KVASZ

J. B. ZEĽDOVIČ

VYŠŠIA MATEMATIKA PRE ZAČIATOČNÍKOV

alfa

VYDAVATEĽSTVO TECHNICKEJ A EKONOMICKEJ LITERATÚRY
BRATISLAVA

Kniha prehľadnou a dostupnou formou podáva základy diferenciálneho a integrálneho počtu. Umožňuje študentom získať praktické znalosti pri používaní vyššej matematiky na riešenie úloh z fyziky a techniky. Na základe vyššej matematiky je v knihe vysvetlených mnoho fyzikálnych problémov, ako je rádioaktívny rozpad, zákony mechaniky, kozmické rýchlosti, molekulový pohyb atď.

Kniha je určená študentom vyšších ročníkov stredných škôl, poslucháčom prvých ročníkov vysokých škôl a všetkým ostatným záujemcom o vyššiu matematiku.

Redakcia teoretickej literatúry — vedúca redaktorka prom. fyz. Eva Danišová

OBSAH

PREDHOVOR

Cieľom tejto knihy je umožniť čitateľovi získať základné poznatky z diferenciálneho a integrálneho počtu a ich využitím v niektorých dôležitých odvetviach fyziky poukázať na význam vyššej matematiky.

Pojmy derivácie a integrálu nie sú oveľa zložitejšie, ako napr. pojmy „neznáma veličina" alebo „podobnosť trojuholníkov", ktoré v každom prípade patria do učebnej osnovy strednej školy. Je potrebné, aby sa pojmy integrálu a derivácie stali samozrejmými pre každého vzdelaného človeka bez toho, aby ich musel sám študovať.

Nové pojmy sú zavedené v prvej kapitole s najväčšou jednoduchosťou a prirodzenosťou. Potom nasleduje kapitola, ktorá je venovaná technike výpočtov vo vyššej matematike. V tretej kapitole a v kapitolách piatej až ôsmej ide o použitie vyššej matematiky v geometrii, v jadrovej fyzike, v mechanike, v molekulovej fyzike a v elektrine. Čitateľovi, ktorý už dávno vyšiel zo školy, bude iste užitočná kapitola štvrtá, ktorá sa zaoberá funkciami a grafmi. Dodatok, naproti tomu, nepatrí k základnému kurzu. Nakoniec v závere sú len schematicky zhodnotené zložitejšie úlohy matematickej fyziky.

Mnohé učebnice sú písané takou formou, ktorá pripomína rozhovor dvoch vedcov. Čitateľ má úlohu protivníka, ktorý hľadá všetky možné námietky. Autor postupne rozoberá logicky všetky námietky a jednoznačne dokazuje pravdivosť svojich tvrdení.

V predloženej knihe vystupuje čitateľ v úlohe priateľa a spojenca, ktorý je ochotný veriť autorovi alebo knihe a chce využiť pri skúmaní prírodných javov tie poznatky, ktoré môže získať pri štúdiu knihy. K pochopeniu základných otázok dospieva čitateľ počítaním a rozborom príkladov. Nešlo mi ani tak o presné vymedzenie použitia a obsahu študovaných zákonov, ako o výklad základných matematických myšlienok a ich súvislosť so štúdiom prírodných javov.

Mohlo by sa zdať, že nedostatočný dôraz na presné matematické dôkazy je charakteristickou vlastnosťou prístupu fyzika k matematike. V skutočnosti tomu tak nie je. Rozvoj matematiky sa uskutočňuje aj intuíciou, jednoducho povedané — inšpiráciou, vtipom a nielen počítaním podľa určitých známych pravidiel. Až potom sa výsledky odievajú do panciera vzorcov a presných dôkazov, ktoré v učebniciach často úplne zakryjú pôvodnú myšlienku ich tvorcu.

Osemdesiatročný patriarcha súčasnej matematiky Richard Kurant napísal v r. 1964, že príliš dlho hľadeli matematici na Euklidovu geometriu ako na vzor presného axiomatického prístupu, prísnej logickej dedukcie (odvodzovania). Pozrime sa, čo však píše Kurant ďalej:

„Dôraz na toto (axiomatické, logické) hľadisko úplne dezorientuje toho, kto predpokladá, že tvorenie, fantázia (vtip), porovnávanie a intuícia majú len pomocnú úlohu pri rozvoji matematiky. Pri matematickom vzdelávaní skutočne deduktívna metóda, ktorá vychádza z dogmatických axióm, umožňuje rýchlejšie zvládnuť problematiku veľkého rozsahu. Ale konštruktívna metóda, ktorú charakterizuje prechod od jednotlivého k všeobecnému a ktorá sa vyhýba dogmám, vedie rýchlejšie k samostatnému tvorivému mysleniu."

Teda vtip, fantáziu a intuíciu kladie Kurant na prvé miesto!

Povestná nezmieriteľnosť lyrikov a fyzikov (ako aj matematikov) je len vymyslená. V matematike, ako aj v iných prírodných vedách je viac poézie, ako si lyrici-profesionáli myslia. História vedy dokazuje, že dobrá matematika vie byť prorokom: matematická analýza ukazuje cestu do nových, neznámych oblastí, vedie k vytvoreniu nových fyzikálnych pojmov.

Vo „Vyššej matematike pre začiatočníkov" som sa snažil o konštruktívny prístup, o objasnenie významu a cieľa matematických vzťahov a pojmov. Chcel som aspoň čiastočne odovzdať myšlienky tej slávnej epochy, v ktorej tieto pojmy vznikli.

Po vyjdení 1. vydania v r. 1960 bola táto kniha preložená do bulharčiny, japončiny a pripravuje se preklad do francúzštiny.

Keďže táto kniha je určená výučbe, je toto piate vydanie obzvlášť starostlivo prepracované zo stránky pedagogickej, v knihe sú uskutočnené niektoré zmeny a niektoré časti sú skrátené. Domnievam sa, že kniha môže poslúžiť nielen učiteľom a študentom matematiky, ale aj učiteľom fyziky vyšších ročníkov gymnázií a poslucháčom prvých ročníkov niektorých vysokých škôl.

Na konci knihy sú dve dodatkové kapitoly: „Pozoruhodná Diracova delta-funkcia" a „Ako ďalej?" Tieto kapitoly sa nevyznačujú zo stránky pedagogickej nijakými prednosťami, ich štýl je celkom iný a umožňujú získať len veľmi povrchnú predstavu o zložitejších problémoch.

Pri napísaní „Vyššej matematiky pre začiatočníkov" mi v rôznych etapách práce pomohol celý rad osôb a ja som rád, že sa môžem poďakovať V. L. Manuilovovi, K. A. Semenďajevovi, N. A. Dmitrievovi, N. N. Mejmanovi, R. S. Guterovovi, L. J. Clafovovi, G. I. Barenblattovi, K. G. Cvangovovi, I. M. Jaglomovi, B. J. Zeľdovičovi a čitateľom E. F. Davydovi, P. P. Skľarovovi a A. G. Sokolovovi. Dúfam, že pozorní čitatelia, ktorí nájdu chyby alebo budú mať námety smerujúce k zlepšeniu knihy, budú sa obracať na vydavateľstvo so svojimi pripomienkami.

Akademik J. B. Zeľdovič

I. POJEM DERIVÁCIE A INTEGRÁLU

1. POHYB, DRÁHA A RÝCHLOSŤ

Skúmajme postupný pohyb telesa pozdĺž priamky. Vzdialenosť určitého bodu telesa od pevného bodu O na tejto priamke označíme s. Od bodu O na jednu stranu tejto priamky budeme nanášať vzdialenosť s kladným znamienkom a na druhú so záporným. Nech napr. priamka, pozdĺž ktorej sa teleso pohybuje, je zvislá. Body nad O zodpovedajú kladnému s, body pod O zápornému s.

Pri pohybe súradnica s závisí od času (budeme skrátene hovoriť: „súradnica s" namiesto „vzdialenosť určitého bodu telesa od pevného bodu na priamke"). Pohyb telesa je vyjadrený závislosťou súradnice s od času t, t. j. funkciou $s(t)$. Ak poznáme funkciu $s(t)$, môžeme určiť polohu telesa v ľubovoľnom čase.

Funkciu $s(t)$ možno znázorniť graficky. V rovine si zvolíme dve na seba kolmé priamky. Na jednu z nich, na vodorovnú os budeme nanášať čas (os t) a na druhú zvislú, os súradníc, veličinu s, ktorá charakterizuje polohu telesa. Takto sme utvorili pravouhlú súradnicovú sústavu.

Pri rovnomernom pohybe s konštantnou rýchlosťou v sa dráha s, ktorú prejde teleso za čas t, rovná súčinu $s = vt$.

Súradnicu telesa v čase $t = 0$ označíme s_0, potom dráha, ktorú teleso prejde za čas t, sa rovná rozdielu $s(t) = s_0$. To znamená, že

$$s(t) = s_0 + vt \tag{1.1}$$

Z toho vyplýva, že pri rovnomernom pohybe je závislosť súradníc s od času vyjadrená lineárnou funkciou. Graf závislosti rovnomerného pohybu $s(t)$ v súradnicovej sústave je priamka.

Pri nerovnomernom pohybe závislosť $s(t)$ je vyjadrená oveľa zložitejším vzťahom, ktorého grafom je krivka.

Rozoberme podrobne nasledujúcu úlohu. Je daná funkcia $s(t)$, t. j. závislosť súradníc telesa s od času, a treba nájsť rýchlosť pohybu telesa v. Vo všeobecnom prípade nerovnomerného pohybu rýchlosť nie je konštantná, ale sa mení s časom. To znamená, že rýchlosť v je takisto funkciou času $v(t)$. Úloha spočíva v tom, aby sme vyjadrili $v(t)$ pomocou známej funkcie $s(t)$.

V osobitnom prípade rovnomerného pohybu (pohybu s konštantnou rýchlosťou) je vec jednoduchá. Rýchlosť sa definuje ako dráha, ktorú prejde teleso za jednotku času. Nakoľko je rýchlosť konštantná, netreba uvažovať, aký úsek dráhy a aký úsek času sa vezme na určenie rýchlosti.

Nájdeme dráhu, ktorú teleso prejde za jednu sekundu od momentu $t_1(s)$ do momentu $(t_1 + 1)(s)$. Táto dráha sa rovná rozdielu súradníc $s(t_1 + 1)$ a $s(t_1)$:

$$s(t_1 + 1) - s(t_1) = [s_0 + v(t_1 + 1)] - (s_0 + vt_1) = v$$

a čo do veľkosti rovná sa rýchlosti. Vezmeme ľubovoľný časový úsek medzi t_1 a t_2 a dráhu, ktorú teleso za tento časový úsek prešlo, $s_2 - s_1$ predeľme hodnotou $t_2 - t_1$:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{(s_0 + vt_2) - (s_0 + vt_1)}{t_2 - t_1} = v \qquad (1.2)$$

Pretože rýchlosť je konštantná, mohli sme brať na jej výpočet ľubovoľný interval $t_2 - t_1$, a výsledok nezávisel ani od času t_1, ani od veľkosti intervalu. Vo všeobecnom prípade pohybu s premennou rýchlosťou to tak nie je.

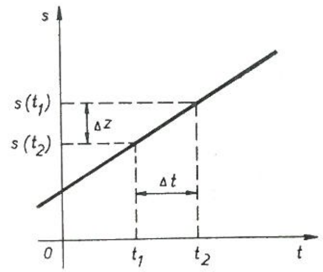
Skôr ako prejdeme k všeobecnejšiemu prípadu, bude potrebné zmeniť označenie. Označme $t_1 = t$, $t_2 = t + \Delta t$, takže rozdiel $t_2 - t_1 = \Delta t$, t. j. časový úsek budeme označovať Δt (*obr. 1*). Podobne označíme Δs rozdiel

$$s(t_2) - s(t_1) = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

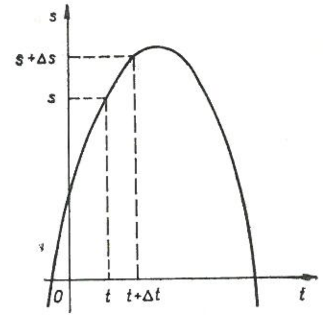
Pri takomto označení stredná rýchlosť v_{str} v intervale Δt od t do $t + \Delta t$ sa rovná[1]):

$$v_{\text{str}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (1.3)$$

hovoríme o strednej rýchlosti, lebo vo všeobecnom prípade sa môže v priebehu času Δt samotná rýchlosť meniť.



Obr. 1



Obr. 2

Preskúmajme druhý príklad, keď $s(t)$ je daná vzťahom

$$s(t) = s_0 + bt + ct^2 \qquad (1.4)$$

Na *obr. 2* je znázornený jeden z grafov, ktoré zodpovedajú funkcii tvaru (1.4). Vypočítajme strednú rýchlosť v_{str} v intervale Δt podľa vzťahu (1.3). Môžeme písať:

$$s(t) = s_0 + bt + ct^2$$

$$s(t + \Delta t) = s_0 + b(t + \Delta t) + c(t + \Delta t)^2$$

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = b\Delta t + 2ct\Delta t + c(\Delta t)^2$$

Z toho dostaneme:

$$v_{\text{str}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = b + 2ct + c\Delta t \qquad (1.5)$$

[1]) Poznamenajme, že Δ — nie je súčiniteľ, ale znak nahradzujúci slovo „prírastok", takže vydeliť Δ v čitateli a menovateli zlomku nemožno. Samotný znak Δ, je tlačené písmeno „delta" gréckej veľkej abecedy a číta sa: Δt „delta té", Δs „delta es"; často sa číta Δt — „prírastok času", Δs — „prírastok dráhy".

Porovnajme výsledky (1.2) a (1.5) pre strednú rýchlosť pri pohybe podľa vzťahu (1.1) a (1.4). Druhý príklad sa odlišuje tým, že stredná rýchlosť v ňom závisí ako od samotného času t, tak i od časového úseku Δt.

Ako určíme okamžitú rýchlosť? Rýchlosť sa mení postupne, preto čím je časový úsek, v priebehu ktorého meriame prejdenú dráhu, menší, tým menej sa stihne rýchlosť zmeniť, tým bližšia bude hodnota strednej rýchlosti k jej okamžitej hodnote.

Vo vzťahu (1.5) v_{str} obsahuje dva členy, ktoré nezávisia od veličiny Δt a jeden člen je priamoúmerný Δt.

Pri veľmi malých Δt tento člen možno zanedbať a v_{str} v tomto prípade dáva hodnotu okamžitej rýchlosti

$$v_{\text{ok}} = b + 2ct \tag{1.6}$$

Vzťahy (1.4) a (1.6) sú už známe zo školských učebníc fyziky, sú to vzťahy pre rovnomerne zrýchlený pohyb

$$\left.\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

namiesto b však musíme dosadiť v_0 — počiatočnú rýchlosť (t. j. rýchlosť v čase $t = 0$) a namiesto c $a/2$, kde a je zrýchlenie.

Vypočítali sme okamžitú rýchlosť v čase t pomocou strednej rýchlosti v intervale od t do $t + \Delta t$. Pokúsime sa ju teraz vypočítať, ak vezmeme iný časový interval. Nájdeme strednú rýchlosť v intervale od $t_1 = t - \frac{3\Delta t}{4}$ do $t_2 = t + \frac{\Delta t}{4}$; dĺžka intervalu ako v predchádzajúcom prípade sa rovná $t_2 - t_1 = \Delta t$. Zo vzťahu (1.4) dostaneme:

$$s(t_1) = s_0 + b\left(t - \frac{3\Delta t}{4}\right) - c\left(t - \frac{3\Delta t}{4}\right)^2$$

$$s(t_2) = s_0 + b\left(t + \frac{\Delta t}{4}\right) + c\left(t + \frac{\Delta t}{4}\right)^2$$

$$s(t_2) - s(t_1) = b\Delta t + 2ct\Delta t - \frac{1}{2}c(\Delta t)^2$$

Z toho vyplýva, že

$$v_{\text{str}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{\Delta t} = b + 2ct - \frac{1}{2}c\Delta t \tag{1.8}$$

Ak porovnáme vzťahy (1.5) a (1.8), vidíme, že stredné rýchlosti v intervale od t do Δt a v intervale od $t - \frac{3\Delta t}{4}$ do $t + \frac{\Delta t}{4}$ sa líšia len hodnotou $c\Delta t\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 3c\,\frac{\Delta t}{2}$. No ak chceme nájsť okamžitú rýchlosť, musíme zobrať veľmi malý interval Δt; potom rozdiel medzi dvoma vzťahmi zanikne a pre okamžitú rýchlosť znova dostaneme $v_{\text{ok}} = b + 2ct$.

Preskúmali sme pojem okamžitej rýchlosti pre dva konkrétne prípady, pre rovnomerný a rovnomerne zrýchlený pohyb. V nasledujúcej časti budeme okamžitú rýchlosť definovať presnejšie, t. j. pre ľubovoľný pohyb.

2. DERIVÁCIA FUNKCIE — LIMITA PODIELU PRÍRASTKOV

V predchádzajúcej časti v úlohe o okamžitej rýchlosti sme skúmali vzťahy tvaru

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

pre veľmi blízke hodnoty t_2 a t_1.

Výraz „veľmi malé" v súvislosti s časovým intervalom Δt sa zdá neurčitý a nepresný. Vhodnejšia formulácia je takáto: „je nevyhnutné nájsť limitu, ku ktorej sa vzťah

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2.1}$$

blíži, ak sa t_2 približuje k t_1". Ak použijeme označenie Δt a Δs, možno tento vzťah prepísať do tvaru

$$v_{\text{str}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.2}$$

Vo vzťahu (2.2) veličiny Δt a Δs navzájom závisia. Ak za úsek času Δt v menovateli vezmeme ľubovoľný časový úsek, tak prírastok Δs v čitateli nie je ľubovoľný úsek dráhy, ale ten, ktorý zodpovedá časovému úseku Δt. Vo vzťahu (2.1) to jasne vidieť zo samotného zápisu argumentov funkcie $s(t_2)$ a $s(t_1)$ v čitateli. Vzťah (2.2) je len iný zápis vzťahu (2.1).

Okamžitá rýchlosť $v(t)$ v momente t, ktorá nás zaujíma, je limita pomeru $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, ak sa Δt blíži k nule. Je zrejmé, že približovanie sa Δt k nule je rovnocenné približovaniu sa t_2 k t_1, pretože $\Delta t = t_2 - t_1$. Uvedená formulácia sa zapíše takto:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

Písmená lim (začiatočné písmená latinského slova limes — limita, t. j. hodnota, ku ktorej sa premenlivá hodnota funkcie približuje) označujú „limitu". Dolu je zapísané, o akú limitu menovite ide pre prípad, že sa Δt blíži k nule. Šípka nahradzuje slovo „blíži sa" (konverguje), v zátvorke je daná funkcia $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, ktorej limitu hľadáme.

Čo znamená „limita", „približovanie sa k limite"? Výpočty, ktoré sme robili v predchádzajúcej časti, názorne objasnili tieto pojmy. Videli sme, že pri malých časových úsekoch Δt veličina v_{str} v druhom prípade sa líšila od hodnoty v_{ok} len malou hodnotou priamoúmernou Δt. Aj keď koeficient úmernosti pri Δt môže byť rôzny pri rôznej voľbe intervalu, pre malé hodnoty Δt vo vzťahu pre v_{str} sme vždy člen s Δt mohli zanedbať. To znamená, že vzťah

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

sa blíži k určitej limite, keď $\Delta t = t_2 - t_1$ sa blíži k nule. Ak sa Δt blíži k nule ($\Delta t \to 0$), t_2 a t_1 sa k sebe neobmedzene približujú a ich spoločnú hodnotu označujeme $t_2 = t_1 = t$.

