Definice Symetrickou grupou S_n rozumíme grupu permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ s operací skládání.

Poznámka: Místo o skládání permutací se většinou mluví o součinu permutací. Tuto terminologii používáme v dalším textu.

Samostatná práce:
- Ověřte, že S_n je grupa.
- Je S_n Abelova grupa?

Definice. Cyklická permutace (cyklus) prvků $a_1, \ldots, a_k$ množiny X je permutace, která a_i zobrazí na a_{i+1}, $1 \leq i \leq k-1$, a_k na a_1 a ostatní prvky z X ponechá na místě. Číslo k se nazývá délka cyklu. Cyklus zapisujeme $(a_1, \ldots, a_k)$.

Definice. Dva cykly $(a_1, \ldots, a_k)$, $(b_1, \ldots, b_p)$ z S_n nazveme disjunktními, jestliže $\{a_1, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, \ldots, b_p\} = \emptyset$.

Věta.
(a) Součin disjunktních cyklů je komutativní.
(b) Každá permutace se dá zapsat jako součin disjunktních cyklů.
(c) Rozklad permutace na součin disjunktních cyklů je určen jednoznačně až na pořadí cyklů.

Samostatná práce:
- Dokažte předchozí větu.
- Ověřte, že (a) neplatí, nejsou-li cykly disjunktní.

Věta. Řád permutace, která je součinem navzájem disjunktních cyklů, je nejmenší společný násobek jejich délek.

Poznámka: Řádem prvku x v grupě rozumíme nejmenší kladné přirozené číslo s, pro které je x^s rovno neutrálnímu prvku. V S_n je neutrálním prvkem identita.

Samostatná práce:
- Dokažte předchozí větu. Návod: Nejprve dokažte, že řád cyklu je roven jeho délce. Pak použijte rozklad permutace na součin disjunktních cyklů.
- Ověřte, že věta neplatí, nejsou-li cykly disjunktní.

Definice. Cykly délky 2 nazýváme transpozicemi. Sudá, resp. lichá permutace je permutace, kterou lze napsat jako součin sudého, resp. lichého počtu transpozic (transpozice nemusí být disjunktní)

Věta.
(a) Každá permutace se dá napsat jako součin transpozic.
(b) Sudost, lichost permutace je určena jednoznačně.
(c) Permutace z S_n je sudá, právě když obsahuje sudý počet inverzí.

Důsledek.
(a) Součin dvou sudých permutací je sudá permutace.
(b) Součin dvou lichých permutací je sudá permutace.

(a) Součin jedné sudé a jedné liché permutace je lichá permutace.

Věta. Množina A_n sudých permutací z S_n s operací součin permutací tvoří podgrupu S_n. (Tato podgrupa se nazývá alternující grupa.)

Samostatná práce:

- Dokažte předchozí věty.
- Rozhodněte, zda množina lichých permutací z S_n s operací součin permutací tvoří podgrupu S_n. Svou odpověď odůvodněte.
- Vyjádřete permutaci jako součin disjunktních cyklů a určete její řád:
  a) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 5, 4, 1, 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 3, 1, 7, 2, 8, 5, 4, 6 \end{pmatrix}$
- Vyjádřete součin cyklů jako součin disjunktních cyklů:
  a) (1, 2, 3)(4, 5, 6, 1)(2, 3, 4, 5, 6)(2, 5); b) (1, 2)(3, 4)(2, 3)(1, 2, 3, 4)(1, 3).
  b) Vypočítejte φ^{120}, kde $\varphi = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 5, 4, 1, 7, 6, 2, 3 \end{pmatrix}$