**Řešení soustavy rovnic**)
Řekneme, že n-rozměrný aritmetický vektor

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in V_n(T)$$

je *řešením i-té rovnice* soustavy $(*)$, jestliže platí

$$a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \dots + a_{in}r_n = b_i.$$

Řešením soustavy $(*)$ nazýváme každý n-rozměrný aritmetický vektor

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in V_n(T),$$

který je řešením všech rovnic soustavy.

Poznámka: Označíme-li $A = (a_{ij})$ matici typu (m, n) tvořenou koeficienty u neznámých, píšeme soustavu $(*)$ maticově ve tvaru

$$Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}},$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$ je *vektor neznámých*, $b = (b_1, \dots, b_m) \in V_m(T)$ vektor *pravých stran soustavy* $(*)$. Matici A nazýváme *maticí soustavy* $(*)$. Matici A_{r} typu $(m, n+1)$, která vznikne z matice A tak, že do $(n+1)$-ho sloupce zapíšeme vektor b^{T}, tj.

$$A_{\mathrm{r}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* $(*)$.

Definice 3.3. (**Ekvivalentní soustavy rovnic**)
O dvou soustavách lineárních rovnic řekneme, že jsou *ekvivalentní*, jestliže mají stejné množiny řešení.

Věta 3.1. *Nechť S je soustava lineárních rovnic nad T. Pak každou z následujících úprav vznikne soustava S' s ní ekvivalentní.*

1. *Vynechání rovnice, která je lineární kombinací ostatních rovnic soustavy S.*
2. *Přidání rovnice, která je lineární kombinací rovnic soustavy S.*
3. *Vynásobení obou stran libovolné rovnice nenulovým prvkem z T.*
4. *Nahrazení jedné rovnice soustavy S rovnicí, která vznikne přičtením lineární kombinace ostatních rovnic soustavy S.*
5. *Vzájemná výměna dvou rovnic soustavy S.*

Důkaz: Důkaz je zřejmý. Ve všech případech stačí ukázat, že libovolné řešení původní soustavy je také řešením upravené soustavy rovnic a naopak.
Poznámka: Úpravy soustavy rovnic popsané ve větě 3.1 lze jednoduše aplikovat na matici soustavy a na příslušné aritmetické vektory.

3.2 Řešení soustav rovnic

Věta 3.2. *Frobeniova věta.*
Soustava $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$ má řešení, právě když hodnost matice soustavy A je rovna hodnosti rozšířené matice A_{r}.

Důkaz:
I. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že daná soustava má řešení $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Označme $a_1, \ldots, a_n$ sloupcové vektory matice A a b sloupec pravých stran dané soustavy rovnic. Pak můžeme sloupec pravých stran vyjádřit jako lineární kombinaci sloupcových vektorů soustavy $r_1.a_1 + r_2.a_2 + \cdots + r_n.a_n = b$. Vynecháním sloupcového vektoru b se nezmění lineární obal vektorů $a_1, \ldots, a_n$, a tedy hodnost matice A_{r} se také nezmění. Pokud vynecháme tento vektor, dostaneme místo rozšířené matice A_{r} matici soustavy A. Hodnosti obou matic se tedy rovnají.
II. ($\Rightarrow$) Předpokládejme obráceně, že se hodnosti obou matic rovnají. Jelikož rozšířená matice soustavy vznikne z původní matice přidáním sloupcového vektoru b, musí být tento vektor lineární kombinací sloupcových vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a tedy existují prvky $r_1, r_2, \ldots, r_n \in T$ takové, že $r_1.a_1 + r_2.a_2 + \cdots + r_n.a_n = b$, a uspořádaná n-tice $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ je řešením dané soustavy.

Definice 3.4. (**Homogenní soustava rovnic**)
Soustava $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$ se nazývá *homogenní*, resp. *nehomogenní*, je-li $b = o$, resp. $b \neq o$.

Věta 3.3. *Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení.*

Důkaz: Podle Frobeniovy věty nemění přidání nulového sloupce hodnost matice, tj. pro homogenní soustavu platí vždy $h(A) = h(A_{\mathrm{r}})$.
Poznámka: Řešení homogenní soustavy popsané ve větě 3.3 nazýváme *triviální řešení*. Toto řešení je nulový vektor $o = (0, 0, \ldots, 0)$ příslušné dimenze.

Gaussova eliminační metoda řešení soustav. Řešme soustavu $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$. Matici A_{r} převedeme elementárními řádkovými nebo sloupcovými úpravami (viz definice 2.10) na ekvivalentní zobecněnou trojúhelníkovou matici C_{r}. Úlohu nalézt všechna řešení soustavy $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$ jsme tak převedli na úlohu řešit soustavu s rozšířenou maticí C_{r}, kde

$$C_r = \left(\begin{array}{cccccc|c} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1h} & \dots & p_{1n} & q_1 \\ 0 & p_{22} & \dots & p_{2h} & \dots & p_{2n} & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_{hh} & \dots & p_{hn} & q_h \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & q_{h+1} \end{array}\right).$$

Je-li $q_{h+1} \neq 0$, nemá soustava řešení, je-li $q_{h+1} = 0$, můžeme libovolně volit $n-h$ neznámých a pomocí nich vypočítat zbývajících h neznámých.

Věta 3.4. *Pro homogenní soustavu rovnic $Ax^{\mathrm{T}} = o^{\mathrm{T}}$ o n neznámých platí: Je-li hodnost matice rovna h, má tato soustava $n-h$ lineárně nezávislých řešení. Množina všech řešení tvoří podprostor prostoru $V_n(\mathbb{R})$ dimenze $n-h$ nad tělesem T.*

Důkaz: Danou soustavu rovnic upravíme pomocí Gaussovy eliminační metody na ekvivalentní soustavu zapsanou pomocí zobecněné trojúhelníkové matice, která má právě h rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} c_{11}x_1 & c_{12}x_2 & \dots & c_{1h}x_h & c_{1,h+1}x_{h+1} & \dots & c_{1n}x_n & 0 \\ 0 & c_{22}x_2 & \dots & c_{2h}x_h & c_{2,h+1}x_{h+1} & \dots & c_{2n}x_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_{hh}x_h & c_{h,h+1}x_{h+1} & \dots & c_{hn}x_n & 0 \end{array}\right). \qquad (*)$$

Pokud $h = n$, má soustava pouze triviální řešení a tvrzení platí. Předpokládejme, že $h < n$. Potom můžeme dosadit za neznámé $x_{h+1}, \dots, x_n$ libovolných $n-h$ čísel $r_{h+1}, \dots, r_n$. Místo homogenní soustavy $(*)$ získáme nehomogenní soustavu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11}x_1 & c_{12}x_2 & \dots & c_{1h}x_h & -c_{1,h+1}r_{h+1} - \dots - c_{1n}r_n \\ 0 & c_{22}x_2 & \dots & c_{2h}x_h & -c_{2,h+1}r_{h+1} - \dots - c_{2n}r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_{hh}x_h & -c_{h,h+1}r_{h+1} - \dots - c_{hn}r_n \end{array}\right). \qquad (**)$$

Matice této soustavy je zobecněná trojúhelníková a soustava, která je ekvivalentní s původní soustavou, má právě jedno řešení. Z poslední rovnice vyjádříme x_h, které dosadíme do předposlední rovnice, ze které získáme x_{h-1}. Takto postupujeme až k první rovnici, ze které vyjádříme x_1. Čísla $r_{h+1}, \dots, r_n$ volíme takovým způsobem, aby řešení byla lineárně nezávislá. Můžeme tedy např. zvolit vždy právě jedno z čísel $r_{h+1}, \dots, r_n$ rovno 1 a ostatní rovna 0, tedy např. $r_{h+1} = 1$ a $r_{h+2} = r_{h+3} = \dots = r_n = 0$. Pro každou tuto volbu dostáváme postupně jedno řešení $(**)$, které označíme jako $v_1, v_2, \dots, v_{n-h}$, tedy celkem $n-h$ různých řešení.

Ukážeme, že vektory $v_1, v_2, \dots, v_{n-h}$ jsou lineárně nezávislé. Položíme $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \dots + \alpha_{n-h}.v_{n-h} = o$, kde $\alpha_i \in T, i \in \{1, \dots, n-h\}$. Jako v_1 označíme takový vektor, který má na místě $h+1$ prvek 1. Ostatní vektory $v_2, \dots, v_{n-h}$ mají na místě $h+1$ prvek 0, a tedy $\alpha_{h+1} = 0$. Analogicky můžeme ukázat, že $\alpha_2 = \dots = \alpha_{n-h} = 0$ a vektory $v_1, v_2, \dots, v_{n-h}$ jsou lineárně nezávislé.

