Definice. Poset $(P, \leq)$ se nazývá průsekový, resp. spojový polosvaz, jestliže každá jeho dvouprvková podmnožina má infimum, resp. supremum. Je-li poset současně průsekovým i spojovým polosvazem, nazývá se svaz.

Terminologie a značení:
- Infimum dvouprvkové množiny $\{x, y\}$ nazveme průsekem $x, y$ a značíme $x \sqcap y$.
- Supremum dvouprvkové množiny $\{x, y\}$ nazveme spojením $x, y$ a značíme $x \sqcup y$.

*Samostatná práce*:
- Zapište definice průseku a spojení pomocí matematických symbolů.
- Pro různé příklady posetů rozhodněte, zda se jedná o průsekový polosvaz, spojový polosvaz, svaz. Určete průseky a spojení jejich prvků, pokud existují.
- Rozhodněte, kdy Hasseův diagram představuje graf průsekového polosvazu, resp. spojového polosvazu, resp. svazu.

Definice. Podposet $(P, \leq)$ svazu $(S, \leq)$ se nazývá podsvaz svazu $(S, \leq)$, jestliže je $(P, \leq)$ svaz a operace průsek a spojení jsou zúženími příslušných operací v $S$ na množinu $P$.

Věta:

(a) Nechť $(P, \leq)$ je průsekový polosvaz. Pak platí:
- $\forall x \in P: x \sqcap x = x$ (idempotentnost).
- $\forall x, y \in P: x \sqcap y = y \sqcap x$ (komutativnost).
- $\forall x, y, z \in P: (x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$ (asociativnost).

(b) Nechť $(P, \leq)$ je spojový polosvaz. Pak platí:
- $\forall x \in P: x \sqcup x = x$ (idempotentnost).
- $\forall x, y \in P: x \sqcup y = y \sqcup x$ (komutativnost).
- $\forall x, y, z \in P: (x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z)$ (asociativnost).

*Samostatná práce*:
- Dokažte předchozí větu.

Poznámka: Vlastnosti lze přenést na libovolný konečný počet prvků.

Věta:

Nechť $(S, \leq)$ je svaz. Pak platí (absorbce):
- $\forall x, y \in S: x \sqcap (x \sqcup y) = x$.
- $\forall x, y \in S: x \sqcup (x \sqcap y) = x$.
- $\forall x, y \in S: x \leq y \Leftrightarrow x \sqcap y = x \Leftrightarrow x \sqcup y = y$.
- $\forall x, y, z \in S: x \leq y \Rightarrow x \sqcap z \leq y \sqcap z \wedge x \sqcup z \leq y \sqcup z$.

*Samostatná práce*:
- Dokažte předchozí větu.
- Ukažte na případu pentagonu, že obrácená implikace v posledním tvrzení neplatí.

Věta. Nechť $(S, \leq)$ je svaz. Pak platí (polodistributivnost):
- $\forall x, y, z \in S: (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z) \leq (x \sqcup y) \sqcap z$.
- $\forall x, y, z \in S: (x \sqcap y) \sqcup z \leq (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z)$.

*Samostatná práce*:

- Dokažte předchozí větu.
- Ukažte na případu diamantu, že v obecně neplatí distributivní rovnost.

Definice. Svaz $(S, \leq)$ se nazývá distributivní, jestliže platí:

$\forall x, y, z \in S$: $(x \sqcap z) \sqcup (y = (x \sqcup y) \sqcap z$ a zároveň

$\forall x, y, z \in S$: $(x \sqcap y) \sqcup z = (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z)$.

Věta. Svaz $(S, \leq)$ je distributivní $\Leftrightarrow$ $[\forall x, y, z \in S: (x \sqcap z = y \sqcap z \wedge x \sqcup z = y \sqcup z) \Rightarrow x = y]$.

*Samostatná práce*:

- Dokažte předchozí větu.
- Dokažte, že $(P(M), \subseteq)$ je distributivní svaz.
- Dokažte, že pentagon není distributivní svaz.

Definice. Nechť $(S, \leq)$ je svaz s nulou a jednotkou. Komplementem prvku $x \in S$ se nazývá každý prvek $x' \in S$, pro který platí: $x \sqcap x' = 0 \wedge x \sqcup x' = 1$. Svaz s nulou a jednotkou se nazývá komplementární, jestliže jeho každý prvek má aspoň jeden komplement.

*Samostatná práce*:

- Co je komplementem 0 a co je komplementem 1 ve svazu s nulou a jednotkou?
- Najděte příklad svazu, který
  a) je komplementární a každý jeho prvek má právě jeden komplement;
  b) Je komplementární, jeden nebo více jeho prvků má víc než jeden komplement;
  c) není komplementární.
- Určete komplement množiny $A$ ve svazu $(P(M), \subseteq)$.
- Musí být podsvaz komplementárního svazu komplementární?
- Dokažte, že izomorfní obraz komplementárního svazu je komplementární.

Věta. Nechť $(S, \leq)$ je distributivní svaz. Pak ke každému prvku existuje nejvýše jeden komplement.

*Samostatná práce*:

- Dokažte předchozí větu.

Poznámka. Další informace o svazech lze najít např. v
http://www.math.muni.cz/~kucera/texty/Svazy2010.pdf