Limita podielu, t. j. okamžitá rýchlosť v, je funkciou t

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

Prečo pri výpočte rýchlosti podľa daného vzťahu $s(t)$ treba urobiť taký dlhý výpočet? Prečo treba hľadať Δs pre rôzne Δt a až potom $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$? Nemožno hneď položiť $\Delta t = 0$? Ak $\Delta t = t_2 - t_1$, a teda $t_2 = t_1$,

tak aj $s(t_2) = s(t_1)$ a $\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = 0$. To znamená, že pri takomto bezmyšlienkovitom postupe by sme dostali $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0}$, t. j. nedostali by sme nijaký určitý výsledok.

Podstatné pri výpočte rýchlosti je, aby sme brali malé Δt a im zodpovedajúce malé Δs. Pritom dostávame vždy celkom určitý podiel $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Keď sa Δt zmenšuje, blíži sa k nule, potom sa Δs zmenšuje približne priamoúmerne veličina Δt, a preto tento podiel zostáva približne konštantný.

Podiel $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *sa blíži k limite pre* Δt *blížiace sa k nule.*

Hodnota tejto limity — *okamžitá rýchlosť* $v(t)$ v pohybe alebo vo všeobecnosti derivácia funkcie $s(t)$ — závisí od tvaru funkcie $s(t)$ a od hodnoty premennej t. V nasledujúcom článku urobíme algebraický výpočet derivácie niekoľkých jednoduchých funkcií a nájdeme pre ne tieto limity.

3. DERIVÁCIA FUNKCIE $y = x^r$

Limita pomeru prírastku funkcie k prírastku argumentu, ak sa prírastok argumentu blíži k nule, má prvoradý význam pre vyššiu matematiku a pre jej aplikácie. Vyššie sme videli, že napríklad taký významný pojem, ako je okamžitá rýchlosť pohybu, možno nájsť práve pomocou limity tohto pomeru. Limita tohto pomeru má špeciálny názov: „derivácia funkcie" alebo kratšie „derivácia". Prvý názov je spojený s tým, že ak s je funkcia t, $s(t)$, tak aj limita pomeru $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ je takisto funkciou premennej t, $v(t)$ a závisí od hodnoty t, ku ktorej sa blížia t_1 aj t_2, alebo inými slovami, v závisí od hodnoty t, „v ktorej sa s derivuje".

Derivácia má špeciálne označenia. Jeden spôsob označenia je:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Pritom výraz $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ (číta sa: „dé es podľa dé té") nechápeme ako zlomok, ale jednoducho ako skrátený zápis limity stojacej vpravo.

Derivácia $\frac{ds}{dt}$ je zapísaná v tvare zlomku preto, aby pripomínala, že sme ju dostali zo zlomku $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ pomocou limity.

Druhé označenie derivácie — pomocou čiarky je $v = s'(t)$ alebo napr. pre funkciu $y(x)$ sa

$$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

V mechanike označujeme derivácie podľa času niekedy bodkou nad znakom funkcie, t. j. $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$. My takéto označenie nebudeme používať.

Označenie funkcie niekedy nahradzujeme jej vyjadrením: ak napr. $s = at^2 + b$, môžeme písať namiesto $\frac{ds}{dt}$ priamo $\frac{d(at^2 + b)}{dt}$ alebo $(at^2 + b')$.

Nájdime deriváciu funkcie $s = t^2$ pomocou algebraických úprav. Zostavíme si preto pomer

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$

Odstránime v čitateli zátvorku

$$(t + \Delta t)^2 - t^2 = t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2 = 2t\Delta t + (\Delta t)^2$$

Zostavíme pomer

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$$

a už ľahko nájdeme limitu. Veličina obsahuje súčet sčítancov, v ktorých jeden nezávisí od Δt (v danom prípade $2t$) a samotné Δt. Ak sa Δt blíži k nule, zostane len sčítanec, ktorý nezávisí od Δt

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

Vyriešime ešte prípad

$$s = t^3$$

$$\Delta s = (t + \Delta t)^3 - t^3 = t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 - t^3$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(t^3)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} [3t^2 - 3t\Delta t + (\Delta t)^2] = 3t^2$$

V týchto príkladoch bolo možné nájsť limitu, keďže pri výpočte zlomku $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sa hodnota Δt zjednodušila. Preskúmajme zložitejší príklad

$$s = \frac{1}{t}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{t + \Delta t} - \frac{1}{t}}{\Delta t}$$

Môžeme zanedbať veličinu Δt v prvom zlomku čitateľa vo vzťahu $\frac{1}{t + \Delta t}$, keď prejdeme k limite? Nie, pretože sme ešte výraz nezjednodušili s Δt v menovateli. Ak nahradíme $\frac{1}{t + \Delta t}$ pri malom Δt zlomkom $\frac{1}{t}$, urobíme malú chybu v jednom zo sčítancov čitateľa zlomku $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. No ak je v tomto zlomku Δt malé, je malý aj čitateľ aj menovateľ. Preto malá chyba v čitateli nie je prípustná.

Ukážeme správny spôsob výpočtu takéhoto príkladu

$$\Delta s = \frac{1}{t + \Delta t} - \frac{1}{t} = \frac{t - (t + \Delta t)}{t(t + \Delta t)} = -\frac{\Delta t}{t(t + \Delta t)}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = -\frac{1}{t(t + \Delta t)}$$

Teraz môžeme nájsť limitu (deriváciu) a vynechať Δt z menovateľa:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} - \left[\frac{1}{t(t + \Delta t)}\right] = -\frac{1}{t^2}$$

Na týchto príkladoch vidíme veľmi dôležitú *základnú vlastnosť limity*. Pri zmenšovaní hodnoty Δt rozdiel medzi hodnotou zlomku $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a limitou tohto zlomku (deriváciou) $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ možno urobiť „ľubovoľne malý", t. j. menší ako ľubovoľne zvolené číslo.

Objasníme si to na príklade. Pre

$$s = \frac{1}{t}, \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{t^2}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = -\frac{1}{t(t + \Delta t)}$$

Zoberme napr. $t = 2$, $\frac{ds}{dt} = -0{,}25$. Možno nájsť také Δt, aby sa $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ odlišovalo od svojej limity o menej ako 0,0025? To znamená, že Δt treba zobrať tak, aby $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ležalo v intervale medzi $-0{,}25 + 0{,}0025 = -0{,}2475$ a $-0{,}25 - 0{,}0025 + -0{,}2525$. Ak dosadíme do vzťahu $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ $t = 2$, nájdeme, že Δt musí byť v absolútnej hodnote menšie ako 0,02.

Presne tak je to i s inými funkciami: približovanie sa k limite pri $\Delta t \to 0$ znamená možnosť voľby Δt, pri ktorej možno dosiahnuť ľubovoľný stupeň priblíženia sa k limite.

Veľmi jednoducho možno nájsť deriváciu vtedy, keď $s = t$. Je zrejmé, že $\Delta s = \Delta t$, $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 1$, zlomok sa rovná jednej pre ľubovoľné (veľké i malé) Δt a teda aj v limite pre $\Delta t \to 0$. Teda ak

$$s = t, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1$$

Nakoniec konštantu $s = C$ tiež možno skúmať ako zvláštny prípad funkcie. V tomto prípade je zrejmé, že $\Delta s = 0$ pre ľubovoľné Δt, teda platí:

$$s = C, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0$$

Ak funkciu násobíme konštantným súčiniteľom, tak tým istým súčiniteľom násobíme aj jej deriváciu, napr.:

$$s = 3t^2, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{d(3t^2)}{dt} = 3\frac{d(t^2)}{dt} = 3 \,.\, 2t = 6t$$

Všeobecne, ak

$$s(t) = ay(t), \qquad \text{tak} \qquad \frac{ds}{dt} = a\frac{dy}{dt}$$

Je zrejmé, že derivácia súčtu dvoch funkcií sa rovná súčtu derivácií týchto dvoch funkcií

$$s(t) = x(t) + y(t), \quad \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

Ak tieto dve pravidlá použijeme, dostaneme, že derivácia súčtu násobkov niekoľkých funkcií s konštantnými (vo všeobecnosti rôznymi) koeficientmi sa rovná súčtu násobkov týchto funkcií s tými istými koeficientmi:

$$s(t) = ax(t) + by(t) + cu(t)$$

$$\frac{ds}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{du}{dt}$$

Každé z týchto pravidiel možno ľahko dokázať, ak utvoríme $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$; ak sú tieto pravidlá pre $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ správne pre ľubovoľné Δt, tak sú správne aj v limite, t. j. pre $\frac{ds}{dt}$.

Teraz už ľahko nájdeme aj deriváciu mnohočlena. Vypíšeme postupne všetky doteraz nájdené derivácie

$$\frac{dC}{dt} = 0, \quad \frac{dt}{dt} = 1, \quad \frac{d(t^2)}{dt} = 2t, \quad \frac{d(t^3)}{dt} = 3t^2$$

V prvej časti sme zisťovali funkciu

$$s(t) = s_0 + bt + ct^2$$

Nájdime teraz hodnotu

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} + b\frac{dt}{dt} + c\frac{dt^2}{dt} = 0 + b \,.\, 1 + c \,.\, 2t = b + 2ct$$

Je to práve vzťah, ktorý sme vtedy dostali pre okamžitú rýchlosť.

Technika počítania derivácií (alebo ako sa inak hovorí *derivovanie funkcií*) je podrobne vysvetlená na začiatku nasledujúcej kapitoly.

Trocha predbiehajúc môžeme povedať, že derivovanie funkcií, daných matematickými vzťahmi, je pomerne jednoduché a ľahké, oveľa ľahšie, ako napríklad riešenie algebraických rovníc. Derivácie nikdy nedostávame zložitejšie (v zložitejšom tvare), ako sú samotné funkcie. Ak napríklad funkcia je mnohočlen

$$y = a + bx + cx^2 + lx^3 + fx^4$$

aj jej derivácia je mnohočlen

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx + 3lx^2 + 4fx^3$$

(toto sa vzťahuje na mnohočleny ľubovoľného stupňa). Ak je funkcia racionálna lomená, aj jej derivácia je racionálna lomená funkcia. Ak funkcia obsahuje odmocniny alebo mocniny, obsahuje ich i derivácia. Derivácie trigonometrických funkcií sú takisto trigonometrické funkcie. V niektorých prípadoch, napr. pri logaritmickej funkcii, je derivácia tiež veľmi jednoduchá funkcia (racionálna lomená).

Pri hľadaní derivácie netreba vtipnosť ani nápaditosť, úloha sa vždy rieši presným, postupným použitím jednoduchých pravidiel, ktoré vysvetlíme v kapitole II. V nej sa skúmajú aj derivácie rôznych zložitejších funkcií.

Všetky funkcie, ktoré sme doteraz skúmali, boli dané matematickými vzťahmi. Netreba si myslieť, že je to podmienka existencie derivácie. Napríklad závislosť dráhy od času môžeme pokladať za známu z pokusu v tvare veľmi podrobných tabuliek. Je jasné, že pomocou týchto tabuliek možno vypočítať okamžitú rýchlosť (t. j. deriváciu) podľa tých istých pravidiel, podľa ktorých sme ju vypočítali pre funkcie dané matematickými vzťahmi[1]). Pre dôležitosť tohto paragrafu si zopakujeme základné výsledky.

[1]) Určenie spojitej funkcie, v našom prípade dráhy telesa, pomocou najpodrobnejších tabuliek je len približné, a teda aj derivácia tejto funkcie je len približne určená. Pozn. prekl.

1. Derivácia funkcie sa počíta ako limita pomeru prírastku funkcie k prírastku argumentu, ak sa argument blíži k nule

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

2. Okamžitá rýchlosť pohybu telesa sa rovná derivácii súradnice, udávajúcej polohu telesa podľa času. Analogicky sa hovorí, že derivácia $\frac{dy}{dx}$ udáva rýchlosť zmeny funkcie y pri zmene premennej (argumentu) x i v tých prípadoch, keď x nie je čas a y nie je súradnica udávajúca polohu telesa.

Cvičenia

1. Nájdite pomocou algebraických úprav derivácie funkcií:

a) $s = t^2$,

b) $s = t^3$,

ak sa $t_1 = t - \frac{\Delta t}{2}$, $t_2 = t + \frac{\Delta t}{2}$; pritom ľubovoľný moment t, pre ktorý hľadáme deriváciu, leží v strede časového intervalu od t_1 do t_2.

Nájdite derivácie funkcií v príkladoch **2** až **6**:

2. $y = x^4$.

3. $y = (x + 1)^2$.

4. $y = \frac{1}{x^2}$.

5. $y = a + \frac{b}{x^2}$.

6. $y = \sqrt{x}$.

Návod k úlohe **6**. Rozšírte výraz $\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$ súčtom $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$.

4. PRIBLIŽNÉ VÝPOČTY HODNÔT FUNKCIÍ POMOCOU DERIVÁCIE

Derivácia $\frac{ds}{dt}$ sa určuje ako limita pomeru prírastkov $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ pri $\Delta t \to 0$. Pri Δt rôznom od nuly pomer prírastkov $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sa nerovná derivácii $\frac{ds}{dt}$, no tento vzťah sa len približne rovná $\frac{ds}{dt}$ a priblíženie je tým lepšie, čím je menšie Δt.

Preto možno približne napísať[1]):

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{ds}{dt} = s'(t), \quad \Delta s = \frac{ds}{dt}\,\Delta t = s'(t)\,\Delta t \tag{4.1}$$

Z toho nájdeme aj približnú hodnotu funkcie $s(t + \Delta t)$

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \Delta s \approx s(t) + \frac{ds}{dt}\,\Delta t = s(t) + s'(t)\,\Delta t \tag{4.2}$$

Všimnime si, že vo vzťahu (4.2) prvé znamienko rovnosti je presné podľa definície Δs, druhé je približné.

Vráťme sa k označeniam $t_2 = t + \Delta t$, $t_1 = t$, ktoré sme používali predtým. Dostaneme:

$$s(t_2) \approx s(t_1) + s'(t_1) \,.\, (t_2 - t_1) \tag{4.3}$$

Keď rozdiel $t_2 - t_1$ je malý, t. j. ak sa t_2 blíži k t_1, funkcia $s(t_2)$ môže byť vyjadrená približným vzťahom, ktorý obsahuje hodnoty funkcie $s(t)$ a jej derivácie $s'(t)$ pri $t = t_1$. V tomto vzťahu je t_2 prvého stupňa, teda je lineárne.

Príklad: Nech $s = t^3$. Zaujímajú nás hodnoty s, pre t blízke číslu 1. Ak $t_1 = 1$, tak $s(t_1) = t_1^3 = 1$, $s'(t_1) = 3t_1^2 = 3$ a približný vzťah má tvar

$$s(t_2) = t_2^3 \approx 1 + 3(t_2 - 1) = 3t_2 - 2$$

Porovnajme presné a približné hodnoty (*tab. 1*).

---

[1]) Tvrdenie, že približná rovnosť

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x) \approx s'(x)\,\Delta x$$

je presná v limite pre $\Delta x \to 0$, je potrebné objasniť. Pri $\Delta x \to 0$ je zrejmé, že $\Delta s \to 0$. Preto približná rovnosť $\Delta s \approx a\,\Delta x$ pri $\Delta x \to 0$ je presná pre ľubovoľné a, keďže z tejto rovnosti vyplýva, že $0 = 0$. Ale my tvrdíme oveľa viac: pre konečné Δx z $\Delta s \approx s'(x)\,\Delta x$ vyplýva, že $\frac{\Delta s}{\Delta x} \approx s'(x)$. Tvrdíme, že aj tento dôsledok z približnej rovnosti $\Delta s \approx s'(x)\,\Delta x$ je presný v limite pre $\Delta x \to 0$. To vyplýva z definície derivácie $s'(x)$.

Tabuľka 1

t_2	1	1,01	1,02	1,05	1,1	1,5	2
t_2^3	1	1,0303	1,0612	1,1576	1,3310	3,375	8
$3t_2 - 2$	1	1,03	1,06	1,15	1,30	2,50	4,0

Ešte príklad pre $s = \sqrt{t}$. Nájdeme hodnoty funkcie pre t blízke číslu 4. V tomto prípade $s(4) = \sqrt{4} = 2$. Derivácia $s'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ (pozri cvičenie **6**, čl. 3). Preto $s'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ a približný vzťah má tvar 2

$$s(t_2) = \sqrt{t_2} \approx 2 + 0{,}25(t_2 - 4) = 1 + 0{,}25t_2$$

Porovnajme aj v tomto prípade približné a presné hodnoty (*tab. 2*).

Tabuľka 2

t_2	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{t_2}$	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3
$1 + 0{,}25t_2$	2	2,25	2,50	2,75	3,0	3,25

Predstavme si, že Δt je prírastok času, $s'(t)$ — okamžitá rýchlosť, Δs — prírastok dráhy, t. j. dráha, ktorú teleso prejde za čas Δt. Vzťah

$$\Delta s = s'(t)\,\Delta t \qquad (4.4)$$

znamená, že dráha sa rovná súčinu okamžitej rýchlosti a prírastku času. Okamžitá rýchlosť sa však sama s časom mení. Preto vzťah (4.4) je správny len vtedy, keď okamžitá rýchlosť sa nestačila za čas Δt značne zmeniť. Z toho vyplýva, že čím sa rýchlejšie mení veličina $s'(t)$, tým menšie Δt možno brať vo vzťahu (4.4), a naopak, čím pomalšie sa mení $s'(t)$, tým sa Δt môže zvoliť väčšie, t. j. prírastok času Δt, pre ktorý vzťah (4.4) dáva ešte malú chybu, závisí od rýchlosti zmeny derivácie na intervale Δt.

Uvedené príklady potvrdzujú tento záver.

V prvom príklade pri zmene t od 1 do 2 ($\Delta t = 1$) derivácia $s'(t) = 3t^2$ sa mení od 3 do 12 (t. j. 4-krát). V druhom príklade pri zmene t

od 4 do 9 sa derivácia $s'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ mení od 0,25 do 0,167 (t. j. približne o 30 %). Preto v druhom prípade je vzťah presnejší pri väčších hodnotách Δt. Otázka o hraniciach, v ktorých je vzťah použiteľný (ak je daná požadovaná presnosť) a jeho možnosť je podrobne rozpracovaná v posledných článkoch druhej kapitoly.

Všetko, čo sme si povedali, sa v rovnakej miere vzťahuje ako na kladné, tak i na záporné prírastky. Príklad so zápornými prírastkami je daný v cvičení.

Cvičenia

1. Nájdite $(1{,}2)^2$, $(1{,}1)^2$, $(1{,}05)^2$, $(1{,}01)^2$, ak použijeme vzťah (4.3). Porovnajte získané výsledky s presnými.

2. Pre funkciu $s(t) = 2 + 20t - 5t^2$ nájdite pomocou derivácie hodnoty $s(1{,}1)$, $s(1{,}05)$, $s(0{,}98)$. Porovnajte s presnými hodnotami.

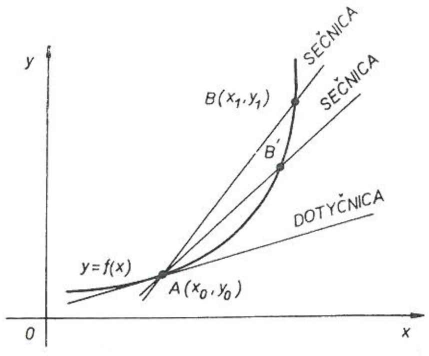
Návod. V poslednom prípade vezmite $t = 1$ a $\Delta t = -0{,}02$.