Pokud označíme řešení původní soustavy $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, můžeme jej vyjádřit jako lineární kombinaci řešení soustavy $(**)$: $u = u_{h+1}v_1 + u_{h+2}v_2 + \cdots + u_n v_{n-h}$, protože vektory $v_1, \dots, v_{n-h}$ tvoří bázi prostoru řešené dimenze $n - h$. Máme tedy obecné řešení soustavy $(**)$, a tedy řešení původní, ekvivalentní soustavy.

Věta 3.5. *Všechna řešení nehomogenní soustavy $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$ můžeme vyjádřit jako součet jednoho libovolného řešení této soustavy a všech řešení příslušné homogenní soustavy $Ax^{\mathrm{T}} = o^{\mathrm{T}}$.*

Důkaz: Nechť u je řešením soustavy $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$ a v je libovolné řešení soustavy $Ax^{\mathrm{T}} = o^{\mathrm{T}}$. Pak platí: $A(u+v)^{\mathrm{T}} = A(u^{\mathrm{T}} + v^{\mathrm{T}}) = Au^{\mathrm{T}} + Av^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}} + o^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$, a tedy $u + v$ je řešením soustavy $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$. Nyní ukážeme, že jiná řešení neexistují. Předpokládejme, že u_1, u_2 jsou dvě různá řešení nehomogenní soustavy $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$. Ukážeme, že $u_1 - u_2$ je řešením homogenní soustavy $Ax^{\mathrm{T}} = o^{\mathrm{T}}$. Platí $A(u_1^{\mathrm{T}} - u_2^{\mathrm{T}}) = Au_1^{\mathrm{T}} - Au_2^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}} - b^{\mathrm{T}} = o^{\mathrm{T}}$ a $u_1 - u_2$ je řešením nehomogenní soustavy $Ax^{\mathrm{T}} = o^{\mathrm{T}}$.

Věta 3.6. *Nechť $h(A) = h(A_{\mathrm{r}}) = h$ a n je počet neznámých soustavy rovnic.*

1. *Soustava $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$ má jediné řešení, právě když platí $h = n$.*
2. *Soustava $Ax^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}$ má nekonečně mnoho řešení, právě když platí $h < n$.*

Důkaz: Tvrzení plyne z vět 3.4 a 3.5.

Poznámka: Při konkrétním výpočtu je někdy účelné provést jednoduché úpravy i se sloupci. Vyměníme-li však i-tý sloupec matice A s jejím j-tým sloupcem, vymění se ve vektoru řešení jeho i-tý a j-tý člen. Vynásobení i-tého sloupce nenulovým prvkem $\alpha \in T$ představuje vynásobení i-tého členu řešení prvkem α^{-1}. Poslední sloupec matice A_{r} nesmíme při elementárních sloupcových úpravách používat.

3.3 Úlohy k procvičení

1. Najděte bázi prostoru řešení následující homogenní soustavy:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2. Řešte následující soustavy rovnic:

a) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 2, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_4 &= 7. \end{aligned}$$

4 Lineární zobrazení (homomorfismus)

4.1 Základní pojmy

Definice 4.1. (**Lineární zobrazení**)
Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T.
Zobrazení $\varphi : V \to V'$ se nazývá *lineární zobrazení*, jestliže pro libovolné $a, b \in V$, $\alpha \in T$ platí:

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
2. $\varphi(\alpha.a) = \alpha.\varphi(a)$.

Poznámka: Z def. 4.1 plyne, že obraz lineární kombinace vektorů z V je roven lineární kombinaci jejich obrazů se stejnými koeficienty (odtud název lineární zobrazení). Operace + a . mohou mít v obou vektorových prostorech různý význam. Z kontextu bude vždy zřejmé, jak je daná operace v příslušném vektorovém prostoru definována.

Věta 4.1. *Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ je báze prostoru V. Označme $b_1, \ldots, b_n$ libovolné vektory z prostoru V'. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$, takové, že*

$$\varphi(a_1) = b_1, \ldots, \varphi(a_n) = b_n.$$

Důkaz: Definujeme zobrazení

$$\varphi(\alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n) = \alpha_1.b_1 + \cdots + \alpha_n.b_n,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$. Nejprve ukážeme, že takto definované zobrazení φ je lineární. Pro libovolné $a, b \in V, k \in T, \beta_1, \ldots \beta_n \in T$, platí:

$$\varphi(a + b) = \varphi(\alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n + \beta_1.a_1 + \cdots + \beta_n.a_n) =$$

$$= \alpha_1.\varphi(a_1) + \cdots + \alpha_n.\varphi(a_n) + \beta_1.\varphi(a_1) + \cdots + \beta_n.\varphi(a_n) =$$

$$= \alpha_1.b_1 + \cdots + \alpha_n.b_n + \beta_1.b_1 + \cdots + \beta_n.b_n = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(k.a) = \varphi(k(\alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n)) = k\alpha_1.b_1 + \cdots + k\alpha_n.b_n = k(\alpha_1.b_1 + \cdots + \alpha_n.b_n) = k.\varphi(a).$$

Zobrazení φ je tedy lineární. Jelikož $a_1, \ldots, a_n$ je báze V, můžeme vyjádřit libovolný vektor $c \in V$ jako lineární kombinaci $c = \alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n$, kde koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou určeny jednoznačně. Zobrazení φ je lineární, takže

$$\varphi(c) = \varphi(\alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n) = \alpha_1.\varphi(a_1) + \cdots + \alpha_n.\varphi(a_n) = \alpha_1.b_1 + \cdots + \alpha_n.b_n.$$

Lineární zobrazení φ je tedy určeno jednoznačně.
Poznámka: Podle věty 4.1 je každé lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ jednoznačně určeno pomocí obrazů vektorů libovolné báze prostoru V.

Definice 4.2. (**Matice lineárního zobrazení**)
Nechť V je m-rozměrný vektorový prostor nad tělesem T a V' n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ je báze prostoru V, $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ báze prostoru V' a $\varphi : V \to V'$ lineární zobrazení. Matici $A_{\varphi\mathcal{A}\mathcal{B}}$ typu (m, n), která má v i-tém řádku ($i = 1, 2, \ldots, m$) vektor souřadnic obrazu $\varphi(a_i)$ (i-tého vektoru z báze $\mathcal{A}$) v bázi $\mathcal{B}$, nazýváme *maticí zobrazení* φ *vzhledem k bázím* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Příklad 4.1. $\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R}) : \varphi(x, y, z) = (x + y, z)$ vyjádříme pomocí matice vůči standardní bázi. Postupně dostáváme $\varphi(1, 0, 0) = (1, 0), \varphi(0, 1, 0) = (1, 0), \varphi(0, 0, 1) = (0, 1)$.
Matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je matice lineárního zobrazení φ.

4.2 Jádro a obraz, vlastnosti zobrazení

Definice 4.3. (**Jádro a obraz zobrazení**)
Nechť V a V' jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T a $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení.
Množina $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{a \in V; \varphi(a) = o\}$ se nazývá *jádro zobrazení* φ.
Množina $\mathrm{Im}\ \varphi = \{b \in V'; \exists\, a \in V : \varphi(a) = b\}$ se nazývá *obraz zobrazení* φ.

Věta 4.2. *Nechť V a V' jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T a $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Pak* Ker φ *je podprostorem prostoru V,* Im φ *je podprostorem prostoru V'.*

Důkaz: Množiny Ker φ a Im φ jsou zřejmě neprázdné, protože $\varphi(o) = o \in V'$. Dále ověříme podmínky z věty 1.2:
1) Nechť $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}\ \varphi$. Pak platí $\varphi(u_1) = o, \varphi(u_2) = o$ a $\varphi(u_1 + u_2) = o = o + o = = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$. Dále platí $\varphi(\alpha.u_1) = \alpha.\varphi(u_1) = \alpha.o = o$. Ker φ je tedy podprostor V.
2) Nechť $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}\ \varphi$. Pak existují $u_1, u_2 \in V : \varphi(u_1) = v_1, \varphi(u_2) = v_2$ a platí $v_1 + v_2 = = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi(u_1 + u_2)$. Dále platí $\alpha.v_1 = \alpha.\varphi(u_1) = \varphi(\alpha.u_1)$. Im φ je tedy podprostor prostoru V'.

