VLASTNOSTI PROSTORŮ A MNOŽIN

• **úplnost**

X (s topologií τ) úplný $\quad\Leftrightarrow\quad \forall x_n \in X$ Cauchyovská $\quad \exists x \in X \qquad x_n \to x$

M je hustá v X: $\overline{M} = X$

M je řídká v X: $X - \overline{M}$ je hustá v X

prostor 1. kateforie: spočetné sjednocení řídkých množin

prostor 2. kategorie: není 1. kategorie $\quad\Rightarrow\quad \forall G_n$ otevřené a husté v $X \quad \cup G_n \neq \emptyset$

prostor Baireův: $\forall G_n$ otevřené a husté v $X \quad \cap G_n$ hustá v X

úkoly:příklady úplných prostorů (C s maximalistickou metrikou) a neúplných prostorů (C s integrální metrikou)

příklady hustých množin v $\mathbf{R}$ - diadická čísla $\frac{m}{2^n}$, Pythagorejská racionální čísla $\frac{k}{l}$, kde $k^2 + l^2 = m^2$ pro jisté m, $\sqrt{m} - \sqrt{n}$

• **Baireova věta:**

$X \neq \emptyset$ úplný

U_n husté otevřené množiny v $X \quad\Rightarrow\quad \cap U_n$ hustá v X

úplný prostor není 1. kategorie, (je Baireův)

dk:

libovolné G_n otevřené, husté v X

chceme dokázat $\cap G_n$ hustá v X, $\qquad$ neboli $\overline{\cap G_n} = X$:

libovolná G otevřená (? $\cap G_n \cap G \neq \emptyset$)

G_1 hustá v $X \quad \overline{G_1} = X \quad$ existuje $x_1 \in G \cap G_n \neq \emptyset$ a $0 < \epsilon < 1 \qquad \overline{B(x_1, \epsilon_1)} \subset G_1 \cap G$

G_2 hustá v $X \quad \overline{G_2} = X \quad$ existuje $x_2 \in G \cap G_n \neq \emptyset$ a $0 < \epsilon < \frac{1}{2} \qquad \overline{B(x_2, \epsilon_2)} \subset G_2 \cap B(x_1, \epsilon_1) \subset G_2 \cap G$

G_3 hustá v $X \quad \overline{G_3} = X \quad$ existuje $x_3 \in G \cap G_n \neq \emptyset$ a $0 < \epsilon < \frac{1}{3} \qquad \overline{B(x_3, \epsilon_3)} \subset G_3 \cap B(x_2, \epsilon_2) \subset G_3 \cap G$

$$\ldots$$

existuje $x \in \cap \overline{B(x_k, \epsilon_k)} \subset \cap G_k \cap G \neq \emptyset$

úkoly:prostor c_{oo} (od jistého indexu nuly) není úplný

(není uzavřený) $\quad x_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\} \to x = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \notin c_{oo}$

• **kompaktnost**

dvojí pohled na kompaktnost

$M \subset X$ kompaktní $\quad\Leftrightarrow\quad \forall G_\alpha$ otevřené pokrytí $M \quad \exists G_1, \ldots, G_m$ podpokrytí M

$M \subset X$ posloupnostně kompaktní $\quad\Leftrightarrow\quad \forall x_n \in M \quad \exists$ podposloupnost $x_{n_k} \to x \in M$

$M \subset X$ relativně kompaktní $\quad\Leftrightarrow\quad \overline{M}$ kompaktní

$M \subset X$ pre-kompaktní (totálně omezená) $\quad\Leftrightarrow\quad \forall \epsilon \quad \exists$ konečná $K \subset X \qquad K + B(0, \epsilon) \supset M$

kompaktní $\quad\Rightarrow\quad$ uzavřená a omezená

$\qquad\Leftarrow\qquad$ pro realné množiny

• **Arselá-Ascoliova věta:** podmnožina $M \subset C(K) \quad K$ kompaktní :

$\qquad M$ kompaktní $\quad\Leftrightarrow\quad M$ stejně spojitá a omezená

• separabilita