

Definice. Necht' (S, \leq) se nazývá Booleova algebra, jestliže má 0 a 1, je komplementární a distributivní.

Značení. Booleovu algebra budeme značit $(B, \sqcap, \sqcup, ', 0, 1)$, v případě, že nemůže dojít k nedorozumění, pouze B .

Věta: Jestliže B je Booleova algebra. Pak ke každému prvku z B existuje právě jeden komplement.

Samostatná práce:

- Dokažte předchozí větu.
- Vypište všechny vlastnosti, které v Booleově algebře platí. Rozdělte je na ty, které jsou přímo v definici, a na ty, které z nich lze odvodit.
- Dokažte, že $(\{0, 1\}, \sqcap, \sqcup, ', 0, 1)$, kde

\sqcap	0	1
0	0	0
1	0	1

\sqcup	0	1
0	0	1
1	1	1

	'
0	1
1	0

je Booleova algebra. Najděte její souvislost s výrokovým počtem.

- Necht' B je množina dělitelů čísla 30 v \mathbf{N} . Rozhodněte, zda je to Booleova algebra a v kladném případě určete, jak se vypočítá $x \sqcap y$, $x \sqcup y$, x' , 0 a 1.

Věta: Necht' B je Booleova algebra. Pak platí:

- $\forall x \in B: (x')' = x$.
- $\forall x, y \in B: (x \sqcap y)' = x' \sqcup y'$; $(x \sqcup y)' = x' \sqcap y'$ (de Morganova pravidla)

Samostatná práce:

- Dokažte předchozí větu.

- Souvislost Booleových algebra a Booleových okruhů

Definice. Okruh $(M, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, jestliže je každý jeho prvek vzhledem k \cdot idempotentní.

Necht' $(B, \sqcap, \sqcup, ', 0, 1)$ je Booleova algebra. Definujme operace \oplus a \cdot takto:

$$\forall x, y \in B: x \oplus y = (x \sqcap y') \sqcup (x' \sqcap y),$$

$$\forall x, y \in B: x \cdot y = x \sqcap y.$$

Věta.

(a) Necht' $(B, \sqcap, \sqcup, ', 0, 1)$ je Booleova algebra. Pak (B, \oplus, \cdot) je Booleův okruh.

(b) Necht' $(B, +, \cdot)$ je Booleův okruh s jednotkovým prvkem 1. Definujme $\sqcap, \sqcup, '$ takto:

$$\forall x, y \in B: x \sqcup y = x + y - x \cdot y,$$

$$\forall x, y \in B: x \sqcap y = x \cdot y,$$

$$\forall x \in B: x' = 1 - x.$$

Pak $(B, \sqcap, \sqcup, ', 0, 1)$ je Booleova algebra, v níž je nulový, resp. jednotkový prvek okruhu nulou, resp. jednotkou.

Samostatná práce:

- Dokažte předchozí větu.
- Podle definic operací ve větě vytvořte Booleův okruh pro Booleovu algebru všech dělitelů čísla 30 s relací „být dělitelem“.

Doporučená literatura: Kopka, J. (1991). Svazy a Booleovy algebry. Ústí n.L.: UJEP. (Kniha je k dispozici v knihovně KMDM.)