Věta 4.3. *Nechť V a V' jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T a $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení a V je vektorový prostor konečné dimenze. Pak platí:*

$$\dim\ (\mathrm{Ker}\ \varphi) + \dim\ (\mathrm{Im}\ \varphi) = \dim V.$$

Důkaz:
1) Pokud $\mathrm{Ker}\ \varphi = V$, pak je tvrzení zřejmé, protože $\mathrm{Im}\ \varphi = \{o\}$.
2) Předpokládejme, že $\mathrm{Ker}\ \varphi \neq V$ a označme $\dim\ (\mathrm{Ker}\ \varphi) = r$. Nechť $\{a_1, \ldots, a_r\}$ je báze Ker φ. Jelikož vektory $a_1, \ldots, a_r$ jsou lineárně nezávislé, lze je podle Steinitzovy věty doplnit na bázi V: $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_s\}$. Nyní stačí ukázat, že vektory $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_s)$ tvoří bázi Im φ.
Nejprve dokážeme sporem, že vektory $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_s)$ jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme, že vektory $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_s)$ lineárně závislé.
Potom existuje lineární kombinace $\alpha_1.\varphi(c_1) + \cdots + \alpha_s.\varphi(c_s) = o$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in T$,

v níž je aspoň jeden koeficient $\alpha_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, s\}$. Potom $\varphi(\alpha_1.c_1 + \cdots + \alpha_s.c_s) = o$, a tedy $\alpha_1.c_1 + \cdots + \alpha_s.c_s \in \text{Ker } \varphi$. Toto tvrzení je ale ve sporu s předpokladem, že vektor $\alpha_1.c_1 + \cdots + \alpha_s.c_s$ není prvkem lineárního obalu $[a_1, \ldots, a_r]$. Vektory $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_s)$ jsou tedy lineárně nezávislé.
Nyní ukážeme, že vektory $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_s)$ generují Im φ. Platí

$$\text{Im } \varphi = [\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r), \varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_s)\}] = [\{\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_s)\}],$$

protože $\varphi(a_1) = \cdots = \varphi(a_r) = o$. Vektory $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_s)$ tedy tvoří bázi Im φ a jeho dimenze je s. Nakonec dostáváme $\dim (\text{Ker } \varphi) + \dim (\text{Im } \varphi) = r + s = \dim V$.
Důsledek: Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení a V vektorový prostor konečné dimenze. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:
a) φ je prosté,
b) Ker $\varphi = \{o\}$,
c) $\dim (\text{Im } \varphi) = \dim V$.

Definice 4.4. (**Druhy lineárního zobrazení**)
Prosté lineární zobrazení se nazývá *monomorfismus*, surjektivní lineární zobrazení se nazývá *epimorfismus*, vzájemně jednoznačné lineární zobrazení se nazývá *izomorfismus*.

Věta 4.4. *Nechť V a V' jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T a $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Nechť existuje inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : V' \to V$. Pak zobrazení φ^{-1} je lineární.*

Důkaz: Platí $\varphi(u_1) = u \Leftrightarrow \varphi^{-1}(u) = u_1$. Postupně ověříme obě vlastnosti z definice lineárního zobrazení.

$$\varphi^{-1}(a + b) = \varphi^{-1}(\varphi(a_1) + \varphi(b_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(a_1 + b_1)) = a_1 + b_1 = \varphi^{-1}(a) + \varphi^{-1}(b),$$

$$\varphi^{-1}(\alpha.a) = \varphi^{-1}(\alpha.(\varphi(a_1))) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha.a_1)) = \alpha.a_1 = \alpha.\varphi^{-1}(a).$$

Inverzní zobrazení φ^{-1} je tedy lineární.

Věta 4.5. *Nechť $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ je báze vektorového prostoru V, $\varphi : V \to V'$ lineární zobrazení. Pak platí:*

1. *Zobrazení φ je prosté právě tehdy, když $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)$ jsou lineárně nezávislé vektory (ve V').*

2. *Zobrazení φ je na V', právě když $[\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)] = V'$.*

3. *Zobrazení φ je vzájemně jednoznačné, právě když $\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)\}$ je báze vektorového prostoru V'.*

Důkaz:

1. Postupně dokážeme obě implikace:
   ($\Rightarrow$) Tvrzení dokážeme sporem. Nechť vektory $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)$ jsou lineárně závislé a zároveň φ je prosté zobrazení. Jelikož jsou vektory $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)$ lineárně závislé, existuje lineární kombinace $\alpha_1.\varphi(a_1)+\cdots+\alpha_m.\varphi(a_m) = o$, v níž je aspoň jeden koeficient α_i takový, že $\alpha_i \neq 0$. Jelikož zobrazení φ je prosté, existuje $\varphi^{-1} : V' \to V$. Pro obraz $o \in V'$ v inverzním zobrazení φ^{-1} platí

   $$\varphi^{-1}(o) = \varphi^{-1}(\alpha_1.\varphi(a_1) + \cdots + \alpha_m.\varphi(a_m)) =$$

   $$= \alpha_1.\varphi^{-1}(\varphi(a_1)) + \cdots + \alpha_m.\varphi^{-1}(\varphi(a_m)) =$$

   $$= \alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_m.a_m = o \in V.$$

   Jelikož $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ je báze V, $\alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_m.a_m \neq o$. Zobrazení φ tedy není prosté, což je ve sporu s předpokladem, že φ je prosté zobrazení.
   ($\Leftarrow$) Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že zobrazení φ není prosté a zároveň vektory $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)$ jsou lineárně nezávislé. Pokud zobrazení φ není prosté, existuje $b \neq o \in V : \varphi(b) = o \in V'$. Jelikož $b \in V$, lze jej vyjádřit jako lineární kombinaci $b = \alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_m.a_m$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T$ a alespoň jeden z koeficientů $\alpha_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ je různý od 0. Dále vyjádříme obraz vektoru b:

   $$\varphi(b) = \varphi(\alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n) = \alpha_1.\varphi(a_1) + \cdots + \alpha_n.\varphi(a_n) = o.$$

   Jelikož $\alpha_i \neq 0$, lineární kombinace je netriviální, a tedy vektory $\varphi(a_i)$ jsou lineárně závislé, což je ve sporu s předpokladem, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé.

2. ($\Rightarrow$) Nechť zobrazení φ je na V'. Pro libovolný $d \in V'$ existuje $c \in V : \varphi(c) = d$. Jelikož $c = \alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n$, dostáváme $d = \varphi(c) = \alpha_1.\varphi(a_1) + \cdots + \alpha_n.\varphi(a_n)$ a $V' \subset [\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)]$. Zřejmě platí i $[\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)] \subset V'$, a tedy $V' = [\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)]$.

   ($\Leftarrow$) Nechť $[\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)] = V'$. Pro libovolný vektor $b \in V'$ platí: $b = \alpha_1.\varphi(a_1) + \cdots + \alpha_n.\varphi(a_n) = \varphi(\alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n) = \varphi(a)$, kde $a = \alpha_1.a_1 + \cdots + \alpha_n.a_n \in V$, a tedy φ je zobrazení vektorového prostoru V na vektorový prostor V'.

3. Plyne z 1 a 2.

Definice 4.5. (**Izomorfní vektorové prostory**)
Vektorové prostory V, V' nad stejným tělesem T, pro které existuje izomorfismus $\varphi : V \to V'$, se nazývají *izomorfní*.

Věta 4.6. *Nechť V a V' jsou vektorové prostory konečné dimenze nad stejným tělesem T a* $\dim V = \dim V'$. *Pak jsou prostory V, V' izomorfní.*

Důkaz: Nechť $\{a_1, \ldots, a_n\}$ je báze V a $\{b_1, \ldots, b_n\}$ je báze V'. Definujme lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ tak, že $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \varphi(a_i) = b_i$. Podle věty 4.5 je takto definované zobrazení izomorfismus, protože vektory $b_1, \ldots, b_n$ jsou lineárně nezávislé a generují V'.