5. DOTYČNICA KRIVKY

Pomocou derivácie možno riešiť dôležitú úlohu analytickej geometrie — úlohu o hľadaní dotyčnice ku krivke, ktorá je daná rovnicou $y = f(x)$. Súradnice bodu dotyku A sú dané: $x = x_0$, $y = y_0 = f(x_0)$.

Nájsť dotyčnicu znamená nájsť jej rovnicu. Je zrejmé, že rovnica dotyčnice je rovnica priamky prechádzajúcej bodom dotyku. Rovnicu ľubovoľnej priamky, idúcej cez daný bod $A(x_0, y_0)$, možno napísať v tvare

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$



Obr. 3

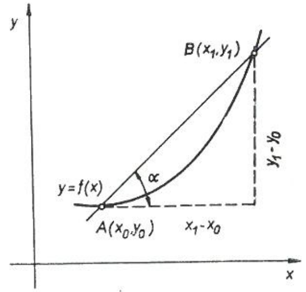
Aby sme našli rovnicu dotyčnice, treba určiť číslo k — smernicu dotyčnice. Najskôr nájdeme smernicu priamky prechádzajúcej cez dva dané body A, B skúmanej krivky (*obr. 3*). Táto priamka sa nazýva sečnica. Ak sa tieto dva body krivky približujú, priamka sa približuje

k dotyčnici. Na *obr. 3* sú dve sečnice idúce cez body A a B a cez A a B', pričom B' leží bližšie k A v porovnaní s B.

Čím je druhý bod bližšie k bodu A, tým je sečnica bližšie k dotyčnici. Preto smernica dotyčnice sa rovná limite, ku ktorej sa blíži smernica sečnice, ak sa zmenšuje vzdialenosť medzi dvoma priesečníkmi sečnice a krivky.

Smernicu sečnice ľahko vyjadríme pomocou hodnôt funkcie v priesečníkoch.

Vezmime za jeden z priesečníkov sečnice a krivky bod $A(x_0, y_0)$, v ktorom chceme viesť dotyčnicu ku krivke. Súradnice druhého priesečníka B označíme (x_1, y_1).



Obr. 4

Keďže tieto body ležia na krivke, ktorej rovnica je $y = f(x)$, potom $y_0 = f(x_0)$ a $y_1 = f(x_1)$. Ako vidno z *obr. 4*, smernica sečnice k_s sa rovná

$$k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Výraz pre smernicu priamky, ktorá prechádza cez dva dané body, zisťujeme v čl. 3 a 4, kapitoly IV.

Aby sme dostali smernicu *dotyčnice* v bode $x = x_0$, musíme voliť bod B čoraz bližšie k bodu A, t. j. je potrebné, aby sa x_1 blížilo k x_0. Smernica dotyčnice sa teda rovná limite k_s pri x_1 blížiacom sa k x_0:

$$k = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Označme Δx rozdiel $x_1 - x_0$, $x_1 = x_0 + \Delta x$ a takisto

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Pri takomto označení pre smernicu sečnice k_s a smernicu dotyčnice k platia vzťahy

$$k_s = \frac{\Delta f}{\Delta x}, \qquad k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Smernica dotyčnice je teda derivácia funkcie $f(x)$

$$k = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} f'(x_0)$$

? $k = \frac{df}{dx} = f'(x_0)$

Vieme, že derivácia funkcie $f(x)$ je sama funkciou x. Keď sme hľadali smernicu dotyčnice v bode $A(x_0, y_0)$, potom pri výpočte limity $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ sme hodnotu x a x_0 považovali za pevnú. Preto v konečnom vzťahu je $f'(x_0)$ hodnota derivácie pre $x = x_0$.

Uvažujme napr. parabolu $y = x^2$, t. j. $f(x) = x^2$. Zostavme rovnicu dotyčnice v bode $x_0 = 2$, $y_0 = f(x_0) = 4$.

Poznáme deriváciu

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = 2x$$

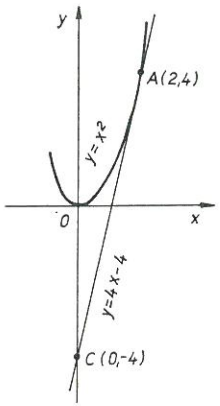
V bode, v ktorom nás zaujíma smernica dotyčnice, sa

$$k = f'(x_0) = 2x_0 = 4$$

Rovnica dotyčnice je:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - 4 = 4(x - 2)$$
$$y = 4x - 4$$

Bez pomoci derivácie ťažko možno viesť dotyčnicu ku krivke, ktorá je daná rovnicou $y = f(x)$. Treba vypočítať veľké množstvo bodov krivky, pomocou krividla viesť krivku týmito bodmi a potom odhadom priložiť krividlo ku krivke v danom bode. Pritom treba dávať pozor, aby sme nepreťali krivku v blízkosti bodu dotyku. Pomocou derivácie nájdeme rovnice dotyčnice takto: Zvolíme si dva body ležiace na tejto priamke. Narysujeme ich a pomocou pravítka vedieme nimi priamku-dotyčnicu. Ako jeden bod je prirodzene najvhodnejšie voliť samotný dotykový bod $A(x_0, y_0)$, druhý bod na priamke (bod C) možno voliť ďalej od A, aby sa presne určil sklon a poloha dotyčnice ako priamky idúcej cez dva body A a C.



Obr. 5

Napríklad: Vyššie sme našli rovnicu dotyčnice paraboly $y = x^2$ v bode $x_0 = 2$, $y_0 = 4$. Táto rovnica má tvar $y = 4x - 4$. Nájdeme súradnice dvoch bodov na tejto priamke: pri $x = 2$ sa $y = 4 . 2 - 4 = 4$; toto je samotný bod dotyku $A(2, 4)$. Jeho súradnice sme ani nemuseli vypočítať, dotyčnica musí týmto bodom prechádzať. Za druhý bod C vezmeme priesečník dotyčnice s osou y. Položíme $x = 0$, nájdeme $y = -4$ tak, že C (0, —4) (*obr. 5*).

Všimnime si ešte túto zaujímavosť: bod C so súradnicami $x = 0$, $y = -y$, v ktorom dotyčnica pretína os y, leží pod osou x tak ďaleko, ako ďaleko leží nad osou x bod dotyku. Nie je to náhoda, ale je to pravidlo správne pre všetky dotyčnice k parabolám s rovnicou $y = ax^2$. Ak dotyčnica ide bodom $A(x_0, y_0 = ax_0^2)$, jej rovnica je:

$$y = y_0 = 2ax_0(x - x_0)$$

? $y - y_0 = 2ax_0(x - x_0)$

a pre $x = 0$ dostaneme:

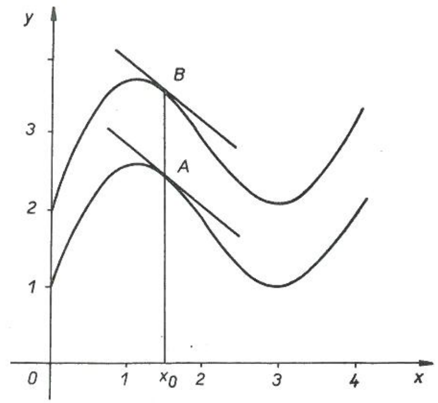
$$y - y_0 = -2ax_0^2, \qquad y = y_0 - 2ax_0^2 = y_0 - 2y_0 = -y_0$$

Týmto spôsobom dotyčnica ide cez body $A(x_0, y_0 = ax_0^2)$ a $C(0, y = -y_0 = -ax_0^2)$.

Ak zostrojujeme krivku pomocou bodov, potrebujeme ich na to vypočítať pomerne veľký počet, aby sa krivka dala ľahko narysovať. Pomocou derivácie môžeme najskôr viesť dotyčnice ku krivke v daných bodoch; potom ľahšie a presnejšie môžeme narysovať samotnú krivku.

Z názoru je jasné, že v bodoch, v ktorých je maximum alebo minimum krivky, je dotyčnica vodorovná (rovnobežná so súradnicovou osou x). Rovnica vodorovnej priamky je $y = \mathrm{const}$, smernica vodorovnej priamky je $k = 0$. V bodoch maxima a minima krivky sa teda derivácia funkcie $y = f(x)$ rovná nule. Podrobne sa o tomto hovorí v nasledujúcom článku. Takto z podmienky $f'(x) = 0$ môžeme nájsť x-ové súradnice maxím a miním krivky.

Súradnicu y pritom ľahko nájdeme, ak dosadíme x do rovnice krivky. Ak poznáme súradnice bodov, v ktorých je maximum a minimum, možno presnejšie viesť samotnú krivku.

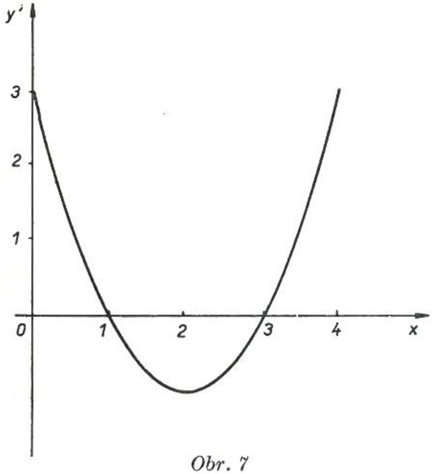


Obr. 6

Ako cvičenie je užitočné, hoci len od ruky, narysovať krivku $y(x)$

a zároveň krivku $y'(x)$. Pritom si všímame znamienko $y'(x)$ a body, kde $y'(x)$ nadobúda hodnotu 0. Takýto príklad je znázornený na *obr. 6* (graf $y(x)$) a *obr. 7* (graf derivácie $y'(x)$).

Body, v ktorých funkcia nadobúda nulovú hodnotu, nie sú pre deriváciu $y'(x)$ dôležité. Ak krivku $y(x)$ posunieme nahor, (horná krivka *obr. 6*), krivka $y'(x)$ sa vôbec nezmení. Pri rovnobežnom posunutí sa sklon krivky zachováva. Napríklad pri $x = x_0$ sú dotyčnice ku krivke $y(x)$ (bod A) a k posunutej krivke (bod B) rovnobežné, uhly sú zhodné. Tieto výsledky potvrdzujú vlastnosť derivácie, ktorá hovorí, že ak pripíšeme konštantu k funkcii (na grafe to zodpovedá posunutiu v zvislom smere), derivácia sa nezmení.



Obr. 7

Rovnako možno postupovať aj v druhom prípade: od ruky narysujeme graf derivácie a približne zostrojíme graf funkcie. Pritom musíme poznať jeden bod $(x_0, y(x_0))$ a od neho viesť krivku nahor alebo nadol (podľa znamienka derivácie).

Doteraz sme predpokladali, že na osi x a y je rovnaká jednotková mierka, t. j. že mierka na osi x a mierka na osi y je zobrazená na grafe úsečkami rovnakej dĺžky. Vtedy sa $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Pri zostrojovaní grafov sa často používajú rôzne mierky, najmä ak y a x sú veličiny s rôznymi rozmermi. Nech napr. y je dráha a x je čas. Na graf sa nanáša poloha telesa v závislosti od času $y(x)$. Na os poradníc (y) budeme nanášať y v mierke 1 m dráhy = 1 cm na obrázku. Na os úsečiek (x) budeme nanášať čas v mierke 1 s času = 1 cm na obrázku. Vtedy skutočná rýchlosť pohybu v je vyjadrená v metroch za sekundu $\left(\text{rovná sa deriváci } \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ a rovná sa tangensu uhla dotyčnice na grafe ($\operatorname{tg} \alpha$). Ak

si zvolíme inú mierku pre stupnicu x, napr. 1 s = $l$cm = 5 cm na obrázku, dostaneme:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathrm{d}y}{l\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{l}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{5}v \qquad [\mathrm{ms}^{-1}]$$

Ak za jednotku dĺžky na osi x na obrázku zvolíme l cm a na osi y volíme n cm, tak

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{l}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Keď y a x sú veličiny s danými rozmermi, napr. y je dané v metroch, x v sekundách, alebo y v kilogramoch, x v mesiacoch (závislosť váhy dieťaťa od času), aj derivácia $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ má rozmer. V prvom prípade $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v$ je rýchlosť pohybu s rozmerom m/s, v druhom prípade $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ je rýchlosť pribúdania váhy kg/mesiac.

Trigonometrická funkcia $\operatorname{tg} \alpha$ je bezrozmerná (rovná sa pomeru dĺžok dvoch úsečiek). Nemôže preto platiť rovnosť $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, lebo v nej aj ľavá, aj pravá strana majú rôzne rozmery. Súčinitele l a n zo vzťahu $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{n}{l}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ robia rovnosť správnou z hľadiska rozmerov. Tak v druhom príklade má l rozmer cm/mesiac (1 cm na grafe na 1 mesiac veku), n má rozmer cm/kg (1 cm na grafe na 1 kg váhy), takže $\dfrac{n}{l}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ je bezrozmerné. Vo vzťahu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n\left(\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{kg}}\right)}{l\left(\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{mesiac}}\right)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mesiac}}\right)$$

sa všetky rozmery zjednodušia.

Toto si treba zapamätať pri porovnávaní derivácie a sklonu krivky.

Cvičenia

1. Zostrojte graf funkcie $y = x^2 + 1$ v intervale od $x = -1,5$ do $x = 2,5$ a veďte k nemu dotyčnice v bodoch $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$ a $x = 2$.

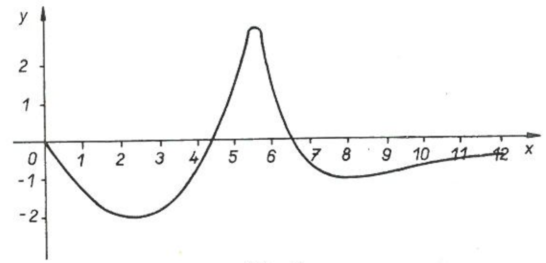
2. Urobte to isté pre funkcie $y = x^3 - 3x^2$, $-1 < x < 3,5$, dotyčnice zostrojte v bodoch $x = -1$, 0, 3. Nájdite body s vodorovnou dotyčnicou.

3. Nájdite body s vodorovnou dotyčnicou pre krivku $y = x^3 - x + 1$. Zostrojte krivku pre $-2 < x < 2$.

Návod. Cvičenia **1** až **3** treba narysovať na milimetrový papier s veľkou mierkou.

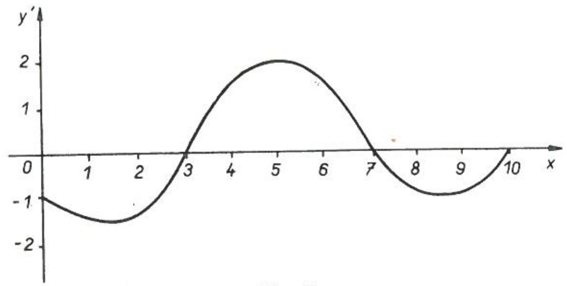
4. Zostrojte krivku $y'(x)$ pre funkciu $y(x)$, znázornenú na *obr. 8*.

Návod. Najprv prekreslite *obr. 8* na čistý list papiera a na ňom zostrojte $y'(x)$.



Obr. 8

5. Na *obr. 9* je znázornená krivka $y'(x)$. Zostrojte krivku $y(x)$, ktorá prechádza bodom (5, 0). Pod akým uhlom pretína $y(x)$ os y? Pod akým uhlom pretína $y(x)$ os x pre $x = 5$?



Obr. 9

Návod. To isté ako v cvičení **4**.

6. Zostrojte dotyčnice ku krivke $y = x^3$ v bodoch $x = 0,5$ a $x = 1$. Nájdite priesečníky dotyčníc s osami x a y.

7. Nájdite všeobecné pravidlo pre priesečníky dotyčníc ku krivkám $y = ax^2$, $y = bx^3$ so súradnicovými osami.

6. MONOTÓNNE FUNKCIE. MAXIMUM A MINIMUM FUNKCIE

Nech je daná závislosť akejkoľvek fyzikálnej veličiny, napr. teploty od času.

Nech s je teplota, t čas a nech je daný vzťah pre funkciu $s(t)$. Ako určíme, či teplota v danom čase stúpa alebo klesá, alebo kedy dosahuje maximum alebo minimum?

Ak nepoznáme derivácie, odpoveď na prvú otázku treba hľadať dosadzovaním: nájdeme teplotu v danom čase t, potom vezmime ľubovoľný nasledujúci čas t_1 a presvedčíme sa, či teplota stúpla alebo klesla. Takýto spôsob je, pravda, nespoľahlivý: ak je $s(t_1)$ väčšie ako $s(t)$, to nevylučuje, že do času t teplota nemohla klesať, dosiahnuť minimum a až potom stúpať a v čase t_1 by bola väčšia ako $s(t)$.

Pomocou derivácie možno otázku riešiť presne: treba však nájsť deriváciu $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Ak derivácia $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s'(t)$ je v danom čase t kladná, tak $s(t)$ je rastúca funkcia: ak zväčšíme t o malú hodnotu Δt, teplota sa zmení o malú hodnotu $\Delta s = s'(t)\,\Delta t$ (čím menšie Δt, tým presnejšia je táto rovnosť). Skúmajme prírastok času $\Delta T > 0$. Ak $s'(t) > 0$, $\Delta t > 0$, tak i $\Delta s > 0$, t. j. teplota sa postupne zvyšuje. Ak $s'(t) < 0$, $\Delta t > 0$ tak $\Delta s < 0$, t. j. teplota v nasledujúcom čase $s(t + \Delta t)$ bude nižšia ako teplota $s(t)$ v danom čase.

Vidíme, že kladná derivácia značí, že funkcia je rastúca, a záporná derivácia, že funkcia je klesajúca v danom bode.

Výrazy „rastúca funkcia“ a „klesajúca funkcia“ sa používajú nielen pre závislosť od času, ale i pre ľubovoľné funkcie $y(x)$. Pritom za rastúcu funkciu pokladáme tú, pri ktorej sa y zväčšuje pri zväčšovaní nezávisle premennej x[1]).

Derivácia $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ udáva práve rýchlosť rastu, t. j. pomer zmeny y k zmene x. Záporná rýchlosť rastu znamená klesanie, zmenšenie y pri zväčšení x, a ak $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$, tak $\left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ je rýchlosť klesania.

---

[1]) Autor voľne používa dva pojmy: rastúce a klesajúce funkcie v bode a rastúce a klesajúce funkcie na množine (intervale) bez toho, aby ich rozlíšil. Pozn. prekl.

Výraz „funkcia y má veľkú zápornú deriváciu podľa x“ znamená, že y rýchle klesá so zväčšovaním x. Kladná derivácia $\frac{dy}{dx}$ znamená, že y rastie s rastúcim x.

Fyzici a matematici, ale najmä budúci matematici a fyzici, ktorí práve poznali, čo je derivácia, často tento pojem používajú i v každodennom živote: „derivácia mojej nálady je podľa času kladná“ — namiesto „moja nálada sa zlepšuje“.

Riešte nasledujúci žart ako úlohu: aké znamienko má derivácia nálady podľa vzdialenosti od kresla zubného lekára. Nálada sa zhoršuje „zmenšuje sa“, stáva sa „zápornou“ so zmenšovaním sa vzdialenosti, to znamená, derivácia je kladná.

