LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

$\mathcal{L}(X,Y)$

$$\|F\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Fx\| \qquad \left(= \sup_{\|x\|=1} \|Fx\| = \sup_{x\neq o} \frac{\|Fx\|}{\|x\|} \right)$$

F spojitá $\quad\Leftrightarrow\quad$ F omezená

$\quad\Leftrightarrow\quad \forall$ omezená $M \quad F(M)$ omezená

$\quad\Leftrightarrow\quad \forall$ otevřená $G \quad F^{-1}(G)$ otevřená

F otevřená $\quad\Leftrightarrow\quad \forall$ otevřená $G \quad F(G)$ otevřená

F kompaktní $\quad\Leftrightarrow\quad \forall$ omezená $M \quad F(M)$ relativně kompaktní

úkoly:promyslete vlastnosti následujících zobrazení

$F : C(0;1), f' \in C(0;1) \to C(0;1) : f \mapsto f'$ (nespojité, otevřené)

$F : c_0 \to c_0 : x_n \mapsto \frac{1}{n} x_n$ (spojité, není otevřené)

$F : \{x_1, x_2, \dots\} \mapsto \{x_2, x_3, \dots\} l^\infty \to l^\infty$

$l^1 \to l^1$

$F : \{x_1, x_2, \dots\} \mapsto \{0, x_1, x_2, \dots\} l^2 \to l^2$

úkoly:prostudujte následující dvě věty

• **Banachova věta o otevřeném zobrazení:**

$F: X \to Y$ lineární, spojité, surjektivní, X, Y Banachovy prostory $\quad\Rightarrow\quad$ T otevřené

dk:

I. $\exists \epsilon > 0 \qquad \overline{FB(0,1)} \supset B(0,\epsilon)$:

$Y = \cup n FB(0, \frac{1}{2})$ úplný $\qquad$ (Baireova věta) $\quad\Rightarrow\quad$ $B(0,\frac{1}{2})$ není řídká

$\overline{FB(0,\frac{1}{2})}$ má vnitřní bod $\qquad\Rightarrow\qquad \exists x \in \overline{FB(0,\frac{1}{2})} \quad \epsilon > 0 \qquad B(x,\epsilon) \subset \overline{FB(0,\frac{1}{2})}$

$B(0,\epsilon) \subset \overline{FB(0,1)}$

II. $FB(0,1) \supset B(0, \frac{1}{2}\epsilon)$:

libovolné $y \in B(0,\frac{1}{2}\epsilon)$

$$\left.\begin{array}{c} y \in B(0,\frac{1}{2}\epsilon) \subset \overline{FB(0,\frac{1}{2})} \\ B(y,\frac{1}{4}\epsilon) \text{ okolí } y \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \text{exituje } y_1 \in B(y,\tfrac{1}{4}\epsilon) \cap FB(0,\tfrac{1}{2}) \neq \emptyset$$

existuje $x_1 \in B(0,\frac{1}{2}) \quad Fx_1 = y_1$

$$\left.\begin{array}{c} y - y_1 \in B(0,\frac{1}{4}\epsilon) \subset \overline{FB(0,\frac{1}{4})} \\ B(y-y_1,\frac{1}{8}\epsilon) \text{ okolí } y - y_1 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \text{exituje } y_2 \in B(y-y_1,\tfrac{1}{8}\epsilon) \cap FB(0,\tfrac{1}{4}) \neq \emptyset$$

existuje $x_2 \in B(0,\frac{1}{4}) \quad Fx_2 = y_2$

$$\left.\begin{array}{c} y - y_1 - y_2 \in B(0,\frac{1}{8}\epsilon) \subset \overline{FB(0,\frac{1}{8})} \\ B(y-y_1-y_2,\frac{1}{16}\epsilon) \text{ okolí } y - y_1 - y_2 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \text{exituje } y_3 \in B(y-y_1-y_2,\tfrac{1}{16}\epsilon) \cap FB(0,\tfrac{1}{8}) \neq \emptyset$$

existuje $x_3 \in B(0,\frac{1}{8}) \quad Fx_3 = y_3$

$$\cdots$$

$$\|x_n\| \le \frac{1}{2^n} \qquad z_n = x_1 + \cdots + x_n \text{ Cauchyovská} \quad z_n \to z \quad \|z\| \le 1$$