4.3 Skládání lineárních zobrazení

Věta 4.7. *Nechť V, V', V'' jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T, $\varphi : V \to V'$, $\psi : V' \to V''$ lineární zobrazení. Pak platí:*

1. *Složené zobrazení $\eta = \varphi \circ \psi : V \to V''$ je lineární zobrazení.*

2. *Je-li* $\dim V = m, \dim V' = n, \dim V'' = p, \mathcal{A}$ *báze prostoru V, $\mathcal{B}$ báze prostoru V', $\mathcal{C}$ báze prostoru V'', je matice $A_{\eta,\mathcal{A},\mathcal{C}}$ typu (m,p) a platí*

$$A_{\eta,\mathcal{A},\mathcal{C}} = A_{\varphi,\mathcal{A},\mathcal{B}}\, A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

Důkaz:
1. Ověříme obě podmínky z definice lineárního zobrazení:

$$\eta(u+v) = \psi(\varphi(u+v)) = \psi(\varphi(u)+\varphi(v)) = \psi(\varphi(u)) + \psi(\varphi(v)) = \eta(u) + \eta(v),$$

$$\eta(\alpha.u) = \psi(\varphi(\alpha.u)) = \psi(\alpha.(\varphi(u)) = \alpha.(\psi(\varphi(u))) = \alpha.(\eta(u)).$$

2. Důkaz provedeme pro případ aritmetických vektorových prostorů, v obecném případě konečně rozměrných vektorových prostorů bychom postupovali analogicky s využitím vyjádření vektorů jako lineárních kombinací vektorů bází. $A_\varphi = (a_{ij})$ typu (m,n) a $A_\psi = (b_{ij})$ typu (n,p) jsou matice daných lineárních zobrazení. Vypočítáme obraz i-tého jednotkového vektoru z V (na i-tém místě 1, jinak 0) ve složeném zobrazení $\eta = \varphi \circ \psi$:

$$\eta(0,\dots,0,1,0,\dots,0) = \psi(\varphi(0,\dots,0,1,0,\dots,0)) = \psi(a_{i1},\dots,a_{in}) = \psi(a_{i1}e_1^n + \cdots + a_{in}e_n^n) =$$

$$= a_{i1}\psi(e_1^n) + \cdots + a_{in}\psi(e_n^n) = a_{i1}(b_{11}, b_{12},\dots,b_{1p}) + \cdots + a_{in}(b_{n1}, b_{n2},\dots,b_{np}) =$$
$$= (a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{in}b_{n1},\dots,a_{i1}b_{1p} + \cdots + a_{in}b_{np}) = (c_{i1},\dots,c_{ip}),$$

kde $\varphi(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ představuje i-tý řádek matice A_φ a e_i^n i-tý jednotkový vektor z V'. Matice $A_\eta = (c_{ij})$ je typu (m,p) a platí $A_\eta = A_\varphi A_\psi$.

Věta 4.8. *Nechť V a V' jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T a $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Nechť existuje inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : V' \to V$. Pak platí: Je-li* $\dim V = \dim V' = m$, *$\mathcal{A}$ báze prostoru V, $\mathcal{B}$ báze prostoru V', platí pro matici $A_{\varphi^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}}$ m-tého řádu*

$$A_{\varphi^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} = (A_{\varphi,\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1}.$$

Důkaz: Nechť $\psi = \varphi \circ \varphi^{-1}$ je zobrazení $V \to V$. Pro matici tohoto zobrazení platí:

$$E = A_{\psi,\mathcal{A}} = A_{\varphi^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} A_{\varphi,\mathcal{A},\mathcal{B}},$$

kde E je jednotková matice m-tého řádu, a tedy $A_{\varphi^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} = (A_{\varphi,\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1}$.

4.4 Úlohy k procvičení

1. Zjistěte, zda je následující zobrazení lineární:

$$\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R}); \varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 5x_2, x_1 + 3x_2, x_2).$$

2. Zjistěte, zda existuje lineární zobrazení takové, že

$$\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to P_4; \varphi(1,2,3) = x + x^3, \varphi(1,2,0) = 1 + x^2 + x^4, \varphi(1,0,0) = x^3.$$

   (P_4 je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše 4 nad tělesem $\mathbb{R}$.)

3. Zjistěte, zda je následující zobrazení lineární. V kladném případě určete jeho matici vzhledem ke standardním bázím:
   a) $\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R}); \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3)$,
   b) $\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R}); \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3 - 2x_2)$.

4. Ověřte, že zobrazení φ je lineární. Nalezněte aspoň jednu bázi Ker φ a aspoň jednu bázi Im φ, je-li dáno:
   $\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R}) : \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 4x_2 + 6x_3)$.

5. Zobrazení $\varphi, \psi : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ jsou definována předpisy

$$\varphi(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_3, 2a_2 + a_3, 2a_2),$$

$$\psi(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 4a_1 - a_3, a_1 + a_3).$$

   Nechť $\eta = \varphi \circ \psi$. Určete předpis definující zobrazení η. Zjistěte, zda φ, ψ, η jsou lineární zobrazení. V kladném případě určete matice těchto zobrazení vzhledem ke standardním bázím ve $V_3(\mathbb{R})$. V případě, že některé z těchto zobrazení je izomorfismus, určete také předpis definující příslušné inverzní zobrazení a matici tohoto zobrazení.

5 Permutace a determinanty

Definice 5.1. (**Pořadí prvků**)
Nechť n je přirozené číslo. *Pořadím prvků* $1, 2, \ldots, n$ rozumíme každou uspořádanou n-tici $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ prvků $1, 2, \ldots, n$, kde se každý z prvků $1, 2, \ldots, n$ vyskytuje právě jednou.

Definice 5.2. (**Inverze v pořadí prvků**)
Inverzí v pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ rozumíme každou dvojici čísel i_r, i_s takovou, že $r < s$ a zároveň $i_r > i_s$ (tj. větší číslo se v pořadí vyskytuje před menším číslem).

Definice 5.3. (**Permutace**)
Permutací π množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ rozumíme každé vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Permutaci π zapisujeme pomocí matice typu $(2, n)$ tvaru

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix},$$

ve které první řádek nazýváme *pořadím vzorů*, druhý řádek *pořadím obrazů* a pro každé $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $\pi(i_x) = j_x$. Množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ značíme S_n. Inverzní zobrazení π^{-1} k permutaci π nazýváme *inverzní permutací* k permutaci π. Říkáme, že *permutace je v základním tvaru*, jestliže pořadí vzorů je $(1, 2, \ldots, n)$.

Poznámka:

- Inverzní permutaci π^{-1} k permutaci π získáme snadno záměnou pořadí vzorů a pořadí obrazů, tj. výměnou řádků v odpovídající matici.
- V dalším textu budeme vždy pracovat s permutacemi v základním tvaru.

Věta 5.1. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Počet všech permutací n-prvkové množiny je roven $n!$.*

Důkaz: Matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$. Uvažujeme-li permutaci n prvků, z nichž vynecháme libovolný prvek, dostaneme permutaci $n - 1$ prvků. Počet permutací $n - 1$ prvků je podle indukčního předpokladu $(n-1)!$. Jelikož jeden prvek můžeme vynechat n způsoby, dostáváme počet všech permutací n-prvkové množiny je roven $n(n-1)! = n!$.

Definice 5.4. (**Sudá a lichá permutace**)
Sudou permutací rozumíme takovou permutaci, ve které se vyskytuje sudý počet inverzí. *Lichou permutací* rozumíme takovou permutaci, ve které se vyskytuje lichý počet inverzí.

Definice 5.5. (**Znaménko permutace**)
Znaménkem permutace π rozumíme celé číslo $(-1)^{k+m}$, kde k je počet všech inverzí v pořadí vzorů a m počet všech inverzí v pořadí obrazů. Znaménko permutace π značíme sign π.

Poznámka: Znaménka permutací π a π^{-1} jsou stejná. Znaménko sudé permutace je vždy 1, znaménko liché permutace je vždy -1.

Definice 5.6. (**Transpozice**)
Transpozicí prvků $r < s$, kde $r, s \leq n$, rozumíme permutaci ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & s-1 & s & s+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & r-1 & s & r+1 & \dots & s-1 & r & s+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

ve které se každý prvek různý od r, s zobrazuje sám na sebe, r se zobrazí na s a s na r.

Věta 5.2. *Na permutaci π provedeme libovolnou transpozici. Pro takto vzniklou permutaci π' platí* $\operatorname{sign} \pi' = -\operatorname{sign} \pi$.

Důkaz: Pokud provedeme transpozici na sousední prvky, počet inverzí se změní o 1, jelikož v takovém případě vznikne jedna nová inverze nebo naopak ubude jedna inverze, a tedy znaménko permutace se změní. Předpokládejme nyní, že provedeme transpozici na dva prvky $k_i, k_j, j > i$, které nejsou sousední. Tuto výměnu můžeme složit z konečného počtu výměn sousedních prvků. Postupně přesouváme prvek k_i na místo prvku k_j ($j-i$ transpozic), následně pak prvek k_j na místo prvku k_i ($j-i-1$ transpozic, protože při prvním přesouvání se prvek k_j posunul o 1 vlevo). Celkem dostáváme $2j-2i-1$ transpozic. Jejich počet je tedy lichý a znaménko permutace se změní.

5.1 Determinant čtvercové matice

Definice 5.7. (**Determinant**)
Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice n-tého řádu nad tělesem T. *Determinantem* matice A rozumíme prvek $\det A$ z tělesa T, pro který platí:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sign} \pi)\, a_{1s_1}\, a_{2s_2}\, \dots\, a_{ns_n},$$

kde $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$. Jsou-li $a_1, a_2, \dots, a_n$ řádkové (resp. sloupcové) vektory matice A, píšeme místo $\det A$ též $\det(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Poznámka: Pro determinant matice A budeme také používat označení $|A|$.

