- ***Binární relace***

  Definice. Binární relace R mezi množinami A, B je libovolná podmnožina R kartézského součinu množin A, B. Označení: $[x, y] \in R$ nebo xRy. Pokud $A = B$, hovoříme o binární relaci na množině A.

  Relace, jejich zápisy a některé vlastnosti jsou zařazeny v kurzu Pre-algebra, viz např. https://dl1.cuni.cz/course/view.php?id=2851#section-5

  Samostatná práce:
  - Zopakujte si zápis relace pomocí kartézského grafu, matice a uzlového grafu.

- Operace s relacemi na množně A

  Relace jsou množiny, je tedy zřejmé, co znamená $R \subset S$, $R \cap S$, $R \cup S$.
  Inverzní relace k relaci R je množina $R^{-1} = \{[x, y],\ x, y \in A\colon\ [y, x] \in R\}$.
  Nechť R, S jsou relace na množině A. Složenou relací $R \circ S = \{[x, y],\ x, y \in A\colon \exists z \in A\colon$ $([x, y] \in R \wedge [y, z] \in S\}$.
  Tranzitivní uzávěr $\widehat{R}$ relace R na množně A je $\{[x, y],\ x, y \in A\colon \exists z_1, \ldots, z_n \in A\colon\ ([x, z_1] \in R \wedge$ $([z_1, z_2] \in R \wedge \ldots \wedge ([z_{n-1}, z_n] \in R \wedge ([z_n, y] \in R\}$.

  Samostatná práce:
  - Pro konkrétní příklady relací vytvořte relace představující jejich sjednocení, průnik, inverzní relaci, tranzitivní uzávěr, složenou relaci.

<u>Maticové zápisy relací a operace s maticemi</u>

Booleova aritmetika

$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1,\ 1 + 1 = 1$

$0 \,.\, 0 = 0 \,.\, 1 = 1 \,.\, 0 = 0,\ 1 \,.\, 1 = 1$

Nechť M, resp. N je matice relace R, resp. S na konečné množině A. Pak platí (počítáme v Booleově aritmetice):

Pro matici L relace $R \cap S$ platí: $l_{ij} = m_{ij} \,.\, n_{ij}$.

Pro matici L relace $R \cup S$ platí: $l_{ij} = m_{ij} + n_{ij}$.

Matice L relace $R \circ S$ je rovna součinu matic M, N.

Matice relace R^{-1} je rovna M^T.

Samostatná práce:
- Ověřte tvrzení o maticích relací.
- Najděte souvislost mezi operacemi s výroky a Booleovou aritmetikou.

Věta (Algebraické vlastnosti operací s relacemi na množině A). Pro relace R, S, T na množině A platí:

(1) $(R^{-1})^{-1} = R$.

(2) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

(3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$.
(4) Jestliže $\forall x \in A\ \exists z \in A$: xRz, pak $E \subset R \circ R^{-1}$.
(5) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.
(6) $(R \cap S) \circ T \subset (R \circ T) \cap (S \circ T)$.
(7) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
(8) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
(9) $R \subset S \Rightarrow \widehat{R} \subset \widehat{S}$.
(10) $R \subset S \Rightarrow R^{-1} \subset S^{-1}$.
(11) $R \subset S \Rightarrow R \circ T \subset S \circ T$.
(12) $R \subset S \Rightarrow T \circ R \subset T \circ S$.
(13) $\hat{\hat{R}} = \hat{R}$.

Samostatná práce:

- Dokažte předchozí větu.

- ***<u>Vlastnosti binární relace na množině</u>***

Definice:
Binární relace R na množině A se nazývá

1. reflexívní, jestliže platí: $\forall x \in A$: xRx;
2. antireflexívní, jestliže platí: $\forall x, y \in A$: $x \neq y$;
3. symetrická, jestliže platí: $\forall x, y \in A$: $xRy \Rightarrow yRx$;
4. asymetrická, jestliže platí: $\forall x, y \in A$: z xRy a yRx aspoň jedno neplatí;
5. antisymetrická, jestliže platí: $\forall x, y \in A$: $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;
6. tranzitivní, jestliže platí: $\forall x, y, z \in A$: $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

Viz též class.pedf.cuni.cz/jancarik/download/Pre-algebra5.ppt

Množinová charakteristika vlastností binární relace R na množině A (E označuje relaci rovnosti, $\varnothing$ prázdnou relaci):

1. reflexívní, jestliže platí $E \subset R$;
2. antireflexívní, jestliže platí: $R \cap E = \varnothing$;
3. symetrická, jestliže platí: $R \subset R^{-1}$;
4. asymetrická, jestliže platí: $R \cap R^{-1} = \varnothing$;
5. antisymetrická, jestliže platí: $R \cap R^{-1} \subset E$;
6. tranzitivní, jestliže platí: $R^2 \subset R$.

Samostatná práce:

- Jaké vlastnosti má kartézský graf, matice a uzlový graf pro relace, které mají vlastnosti z definice?

Věta. Pro relace R, S, T na množině A platí:

(1) Jsou-li R, S reflexívní relace, je také $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}, $R \circ S$, $\hat{R}$ reflexívní.
(2) Jsou-li R, S antireflexívní relace, je také $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1} antireflexívní.
(3) Jsou-li R, S symetrické relace, je také $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}, $\hat{R}$ symetrická.
(4) Nechť R, S jsou symetrické relace. Pak platí: $R \circ S$ je symetrická $\Leftrightarrow R \circ S \subset S \circ R$.
(5) Nechť R je asymetrická relace. Pak pro každou relaci S na množině A je $R \cap S$ asymetrická.
(6) Je-li R asymetrická, je také R^{-1} asymetrická.

(7) Jsou-li R, S antisymetrické relace, je také $R \cap S$, R^{-1} antisymetrická.

(8) Jsou-li R, S tranzitivní relace, je také $R \cap S$, R^{-1}, $\widehat{R}$ tranzitivní.

Samostatná práce:

- Dokažte předchozí větu.
- Pro ty vlastnosti a operace, které nejsou vyjmenovány v předchozí větě, najděte protipříklady.