Sú funkcie, ktorých derivácie majú rovnaké znamienko pre ľubovoľné hodnoty premennej. Túto vlastnosť má napríklad i lineárna funkcia $y = kx + q$, pri ktorej $\frac{dy}{dx} = k$ — konštante. Neskôr uvidíme, že napríklad pri exponenciálnej funkcii $y = a^x$ má derivácia rovnaké znamienko (hoci nie je konštantná čo do veľkosti) pre ľubovoľné x. Rovnaké znamienko derivácie však nie je potrebné. Môže byť rozličné pri rôznych hodnotách nezávisle premennej.

Predstavme si funkciu $y(x)$, derivácia ktorej $y'(x)$ je kladná pri $x < x_0$ a záporná pri $x > x_0$, čo symbolicky zapisujeme:

$$y'(x) > 0, \quad x < x_0; \quad y'(x) < 0, \quad x > x_0$$

Čo môžeme povedať o takej funkcii? Začnime s $x < x_0$. Pri zväčšenom x na x_0 sa bude y zväčšovať: pri ďalšom zväčšení x, y bude klesať. Odtiaľ vyplýva záver: pri $x = x_0$ funkcia $y(x)$ nadobúda *maximum*.

Rozoberme opačný prípad

$$y'(x) < 0, \quad x < x_0; \quad y'(x) > 0, \quad x > x_0$$

Ak uvažujeme takým istým spôsobom, prídeme k záveru, že v tomto prípade pri $x = x_0$ má $y(x)$ *minimum*.

Ak funkcia $y(x)$ je daná vzťahom, ktorému zodpovedá hladká krivka, bude sa so zmenou x aj $y'(x)$ súčasne meniť. Rozdielne znamienko $y'(x)$ pri $x < x_0$ a $x > x_0$ v obidvoch prípadoch znamená, že pri $x = x_0$ sa $y'(x_0) = 0$. Ak položíme deriváciu rovnajúcu sa nule, tak môžeme nájsť

tie hodnoty nezávisle premennej, pri ktorých funkcia má maximum alebo minimum. O výnimkách tohto pravidla pre krivky, ktoré nie sú hladké, budeme hovoriť podrobnejšie v kapitole III.

Uveďme číselný príklad. V čl. 1, kapitoly IV je tabuľka funkcie $y = 3x^3 - x^2 - x$, pozri str. 213. Ak si všimneme túto tabuľku, vidíme, že funkcia sa zdá rastúca pre všetky hodnoty x, pretože každé zväčšenie x o jednotku vyvolalo zväčšenie y. Utvorme deriváciu

$$y' = 9x^2 - 2x - 1$$

Ak položíme $x = 0$, dostaneme $y'(0) = -1 < 0$. To znamená, že pre $x = 0$ je funkcia klesajúca; táto skutočnosť vyvracia predpoklad, ktorý vznikol na základe uvedenej tabuľky, že funkcia je všade rastúca.

Položme $y'(x)$ rovnajúce sa nule a riešme rovnicu

$$9x^2 - 2x - 1 = 0$$

nájdeme dva korene:

$$x_1 \doteq -0{,}24, \qquad x_2 \doteq +0{,}46$$

Zostavíme podrobnú *tab. 3* tak, aby obsahovala aj nájdené body maxima a minima.

Tabuľka 3

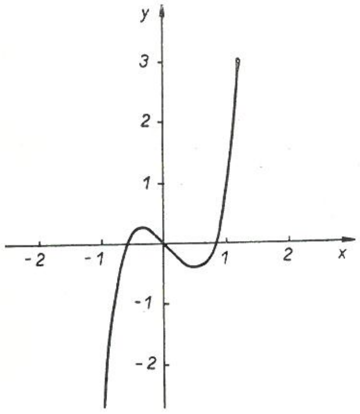
x	—2	—1	—0,30	—0,24	—0,18	
y	—26	—3	+0,129	+0,140	+0,131	
x	0	0,40	0,46	0,52	1	2
y	0	—0,372	—0,381	—0,370	+1	+18

Vidíme, že skutočne na intervale od $x \doteq -0{,}24$ do $x \doteq +0{,}46$ funkcia y klesá z hodnoty 0,14 na $-0{,}38$[1]).

[1]) Výsledky v *tab. 3* sú zaokrúhlené na tri desatinné miesta, totiž $y(-0{,}24) = 0{,}140\,928$, $y(0{,}46) = 0{,}379\,592$. Ani funkcia v čísle —0,24 nemá maximum, keďže $y'(-0{,}24) = -0{,}0016$, podobne je to pri minime. Maximum nadobúda v čísle $(1 - \sqrt{10})/9 = -0{,}2402\ldots$ a minimum má v čísle $(1 + \sqrt{10})/9 = 0{,}4624\ldots$. Pozn. prekl.

Porovnanie hodnôt $y(-0{,}24)$ so susednými $y(-0{,}30)$ a $y(-0{,}18)$ potvrdzuje, že pri $x = -0{,}24y$ dosahuje funkcia maximum a susedné hodnoty y sú menšie.[1])

Graf funkcie $y = 3x^3 - x^2 - x$ je znázornený na *obr. 10*. Vidíme, že slovo maximum[2]) netreba chápať ako najväčšiu hodnotu zo všetkých možných hodnôt y. V skutočnosti v bode maxima dosahuje funkcia hodnotu $y(-0{,}24) = -0{,}14$ a pri $x = 1y = 1$, pri $x = 2y = 18$, pri $x = 10y = 269$ atď. pri x idúcom do nekonečna aj y neobmedzene rastie. Čím sa odlišuje nájdené maximum[3]) $x_{\max} = -0{,}24$, $y = 0{,}14$?



Obr. 10

Rozdielnosť je v tom, že pri blízkych susedných hodnotách x, väčších ako $x_{\max}$, alebo menších ako $x_{\max}$, hodnoty y sú menšie ako $y_{\max} = y(x_{\max})$. Túto skutočnosť názorne vidieť v *tab. 3* (porovnajte $y(-0{,}30)$, $y(-0{,}24)$ a $y(-0{,}18)$). Taká istá úvaha sa vzťahuje na minimum: pre $x_{\min} = 0{,}46$, $y_{\min} = -0{,}381$; pre x záporné, no v absolútnej hodnote väčšie ako $x_{\min}$ sa y neobmedzene zmenšuje a stáva sa menšie ako $y_{\min}$. Bod minima $(x_{\min}, y_{\min})$ sa však líši tým, že pre x blízke k $x_{\min}$ je $y_{\min}$ menšie ako príslušné $y = y(x)$. Podmienka, aby sa derivácia rovnala nule, dáva možnosť nájsť maximá a minimá funkcie[4]).

Určenie maxím a miním aritmetickou cestou, výpočtom a porovnaním hodnôt funkcie pre rôzne hodnoty argumentu sa zdá omnoho obťažnejšie a menej presné. Vyššia matematika je nielen významným myšlienkovým výdobytkom, ale aj praktické, konkrétne výpočtové úlohy sa oveľa ľahšie riešia metódou vyššej matematiky.

[1]) Pozri poznámku 1 na str. 37. Podľa tejto poznámky treba brať uvedené tvrdenie len približne. Pritom funkcia má v čísle x_1 iba lokálne maximum a v čísle x_2 lokálne minimum. Maximum a minimum nemá! Pozri aj ďalší text. Pozn. prekl.

[2]) Autor nerozlišuje v texte pojem lokálne maximum a maximum, ani lokálne minimum a minimum funkcie. Pozn. prekl.

[3]) Znamienko max pri x je skratka z latinského slova maximum a číta sa: „iks — max“ alebo „iks — maximum“; znak min — minimum.

[4]) Opäť ide o lokálne maximá a minimá funkcie. Pozn. prekl.

Na záver tejto časti sa zastavíme pri otázke, ako odlíšime maximum od minima, keď použijeme podmienku $y'(x) = 0$. Táto podmienka je splnená i v maxime i v minime. Rozdiel je v znamienku $y'(x)$ pri $x < x_0$ a pri $x > x_0$.

Ako určíme znamienko $y'(x)$ pre x blízke k x_0, ak nevypočítavame bezprostredne y' pre ostatné hodnoty x? V prvom prípade sme videli, že funkcia $y(x)$ má maximum, keď $y'(x) > 0$ pri $x < x_0$ a $y'(x) < 0$ pri $x > x_0$. Teda v tomto prípade derivácia $y'(x)$ je klesajúca funkcia. Pri x rastúcom derivácia, ktorá na začiatku bola kladná (pri $x < x_0$), sa pre $x = x_0$ rovná nule a ďalej klesá, stáva sa zápornou pri $x > x_0$. My však už vieme, ako určíme klesajúcu funkciu. Jej derivácia je záporná. Teda v prvom prípade pri tej hodnote $x = x_{\max}$, pri ktorej má y maximum, $y'(x_0) = 0$ a derivácia derivácie je záporná. Táto funkcia — derivácia derivácie — ktorú všeobecne zapisujeme

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

má svoj názov — „druhá derivácia“. Označuje sa aj $y'(x)$ alebo $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Takže podmienka maxima je:

$$y'(x) = 0, \quad y''(x) < 0$$

Takýmto spôsobom možno tiež zistiť, že pri x, pre ktoré platí:

$$y'(x) = 0, \quad y''(x) > 0$$

funkcia $y(x)$ má minimum[1]).

[1]) Uvedené podmienky sú len postačujúce. Funkcia môže mať lokálne maximum, resp. lok. minimum, aj keď uvedené podmienky nie sú splnené, napr. funkcia $y = \sqrt[3]{x^2}$ má v čísle $x = 0$ minimum, hoci $y'(0)$ ako aj $y''(0)$ neexistuje; podobne funkcia $y = \sqrt[3]{x^4}$ má v čísle $x = 0$ minimum, hoci $y'(0) = 0$ a $y''(0)$ neexistuje. Pozn. prekl.

Vráťme sa k príkladu rozobranému vyššie,

$$y = 3x^3 - x^2 - x, \quad y' = 9x^2 - 2x - 1$$

Zderivujme y' a dostaneme:

$$y'' = 18x - 2$$

Pre $x = -0{,}24$ $y' = 0$ a $y'' = -6{,}3 < 0$ a skutočne v $x = -0{,}24$, $y = 0{,}14$ je maximum. Pre $x = -0{,}46$ $y' = 0$, $y'' = 6{,}3 > 0$, teda[1] pri $x = 0{,}46$, $y = -0{,}38$ má y minimum.

Cvičenia

Nájdite hodnoty x, pre ktoré funkcie uvedené v príkladoch 1 až 5 nadobúdajú maximum alebo minimum. V každom prípade zistite, o aký extrém ide. Vo funkciách, ktoré obsahujú konštantu a, zistite prípady, keď $a > 0$, alebo $a < 0$.

1. $y = ax^2$.

2. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

3. $y = x + \dfrac{a}{x}$.

4. $y = x^3 - x$.

5. $y = x^4 = ax^2 + b$.

7. URČENIE DRÁHY Z RÝCHLOSTI POHYBU. OBSAH KRIVOČIAREHO LICHOBEŽNÍKA

Úloha určiť okamžitú rýchlosť pohybu $v(t)$, ak poznáme závislosť polohy telesa od času $s(t)$, nás priviedla k pojmu derivácie

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

Opačná úloha je v určení polohy telesa a dráhy, ktorú teleso prejde za daný časový úsek, keď je daná okamžitá rýchlosť $v(t)$ ako funkcia času. Táto úloha nás vedie k druhému dôležitému pojmu vyššej matematiky — pojmu *integrálu*.

[1] $y''(0{,}46) = 6{,}28$, $y'(-0{,}24) = -6{,}32$. Pozri poznámku na str. 37. Pozn. prekl.

Dohodneme sa o vhodnom označení. Skúmajme dráhu, ktorú prejde teleso za čas od t_1 do t_2. Aby sme nemuseli písať indexy, nazveme začiatok skúmaného časového úseku písmenom n, t. j. $t_1 = n$ a koniec tohto úseku k, $t_2 = k$. Dráhu, ktorú teleso prešlo, označíme $s\,(n, k)$. Zapamätajme si, že keď v zátvorke pri znamienku funkcie s stoja dve písmená n a k, potom $s(n, k)$ je dĺžka dráhy, ktorú teleso prejde za čas od n do k. Ak je $s(t)$ s jedným písmenom v zátvorke, $s(t)$ určuje polohu telesa v danom čase t. Medzi týmito veličinami je jednoduchý súvis

$$\left.\begin{aligned} s(k) &= s(n) + s(n, k) \\ s(n, k) &= s(k) - s(n) \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

Dráha, ktorú teleso prejde za čas od n do k, sa rovná rozdielu súradnice na konci skúmaného časového úseku $s(k)$ a na začiatku tohto úseku $s(n)$.

Teraz urobíme výpočet $s(n, k)$. V najjednoduchšom prípade, ak je rýchlosť konštantná

$$v(t) = \text{const} = v_0 \qquad (7.2)$$

prejdená dráha sa rovná súčinu času, počas ktorého pohyb trval, a rýchlosti, teda

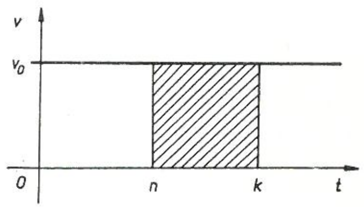
$$s(n, k) = (k - n)\, v_0 \qquad (7.3)$$

Ak nakreslíme graf závislosti rýchlosti od času v prípade konštantnej rýchlosti, dostaneme vodorovnú priamku (*obr. 11*). Dráha, ktorú teleso prejde, sa rovná obsahu vyšrafovaného obdĺžnika, pretože obsah obdĺžnika sa rovná súčinu základne $(k - n)$ a výšky v_0.

Ako to bude vo všeobecnom prípade, keď okamžitá rýchlosť nie je konštantná?

Preskúmajme podrobne jeden číselný príklad. Nech je rýchlosť pohybu daná vzťahom $v = at^2$, kde koeficient a predstavuje zrýchlenie. Uvažujme taký prípad, keď $a = 1\ \mathrm{m/s^2}$, potom $v = t^2$. Nájdeme dráhu, ktorú teleso prekonalo za čas od $t = n = 1$ do $t = k = 2$.

Celý interval od n do k rozdelíme na desať častí a zostavíme tabuľku pre rýchlosť (*tab. 4*). Malé časové úseky po 0,1 s, na ktoré sme rozdelili celý interval od $t = n$ do $t = k$, označíme skrátene Δt.



Obr. 11

Tabuľka 4

t	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
v	1,00	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4,00

V čom spočíva ťažkosť výpočtu dráhy, ak je rýchlosť $v(t)$ daná vzťahom? Obťažnosť je v tom, že rýchlosť je premenná. Pre konštantnú rýchlosť je odpoveď jednoduchá. V skúmanom príklade v celom intervale času od $t = 1$ do $t = 2$ sa rýchlosť zmení štvornásobne. Ak interval rozdelíme na 10 častí, v každom malom intervale dĺžky 0,1 s sa rýchlosť zmení prinajmenšom o 10—20 %. To znamená, že v malých intervaloch môžeme rýchlosť približne pokladať za konštantnú a vypočítať dráhu v priebehu malého intervalu ako súčin tohto časového intervalu a rýchlosti.

Pre výpočet dráhy v každom intervale Δt, ktorý trvá 0,1 s, použijeme počiatočnú rýchlosť z tohto Δt; 1 m/s z Δt od 1 s do 1,1 s, 1,21 m/s vΔt od 1,1 s do 1,2 s atď: nakoniec 3,61 m/s v poslednom Δt od 1,9 s do 2,0 s. Celková prejdená dráha za časový interval od $t = 1$ do $t = 2$ pri tomto spôsobe výpočtu sa rovná:

$$s(t, 2) = 0{,}1 + 0{,}121 + 0{,}144 + \ldots + 0{,}361 = 2{,}185 \text{ m}$$

V tomto výpočte sme zmenšili prejdenú dráhu: rýchlosť v danom príklade v priebehu času rastie, preto je rýchlosť v začiatku každého Δt menšia ako stredná rýchlosť. Aj každý zo sčítancov, na ktoré sme rozdelili celú dráhu, je o niečo menší. Z toho vyplýva, že je menší aj celý výsledok.

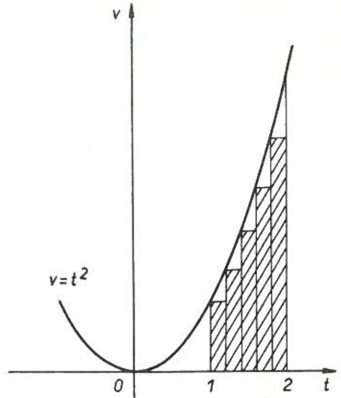
Teraz vypočítame dráhu tak, že v každom Δt budeme brať hodnotu rýchlosti na konci intervalu Δt. Pre prvý interval Δt od 1 s do 1,1 s sa táto rýchlosť rovná 1,21 m/s, pre posledný od 1,9 s do 2 s sa rýchlosť rovná 4m/s. V tomto prípade pre prejdenú dráhu dostaneme:

$$s(1{,}2) = 0{,}121 + 0{,}144 + \ldots + 0{,}400 = 2{,}485 \text{ m}$$

Tento výpočet dáva zväčšenú hodnotu $s(1{,}2)$. To znamená, že skutočná hodnota je v intervale medzi 2,185 m a 2,485 m. Rozdiel medzi 2,185 a 2,485 je asi 15 %. Ak zaokrúhlime hranice pre s, dostaneme:

$$2{,}18 < s(1{,}2) < 2{,}49$$

Výpočet možno objasniť na grafe. Zostrojme graf (*obr. 12*), na ktorom na os x nanesieme čas a na os y rýchlosť. Aby sme na obrázku dobre videli stupne, je interval času rozdelený na 5 dielov (nie na desať, ako v tabuľke). Každý sčítanec v prvom súčte predstavuje obsah úzkeho obdĺžnika, ktorého základňa odpovedá intervalu Δt a výška zodpovedá rýchlosti na začiatku intervalu. Súčet potom predstavuje obsah vyšrafovaného obrazca pod lomenou (schodíkovitou) čiarou na *obr. 12*. Druhý súčet, v ktorom sa v každom intervale brala rýchlosť na konci intervalu, zodpovedá obsahu vyšrafovaného obrazca na *obr. 13*.



Obr. 12

Ako sa dá presnejšie vypočítať dráha, ktorú teleso prešlo za čas od $t = n = 1$ s do $t = k = 2$ s?

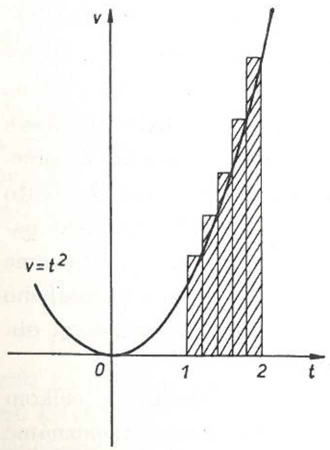
Rozdiel medzi dolným a horným odhadom, t. j. rozdiel medzi hodnotami 2,18 a 2,49 závisí od zmeny rýchlosti v hraniciach každého intervalu Δt.