$z \in B(0,1) \quad Fz = y$ proto $y \in FB(0,1)$

(v důkazu užíváme $x \in \overline{M} \quad\Rightarrow\quad kx \in \overline{kM}$ pro $k > 0$)

• **Banach-Steinhausova věta:**

$F_n : X \to Y$ lineární, spojité, X Banachův prostor, Y normovaný prostor

$$\forall x \in X \qquad \sup_n |F_n(x)| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|F_n\| < \infty$$

dk:(sporem)

předpokládejme $\|F_n\| \to \infty$ označíme $s(x) = \sup_n |F_n(x)| < \infty$

zkonstruujeme posloupnost x_n

n libovolné $\quad \frac{1}{2}\|F_n\| < \|F_n\| = \sup_{x \in B(0,1)} |F_n(x)| \quad$ existuje $x_n \in B(0,1)$ $\quad \frac{1}{2}\|F_n\| < F_n(x_n)$

zkonstruujeme vybranou posloupnost x_{n_k}

$$n_1 \qquad 1 < \frac{1}{6 \cdot 4} \cdot \|F_{n_1}\|$$

$$n_2 \qquad 2 + \frac{1}{4} \cdot s(x_{n_1}) < \frac{1}{6 \cdot 4^2} \cdot \|F_{n_2}\|$$

$$n_3 \qquad 3 + \frac{1}{4} \cdot s(x_{n_1}) + \frac{1}{4^2} \cdot s(x_{n_2}) < \frac{1}{6 \cdot 4^3} \cdot \|F_{n_3}\|$$

$$\dots$$

$$n_k \qquad k + \frac{1}{4} \cdot s(x_{n_1}) + \frac{1}{4^2} \cdot s(x_{n_2}) + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} \cdot s(x_{n_{k-1}}) < \frac{1}{6 \cdot 4^k} \cdot \|F_{n_k}\|$$

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot x_{n_k} \in B(0,1) \qquad \text{(úplnost)}$$

k libovolné

$$F_{n_k}(x_0) = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{F_{n_k}(x_{n_1})}_{\geq -s(x_{n_1})} + \frac{1}{4^2} \cdot \underbrace{F_{n_k}(x_{n_2})}_{\geq -s(x_{n_2})} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} \cdot \underbrace{F_{n_k}(x_{n_{k-1}})}_{\geq -s(x_{n_{k-1}})} + \frac{1}{4^k} \cdot \underbrace{F_{n_k}(x_{n_k})}_{\geq \frac{1}{2} \cdot \|F_{n_k}\|} +$$

$$+ \frac{1}{4^{k+1}} \cdot \underbrace{F_{n_k}(x_{n_{k+1}})}_{\geq -\|F_{n_k}\|} + \dots + \frac{1}{4^m} \cdot \underbrace{F_{n_k}(x_{n_m})}_{\geq -\|F_{n_k}\|} + \dots \geq$$

$$\geq - \underbrace{\left(\frac{1}{4} \cdot s(x_{n_1}) + \frac{1}{4^2} \cdot s(x_{n_2}) + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} \cdot s(x_{n_{k-1}})\right)}_{< \frac{1}{6 \cdot 4^k} \cdot \|F_{n_k}\| - k} + \frac{1}{2} \cdot \|F_{n_k}\| -$$

$$- \|F_{n_k}\| \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4^{k+1}} + \frac{1}{4^{k+2}} + \dots + \frac{1}{4^m} + \dots\right)}_{= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k}} \geq$$

$$\geq -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4^k} \cdot \|F_{n_k}\| + k + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^k} \cdot \|F_{n_k}\| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} \cdot \|F_{n_k}\| \geq k$$

pro $k \to \infty$ $\qquad f_{n_k}(x_0) \to \infty$ $\quad$ spor