Příklad 5.1. (Determinant matice 1., 2. a 3. řádu)

1. Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij})$ 1. řádu: $\det A = a_{11}$,

2. Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij})$ 2. řádu:

$$\det A = (-1)^0 a_{11}a_{12} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

3. Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij})$ 3. řádu:

$$\begin{aligned} \det A = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + \\ +(-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Poznámka: Determinant matice 3. řádu lze také vypočítat pomocí tzv. Sarrusova pravidla. Pod matici A opíšeme postupně 1. a 2. řádek matice. Vzniknou tři „diagonály“ ve směru shora dolů, které představují součiny $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$ (s kladným znaménkem), a tři „diagonály“ ve směru zdola nahoru, které představují součiny $-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ (se záporným znaménkem). Součet těchto součinů je roven det A (viz příklad 5.1). Pro matice vyššího řádu však analogický postup nelze použít, zdůvodnění necháváme na čtenáři.

Věta 5.3. *Nechť A je čtvercová matice a pro každý prvek i-tého řádku matice A platí $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$. Pak* $\det A = \det B + \det C$, *kde matice B, resp. C, vzniknou z matice A nahrazením prvků i-tého řádku prvky b_{ij}, resp. c_{ij}.*

Důkaz: Předpokládejme například, že $i = 1$, tj. pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí $a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$. Dostáváme (s využitím distributivity násobení vzhledem ke sčítání a komutativity sčítání):

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sign} \pi)\, a_{1s_1}\, a_{2s_2} \,\dots\, a_{ns_n} = \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sign} \pi)\, (b_{1s_1} + c_{1s_1})\, a_{2s_2} \,\dots\, a_{ns_n} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sign} \pi)\, b_{1s_1}\, a_{2s_2} \,\dots\, a_{ns_n} + \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sign} \pi)\, c_{1s_1}\, a_{2s_2} \,\dots\, a_{ns_n} = \det B + \det C.$$

Analogicky můžeme tvrzení dokázat pro libovolný řádek matice A, stejně tak i pro libovolný počet sčítanců.

Vlastnosti determinantů:

1. Determinant matice A je součet $n!$ součinů. V každém součinu se vyskytuje z každého řádku i sloupce právě jeden prvek. Každý prvek řádku či sloupce se vyskytuje aspoň v jednom sčítanci.

2. Determinant matice, jejíž jeden řádek je roven nulovému vektoru, je roven 0.

3. Determinant čtvercové matice v trojúhelníkovém tvaru A je roven součinu prvků na diagonále.

4. Vynásobíme-li řádek matice prvkem $\alpha \in T$, vznikne matice A', pro kterou platí $\det A' = \alpha \det A$.

5. Nechť $\alpha \in T$. Přičteme-li k řádku matice α-násobek jiného řádku, vznikne matice A', pro kterou platí $\det A' = \det A$.

6. Determinant matice A', která vznikne z matice A přičtením lineární kombinace ostatních řádků k danému řádku, je roven determinantu matice A.

Věta 5.4. *Pro každou čtvercovou matici A platí:* $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$.

Důkaz: Označme matici $A^{\mathrm{T}} = (b_{ij})$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Podle definice determinantu platí

$$\det\ A = \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign}\ \pi) a_{1s_1}\, a_{2s_2}\ \ldots\ a_{ns_n} = \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign}\,\pi) b_{s_1 1}\, b_{s_2 2}\ \ldots\ b_{s_n n}.$$

Nyní zaměníme pořadí členů součinu (násobení je komutativní) tak, aby bylo stejné jako pořadí sloupců matice A, využijeme toho, že znaménka inverzních permutací jsou stejná, a dostáváme

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign}\ \pi^{-1}) b_{s_1^{-1} 1}\, b_{s_2^{-1} 2}\ \ldots\ b_{s_n^{-1} n} = \det\ A^{\mathrm{T}}$$

Použitím všech permutací π dostaneme všechny π' (všechny tyto permutace jsou prvky množiny S_n a znaménka příslušných součinů zůstanou zachována).

Důsledek: Tvrzení odvozená pro výpočet determinantu pomocí řádků matice A platí i pro jeho výpočet pomocí sloupců matice A.

Věta 5.5. *Vznikne-li matice A' ze čtvercové matice A n-tého řádu vzájemnou výměnou dvou řádků, resp. sloupců, potom* $\det\ A' = -\det\ A$.

Důkaz: Nechť A' je matice, která vznikne z matice A vzájemnou výměnou i-tého a j-tého řádku. Podle definice determinantu platí $\det\ A = \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign}\ \pi) a_{1s_1}\, a_{2s_2}\ \ldots a_{is_i} \ldots a_{js_j} \ldots\ a_{ns_n}$ a $\det\ A' = \sum_{\pi' \in S_n} (\text{sign}\ \pi') a_{1s_1}\, a_{2s_2}\ \ldots a_{js_j} \ldots a_{is_i} \ldots\ a_{ns_n}$. Vzájemnou výměnou dvou řádků získáme stejný součin prvků, který má ale opačné znaménko, protože platí $\text{sign}\ \pi = -\text{sign}\ \pi'$. Příslušné determinanty tedy mají opačná znaménka.

Důsledek: Determinant čtvercové matice A, která má stejné aspoň dva řádky, je vždy roven nule. Po výměně těchto dvou řádků dostaneme totiž matici $A' = A$ a platí $\det\ A = -\det\ A' = -\det\ A$, a tedy $\det\ A = 0$.

Definice 5.8. (**Subdeterminant**)
Je-li A čtvercová matice, a_{ij} libovolný její prvek, potom *subdeterminantem* M_{ij} z čtvercové matice A příslušným prvku a_{ij} rozumíme determinant matice, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Definice 5.9. (**Algebraický doplněk**)
Je-li A čtvercová matice, a_{ij} libovolný její prvek, potom *algebraickým doplňkem A_{ij} příslušným prvku a_{ij}* rozumíme prvek

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Příklad 5.2. V příkladu 5.2 ukážeme rozvoj determinantu čtvercové matice třetího řádu podle 1. řádku, který zobecníme ve větě 5.6:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} =$$
$$= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}.$$

Věta 5.6. ***(Rozvoj determinantu podle*** i***-tého řádku)***
Nechť A je čtvercová matice n-tého řádu nad tělesem T, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak platí

1. $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$,
2. $(i \neq j) \Rightarrow a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$.

Důkaz:
1. Tvrzení dokážeme pro $i = 1$, pro ostatní hodnoty i můžeme tvrzení dokázat pomocí vzájemné výměny řádků. Víme, že $\det A = \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) a_{1s_1} a_{2s_2} \ldots a_{ns_n}$. Determinant je součtem $n!$ součinů, které rozdělíme do n skupin podle prvků 1. řádku matice tak, že první skupinu tvoří členy obsahující prvek a_{11}, druhou skupinu tvoří členy obsahující prvek a_{12} atd., n-tou skupinu tvoří členy obsahující prvek a_{1n}. V každé ze skupin vytkneme prvek a_{1j}. Jelikož tato skupina nemůže obsahovat žádný další prvek 1. řádku ani j-tého sloupce, dostaneme v každé skupině přímo součin $a_{1j}(-1)^{i+j}M_{ij}$ a $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$.
2. Výraz na levé straně rovnosti představuje rozvoj determinantu, který vznikne z determinantu matice A tak, že prvky j-tého řádku jsou nahrazeny prvky i-tého řádku. Tento determinant obsahuje dva stejné řádky, a je tedy roven 0.

Věta 5.7. *Jestliže je čtvercová matice A n-tého řádu regulární, pak* $\det A \neq 0$. *Jestliže je čtvercová matice A n-tého řádu singulární, pak* $\det A = 0$.

Důkaz: Každá regulární čtvercová matice má hodnost n, a tedy ji lze převést pomocí elementárních úprav na horní trojúhelníkovou matici, jejíž diagonálu tvoří vektor $(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn})$, který obsahuje pouze nenulové prvky. Determinant této matice je součinem všech prvků na hlavní diagonále, a tedy nenulový. Pokud je čtvercová matice singulární, lze ji stejným postupem převést na trojúhelníkovou matici, ve které se vyskytuje aspoň jeden nulový řádek. Její determinant je tedy roven 0.