Aby bolo možné nájsť oveľa presnejšiu hodnotu $s(1{,}2)$, treba celý časový interval od 1 s do 2 s rozdeliť na viac kratších intervalov. Napríklad, ak rozdelíme interval od 1 s do 2 s na 20 intervalov Δt po 0,05 s, tak rovnaký výpočet pre rýchlosti dáva na začiatku intervalov Δt, dráhu

$$s(1{,}2) = 0{,}05 + 0{,}05 \,.\, 1{,}1025 + \ldots + \\ + 0{,}05 \,.\, 3{,}8025 = 2{,}258\,75$$

a pre rýchlosti na konci intervalov Δt, dráhu

$$s(1{,}2) = 0{,}05 \,.\, 1{,}1025 + 0{,}05 \,.\, 1{,}21 + \\ + \ldots + 0{,}05 \,.\, 4 = 2{,}408\,75$$



Obr. 13

Rozdiel medzi 2,258 75 a 2,408 75 je asi 7 %. Hranice pre $s(1{,}2)$ sa zúžili. Zaokrúhlene

$$2{,}26 < s(1{,}2) < 2{,}41$$

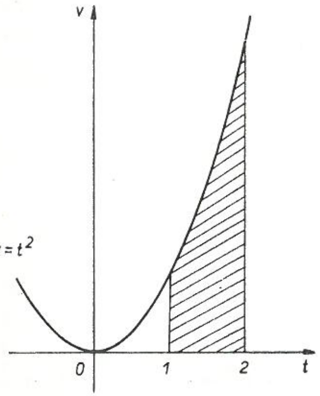
Pri zmenšovaní Δt sa výsledok blíži ku skutočnej hodnote dráhy, ktorú ďalej vypočítame a rovná sa

$$s(1{,}2) = 2\frac{1}{3} = 2{,}333\ldots$$

Pri zmenšení Δt zmenšuje sa rozdiel medzi počiatočnou a konečnou rýchlosťou v každom malom intervale Δt, teda sa zmenšuje relatívna chyba v každom sčítanci; preto i celý súčet dráh za všetky Δt, t. j. hodnota $s(1{,}2)$ určuje sa tým presnejšie, čím je Δt menšie (počet malých intervalov rovnajúci sa $\frac{k-n}{\Delta t}$ sa pritom zväčšuje).

Na obrázku vidno, že pri zväčšení počtu intervalov Δt a pri zmenšení dĺžky každého intervalu zmenšujú sa rozmery každého schodíka na *obr. 12* a *13*, a teda stupňovitá čiara sa čoraz viac približuje ku krivke $v(t)$.

Na základe tohto prichádzame k záveru, že dráha, ktorú prejde teleso za čas od $t = n$ do $t = k$ pri ľubovoľnej závislosti okamžitej rýchlosti od času $v(t)$, rovná sa obsahu obrazca ohraničeného krivkou $v(t)$, zvislými priamkami $t = n$ a $t = k$ a osou t (*obr. 14*).



Obr. 14

Tu vidíme, ako možno prakticky dráhu vypočítať. Možno zostrojiť graf na milimetrovom papieri a určovať obsah vyšrafovaného obrazca rátaním štvorčekov. Úlohu možno riešiť i tak, že tento obrazec vyrežeme z papiera, vyrezaný papier odvážime a jeho tiaž porovnáme s tiažou z toho istého papiera vyrezaného obdĺžnika alebo štvorca so známym obsahom.

Tento spôsob je vhodný a celkom správny, keď rýchlosť presne nepoznáme a daná je tabuľkou alebo grafom, ktorý

sme získali pokusom. My sa však neuspokojíme s týmito približnými spôsobmi, ale ďalej vysvetlíme, ako možno vyjadriť vzorcom dráhu, ktorú teleso prešlo, ak rýchlosť je daná vzorcom.

Spresníme i metódu určenia dráhy, a to tak, že dráhu v každom malom časovom intervale určíme z aritmetického priemeru počiatočnej a konečnej rýchlosti. Pri tomto spôsobe, t. j. pri rozdelení na desať intervalov, vezmeme rýchlosť v prvom intervale od 1 s do 1,1 s, ktorá sa rovná $\frac{1 + 1{,}21}{2} = 1{,}105$ m/s a dráha v tomto časovom intervale je 0,1105 m, dráha v druhom intervale je $0{,}1 \,.\, \frac{1{,}21 + 1{,}44}{2} = 0{,}1325$ m atď. Ak ich sčítame, dostaneme dráhu, ktorú teleso prejde za celý čas od $n = 1$ s do $k = 3$ s,

$$s(1{,}2) = 0{,}1105 + 0{,}1325 + \ldots = 2{,}335 \text{ m}$$

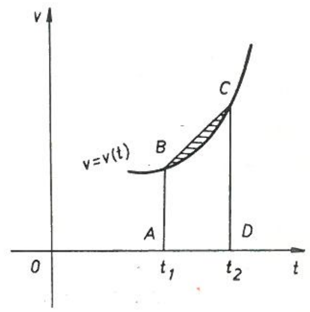
Pri rozdelení na 20 intervalov dostaneme takto (z priemernej rýchlosti)

$$s(1{,}2) = 2{,}333\,75 \text{ m}$$

Tieto hodnoty sú bližšie ku skutočnej hodnote 2,3333 m, než tie, ktoré sme vypočítali pre začiatočné a konečné hodnoty rýchlosti pri tom istom počte intervalov. Pri 10 intervaloch je chyba 0,07 %, v predchádzajúcom spôsobe bola 15 %, pri 20 intervaloch je chyba 0,029 namiesto 7 %.

Tento spôsob takisto možno názorne vysvetliť graficky. Súčin strednej rýchlosti (aritmetického priemeru rýchlostí zo začiatku a konca intervalu) a veľkosti časového intervalu je obsah lichobežníka $ABCD$ (*obr. 15*). Jeho základne sú AB a DC, výška AD, obsah

$$\frac{AB + DC}{2} AD = \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2} (t_2 - t_1)$$



Obr. 15

Určenie dráhy pomocou stredných rýchlostí sa nazýva „lichobežníková metóda". Ak má krivka $v(t)$ tvar, ktorý je na *obr. 15*, obsah lichobežníkov je len o málo väčší, ako obsah obrazca ohraničeného priamkami BA, AD,

DC a úsekom krivky BC. Rozdiel obsahov lichobežníka a obrazca ohraničeného úsekom krivky rovná sa obsahu polmesiaca utvoreného tetivou BC a oblúkom krivky BC (vyšrafovaný na *obr. 15*). Tento obsah udáva chybu — rozdiel medzi skutočnou hodnotou dráhy a hodnotou vypočítanou podľa lichobežníkovej metódy. Ak porovnáme *obr. 12* s *obr. 13*, vidíme, že chyba v lichobežníkovej metóde musí byť menšia ako pri obdĺžnikovej metóde.

Ak chceme porovnávať dráhu s obsahom obrazca na grafe, nevyhnutne treba určiť mierku, v ktorej graf zostrojíme. Nech na osi úsečiek (osi x) na grafe 1 cm zodpovedá časovému intervalu T s, 1 cm na osi poradníc (osi y) zodpovedá rýchlosti V m/s. Vtedy pri pohybe s konštantnou rýchlosťou v_0 za čas od n do k sa dráha rovná $v_0(k - n)$ a obsah lichobežníka na grafe (*obr. 11*) sa rovná:

$$S = \frac{v_0}{V} \frac{(k - n)}{T} \text{ m}^2$$

Takto

$$s(n, k) = SVT$$

Tento vzťah medzi dráhou, ktorú teleso prešlo, a medzi obsahom obrazca na grafe rýchlosti, ohraničeného krivkou $v(t)$, medzi osou x a zvislými úsečkami platí i v prípade premennej rýchlosti, danej ľubovoľnou závislosťou $v(t)$. Takýmto spôsobom sme podrobne zistili približné numerické i grafické metódy určenia dráhy, ktorú teleso prešlo, ak je známa závislosť rýchlosti od času.

8. URČITÝ INTEGRÁL

V predchádzajúcom článku obidve úlohy — úloha určiť dráhu, ktorú teleso prešlo, a rovnako dôležitá úloha, určenie obsahu krivočiareho lichobežníka — viedli nás ku skúmaniu súčtov zvláštneho tvaru s veľkým počtom sčítancov.

Formulácia týchto úloh vedie k pojmu integrálu. Hodnota dráhy $s(n, k)$ pri danej rýchlosti $v(t)$ sa nazýva „určitý integrál funkcie $v(t)$ s hranicami od n do k".

Definujme matematicky určitý integrál spôsobom, ktorý zodpovedá ideám, ilustrovaným na numerickom príklade z predchádzajúceho článku.

Táto definícia platí i v prírode, že skúmame ľubovoľné iné fyzikálne alebo matematické závislosti a nielen rýchlosť a dráhu.

Nech je daná funkcia $v(t)$. Pre výpočet jej určitého integrálu od n do k rozdelíme interval od n do k na veľké množstvo (m) malých intervalov. Hodnoty argumentu t v koncových bodoch malých intervalov označíme t_0, t_1, t_2, ..., t_{m-1}, t_m. Pritom je zrejmé, že $t_0 = n$ a posledné $t_m = k$ (*obr. 16*).

Obr. 16

Dĺžky malých časových intervalov Δt sa rovnajú rozdielu susedných hodnôt t[1]). Označenie intervalu zodpovedá označeniu argumentu na konci intervalu (*obr. 16*). Takýmto spôsobom pre ľubovoľné l

$$\Delta t_l = t_l - t_{l-1}$$

Značky dolu pri hodnote t a Δt nazývame „indexy". (Pozri poznámku na str. 219.)

Približná hodnota integrálu $s(n, k)$ je daná vzťahom[2])

$$S(n, k) \approx \sum_{l=1}^{l=m} v(t_{l-1}) \, \Delta t_l \tag{8.1}$$

Znak Σ je tlačené grécke písmeno (číta sa „sigma"). Písmeno Σ v gréckej abecede zodpovedá písmenu S z latinskej abecedy, ktoré je prvé písmeno slova summa. $\sum\limits_{l=1}^{l=m}$ znamená, že výraz, ktorý sa nachádza vpravo od tohto znaku a závisí od indexu l, treba vypočítať pre

---

[1]) Ak rozdelíme interval od n do k špeciálne na m rovnakých častí, každý interval sa bude rovnať $\Delta t = \dfrac{k - n}{m}$. V ďalšom netreba predpokladať, aby všetky čiastočné intervaly, na ktoré je interval rozdelený, boli rovnako veľké, ale je potrebné, aby každý interval Δt bol malý. Čitateľ sa môže o tom presvedčiť, ak porozmýšľa nad príkladom dráha — rýchlosť z čl. 7.

[2]) Súčet v uvedenom vzťahu nazývame integrálnym súčtom funkcie $v(t)$ pri danom delení intervalu $\langle n, k \rangle$. Pozn. prekl.

všetky hodnoty l od 1 do m a všetky tieto výrazy treba sčítať. Tak napr. ak $m = 10$, tak

$$\sum_{l=1}^{l=10} v(t_{l-1})\,\Delta t_l = v(t_0)\,\Delta t_1 + v(t_1)\,\Delta t_2 + \ldots + v(t_9)\,\Delta t_{10}$$

V *tab. 4*, príklad v čl. 7 sa $t_0 = 1$; $t_1 = 1{,}1$; $t_2 = 1{,}2\ldots$

$$S(1, 2) = S(n, k) \approx \sum_{l=1}^{l=10} t_{l-1}^2\,\Delta t_l = 2{,}185$$

V približnom výraze (8.1) sme v každom intervale vzali hodnotu funkcie $v(t)$ na začiatku intervalu v bode t_{l-1}. Druhý približný výraz sme dostali, ak sme brali v každom intervale hodnotu funkcie na konci intervalu

$$S(n, k) \approx \sum_{l=1}^{l=m} v(t_l)\,\Delta t_l \tag{8.2}$$

v takomto prípade súčet pre $m = 10$ sa rovnal 2,485.

Pod *určitým integrálom* funkcie $v(t)$ s hranicami od n do k rozumieme limitu, ku ktorej sa blížia integrálne súčty (8.1) a (8.2), ak sa veľkosť intervalov Δt blíži k nule.

Integrál sa zapisuje v tvare[1])

$$S(n, k) = \int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.3}$$

Znak $\int$ (integrál) pochádza z latinského písmena S (prvé písmeno slova „summa"), vznikol pretiahnutím tohto písmena.

Znak $\mathrm{d}t$ na rozdiel od Δt znamená, že na získanie presnej hodnoty integrálu je nevyhnutné prejsť k limite, keď všetky prírastky Δt sa blížia k nule. Vzťahy (8.1) a (8.2) s konečnými hodnotami Δt dajú len približné hodnoty integrálu. V čl. 2, v ktorom sme vyšetrovali derivácie, sme tiež nahrádzali konečné prírastky Δs a Δt diferenciálmi $\mathrm{d}s$ a $\mathrm{d}t$.

Keď prírastky Δt sú čoraz menšie a menšie, potom je jedno, či sa berie hodnota funkcie v na začiatku, alebo na konci, alebo v ľubovoľnom bode vnútri čiastočného intervalu $\langle t_{l-1}, t_l \rangle$, t. j. jedno je, či vychádzame z (8.1), (8.2), ale vo vzťahu (8.3) budeme pokladať $v(t)$ za hodnotu funkcie v intervale $\mathrm{d}t$.

---

1) Číta sa: „es (závisí od en, ká) sa rovná integrálu od en do ká z vé té, dé té".

Ďalšia odlišnosť integrálu (8.3) od súčtov (8.1) a (8.2), ktoré dajú približnú hodnotu integrálu, je v tom, že pri zmenšovaní veličiny Δt a pri zväčšovaní počtu malých intervalov ich nečíslujeme. Preto v určitom integrále sa značia len hranice premennej t od n do k.

Veličina n sa píše dolu a nazýva sa dolnou hranicou integrálu, veličina k stojí na hornom konci znaku integrálu a nazýva sa horná hranica integrálu. Interval, v ktorom sa t mení od n do k, nazýva sa interval integrácie. Funkciu $v(t)$ v integrále nazývame „integrandom" a t — „integračnou premennou".

Teda *určitý integrál* sa definuje ako limita súčtu súčinov, pozostávajúcich z hodnôt funkcie a z rozdielov hodnôt argumentov, ak sa všetky tieto rozdiely blížia k nule

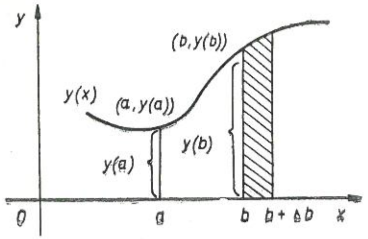
$$\lim_{\Delta t_l \to 0} \sum_{l=1}^{l=m} v(t_l)\,\Delta t_l = \lim_{\Delta t_l \to 0} \sum_{l=1}^{l=m} v(t_{l-1})\,\Delta t_l = \int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.4}$$

Hoci prvý a druhý súčet v rovnosti (8.4) pri konečnom počte malých intervalov sa nerovná, ich limity sú pri neohraničenom zmenšovaní všetkých intervalov Δt rovnaké.

Ak sa Δt blíži k nule, každý samostatný sčítanec sa blíži k nule, no počet členov súčtu vzrastá do nekonečna. Celkový súčet se blíži k presne stanovenej limite, ktorá je riešením úlohy a nazýva sa „integrál". Táto limita, t. j. určitý integrál funkcie, sa rovná dráhe, ktorú teleso prešlo, ak za funkciu berieme okamžitú rýchlosť.

Samozrejme, že každý súčet veľkého počtu m malých sčítancov sa neblíži k určitej limite pri $m \to \infty$. Vysvetlíme, prečo v našom prípade takáto limita existuje. Rozdelíme úsečku dĺžky $k - n$ na m rovnakých intervalov. Dĺžka každého intervalu je $\Delta t_i = (k - n)/m$. Ak pre jednoduchosť vezmeme konštantnú rýchlosť v, dostaneme súčet m sčítancov, z ktorých každý sa rovná $v\,\Delta t = \dfrac{v(k - n)}{m}$. Celý súčet (t. j. prejdená dráha) sa rovná $m\,v\,\Delta t = m\,v(k - n)/m = v(k - n)$, teda nezávisí od m. Tu je veľmi dôležité, že každý samostatný sčítanec sa zmenšuje v takom istom pomere (pomer $1/m$), v akom rastie počet sčítancov m. Je jasné, že ani v prípade premennej rýchlosti výsledok nebude závisieť od m pri veľmi veľkom počte m malých úsečiek $\Delta t = (k - n)/m$. Ak sa chceme o tom presvedčiť, musíme vypracovať cvičenia, ktoré sú pri tomto článku.

Nakoľko integračná premenná môže nadobúdať hodnoty n aj k, je zrejmé, že hranice integrálu majú rozmer a ich rozmer sa rovná rozmeru integračnej premennej (v príklade dráha — rýchlosť majú hranice integrálu rozmer času). Rozmer integrálu dostaneme zo vzťahu (8.1). Rozmer súčtu sa rovná rozmeru jednotlivých sčítancov.



Obr. 17

Jednotlivé sčítance súčtu (8.1) majú rozmer, ktorý sa rovná súčinu rozmeru integračnej premennej a rozmeru integrandu. V príklade dráha — rýchlosť je rozmer integrálu s m/s = m.

Určitý integrál závisí od hodnôt funkcie, ktorá stojí pod znakom integrálu len vnútri intervalu integrácie. Hodnoty funkcie mimo intervalu integrácie nemajú vplyv na hodnotu integrálu. Objasníme si to na príklade dráha — rýchlosť. Dráha závisí od rýchlosti $v(t)$, ale len od jej hodnoty vnútri intervalu integrácie. Prejdená dráha $s(n, k)$ vôbec nezávisí od toho, aká bola rýchlosť do momentu $t = n$, od ktorého sme začali pohyb skúmať a akú hodnotu nadobudla po momente $t = k$.

V čl. 7 sme konštatovali, že dráhu možno určiť ako obsah obrazca na grafe, ktorý určuje závislosť rýchlosti od času. Výpočet *obsahu obrazca* ohraničeného zhora krivkou, ktorá má rovnicu $y(x)$, zdola súradnicovou osou x, zo strán priamkami $x = a$ a $x = b$ (*obr. 17*), nie je nič iné ako výpočet integrálu

$$S = \int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x$$

Pre objasnenie sa vráťte k *obr. 12* a *13*. Predstavme si, že na os y sa nanášajú hodnoty ľubovoľnej funkcie $y(x)$, na os x nezávisle premenná x, pričom $y(x)$ nemá nijakú súvislosť s pohybom a rýchlosťou. Namiesto n a k budeme dosadzovať a a b. Súčet obsahov obdĺžnikov vyšrafovaných na *obr. 12* sa rovná $\sum_{l=1}^{l=m} y(a_{l-1})\,\Delta x_l$ a na *obr. 13* sa tento súčet rovná $\sum_{l=1}^{l=m} y(x_l)\,\Delta x_l$. V limite, ak $\Delta x_l \to 0$, tieto súčty sa rovnajú integrálu a súčet obsahov obdĺžnikov sa blíži k obsahu obrazca ohraničeného krivkou

$y(x)$, pretože čím sú Δx_l menšie, tým bližšie je ku krivke schodíkovitá čiara ohraničujúca obdĺžniky.

Na záver uvedieme, že určitý integrál závisí od integrandu a od hraníc integrálu, ale nezávisí od označenia integračnej premennej. Nech je daný napr. integrand

$$v(t) = 3t^2 + 5$$

Ak dosadíme hodnotu $t = x$, dostaneme:

$$v(x) = 3x^2 + 5$$

Pri výpočte integrálu nie je dôležité, ako sa nazýva integračná premenná, ale je dôležité, v akých hraniciach sa mení a aké sú pritom hodnoty funkcie. Preto

$$S(n, k) = \int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^k v(x)\,\mathrm{d}x$$

Integračnú premennú možno označiť ľubovoľne.

