Tabulka: Některé typy relací na množině a jejich vlastnosti. Poznámka: Vlastnost označená (+) plyne z těch vlastností, které jsou označeny +.

Typ relace	Reflexívní	Symetrická	Tranzitivní	Antireflexivní	Asymetrická	Antisymetrická
Ekvivalence	+	+	+			
Tolerance	+	+				
Ostré uspořádání			+	+	(+)	(+)
Kvaziuspořádání	+		+			
Neostré uspořádání	+		+			+

Samostatná práce:

- Zopakujte si rozklad množiny podle ekvivalence. Dokažte, že má vlastnosti rozkladu množiny.
- Najděte příklady takových ekvivalencí na množinách, pro něž se rozklad skládá a) z konečně mnoha tříd o konečně mnoha prvcích; b) z konečně mnoha tříd o nekonečně mnoha prvcích; c) nekonečně mnoha tříd o nekonečně mnoha prvcích; d) nekonečně mnoha tříd o konečně mnoha prvcích; e) ze tříd, které nemají všechny stejný počet prvků.
- Pro které operace s relacemi ekvivalence je výsledná relace opět ekvivalencí?

Věta:

(1) Jsou-li R, S ekvivalence, je $R \circ S$ ekvivalence $\Leftrightarrow R \circ S = S \circ R$.
(2) Jsou-li R, S ekvivalence, je $R \cup S$ ekvivalence $\Leftrightarrow R \circ S = R \cup S$.

Samostatná práce:

- Lemma: Jsou-li R, S reflexívní, pak $R \cup S \subset R \circ S$. Dokažte.
- Dokažte předchozí větu.

Příklad: Nechť R je relace na reálné ose (A je reálná osa, pak ekvivalence na A je podmnožina roviny). Terminologie: Je-li v rovině dána kartézská soustava souřadnic, pak hlavní osou nazveme osu prvního a třetího kvadrantu. Pak platí:

a) R je reflexívní, jestliže obsahuje hlavní osu.
b) R je symetrická, jestliže je souměrná podle hlavní osy.
c) R je tranzitivní, právě když platí: U každého pravoúhelníku, jehož strany jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, jeden jeho vrchol leží na hlavní ose a oba vrcholy sousedící s tímto vrcholem patří do relace R, patří do R také jeho čtvrtý vrchol.

Samostatná práce:

- Ověřte c).
- Dokažte, že je-li R symetrická, pak lze podmínku c) formulovat takto: U každého pravoúhelníku, jehož strany jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, jeden jeho vrchol leží na hlavní ose a jeho dva další vrcholy patří do relace R, patří do R také jeho čtvrtý vrchol.
- Jakou relaci ekvivalence vyjadřuje tvrzení „Všechna celá čísla jsou ekvivalentní“?
- Jakou relaci ekvivalence vyjadřuje tvrzení „Všechna čísla, jejichž absolutní hodnota není větší než 1, jsou ekvivalentní“?

Samostatná práce:

- Rozhodněte, které z následujících relací jsou tolerance:
  a) *A* je množina všech českých čtyřpísmenkových podstatných jmen v 1. pádu. Dvě slova jsou v relaci $R \Leftrightarrow$ jedno se od druhého liší nejvýše v jednom písmenu.
  b) *A* je množina všech reálných funkcí na intervalu *I* na reálné ose. Dvě funkce jsou v relaci $R \Leftrightarrow$ aspoň v jednom bodě intervalu *I* mají stejnou funkční hodnotu?
- Jsou tyto relace ekvivalencemi?
- Definujeme-li třídy rozkladu množiny *A* podle tolerance *R*, která vlastnost rozkladu množiny není splněna?

Samostatná práce:

- Dokažte, že je-li *R* ostrým uspořádáním, pak je asymetrická a antisymetrická.
- Dokažte, že neostré uspořádání je sjednocením ostrého uspořádání a relace rovnost.

Samostatná práce:

- Rozhodněte, zda je následující relace ostrým uspořádáním: *A* je množina všech slov českého jazyka. Slovo *x* je nadřazeno slovu $y \Leftrightarrow y$ lze dostat z *x* tak, že ve slově *x* vyškrtneme na začátku nebo na konci nebo z obou stran aspoň jedno písmeno.
- Nechť *A* je podmnožina reálné osy. Nechť *f* je reálná funkce definovaná na *A*. Relace *R* na *A* je definována takto: $xRy \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Je *R* uspořádáním? Pokud ano, jakým? Pokud není ani ostrým, ani neostrým uspořádáním, rozhodněte, jaké vlastnosti musí mít funkce *f*, aby *R* byla uspořádáním.

Věta:

(1) Je-li *R* ostré uspořádání, resp. neostré uspořádání, resp. kvaziuspořádání, je R^{-1} ostré uspořádání, resp. neostré uspořádání, resp. kvaziuspořádání.

(2) Jsou-li *R, S* ostrá uspořádání, resp. neostrá uspořádání, resp. kvaziuspořádání, je $R \cap S$ ostré uspořádání, resp. neostré uspořádání, resp. kvaziuspořádání.

(3) Je-li *R* ostré uspořádání, *S* neostré uspořádání, $R \cap S$ ostré uspořádání.

Samostatná práce:

- Dokažte předchozí větu.