- ***Symetrické a antisymetrické matice***

  Opakování z kurzu Lineární algebra (https://dl1.cuni.cz/enrol/index.php?id=2008): Symetrické a antisymetrické matice, příklady a vlastnosti.

- ***Lineární formy a lineární substituce***

  Definice. Lineární formou $F(x_1, \ldots, x_n)$ v n proměnných $x_1, \ldots, x_n$ nazýváme výraz

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Soustavu m lineárních forem

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,$$
$$\ldots$$
$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n$$

můžeme zapsat maticově ve tvaru $\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^T$, kde $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$

Označme h hodnost matice $\boldsymbol{A}$. Pak $h \leq \min(m, n)$. Je-li $h = m$, resp. $h < m$, nazývají se formy lineárně nezávislé, resp. závislé.

Samostatná práce:

- Pro konkrétní soustavu lineárních forem zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, zjistěte vztahy mezi nimi.

Lineární substitucí rozumíme situaci, kdy jeden systém n proměnných $y_1, \ldots, y_n$ je s druhým systémem téhož počtu n proměnných $x_1, \ldots, x_n$ spjat rovnicemi

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,$$
$$\ldots$$
$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$$

Lineární substituci nazveme regulární, resp. singulární, je-li matice $\boldsymbol{A}$ regulární, resp. singulární.

Příklady:

(a) Matice šikmé souměrnosti podle jedné osy ve směru druhé osy

Souměrnost podle osy x_1: $y_1 = x_1$, $y_2 = -x_2$; $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$.

Souměrnost podle osy x_2: $y_1 = -x_1$, $y_2 = x_2$; $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Matice souměrnosti podle počátku: $y_1 = -x_1$, $y_2 = -x_2$; $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Matice homotetie se středem v počátku soustavy souřadnic a koeficientem k: $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$; $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k, & 0 \\ 0, & k \end{pmatrix}$.

Další úlohy na procvičení lineárních forem lze najít např. na http://www.karlin.mff.cuni.cz/~stepanov/LS8LinearniFormy.pdf

- ***Vlastní čísla a vektory matice, souvislost se symetrickými maticemi***

  Definice. Nechť ***A*** je čtvercová matice nad tělesem *T*. Nenulový vektor ***v*** se nazývá charakteristický vektor matice ***A*** příslušný charakteristickému číslu λ, jestliže platí $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$.

  Samostatná práce:
  - Jaký geometrický význam má rovnice pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů?
  - Zopakujte si postup výpočtu charakteristických čísel a vektorů matice ***A***.
  - Co je charakteristický polynom a charakteristická rovnice matice ***A***?
  - Vypočítejte charakteristická čísla a charakteristické vektory matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1, & 7 \\ 6, & 2 \end{pmatrix}$.

  Věta. Všechna charakteristická čísla symetrické matice jsou reálná.

  Poznámka: Zde uvádíme větu bez důkazu. Zájemci najdou důkaz např. v kurzu Lineární algebra II (https://dl1.cuni.cz/course/view.php?id=5929).

Další informace o charakteristických číslech a vektorech matice a příklady lze najít např. na
http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/G1/texty/pomoctext_eigen.pdf