Premennú, ktorú konečný výsledok neobsahuje, nazývame podobne ako integračnú premennú zamlčanou premennou. Ak nahradíme integračnú premennú pod ľubovoľným integrálom iným písmenom, správnosť vzťahov nenarušíme. Obyčajnú, nezamlčanú premennú možno nahradiť iným písmenom iba vtedy, keď ju zameníme vo všetkých častiach vzťahu: napr. vo vzťahu $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ nemožno písať $(t + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, ale v integrále možno písať:

$$\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^k v(x)\,\mathrm{d}x$$

Cvičenia

1. Rozoberte prípad $v = at + b$ (rovnomerne zrýchlený pohyb). Nájdite dráhu za čas od n do k, ak rozdelíte časový interval na m rovnakých častí; využite to, že sčítance súčtu tvoria aritmetickú postupnosť. Nájdite limitu súčtu pri $m \to \infty$. Porovnajte získaný výraz s obsahom lichobežníka v rovine v, t, ktorý sa rovná prejdenej dráhe.

2. Rozoberte prípad $v = t^2$ a nájdite dráhu za čas od $t = 1$ s do $t = 2$ s, t. j. nájdite integrál

$$\int_1^2 t^2\,\mathrm{d}t$$

Interval od 1 do 2 rozdeľte na m rovnakých častí a vypočítajte súčet $\Sigma\, t_{i-1}^2 \frac{1}{m}$ alebo $\Sigma\, t_i^2 \frac{1}{m}$. Obidva súčty porovnajte.

9. VZŤAH MEDZI INTEGRÁLOM A DERIVÁCIOU (NEWTONOVA—LEIBNIZOVA VETA)

V predchádzajúcich článkoch sme rozoberali pojmy derivácie a integrálu samostatne. Implicitne tieto pojmy používali matematici ešte pred Newtonom a Leibnizom. Veľkou zásluhou obidvoch matematikov však bolo, že určili vzťah medzi týmito pojmami, čo viedlo v nasledujúcich rokoch a desaťročiach k veľmi búrlivému rozvoju matematiky. V tomto článku nájdeme tento vzťah pre prípad dráha—rýchlosť.

Pokladajme okamžitú rýchlosť $v(t)$ za danú a známu funkciu, ktorá závisí od času. Čas $t_1 = n$. Začiatok dráhy budeme pokladať za pevný. Uvažujme dráhu, ktorú teleso prešlo za čas od $t_1 = n$ do $t_2 = k$, ako funkciu času k, na konci dráhy. Vieme, že

$$s(k, n) = s(k) - s(n)$$

Derivujme ľavú i pravú stranu. Keďže n berieme ako konštantu, potom aj funkcia $s(n)$ je konštantná. Dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}s(k, n)}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}s(k)}{\mathrm{d}k}$$

Vieme však, že derivácia dráhy podľa času nie je nič iné, ako okamžitá rýchlosť telesa

$$\frac{\mathrm{d}s(k)}{\mathrm{d}k} = v(k)$$

to znamená, že

$$\frac{\mathrm{d}s(n, k)}{\mathrm{d}k} = v(k)$$

Dosaďme za $s(n, k)$ výraz v tvare integrálu. Dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t\right) = v(k) \tag{9.1}$$

Táto rovnosť predstavuje dôležitú všeobecnú vlastnosť určitého integrálu. Rovnosť v tomto tvare je všeobecná matematická veta; jej správnosť nezávisí od toho, či $v(t)$ je rýchlosť (a integrál dráha) alebo iná ľubovoľná funkcia. Pre ľubovoľnú funkciu[1]) napríklad $y(x)$ máme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x\right) = y(b) \tag{9.2}$$

Veta: *Derivácia určitého integrálu podľa jeho hornej hranice sa rovná hodnote integrandu, ak sa za premennú dosadí horná hranica.*

Keďže je táto veta dôležitá, odvodíme ju aj iným spôsobom, ktorý je založený na skúmaní obsahov. Deriváciu budeme počítať podľa všeobecného pravidla, ako limitu pomeru prírastku funkcie k prírastku nezávisle premennej. Vezmime funkciu

$$I(a, b) = \int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x$$

tento integrál určuje obsah obrazca, ktorý je ohraničený zhora krivkou $y(x)$, zdola osou x, zľava zvislou priamkou $x = a$ a sprava zvislou priamkou $x = b$ (*obr. 17*).

Ako nájdeme prírastok integrálu? Podľa všeobecných pravidiel $\Delta I = I(a, b + \Delta b) - I(a, b)$. Obrazec, ktorého obsah sa rovná integrálu $I(a, b + \Delta b)$, sa líši od obrazca, ktorého obsah je $I(a, b)$ tým, že pravá zvislá priamka sa posunula o b doprava (pozri *obr. 17*).

To znamená, že prírastok ΔI sa rovná rozdielu dvoch obsahov: obsahu obrazca od a do $b + \Delta b$ a obsahu od a do b. ΔI je obsah vyšrafovaného prúžku na *obr. 17*. Základňou tohto prúžku na osi x je úsečka s dĺžkou b. Hľadaná derivácia sa rovná limite

$$\frac{\mathrm{d}I(a, b)}{\mathrm{d}b} = \lim_{\Delta b \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta b}$$

---

[1]) Uvedené tvrdenie, ako i nasledujúca veta platí iba pre spojité funkcie v bode b. Pozn. prekl.

Je zrejmé, že ak sa blíži Δb k nule, obsah prúžku sa približuje k $y(b) \, . \, \Delta b$ a vzťah $\frac{\Delta I}{\Delta b}$ k veličine $y(b)$. Takýmto spôsobom sme znova názorne dokázali, že platí veta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \left(\int_a^b y(x) \, \mathrm{d}x \right) = y(b) \tag{9.2}$$

Určitý integrál danej funkcie $y(x)$ alebo $v(t)$ je funkcia hraníc a, b alebo n, k.

Definícia integrálu ako limity súčtu, ktorú sme definovali v predchádzajúcom článku, nám objasňuje, akú úlohu hrá pojem integrálu pri riešení fyzikálnych úloh: pri výpočte dráhy, ak je rýchlosť $v(t)$ premenná, pri určení obsahu obrazca ohraničeného krivkou s rovnicou $y = y(x)$. Táto definícia nám však nedáva vhodný všeobecný spôsob výpočtu integrálu[1]) v tvare vzorca, ako funkcii hraníc integrálu.

Spôsob, pomocou ktorého nájdeme tento vzťah, vyplýva z vyššie dokázanej vety o derivácii integrálu. Okrem tejto vlastnosti sa využíva ešte druhá vlastnosť určitého integrálu: určitý integrál sa rovná nule, ak horná hranica sa rovná dolnej hranici:

$$s(n, k = n) = \int_n^k v(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

Táto vlastnosť je úplne jasná: dráha sa rovná nule, ak sa čas rovná $k - n = n - n = 0$.

Samotný vzťah, ktorý dáva hodnotu integrálu ako funkciu hraníc integrálu, odvodíme v čl. 12.

10. INTEGRÁL DERIVÁCIE

Nech integrand funkcie $v(t)$ se rovná derivácii známej funkcie $f(t)$,

$$v(t) = f'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{10.1}$$

---

[1]) Len v zriedkavých prípadoch a s ťažkosťami sa podarí vykonať súčet ľubovoľného počtu malých sčítancov.

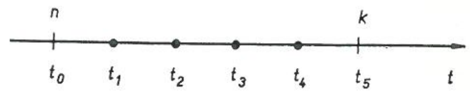
V tomto prípade možno nájsť presnú hodnotu integrálu nasledujúcim spôsobom: Pripomeňme si približný výraz pre prírastok funkcie f (čl. 4)

$$\Delta f \approx f'(t) \, \Delta t = v(t) \, \Delta t \tag{10.2}$$

Súčin, ktorý je na pravej strane rovnosti, je práve jeden z tých sčítancov, ktorých súčet tvorí integrál. To znamená, že môžeme približne napísať:

$$\Delta f = f(t_{l+1}) - f(t_l) \approx v(t_{l+1}) \, (t_{l+1} - t_l) \approx v(t_l) \, (t_{l+1} - t_l) \tag{10.3}$$

Ako sme už skôr hovorili, rovnosť (10.2) je približná a je tým presnejšia, čím menší je prírastok Δt, t. j. čím je menší rozdiel $t_{l+1} - t_l$. Pri zmenšení rozdielu $t_{l+1} - t_l$, t. j. pri veľmi blízkych hodnotách t_{l+1} a t_l, zmenšuje sa i rozdiel medzi $v(t_{l+1})$ a $v(t_l)$. Na pravej strane vzťahu (10.3) možno teda oprávnene položiť $v(t_{l+1})$ a $v(t_l)$, ako sme to už skôr urobili, a výsledok bude rovnako presný.



Obr. 18

Napíšeme vzťahy tvaru (10.3) pre všetky čiastočné intervaly, na ktoré je interval $\langle n, k \rangle$ rozdelený. Nech je napr. interval rozdelený na 5 častí (*obr. 18*) tak, že $t_0 = n$ a $t_5 = k$. Napíšeme všetkých päť rovností

$$\begin{aligned}
f(t_1) - f(t_0) &\approx v(t_1) \, (t_1 - t_0) \approx v(t_0) \, (t_1 - t_0) \\
f(t_2) - f(t_1) &\approx v(t_2) \, (t_2 - t_1) \approx v(t_1) \, (t_2 - t_1) \\
f(t_3) - f(t_2) &\approx v(t_3) \, (t_3 - t_2) \approx v(t_2) \, (t_3 - t_2) \\
f(t_4) - f(t_3) &\approx v(t_4) \, (t_4 - t_3) \approx v(t_3) \, (t_4 - t_3) \\
f(t_5) - f(t_4) &\approx v(t_5) \, (t_5 - t_4) \approx v(t_4) \, (t_5 - t_4)
\end{aligned}$$

a sčítame ich. Na ľavej stranes a zjednodušia všetky hodnoty funkcie f pre hodnoty t z intervalu a zostane:

$$f(t_5) - f(t_0) = f(k) - f(n)$$

Na pravej strane dostávame také súčty, pomocou ktorých sme približne vyjadrovali integrál v predchádzajúcom článku. Znamenali dráhu $s(n, k)$ pri danej rýchlosti $v(t)$. A tak

$$f(k) - f(n) \approx \Sigma \, v(t_{l+1}) \, (t_{l+1} - t_l) \approx \Sigma \, v(t_l) \, (t_{l+1} - t_l) \approx$$
$$\approx s(n, k) = \int_n^k v(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{pri} \qquad v(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

Čím je menší každý prírastok Δt, t. j. veličina $t_{l+1} - t_l$, tým je presnejší výraz (10.3) pre prírastok funkcie f. Ak sa zmenšuje rozdiel $t_{l+1} - t_l$, súčty sa blížia k integrálu. Preto platí rovnosť

$$f(k) - f(n) = \int_n^k v(t)\, dt, \qquad v(t) = \frac{df}{dt} \tag{10.4}$$

Vzťah (10.4) udáva závislosť integrálu a derivácie. Z tohto vzťahu vyplýva, že ak sa podarilo nájsť takú funkciu f, ktorej derivácia sa rovná integrandu v, tak úloha výpočtu integrálu je rozriešená — ostáva vypočítať hodnoty $f(k)$ a $f(n)$ a nájsť rozdiel $f(k) - f(n)$.

Pretože vzťah je dôležitý, v nasledujúcich článkoch podáme aj jeho iné odvodenie na základe oveľa podrobnejšieho skúmania vlastností integrálu a funkcie f. (Pozri koniec čl. 9.)

11. NEURČITÝ INTEGRÁL

V predchádzajúcich článkoch sme zaviedli pojem určitého integrálu ako limitu súčtu veľkého počtu malých sčítancov. V čl. 9 sme vysvetlili základnú vlastnosť určitého integrálu: derivácia určitého integrálu podľa hornej hranice sa rovná integrandu funkcie

$$s(n, k) = \int_n^k v(t)\, dt, \qquad \frac{ds(n, k)}{dk} = v(k) \tag{11.1}$$

Túto vlastnosť chceme využiť na výpočet určitého integrálu.

Budeme hľadať funkciu premennej k, ktorej derivácia je daná funkcia $v(k)$. Označme túto funkciu $f(k)$. To znamená, že

$$\frac{df(k)}{dk} = v(k) \tag{11.2}$$

Rovnica (11.2) neúplne určuje funkciu $f(k)$. Vieme, že ak pridáme k funkcii $f(k)$ ľubovoľnú konštantu, derivácia funkcie sa nezmení. Teda ak $f(k)$ vyhovuje rovnici (11.2), tak i funkcia $g(k) = f(k) + C$ vyhovuje tej istej rovnici.

Funkciu $f(k)$, vyhovujúcu rovnici (11.2), nazývame „primitívnou funkciou" a množina všetkých primitívnych funkcií tvorí *neurčitý integrál*. Tento názov je odvodený z dvoch vlastností funkcie $f(k)$. Derivácia $f(k)$

je taká istá, ako pri určitom integráli $s(n, k)$[1]), preto sa $f(k)$ nazýva integrálom. K funkcii $f(k)$, ktorá vyhovuje (11.2), môžeme pridať ľubovoľnú konštantu — odtiaľto názov „neurčitý".

Termín primitívna funkcia sa používa vtedy, keď úlohu hľadania funkcie, ak poznáme jej deriváciu, t. j. neurčitý integrál, riešime skôr, ako sa oboznámime s určitými integrálmi. V našich úvahách nebudeme tento termín používať.

Ľubovoľné riešenie (11.2) sa môže odlišovať od akéhokoľvek iného riešenia $f(k)$ len tou alebo inou konštantou. Ak druhé riešenie (11.2) označíme $g(k)$, potom pre ich rozdiel dostaneme:

$$\frac{d}{dk}[f(k) - g(k)] = v(k) - v(k) = 0$$

Ale iba derivácia konštanty sa rovná nule pre každú hodnotu argumentu.

Aj určitý integrál $s(n, k)$ [2]) je jedným z riešení (11.2). To znamená, že $s(n, k)$ možno písať v tvare

$$s(n, k) = f(k) + B \tag{11.3}$$

kde $f(k)$ je ľubovoľné riešenie (11.2), B je konštanta a treba ju len určiť. Využijeme preto druhú vlastnosť určitého integrálu. Integrál sa rovná nule, ak dolná a horná hranica sú súhlasné

$$s(n, k = n) = s(n, n) = 0 \tag{11.4}$$

Ak dosadíme $k = n$ do (11.3) a použijeme (11.4), dostaneme:

$$0 = f(n) + B, \qquad B = -f(n)$$

Odtiaľ nakoniec vyplýva:

$$s(n, k) = f(k) - f(n) \tag{11.5}$$

Vidíme, že „neurčitosť" funkcie $f(k)$ vôbec nebráni vypočítať s jej pomocou určitý integrál podľa vzťahu (11.5). Vezmime totiž namiesto $f(k)$ ľubovoľné iné riešenie rovnice (11.2), napr. $g(k)$, ktoré sa líši od $f(k)$ len konštantou

$$g(k) = f(k) + C$$

---

[1]) Porovnajte vzťahy (11.1) a (11.2).

[2]) Určitý integrál ako funkcia hornej hranice. Pozn. prekl.

Budeme počítať určitý integrál podľa vzťahu (11.5), len namiesto vezmeme g.

$$s(n, k) = g(k) - g(n) = f(k) + C - [f(n) + C] = f(k) - f(n)$$

Dostali sme výsledok súhlasný s (11.5).

Je vhodné označiť neurčitý integrál tým istým písmenom s, ktorým označujeme určitý integrál.

Ak je integrand $v(t)$ daný, určitý integrál závisí od hornej a dolnej hranice, t. j. je funkciou dvoch premenných $s(n, k)$. Neurčitý integrál je funkcia jednej premennej. Označíme ju t. Potom neurčitý integrál $s(t)$ je funkcia, ktorá vyhovuje vzťahu

$$s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} = v(t) \tag{11.6}$$

Pomocou tejto funkcie určitý integrál $s(n, k)$ funkcie $v(t)$ sa nájde podľa vzťahu

$$s(n, k) = \int_n^k v(t)\,dt = s(k) - s(n) \tag{11.7}$$

Zavedieme nasledujúci krátky zápis rozdielu hodnôt tej istej funkcie pri dvoch rozličných hodnotách premennej

$$[s(t)]_n^k = s(k) - s(n) \tag{11.8}$$

V tomto zápise je na ľavej strane funkcia zamlčanej premennej t, ktorú píšeme do hranatej zátvorky. Vpravo, na hornej strane zátvorky sa píše tá hodnota premennej, ktorej funkčnú hodnotu berieme s kladným znamienkom, na dolnej strane sa píše hodnota premennej, ktorej funkčná hodnota sa berie so záporným znamienkom.

Ak dosadíme do integrálu v (11.7) za funkciu $v(t)$ jej vyjadrenie pomocou $s(t)$ podľa vzťahu (11.6) a na pravú stranu napíšeme výraz (11.8), dostaneme:

$$\int_n^k s'(t)\,dt = [s(t)]_n^k \tag{11.9}$$

Vzťah si zapamätáme bez ťažkostí, pretože n i k sú vľavo i vpravo rovnako umiestnené.

Príklad:

Preskúmajme úlohu o dráhe, ktorú teleso prejde od n do k, ak rýchlosť pohybu $v(t) = t^2$. Dráha sa rovná určitému integrálu

$$s(n, k) = \int_n^k t^2\,dt$$

V tejto úlohe neurčitý integrál $s(t)$ dostaneme riešením rovnice

$$\frac{ds(t)}{ds} = v(t) = t^2$$

Vieme, že $\dfrac{d(t^3)}{dt} = 3t^2$, čiže $\dfrac{d\left(\dfrac{t^3}{3}\right)}{dt} = \dfrac{1}{3}(3t^2) = t^2$.

To znamená, že rovnici vyhovuje riešenie

$$s(t) = \frac{t^3}{3}$$

Dosadíme toto riešenie do vzťahu (11.9) a dostaneme:

$$\int_n^k t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_n^k = \frac{k^3}{3} - \frac{n^3}{3}$$

V osobitnom prípade pre $n = 1$ a $k = 2$

$$\int_1^2 t^2\,dt = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}333\ldots$$

Takto sme pomocou neurčitého integrálu na niekoľkých riadkoch dostali presný výsledok, ktorý sme ťažko získali v čl. 9 pomocou numerických výpočtov.

Určitý integrál je limita súčtu tvaru

$$v(t_0)\,(t_1 - t_0) + v(t_1)\,(t_2 - t_1) + \ldots$$

ak sa každý sčítanec blíži k nule a tomu zodpovedá patričné zväčšenie počtu sčítancov. Pre približný výpočet určitého integrálu treba oblasť integrácie rozdeliť na niekoľko intervalov, nájsť približné hodnoty dráhy v každom intervale Δt a sčítať ich. Aby sme dostali väčšiu presnosť, musíme urobiť mnoho aritmetických operácií. No ak poznáme neurčitý integrál $s(t)$, t. j. známa funkcia, ktorej derivácia sa rovná integrandu $v(t)$, ľubovoľný určitý integrál $\int_n^k v(t)\,dt$ dostaneme okamžite podľa vzorca (11.9).

Hľadanie funkcií (neurčitých integrálov), ktorých deriváciu poznáme, dáva „nečakane" spoľahlivý spôsob výpočtu súčtov, t. j. určitých integrálov.