5.2 Využití determinantů

Věta 5.8. ***(Cramerovo pravidlo)***
Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\
\ldots, & & & & & & & & \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n,
\end{array}$$

ve které je matice soustavy A regulární. Označme sloupcové vektory matice A po řadě $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Potom soustava má jediné řešení $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a pro každou složku x_i řešení x je

$$x_i = \frac{\det\,(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

Důkaz: Ukážeme, že popsané řešení je řešením dané soustavy rovnic. Matice A soustavy je regulární, a tedy $\det A \neq 0$. Označme A_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, determinant matice, která vznikne nahrazením j-tého sloupce matice A sloupcem pravých stran. Dosazením do i-té rovnice postupně dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{A_j}{\det A} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}b_k \det A_{kj}\right]}{\det A} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ij}\det A_{kj}}{\det A}.$$

Pro $i = k$ dostáváme

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k \det A}{\det A} = b_i.$$

Pro $i \neq k$ dostáváme součet součinů prvků i-tého řádku s algebraickými doplňky prvků k-tého řádku, který je podle věty 5.6 roven 0. Soustava má právě jedno řešení, protože matice soustavy je regulární.

Příklad 5.3. Pro soustavu dvou rovnic o dvou neznámých mající právě jedno řešení ukážeme předchozí výpočet pro první rovnici, tj. pro $i = 1$:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{1j}x_j = \sum_{j=1}^{2} a_{1j}\frac{\det A_j}{\det A} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{2} a_{1j}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{j+k}\, b_k \det A_{kj} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left[a_{11}\left((-1)^{1+1}b_1\, A_{11} + (-1)^{1+2}\, b_2\, A_{21}\right) + a_{21}\left((-1)^{2+1}b_1\, A_{12} + (-1)^{2+2}\, b_2\, A_{22}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left[b_1\left((-1)^{1+1}\, a_{11}\, A_{11} + (-1)^{2+1}\, a_{12}\, A_{12}\right) b_2\left((-1)^{1+2}\, a_{11}\, A_{21} + (-1)^{2+2}\, a_{12}\, A_{22}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left(b_1 \det A + b_2 \cdot 0\right) = b_1.$$

Věta 5.9. ***(Výpočet inverzní matice pomocí determinantů)***
Nechť $A = (a_{ij})$ je regulární matice n-tého řádu. Potom pro inverzní matici $A^{-1} = (x_{ij})$ (n-tého řádu) platí

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}.$$

Důkaz: Nechť $C = (c_{ij})$ je součinem matic A, A^{-1}. Ukážeme, že C je jednotková matice. Každý prvek c_{ij} matice C je součinem prvků i-tého řádku matice A s prvky j-tého sloupce matice A^{-1} a platí:

$$c_{ij} = a_{i1}\frac{A_{j1}}{\det A} + a_{i2}\frac{A_{j2}}{\det A} + \cdots + a_{in}\frac{A_{n1}}{\det A} = \frac{1}{\det A}\left(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}\right)$$

Pro $i \neq j$ platí

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

a pro $i = j$ platí

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \det A.$$

Prvek c_{ij} je tedy roven 1 pro $i = j$ a roven 0 pro $i \neq j$ a C je jednotková matice.

5.3 Úlohy k procvičení

1. Určete počet inverzí v pořadí $(2, 6, 5, 4, 3, 1)$.

2. Určete počet inverzí v pořadí vzorů, obrazů a znaménko permutace. Dále zapište permutaci v základním tvaru, určete inverzní permutaci a její znaménko.

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Určete permutaci, která přísluší následujícímu sčítanci determinantu šestého řádu:
$$a_{16}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}a_{64}.$$
   Dále určete, s jakým znaménkem se tento sčítanec v determinantu vyskytuje.

4. Vypočítejte determinant pomocí úpravy na horní trojúhelníkovou matici, je-li dáno:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Nechť $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. Vypočítejte M_{23} a A_{23}.

6. Vypočítejte následující determinanty

   a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$,

   e) $\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 3 \\ 0 & 5a-1 & 4 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Vypočítejte inverzní matici pomocí determinantu: a) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

8. Je dána soustava rovnic: $\begin{aligned} 3x - 5y + z &= -4, \\ 2x - y + 3z &= 9, \\ 4x + 7y + z &= 21. \end{aligned}$

   Ověřte, že matice soustavy je regulární, a soustavu vyřešte pomocí Cramerova pravidla.

6 Vektorové prostory se skalárním součinem

6.1 Základní pojmy

Definice 6.1. (**Euklidovský vektorový prostor**)
Vektorový prostor $(E, +, .)$ nad tělesem $\mathbb{R}$ nazýváme *euklidovským vektorovým prostorem*, jestliže existuje zobrazení $g : E \times E \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné vektory $a, b, c \in E$ a libovolné reálné číslo α platí:
a) $g(a, b) = g(b, a)$,
b) $g(a + b, c) = g(a, c) + g(b, c)$,
c) $g(\alpha.a, c) = \alpha.g(a, c)$,
d) $g(a, a) \geq 0$, $g(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = o$.
Zobrazení g nazýváme *skalárním součinem* v prostoru $(E, +, .)$.

Příklad 6.1. Příklady skalárního součinu:

1. $V_3(\mathbb{R})$: $g(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$,

2. $V_3(\mathbb{R})$: $g(a, b) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2 + a_3b_3$.

3. Vektorový prostor reálných funkcí definovaných na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$:
$$g(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámky:
a) Úmluva: Euklidovský vektorový prostor $(E, +, .)$ se skalárním součinem g budeme v dalším textu značit (E, g).
b) Snadno se ověří, že v aritmetickém vektorovém prostoru $V_n(\mathbb{R})$ je předpisem

$$g(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

kde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, definován skalární součin. Tento součin budeme v dalším textu značit $a \cdot b$. Nebude-li v prostoru $V_n(\mathbb{R})$ zaveden jiný skalární součin, budeme pracovat vždy se skalárním součinem $a \cdot b$. Nadále budeme v této kapitole při násobení vektoru skalárem vynechávat tečku, aby nedošlo k záměně se skalárním součinem $a \cdot b$.

Definice 6.2. (**Délka vektoru, velikost úhlu vektorů**)
Nechť (E, g) je euklidovský vektorový prostor, $a, b \in E$. *Délkou (velikostí, normou)* vektoru a nazýváme reálné číslo
$$||a|| = \sqrt{g(a, a)}.$$
Velikost φ *úhlu mezi vektory* a, b $(\varphi \in \langle 0, \pi\rangle)$ definujeme takto:

$$\begin{array}{ll} \cos\varphi = \frac{g(a,b)}{||a||\,||b||} & \text{pro } a \neq o,\ b \neq o, \\ \cos\varphi = 0 & \text{pro } a = o \text{ nebo } b = o. \end{array}$$

Jestliže platí $\cos\varphi = 0$, a tedy $g(a, b) = 0$, nazýváme vektory a, b *kolmými (ortogonálními)* a píšeme $a \perp b$.

Poznámka: Výraz $\frac{g(a,b)}{||a||\,||b||}$ je vždy menší nebo roven 1 (plyne z věty 6.1).

Věta 6.1. ***(Vlastnosti délky vektoru)***
V euklidovském vektorovém prostoru (E,g) platí $(a,b \in E,\ \alpha \in \mathbb{R})$:
a) $||\alpha a|| = |\alpha|\,||a||$,
b) $||a|| \geq 0$, $||a|| = 0 \Leftrightarrow a = o$,
c) $|g(a,b)| \leq ||a||\,||b||$ (Schwartzova nerovnost),
d) $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$ (trojúhelníková nerovnost).

Důkaz: Tvrzení a), b) plynou přímo z definice 6.2.
c) Pro $a = o$ je tvrzení zřejmé. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro vektor $\alpha a - b$, kde $a, b \in E, a \neq o$, platí podle definice skalárního součinu $g(\alpha a - b, \alpha a - b) \geq 0$, a tedy $\alpha^2 g(a,a) - 2\alpha g(a,b) +$ $+g(b,b) \geq 0$. Tento polynom druhého stupně má nejvýše jeden kladný kořen, diskriminant příslušné rovnice tedy není kladný. Dostáváme $D = 4(g(a,b))^2 - 4g(a,a)g(b,b) \leq 0$, a tedy $(g(a,b))^2 \leq g(a,a)g(b,b)$ a $|g(a,b)| \leq ||a||||b||$.
d) $||a+b||^2 = g(a+b, a+b) = g(a,a)+g(b,b)+2g(a,b) \leq ||a||^2+||b||^2+2||a||||b|| = (||a||+||b||)^2$, a tedy $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$.

Definice 6.3. (**Ortogonální a ortonormální vektory**)
Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou vektory z euklidovského vektorového prostoru (E,g). Vektory $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nazýváme *ortogonálními*, jestliže $a_i \perp a_j$ pro všechna $i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Vektory $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nazýváme *ortonormálními*, jestliže jsou navzájem ortogonální a $\forall i \in \{1, \ldots, k\} : ||a_i|| = 1$. Jsou-li každé dva vektory z množiny $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ navzájem ortogonální, nazýváme danou množinu *ortogonální* množinou. Pokud navíc mají všechny vektory množiny M délku 1, nazveme množinu M *ortonormální* množinou.