Neurčitý integrál možno vždy vyjadriť pomocou určitého integrálu:

$$s(t) = C + \int_a^t v(x)\,\mathrm{d}x\ ^{1)} \tag{11.10}$$

Ak použijeme pravidlo o derivácii určitého integrálu podľa hornej hranice, ľahko zistíme, že funkcia $s(t)$ je daná vzťahom (11.10). Toto tvrdenie vyhovuje rovnici (11.6) pri ľubovoľných konštantách C a a.

Vo všetkých úlohách bude vo výsledku rozdiel hodnôt $s(k) - s(n)$, ktorý nezávisí od C i a. Preto (11.10) možno písať kratšie v tvare

$$s(t) = \int^t v(x)\,\mathrm{d}x$$

alebo často ešte kratšie:

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t \tag{11.11}$$

Tento spôsob sa veľmi často používa, aj my sa ním budeme zaoberať. Musíme mať však na mysli, že je v podstate nesprávny. Možno ho porovnať s tými nesprávnymi gramatickými výrazmi, ktoré sa často používajú v hovorovej reči, a všetkým, okrem detí a pedantov, sú pochopiteľné, ako napr. „jedenie z taniera". V zápise (11.11) je porušené pravidlo, podľa ktorého výsledok nemá obsahovať integračnú premennú. Ak teda využívame skrátený zápis (11.11), treba si vždy pamätať, že to je len dohodnuté skrátenie presného výrazu (11.10).

Zo známych vzťahov pre deriváciu možno utvoriť nasledujúcu tabuľku neurčitých integrálov:

$$\int \mathrm{d}t = t$$

$$\int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}$$

$$\int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\ ^{2)}$$

---

1) Uvedené tvrdenie platí iba pre spojité funkcie. Pozn. prekl.

2) Pozri cvičenie **6** z čl. 3.

Aby sme sa presvedčili o správnosti ľubovoľného z týchto vzťahov, musíme nájsť deriváciu pravej strany. Ak pritom dostaneme funkciu, ktorá stojí za znakom integrálu — integrand, je vzťah správny. Spôsoby výpočtu neurčitých integrálov sú podrobne (pre rôzne funkcie) vysvetlené v kapitole II. Vďaka vzťahu medzi integrálom a deriváciou môžeme nájsť integrály veľkého počtu funkcií.

Integrovať sa zdá technicky zložitejšie ako derivovať. Táto zložitosť sa prejavuje najmä v tom, že pri integrovaní racionálnych algebraických výrazov sa objavujú vo výsledkoch logaritmy a cyklometrické funkcie. Pri integrovaní iracionálnych funkcií sa niekedy výsledok vyjadruje pomocou nových, neelementárnych funkcií, ktoré nemožno vyjadriť konečným počtom operácií s algebraickými, mocninovými a trigonometrickými funkciami.

Avšak ťažkosti vyjadrenia integrálov pomocou hodnôt elementárnych funkcií nemôžu urobiť pojem integrálu zložitejším. Ak nemožno (alebo len veľmi ťažko) počítať integrál pomocou vzťahu (11.9), ešte vždy ho možno vypočítať približne, ťažkými, no v podstate celkom jednoduchými výpočtami.

Cvičenia

Vypočítajte:

1. $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$.

2. $\int_1^{1,1} t^2\,\mathrm{d}t$.

3. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

4. $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

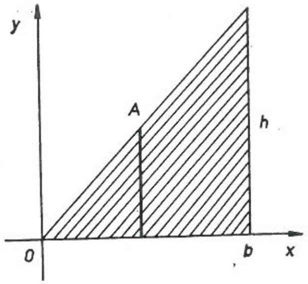
5. Nájdite obsah pravouhlého trojuholníka so základňou b a výškou h pomocou integrálu. Vrchol ostrého uhla položte do počiatku súradnicového systému. Vrchol pravého uhla nech má súradnice $x = b$, $y = 0$ (*obr. 19*). Vyjadrite rovnicu prepony v tomto súradnicovom systéme a nájdite obsah trojuholníka ako určitý integrál. Použite pri integrovaní vzťah

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$$

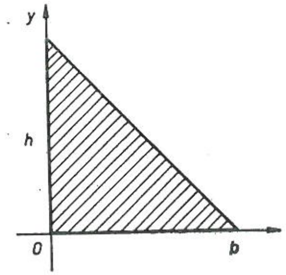
Poznámka: Nepozastavte sa nad tým, že nakoniec s ťažkosťami nájdete dobre známu odpoveď $S = \frac{1}{2} bh$. Integračnú metódu budeme používať len tam, kde elementárne metódy nestačia.

6. Nájdite obsah toho istého trojuholníka, ako v predchádzajúcej úlohe, ak položíte pravý uhol do počiatku súradnicového systému a ostrý uhol do bodu, ktorého súradnice sú $x = b$, $y = 0$ (*obr. 20*). Pri integrovaní použite zrejmú vlastnosť určitého integrálu zo súčtu dvoch funkcií $\int (f + g)\, dx = \int f\, dx + \int g\, dx$, ktorá platí pre ľubovoľné funkcie f, g (konštantné, kladné aj záporné) premennej x.

Poznámka: To isté ako v cvičení **5**.



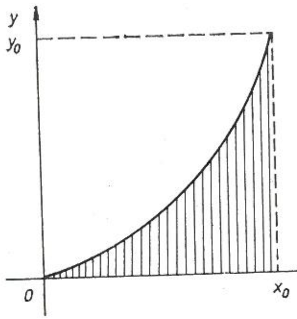
Obr. 19



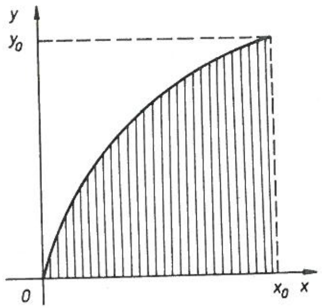
Obr. 20

7. Nájdite obsah obrazca ohraničeného zvislou priamkou $x — x_0$, osou x a parabolou $y = Ax^2$, ktorá ide bodom $x — x_0$, $y — y_0$. Vyjadrite obsah pomocou x_0, y_0 (*obr. 21*).

8. To isté urobte pre parabolu, ktorá prechádza počiatkom súradnicového systému a má vodorovnú dotyčnicu v bode (x_0, y_0) (*obr. 22*).



Obr. 21



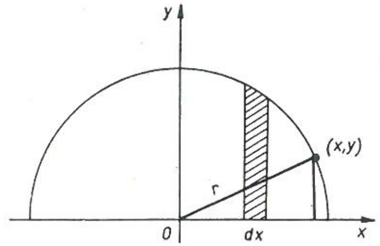
Obr. 22

Návod 1. Odpoveď môžete dostať okamžite, ak použijete výsledok z predchádzajúceho cvičenia.

Návod 2. Nezjednodušujte si vec a urobte všetko presne za sebou bez zvláštnych obratov. Rovnicu paraboly hľadajte v tvare $y = kx^2 + nx + m$. Veličiny k, n, m nájdete z podmienok, že parabola prechádza počiatkom súradnicového systému a bodom (x_0, y_0) a z podmienky, že dotyčnica v bode $x = x_0$, $y = y_0$ je vodorovná. Obsah obrazca vyjadrite pomocou x_0, y_0.

Návod 3. Ak sa vám bude ťažko počítať podľa návodu 1, vypočítajte úlohu najprv podľa návodu 2 a výsledok vám ukáže, ako postupovať podľa návodu 1.

9. Napíšte výraz pre obsah polkruhu polomeru r (*obr. 23*), v tvare určitého integrálu.



Obr. 23

Návod. Z obrázka vyplýva, že podľa Pythagorovej vety platí $x^2 + y^2 = r^2$, čo je súčasne aj rovnica kružnice (pozri čl. 6, kap. IV).

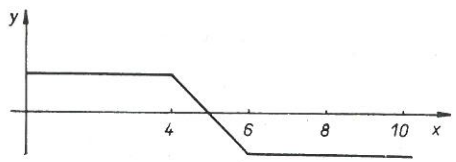
10. Vypočítajte integrál $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ lichobežníkovým pravidlom, ak vezmete $m = 5$ a $m = 10$. Výpočet urobte s presnosťou na 4 desatinné miesta.

Poznámka: Presná hodnota tohto integrálu je $\frac{\pi}{4}$. Približný výpočet integrálu dáva možnosť určiť približnú hodnotu čísla π.

11. Zostrojte graf funkcie

$$F(x) = \int_a^x y(x)\, dx$$

Funkcia $y(x)$ je daná grafom (*obr. 24*). Uvažujte prípady, keď $a = 0$, $a = 4$, $a = 8$.

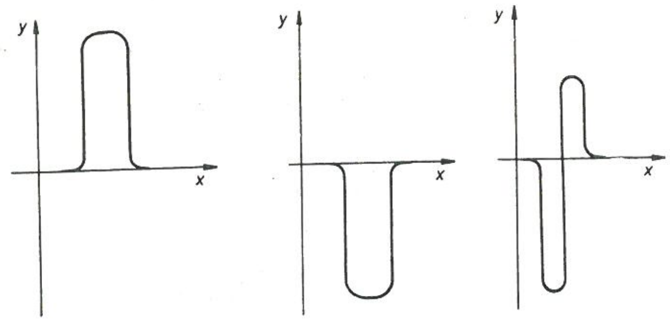


Obr. 24

12. Zostrojte graf funkcie

$$f(x) = \int_0^x y(x)\, \mathrm{d}x$$

Funkcia $y(x)$ je daná grafmi podľa *obr. 25*.



Obr. 25

13. Zostrojte krivky

$$F(x) = \int_0^x \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

kde funkcie F(x) sú dané krivkami, uvedenými vo výsledkoch k úlohám **4** a **5** z čl. 6, kap. IV. Porovnajte $F(x)$ s krivkami $y(x)$, ktoré sú nakreslené na str. 34 *obr. 8* a *9*.

12. VLASTNOSTI INTEGRÁLOV

V predchádzajúcej časti sme rozoberali najjednoduchší prípad určitého integrálu, ak integrand bola kladná funkcia a horná hranica bola väčšia ako dolná

$$s(n, k) = \int_n^k v(t)\, \mathrm{d}t, \quad v > 0, \quad k > n$$

V tomto prípade je integrál zrejme kladný, pretože sa rovná limite súčtu kladných sčítancov. Integrál má jednoduchý fyzikálny zmysel. Predstavuje dráhu, ktorú teleso prešlo, alebo, ak $v(t)$ je rýchlosť, obsah obrazca ohraničeného krivkou $v = v(t)$.

Aké je znamienko integrálu v prípade, ak je funkcia záporná, t. j. v prípade $v(t) < 0$?

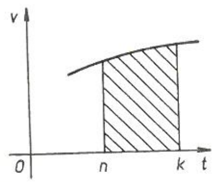
Ponechajme zatiaľ podmienku $k > n$. V integrálnom súčte, ktorý sa v limite rovná integrálu v každom sčítanci, je súčiniteľ Δt kladný, súčiniteľ $v(t)$ záporný. Každý sčítanec je potom záporný, celý súčet je záporný a napokon aj integrál bude záporný. Preto ak $v(t) < 0$ pre $n < t < k$, teda pre $k > n$ platí:

$$\int_n^k v(t)\, \mathrm{d}t < 0$$

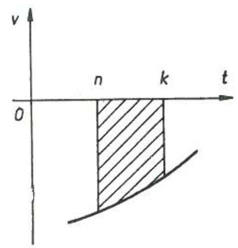
Pri pohybe je zmysel odpovede jednoduchý. Záporná hodnota funkcie $v(t)$ znamená, že pohyb sa deje v smere opačnom, ako je smer osi s, t. j. v smere, v ktorom sa súradnica s zmenšuje. Dráhu prejdenú v zápornom zmysle vždy pokladáme za zápornú. Pri takomto pohybe sa s zmenšuje, $s(k) < s(n)$. Keďže $\int_n^k v\, \mathrm{d}t$ je v tomto prípade záporný, ostáva v platnosti všeobecný vzťah

$$s(k) = s(n) + s(k, n) = s(n) + \int_n^k v\, \mathrm{d}t$$

Keď sa znamienko rýchlosti mení, môže v mimoriadnom prípade platiť, že $\int_n^k v\, \mathrm{d}t = 0$, hoci $k > n$, $k \neq n$. Toto nastane, keď v časovom intervale od n do k sa teleso pohybuje najprv v jednom a potom v opačnom smere, takže v čase k sa vráti do tej istej polohy, v ktorej sa nachádzalo v čase n.



Obr. 26

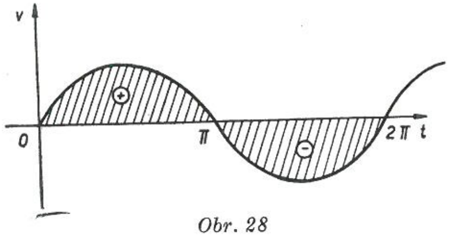


Obr. 27

Vráťme sa k úlohe o obsahu obrazca pod krivkou. Pri $k > n$ a $v(t) > 0$ sa integrál rovná obsahu obrazca ohraničeného krivkou $v(t)$, osou t a zvislými priamkami $t = n$, $t = k$ (*obr. 26*). Pre $v < 0$, $k > n$ je $\int_n^k v\, \mathrm{d}t < 0$. V tomto prípade krivka leží pod osou úsečiek (*obr. 27*).

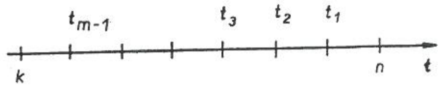
Aby sa teda zachovala platnosť pravidla, podľa ktorého obsah obrazca sa rovná integrálu, treba pokladať obsah obrazca za záporný, krivka leží pod osou x[1]).

Ak vezmeme funkciu, ktorá striedavo mení znamienka, napr. $v(t) = \sin t$, tak obsah obrazca, ktorý je ohraničený touto krivkou na úseku od $t = 0$ do $t = 2\pi$, sa podľa našej definície rovná nule (*obr. 28*). To znamená, že obsah, ktorý ohraničuje prvá polvlna a ktorý pokladáme za kladný, sa presne ruší so záporným obsahom druhej polvlny.



Obr. 28

Ak je daná úloha: koľko farby potrebujeme, aby sme zafarbili vyšrafované miesta na *obr. 28*, tak na tento prípad je predošlá definícia obsahu nevhodná. Potom treba celý interval rozdeliť na časti, v ktorých funkcia v znamienko nemení. Musíme ho rozdeliť na dve časti, a to od 0 do π a od π do 2π. Potom treba vypočítať integrál každej časti samostatne a sčítať absolútne hodnoty integrálov, ktoré patria k jednotlivým častiam.



Obr. 29

Určitý integrál zovšeobecníme aj pre prípad, keď horná hranica je menšia ako dolná. Nebudeme už hovoriť o dráhe, čase a rýchlosti (čl. 7), ale sa vrátime k definícii integrálu pomocou integrálnych súčtov (čl. 8). Interval znova rozdelíme od n do k (*obr. 29*) číslami $t_1, t_3, \ldots, t_{m-1}$ na čiastočné intervaly. Všetky Δt sú teraz záporné. Ľahko sa presvedčíme, že integrál

$$\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_k^n v(t)\,\mathrm{d}t \tag{12.1}$$

---

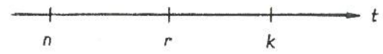
[1]) V geometrii je obsah číslo nezáporné (kladné, alebo rovnajúce sa nule), preto pre uvažovaný obsah P platí:

$$P = \left|\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Pozn. prekl.

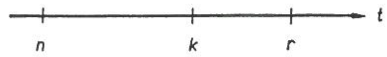
to znamená, že pri ľubovoľnom rozdelení intervalu $\langle n, k\rangle$ budú sa zodpovedajúce súčty odlišovať znamienkami všetkých Δt vo všetkých sčítancoch.

Základná vlastnosť integrálu spočíva v tom, že integračnú oblasť možno rozdeliť na časti. Dráhu, ktorú prejde teleso za čas od n (začiatok) do k (koniec), možno si predstaviť ako súčet dráhy, ktorú teleso prešlo od n do r a od r do k (*obr. 30*)



Obr. 30

$$\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^r v(t)\,\mathrm{d}t + \int_r^k v(t)\,\mathrm{d}t \tag{12.2}$$



Obr. 31

Pomocou vzťahu (12.1) môžeme rozšíriť vzťah (12.2) aj na prípad, keď r neleží vnútri intervalu $\langle m, k\rangle$.

Nech $n < k < r$ (*obr. 31*). Vtedy zrejme platí, že

$$\int_n^r v(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t + \int_k^r v(t)\,\mathrm{d}t \tag{12.3}$$

Posledný sčítanec prenesieme na ľavú stranu, použijeme (12.1) a dostaneme:

$$\int_n^r v\,\mathrm{d}t - \int_k^r v\,\mathrm{d}t = \int_n^r v(t)\,\mathrm{d}t + \int_r^k v(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^k v\,\mathrm{d}t \tag{12.4}$$

Takýmto spôsobom sme dostali rovnosť (12.4), ktorá súhlasí so vzťahom (12.2).

Analogicky by sme mohli pokračovať aj pri inom rozložení čísiel n, r, k (je šesť rozložení). Čitateľ sa aj sám ľahko môže presvedčiť, že vzťah (12.2) je správny pre všetky tieto prípady, t. j. nezávisí od vzájomného rozloženia čísiel n, r, k.

Všetky tieto vlastnosti určitých integrálov sme odvodili na základe definície integrálu ako limity súčtu.

Tieto vlastnosti vyplývajú aj z vyjadrenia určitého integrálu pomocou neurčitého. Totiž, nech pre neurčitý integrál platí:

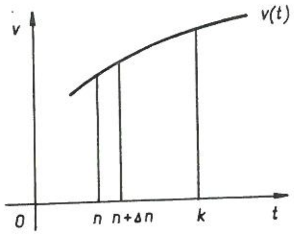
$$\int v(t)\,\mathrm{d}t = s(t)$$

Vtedy

$$\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t = s(k) - s(n)$$

$$\int_k^n v(t)\,\mathrm{d}t = s(n) - s(k) = -\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t$$

Základná vlastnosť integrálu, že derivácia integrálu sa rovná integrovanej funkcii, vzťahuje sa na deriváciu podľa hornej hranice.



Obr. 32

Ak budeme určitý integrál skúmať ako funkciu jeho dolnej hranice, pričom horná hranica sa rovná konštante, dostaneme výsledok s opačným znamienkom

$$\frac{\mathrm{d}s(n, k)}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t\right) = -v(n) \quad (12.5)$$

Znamienko mínus v tomto vzťahu ľahko pochopíme, ak vyšetrujeme integrál ako obsah obrazca. Prírastok n zmenšuje obsah obrazca (*obr. 32*)[1]). Formálne tento výsledok môžeme dostať, ak vymeníme navzájom hranice (pritom sa objaví mínus) a použijeme známu vlastnosť o derivácii podľa hornej hranice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(-\int_k^n v(t)\,\mathrm{d}t\right) = -v(n)$$

V spojení s otázkou znamienka integrálu uveďme príklad, ktorý často začiatočníci nechápu. Uvažujme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} \quad (12.6)$$

Táto rovnosť vyplýva už z derivácie nájdenej predtým

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2}$$

[1]) Obsah obrazca ohraničeného zvislými priamkami $n + \Delta n$, k, krivkou a osou x, je menší ako obsah obrazca, ohraničeného zvislými priamkami n, k, krivkou a osou x.