Věta 6.2. *a) Nenulové navzájem ortogonální vektory v euklidovském vektorovém prostoru jsou lineárně nezávislé.*
b) Nechť a, b jsou vektory v euklidovském prostoru (E,g). Pak platí

- *$a \perp b \Leftrightarrow ||a+b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2$ (Pythagorova věta).*
- *$a, b \neq o$ a φ je úhel vektorů $a, b \Leftrightarrow ||a-b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2 - 2||a||||b|| \cos\varphi$ (Kosinová věta).*

Důkaz: a) Nechť $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = o$, kde $a_1, \ldots, a_n$ jsou nenulové navzájem ortogonální vektory a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Vektory na obou stranách rovnosti vynásobíme skalárně libovolným vektorem $a_j, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dostáváme $0 = g(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, a_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(a_i, a_j) =$ $= \alpha_j ||a_j||^2$, protože vektory $a_1, \ldots, a_n$ jsou navzájem ortogonální, a tedy pro $i \neq j$ platí $g(a_i, a_j) = 0$. Navíc platí $||a_j||^2 \neq 0$, a tedy $\alpha_j = 0$. Jelikož pouze triviální lineární kombinace nenulových navzájem ortogonálních vektorů je rovna nulovému vektoru, vektory $a_1, \ldots, a_n$ jsou lineárně nezávislé.

b) Postupně dokážeme obě ekvivalence:

- $||a+b||^2 = g(a+b, a+b) = g(a,a) + g(b,b) + 2g(a,b) = ||a||^2 + ||b||^2$, právě když $g(a,b) = 0$.
- $||a-b||^2 = g(a-b, a-b) = g(a,a) + g(b,b) - 2g(a,b) = ||a||^2 + ||b||^2 - 2||a||||b|| \cos\varphi$.

6.2 Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces

Definice 6.4. (**Ortogonální a ortonormální báze**)
Nechť (E, g) je n-rozměrný euklidovský vektorový prostor, $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ jeho báze. Je-li množina vektorů $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ortogonální, resp. ortonormální, nazýváme $\mathcal{B}$ *ortogonální*, resp. *ortonormální bází*.

Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.
Jedná se o postup, který umožňuje v lineárním obalu lineárně nezávislých vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_m \, (m \geq 2)$ v prostoru (E, g) najít navzájem ortogonální nenulové vektory $b_1, b_2, \ldots, b_m$, a tedy i ortogonální nebo ortonormální bázi. Správnost postupu ukážeme indukcí podle k.
1. krok. Položíme $b_1 = a_1$ ($b_1 \neq o$, protože $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jsou lineárně nezávislé).
2. krok. Hledáme vektor b_2 ve tvaru $b_2 = a_2 + \alpha_{21} b_1$ (odtud víme, že $b_2 \neq o$, protože vektory a_1, a_2 jsou lineárně nezávislé) a koeficient $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$ určíme tak, aby vektory b_1, b_2 byly ortogonální:

$$0 = g(b_1, b_2) = g(a_2, b_1) + \alpha_{21} g(b_1, b_1).$$

Protože $g(b_1, b_1) \neq 0$, dostaneme

$$\alpha_{21} = -\frac{g(a_2, b_1)}{g(b_1, b_1)}.$$

k-tý krok. Máme již nenulové ortogonální vektory $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$, které patří do $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}]$. Vektor b_k hledáme ve tvaru $b_k = a_k + \alpha_{k1} b_1 + \cdots + \alpha_{k,k-1} b_{k-1}$. Z této rovnosti plyne, že $b_k \neq o$. Koeficienty $\alpha_{ki} \in \mathbb{R}$ určíme z podmínek

$$g(b_k, b_i) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Vektory $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ jsou ortogonální (tedy $g(b_i, b_j) = 0$ pro $i \neq j$) a nenulové vektory, proto dostáváme

$$0 = g(b_k, b_i) = g(a_k, b_i) + \alpha_{ki} g(b_i, b_i),$$

odtud

$$\alpha_{ki} = -\frac{g(a_k, b_i)}{g(b_i, b_i)}, \; i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Příklad 6.2. V euklidovském vektorovém prostoru $V_4(\mathbb{R})$ nalezněme ortonormální bázi podprostoru

$$U = [(1, -2, 2, 0), (1, -2, 2, 3), (-1, 1, 0, 0)].$$

Řešení. Při hledání ortonormální báze budeme pracovat se skalárním součinem $\cdot$. Nejprve ukážeme, že vektory $a_1 = (1, -2, 2, 0)$, $a_2 = (1, -2, 2, 3)$, $a_3 = (-1, 1, 0, 0)$ jsou lineárně nezávislé, a tvoří tedy bázi podprostoru U dimenze 3. Hledáme tedy ortogonální bázi $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.
1. krok. Položíme $b_1 = a_1 = (1, -2, 2, 0)$.
2. krok. Hledáme vektor $b_2 = a_2 + \alpha_{21} b_1$ splňující podmínku $b_2 \cdot b_1 = 0$:
$b_2 = (1, -2, 2, 3) + \alpha_{21}(1, -2, 2, 0) = (1 + \alpha_{21}, -2 - 2\alpha_{21}, 2 + 2\alpha_{21}, 3)$,
$b_2 \cdot b_1 = (1 + \alpha_{21}) \,.\, 1 + (-2 - 2\alpha_{21}) \,.\, (-2) + (2 + 2\alpha_{21}) \,.\, 2 + 3 \,.\, 0 = 9\alpha_{21} + 9 = 0$, tj. $\alpha_{21} = -1$.
Získali jsme vektor $b_2 = a_2 - b_1 = (0, 0, 0, 3)$.

3. krok. Hledáme vektor $b_3 = a_3 + \alpha_{31}b_1 + \alpha_{32}b_2$ splňující podmínky $b_3 \cdot b_1 = 0$, $b_3 \cdot b_2 = 0$: Analogicky jako ve 2. kroku vypočítáme, že
$b_3 = (-1 + \alpha_{31}, 1 - 2\alpha_{31}, 2\alpha_{31}, 3\alpha_{32})$,
$b_3 \cdot b_1 = (-1+\alpha_{31}) \,.\, 1 + (1-2\alpha_{31}) \,.\, (-2) + 2\alpha_{31} \,.\, 2 + 3\alpha_{32} \,.\, 0 = -3 + 9\alpha_{31} = 0$, tj. $\alpha_{31} = \frac{1}{3}$,
$b_3 \cdot b_2 = (-1+\alpha_{31}) \,.\, 0 + (1-2\alpha_{31}) \,.\, 0 + 2\alpha_{31} \,.\, 0 + 3\alpha_{32} \,.\, 3 = 9\alpha_{32} = 0$, tj. $\alpha_{32} = 0$.
Dostali jsme vektor $b_3 = a_3 + \frac{1}{3}b_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.
Jedna ortogonální báze $\mathcal{B}$ je tedy

$$\left\{(1,-2,2,0), (0,0,0,3), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)\right\}.$$

Jak získáme z ortogonální báze $\mathcal{B}$ ortonormální bázi $\mathcal{D}$? Stačí každý vektor b_i násobit číslem $1/||b_i||$ a výsledné vektory c_1, c_2, c_3 budou mít délku 1. Protože $||b_1|| = 3$, $||b_2|| = 3$, $||b_3|| = 1$, je hledaná ortonormální báze

$$\mathcal{D} = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), (0,0,0,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)\right\}.$$

6.3 Vlastnosti euklidovských vektorových prostorů

Věta 6.3. *Nechť (E, g) je vektorový prostor konečné dimenze. Libovolnou ortonormální podmnožinu prostoru E lze rozšířit na ortonormální bázi E.*

Důkaz: Jelikož je daná ortonormální množina lineárně nezávislá, je toto tvrzení přímým důsledkem Steinitzovy věty o výměně (věta 1.10).

Vyjádření skalárního součinu vzhledem k ortonormální bázi: Nechť (E, g) je vektorový prostor se skalárním součinem, ve kterém je dána ortonormální báze $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ a vektory $a, b \in E$.
Vektory a, b vyjádříme pomocí jejich souřadnic vzhledem k bázi $\mathcal{B}$: $a = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, $b = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$ a dostáváme:

$$g(a,b) = g(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n, \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j g(u_i, u_j) = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n.$$

Není-li báze $\mathcal{B}$ ortonormální, dostáváme:

$$g(a,b) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) B (\beta_1, \dots, \beta_n)^T,$$

kde matice $B = (b_{ik})$, $b_{ik} = g(a_i, a_k)$.

Definice 6.5. (**Izomorfní euklidovské vektorové prostory**)
Euklidovské vektorové prostory $E(g), E'(g')$ se nazývají *izomorfní*, jestliže existuje izomorfismus φ vektorových prostorů $E(g), E'(g')$ takový, že $\forall a, b \in E : g(a,b) = g'(\varphi(a), \varphi(b))$.

Věta 6.4. *Nechť (E, g) a (E', g') jsou n-rozměrné vektorové prostory. Pak jsou izomorfní.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ je ortonormální báze prostoru E a $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je ortonormální báze prostoru E'. Pak existuje podle věty 4.6 právě jeden izomorfismus $\varphi : E \to E'$ takový, že $\varphi(u_i) = v_i, i = 1, 2, \ldots, n$.
Libovolné vektory $a, b \in E$ vyjádříme pomocí vektorů báze $\mathcal{B}_1$: $a = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ a $b = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$. Jelikož φ je izomorfismus, můžeme jejich obrazy vyjádřit pomocí vektorů báze $\mathcal{B}_2$ jako $\varphi(a) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ a $\varphi(b) = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$. Dostáváme

$$g(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n = g'(\varphi(a), \varphi(b)).$$

Koeficient $\alpha_i\beta_j, i = j$, je roven 1, protože obě báze jsou ortonormální. Ostatní součiny jsou rovny 0, protože vektory jsou navzájem kolmé. Ostatní podmínky pro izomorfismus jsou splněny (viz věta 4.6).

6.4 Ortogonální doplněk

Definice 6.6. (**Ortogonální doplněk**)
Nechť (E, g) je vektorový prostor a $U \subset E$. *Ortogonálním doplňkem* množiny U v prostoru E nazveme množinu $U^\perp = \{u \in E, \forall v \in U : u \perp v\}$.

Věta 6.5. *Nechť (E, g) je vektorový prostor a $U \subset E, V \subset E$. Pak platí:*

1. *$U^\perp$ je podprostor E,*
2. *$V \subseteq U \Rightarrow U^\perp \subseteq V^\perp$.*

Důkaz je zřejmý.

Věta 6.6. *Nechť (E, g) je vektorový prostor a U, V jsou podprostory E. Pak platí:*

$$(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp.$$

Důkaz: Postupně dokážeme obě inkluze:
1) Víme, že $(U \subset U + V) \wedge (V \subset U + V)$.
Podle věty 1.5 platí $(U + V)^\perp \subset U^\perp \wedge (U + V)^\perp \subset V^\perp$, a tedy $(U + V)^\perp \subset (U^\perp \cap V^\perp)$.
2) Nechť $a \in U^\perp \cap V^\perp$. Vektor a patří tedy do ortogonálních doplňků množin U a V. Libovolný vektor $b \in U + V$ můžeme vyjádřit jako $b = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.
Postupně dostáváme $g(a, b) = g(a, u) + g(a, v) = 0$. Vektor a je tedy prvkem $(U + V)^\perp$.

Věta 6.7. *Nechť U je libovolný podprostor n-rozměrného euklidovského vektorového prostoru (E, g). Pak libovolný vektor $v \in E$ lze zapsat ve tvaru $v = r + s$, kde $r \in U$ a $s \in U^\perp$.*

Důkaz: Pokud $v \in U$, pak stačí vyjádřit $v = r + o$. Předpokládejme nyní, že $v \notin U$. Pak existuje ortonormální báze $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ prostoru U taková, že vektory $u_1, \ldots, u_k, v$ jsou lineárně nezávislé. Použijeme-li Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces, získáme skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takové, že vektor $w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + v$ je kolmý ke všem vektorům báze $\mathcal{B}$ a tedy $w \in U^\perp$.
Vektor v je tedy roven $v = (-\alpha_1 u_1 - \ldots - \alpha_k u_k) + w$, kde $w \in U^\perp$ a $(-\alpha_1 u_1 - \ldots - \alpha_k u_k) \in U$.

Definice 6.7. (**Ortogonální průmět**)
Vektor r z věty 6.7 se nazývá *ortogonální průmět vektoru v do podprostoru U.*

Věta 6.8. *Nechť (E, g) je vektorový prostor a U je podprostor E.*

1. *Libovolný vektor $v \in E$ je kolmý k U právě tehdy, když je kolmý k některé množině generátorů prostoru U.*

2. *Je-li E vektorový prostor konečné dimenze n, pak platí: $E = U \oplus U^\perp$ a $\dim U^\perp = \dim E - \dim U$.*

Důkaz: a) Zřejmé.
b) Nechť $\{v_1, \dots, v_k\}$ je ortonormální báze prostoru U. Potom existuje ortonormální báze prostoru E tvaru $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$. Množina B je lineárně nezávislá a ortogonální, a tedy každý vektor $u_{k+1}, \dots, u_n$ je kolmý ke všem vektorům $\{v_1, \dots, v_k\}$, a je tedy prvkem $U^\perp$. Platí tedy, že $[u_{k+1}, \dots, u_n] \subseteq U^\perp$.
Nyní uvažujeme libovolný vektor $w \in E, w \perp U$. Vektor w můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $u_{k+1}, \dots, u_n$, a tedy $U^\perp \subseteq [u_{k+1}, \dots, u_n]$. Dostáváme tedy, že $U^\perp = [u_{k+1}, \dots, u_n]$. Z vlastností ortogonálního doplňku plyne, že $U \cap U^\perp = \{o\}$, a tedy $E = U \oplus U^\perp$. Z vlastností direktního součtu plyne rovnost $\dim U^\perp = \dim E - \dim U$.

6.5 Úlohy k procvičení

1. V euklidovském vektorovém prostoru $(V_3(\mathbb{R}), \cdot)$ vypočítejte skalární součin vektorů $a = (3, 2, -4), b = (5, -1, 6)$.

2. V euklidovském vektorovém prostoru $(V_4(\mathbb{R}), \cdot)$ vypočítejte $||a||$, kde $a = (6, 3, 0, 2)$.

3. V euklidovském vektorovém prostoru $(V_2(\mathbb{R}), \cdot)$ najděte všechny vektory x, které jsou kolmé k $a = (1, 3)$.

4. $V_3(\mathbb{R})$: Zjistěte, zda $g(u, v) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + 4u_3v_3$ je skalární součin.

5. $V_3(\mathbb{R})$: Zjistěte, zda $g(u, v) = 4u_1v_2 + 4u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ je skalární součin.

6. $V_2(\mathbb{R})$: Zjistěte, zda $g(u, v) = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1$ je skalární součin.

7. V euklidovském vektorovém prostoru $(V_5(\mathbb{R}), \cdot)$ vypočítejte úhel vektorů $u = (1, -1, 0, 2, 1), v = (1, 1, -4, 3, 1)$.

8. V euklidovském vektorovém prostoru $(V_4(\mathbb{R}), \cdot)$ nalezněte ortonormální bázi podprostoru $S = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -2)]$.

9. V euklidovském vektorovém prostoru $(V_4(\mathbb{R}), \cdot)$ nalezněte ortonormální bázi podprostoru $S = [(1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8)]$.

10. V euklidovském vektorovém prostoru $(V_4(\mathbb{R}), \cdot)$ nalezněte ortonormální bázi podprostoru $[(0, 1, 0, 1), (-3, 0, 2, 1), (2, 5, -1, 0)]$. Danou bázi poté doplňte na ortonormální bázi $(V_4(\mathbb{R}), \cdot)$.

11. Nechť $W \subset (V_4(\mathbb{R}), \cdot)$, $W = [(1, 0, 1, 0), (-1, -3, 0, 2]$. Najděte ortogonální báze W a $W^\perp$. Najděte také ortogonální průmět vektoru $v = (3, 2, 1, 4)$ do prostoru W.

12. Nechť $W \subset (V_4(\mathbb{R}), \cdot)$, $W = [(1, 3, 3, 5), (1, 3, -5, -3), (1, -5, 3, -3)]$. Najděte ortogonální báze W a $W^\perp$.

13. Nechť $W \subset (V_4(\mathbb{R}), \cdot)$, $W = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3), (2, -1, 0, -3)]$. Najděte ortogonální báze W a $W^\perp$.

Reference

[1] Novotná, J., Trch, M. *Algebra a teoretická aritmetika, Sbírka příkladů, část 3, Základy algebry*, Praha, UK-PedF, 2004.

[2] Novotná, J., Trch, M. *Algebra a teoretická aritmetika, Sbírka příkladů, část 1, Lineární algebra*, Praha, UK-PedF, 1989.

[3] Blažek, J., Koman, M., Kussová, B, Vojtášková, B. *Algebra a teoretická aritmetika 1, 2*, Praha, SPN, 1985.