Je správne znamienko integrálu? Môže byť integrál záporný, ak je funkcia $\frac{1}{x^2}$ kladná? Neprotirečí toto znamienko vyššie vysloveným tvrdeniam?

Nejasnosť je spojená s tým, že vzťah (12.6) sme napísali nepresne. Ak ho napíšeme v tvare

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

nemôžeme hovoriť o tom, že znamienko integrálu je vždy záporné, lebo to závisí ešte od znamienka a hodnoty C[1]).

V skutočnosti všetky doteraz vyslovené tvrdenia o znamienku sa vzťahovali na určitý integrál. Vezmime:

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \left(-\frac{1}{b}\right) - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ba}$$

pri $b > a$[2]) je integrál kladný, t. j. vzťah (12.6) je správny a v prípade určitého integrálu nás vedie k správnemu výsledku. Predbiehajúc výklad musíme poznamenať, že s integrálom $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sú spojené iné, už nielen predstierané, ale skutočné ťažkosti, o ktorých budeme hovoriť v čl. 16, kap. II.

13. STREDNÉ HODNOTY

Pomocou integrálu môžeme presne definovať stredné hodnoty pre veličiny, ktoré sú funkciou nejakej premennej.

Ak máme veličinu, ktorá nadobúda rad hodnôt, napr. m hodnôt,

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$$

tak *strednú hodnotu* možno definovať podľa vzťahu

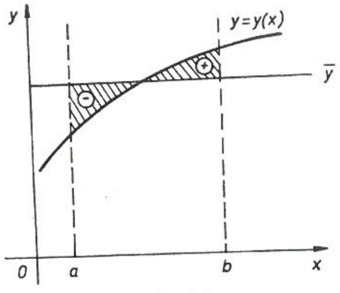
$$\frac{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_m}{m}$$

[1]) Uvedený vzťah platí v intervale $(0, \infty)$ alebo v intervale $(-\infty, 0)$. Pre $x < 0$ je $-1/x > 0$. Pozn. prekl.

[2]) Čísla a, b sú obidve z intervalu $(0, \infty)$ alebo obidve z intervalu $(-\infty, 0)$, pozri pozn. 1 zo str. 47. Pozn. prekl.

Ako definovať strednú hodnotu funkcie $v(t)$ premennej t, ktorá nadobúda všetky z intervalu od n do k $(n < t < k)$?

Predstavme si, že $v(t)$ je okamžitá rýchlosť. Ako sa určí stredná hodnota $\bar{v}(n, k)$, t. j. stredná rýchlosť za čas od n do k? *Stredná rýchlosť* sa definuje ako pomer dráhy (ktorú teleso prešlo) k času, ktorý pritom uplynul



Obr. 33

$$\bar{v}(n, k) = \frac{s(n, k)}{k - n} = \frac{\int_n^k v(t)\,\mathrm{d}t}{k - n}$$

Táto definícia strednej hodnoty funkcie je pochopiteľná i vtedy, keď funkcia nepredstavuje rýchlosť pohybu, ale je to akákoľvek iná veličina. Tak napr. nech $y = y(x)$, je rovnica krivky v rovine (x, y) (*obr. 33*).

Vtedy $\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x$ je obsah obrazca pod krivkou. Vzťah

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x}{b - a}, \qquad (b - a)\,\bar{y} = \int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x$$

označuje, že $\bar{y}$ je výška obdĺžnika so základňou $b - a$, ktorého obsah sa rovná obsahu obrazca pod krivkou. To znamená, že na *obr. 33* obsah vyšrafovaného obrazca priamkou $y = \bar{y}$, ktorý je označený znamienkom plus, presne sa rovná obsahu obrazca označeného znamienkom mínus na úseku, kde krivka leží pod priamkou $y = \bar{y}$. Graf funkcie $y(x)$, ak to nie je priamka rovnobežná s osou x, musí prebiehať tak, že jedna jeho časť leží pod a druhá nad $\bar{y}$. To znamená, že $\bar{y}$ je väčšia ako najmenšia hodnota $y(x)$ a menšia ako najvyššia hodnota $y(x)$ na intervale $n < x < k$.

Uveďme príklady.

Nech $y(x)$ je lineárna funkcia

$$y = kx + q$$

Vtedy integrál je obsah zvisle položeného lichobežníka (*obr. 34*) s „výškou" $b - a$, základňami $y(a)$ a $y(b)$ a strednou priečkou $y\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Teda

$$I(a, b) = \frac{y(a) + y(b)}{2}(b - a) = y\,\frac{a + b}{2}(b - a)$$

Tento výraz ľahko dostaneme aj bez geometrickej predstavy

$$I(a, b) = \int_a^b (kx + m)\,\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{kx^2}{2} + mx\right)\right]_a^b =$$

$$= \frac{kb^2}{2} + mb - \left(\frac{ka^2}{2} + ma\right) = (b - a)\left(\frac{kb}{2} + \frac{ka}{2} + m\right)$$

$$y(b) = kb + m, \qquad y(a) = ka + m$$

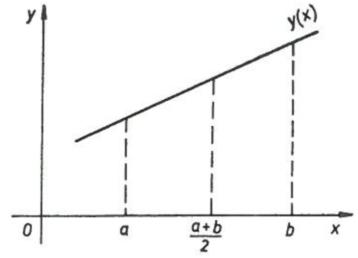
$$y\left(\frac{a + b}{2}\right) = k\left(\frac{a + b}{2}\right) + m$$

odtiaľ vyplýva výraz totožný s predchádzajúcim vzťahom.

Takýmto spôsobom pre lineárnu funkciu dostaneme:

$$\bar{y} = \frac{y(a) + y(b)}{2} = y\left(\frac{a + b}{2}\right) \tag{13.1}$$

Pre lineárnu funkciu teda platí, že stredná hodnota funkcie v danom intervale $\langle a, b\rangle$ sa presne rovná aritmetickému priemeru funkčných hodnôt[1]) v koncových bodoch intervalu $y(a)$ a $y(b)$. Iná formulácia: stredná hodnota lineárnej funkcie sa rovná hodnote funkcie v strede intervalu, t. j. v $x = \frac{a + b}{2}$.



Obr. 34

Jedným z dôležitých príkladov lineárnej závislosti je závislosť rýchlosti od času pri rovnomerne zrýchlenom alebo rovnomerne spomalenom pohybe, t. j. pri pohybe telesa, na ktoré pôsobí stála sila, v konkrétnom prípade tiaž, teda

$$v = gt + v_0$$

[1]) Budeme používať výraz stredná hodnota alebo stredný aritmetický priemer.

Pri výpočte dráhy sme použili vlastnosť strednej hodnoty lineárnej funkcie

$$s(n, k) = (k - n)\left(\frac{v(k) + v(n)}{2}\right) = (k - n)\left(\frac{gk + gn}{2} + v_0\right)$$

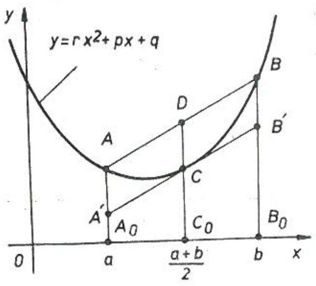
Treba mať na zreteli, že ak závislosť nie je lineárna, vzťah pre strednú hodnotu (13.1) nie je správny.

Rozoberme si príklad kvadratickej funkcie (paraboly) $y = rx^2 + px + q$. Vezmime $r > 0$ a skúmajme ľubovoľný oblúk paraboly v intervale $a < x < b$. Z obrázka (*obr. 35*) predovšetkým vidieť, že

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{y(a) + y(b)}{2}$$

Skutočne $y\left(\frac{a+b}{2}\right)$ je y-ová súradnica bodu C ležiaceho na krivke a aritmetický priemer $\frac{y(a) + y(b)}{2}$ je y-ová súradnica bodu D, ležiaceho v strede tetivy, ktorá spája body krivky A a B, a z obrázka je jasné, že C leží pod D[1]).

Vrátime sa teraz k integrálu $\int_a^b y(x)\,dx$, t. j. k výpočtu obsahu obrazca, ohraničeného krivkou. Je zrejmé, že tento obsah je menší ako obsah lichobežníka so základňami A_0A a B_0B. Na druhej strane, ak cez bod C vedieme dotyčnicu ku krivke, táto dotyčnica pretne kolmice v bodoch A' a B' a vytvára lichobežník so strednou priečkou C_0C. Obsah tohto lichobežníka je menší ako obsah obrazca pod krivkou. Takto pri parabole, ak je $r > 0$, platí:



Obr. 35

$$(b - a)\,y\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b y(x)\,dx < (b - a)\frac{y(a) + y(b)}{2}$$

1) Pripomeňme, že parabola $y = rx^2$, $r > 0$ je konvexná a parabolu $y = rx^2 + px + q$ s ľubovoľnými p, q dostaneme z paraboly $y = rx^2$ rovnobežným posunutím, pozri kapitolu IV, čl. 5.

Dostávame nerovnosti pre strednú hodnotu $\bar{y}$ v intervale od a do b:

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) < \bar{y}\,\frac{y(a) + y(b)}{2}$$

Pri kvadratickej funkcii platí presný vzťah (uvedieme ho bez odvodenia, pozri cvičenie 4), správny pri ľubovoľnom znamienku r:

$$\bar{y} = \frac{2}{3}\,y\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{y(a) + y(b)}{2}\right) = \frac{1}{6}\,y(a) + \frac{2}{3}\,y\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}\,y(b) \qquad (31.2)$$

Tento výraz dáva približný vzťah na výpočet obsahu obrazca ohraničeného ľubovoľnou spojitou krivkou (pozri cvičenie 6 a 7). Praktické použitie stredných hodnôt je veľmi výhodné, často oveľa výhodnejšie ako použitie integrálov.

V podstate sú tieto veličiny rovnocenné. Ak je známy integrál $I = \int_a^b y\,dx$, nájde sa stredná hodnota zo vzťahu $\bar{y} = \frac{I}{(b - a)}$ a ak je známa stredná hodnota, ľahko sa nájde integrál $I = (b - a)\,\bar{y}$.

Výhodnejšie je však použiť strednú hodnotu, pretože táto veličina $\bar{y}$ má ten istý rozmer, ako y a zrejme $\bar{y}$ a hodnoty y sú v skúmanom intervale toho istého rádu. Preto ťažšie spravíme chybu rádove 10-krát väčšiu v hodnote $\bar{y}$, ako by sme takúto chybu mohli urobiť pri výpočte integrálu.

Obyčajne sa predpokladá, že kto sa zaoberá vyššou matematikou, dôkladne pozná aritmetiku a algebru a nikdy sa nepomýli rádove 10-krát, alebo neurobí chybu v znamienku. To však vždy tak nie je. Preto výpočet treba robiť tak, aby sa zmenšila pravdepodobnosť nespozorovanej chyby.

Cvičenia

1. Nájdite strednú hodnotu funkcie $y = x^2$ v intervale $\langle 0, 2 \rangle$!
2. Porovnajte túto strednú hodnotu so stredným aritmetickým priemerom funkcie a s hodnotou v strede intervalu!
3. Overte vzťah (13.2) pre strednú hodnotu na základe cvičenia 1.

4. Overte vzťah pre strednú hodnotu (13.2) vo všeobecnom tvare pre parabolu $y = rx^2 + px + q$!

5. Veľkosť tiaže sa zmenšuje so zväčšovaním vzdialenosti od stredu Zeme podľa vzťahu $F = \frac{A}{r^2}$. Nájdite pomocou integrálu strednú hodnotu príťažlivej sily na úseku od povrchu Zeme (polomer R) do vzdialenosti R od povrchu Zeme (t. j. $2R$ od stredu Zeme)!

6. Porovnajte presnú strednú hodnotu z predchádzajúceho cvičenia s aritmetickým priemerom veľkosti tiaže na koncoch intervalu $\langle R, 2R \rangle$.

7. Porovnajte presnú strednú hodnotu v cvičení 5 so strednou hodnotou podľa vzťahu (13.2), ktorý platí pre parabolu.

14. RÔZNE PRÍKLADY NA DERIVÁCIE A INTEGRÁLY

V predchádzajúcich článkoch sme skúmali vzťah medzi dráhou a rýchlosťou, vzťah medzi rovnicou krivky a obsahom obrazca pod touto krivkou. Tieto vzťahy predstavujú konkrétne úlohy, na základe ktorých sa vybudoval diferenciálny a integrálny počet. Pojmy integrálu a derivácie používame nakoniec nielen v spomenutých prípadoch, ale sa vzťahujú na mimoriadne široký okruh javov v najrozličnejších oblastiach. V podstate je diferenciálny a integrálny počet akýsi druh jazyka, ktorý je najviac prispôsobený na opis prírody.

Študent, ktorý sa začína učiť cudzí jazyk, aby si naň privykol, opakuje podobné jednoduché frázy: „na stole je pohár", „na stole je chlieb", „na podlahe sedí mačka", „na podlahe sedí myš". Tak isto na začiatku štúdia vyššej matematiky je potrebné si na mnohých príkladoch opakovať vzťahy medzi deriváciou a integrálom. Na začiatku sa treba naučiť cudzí jazyk, a až potom vyslovovať v tomto jazyku isté myšlienky, požiadavky, tvrdenia. Tak i my sa najskôr naučíme vyjadrovať už známe vzťahy a formulovať úlohy pomocou vyššej matematiky a až potom budeme riešiť tieto úlohy a získavať nové výsledky[1]).

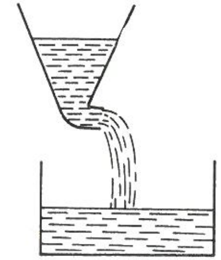
Uveďme niekoľko typických príkladov.

[1]) Goethe povedal: „matematici sú ako Francúzi, môže sa im čokoľvek povedať, oni si to preložia do svojej reči a toto predstavuje potom celkom niečo iné ako čo ste Vy na začiatku mali na mysli."

A. Derivácia podľa času

1. Predstavme si nádobu ľubovoľného tvaru, z ktorej vyteká kvapalina (*obr. 36*). Hmotnosť kvapaliny, ktorá je v danom čase v nádobe, sa rovná M. Táto veličina je funkciou času $M(t)$. Kvapalina sa hromadí v druhej nádobe a jej množstvo v druhej nádobe je $m(t)$. Množstvo kvapaliny vytekajúcej z nádoby za jednotku času označíme $W(t)$. Táto veličina má rozmer kg/s. Veličiny m, M, W súvisia navzájom vzťahmi

$$\frac{dM}{dt} = -W(t), \qquad \frac{dm}{dt} = +W(t) \qquad (14.1)$$



Obr. 36

Tieto vzťahy možno zapísať v integrálnom tvare. Predpokladajme, že v počiatočnom čase t_0 v prvej nádobe je množstvo kvapaliny $M(t_0) = M_0$ a druhá nádoba je prázdna, $m(t_0) = 0$. Vtedy

$$m(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} W(t)\, dt$$

$$M(t_1) = M(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} W(t)\, dt \qquad (14.2)$$

Ak nás zaujíma množstvo kvapaliny v danom čase t_1, vyjadríme ho pomocou integrálu, v ktorom integračná premenná t nadobúda všetky hodnoty od t_0 do t_1.

Ak chceme napísať výrazy pre $m(t)$ a $M(t)$, tak pre väčšiu názornosť bude vhodnejšie zmeniť označenie integračnej premennej (vzhľadom na to, že je zamlčaná), napr. na τ (grécke písmeno — zodpovedajúce latinskému t-té). Vtedy

$$m(t) = \int_{t_0}^{t} W(\tau)\, d\tau$$

$$M(t) = M(t_0) - \int_{t_0}^{t} W(\tau)\, d\tau \qquad (14.3)$$

Obyčajne sa jednoducho píše:

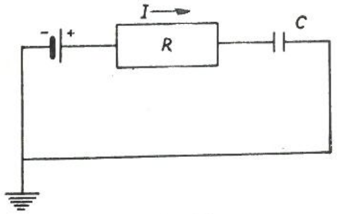
$$m(t) = \int_{t_0}^{t} W(t)\, dt$$

$$M(t) = M(t_0) - \int_{t_0}^{t} W(t)\, dt \qquad (14.4)$$

no treba si pamätať, že t za integrálom má iný význam, ako argument t v $M(t)$ a $m(t)$, ktorý je totožný s t tvoriacim hornú hranicu. Preto zápis (14.2) a (14.3) je presnejší ako (14.4).

Vyššie napísané vzťahy zodpovedajú pokusu, v ktorom sa meria M a prietok kvapaliny W v rôznych časových intervaloch.

Často sa úloha formuluje takto: Nech odtok kvapaliny W závisí známym spôsobom od jej tlaku, t. j. od výšky stĺpca kvapaliny h. Veličina h, ak je tvar nádoby daný, závisí od M. Takto je známy odtok W— funkcia množstva kvapaliny, ktorá sa nachádza v nádobe,



Obr. 37

$$W = W(m)$$

Vtedy rovnosť (14.1) nadobúda tvar

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -W(M)$$

Je to diferenciálna rovnica. Riešenie takýchto rovníc budeme preberať v kapitole V. Vzťahy (14.2)—(14.4) v tomto prípade už nemožno písať, lebo W nie je funkciou času.

2. Preskúmajme kondenzátor (*obr. 37*). Náboj v ňom nahromadený (elektrický náboj) označíme Q. V sústave SI sa náboj meria v coulomboch. Intenzita elektrického prúdu I charakterizuje elektrický náboj, ktorý prejde prierezom vodiča za jednotku času. V sústave SI je jej základnou jednotkou 1 ampér (A). Ampér je prúd, ktorý, keď preteká dvoma rovnobežnými, priamymi, veľmi dlhými vodičmi, so zanedbateľným kruhovým prierezom, umiestneným vo vákuu vo vzdialenosti 1 m do seba, vyvolá medzi vodičmi silu $2 \,.\, 10^{-7}$ N na 1 m dĺžky. Vodičom preteká prúd jedného ampéra, keď prierezom vodiča pretečie za sekundu náboj jedného coulomba.

Vzťah medzi nábojom kondenzátora a intenzitou elektrického prúdu je teda daný rovnicou

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = i \tag{14.5}$$

(kladný smer prúdu je označený šípkou). Ak je dané alebo známe z meraní,

ako sa mení intenzita prúdu v závislosti od času, potom možno napísať integrálny vzťah

$$Q(t) = Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t$$

Ak je daná kapacita kondenzátora C, úbytok napätia na kondenzátore môžeme vyjadriť pomocou náboja Q vzťahom $U_{\mathrm{C}} = \dfrac{Q}{C}$. Pokles napätia na odpore R sa rovná:

$$U_{\mathrm{R}} = U_{\mathrm{E}} - U_{\mathrm{C}} = U_{\mathrm{E}} - \frac{Q}{C}$$

kde U_{E} je napätie zdroja. Elektrický prúd prechádzajúci odporom sa podľa Ohmovho zákona rovná:

$$I = \frac{1}{R}\left(U_{\mathrm{E}} - \frac{Q}{C}\right)$$

a ak použijeme (14.5), dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\left(U_{\mathrm{E}} - \frac{Q}{C}\right)$$

Podrobnejšie úlohy o kondenzátoroch sú v kapitole VIII.

3. Pojem zrýchlenia. Vyššie sme skúmali rýchlosť pohybu ako deriváciu dráhy podľa času. Ak je okamžitá rýchlosť, ktorá závisí od času $v(t)$, už daná a známa, môžeme postaviť otázku, ako sa táto rýchlosť v priebehu času mení.

Derivácia rýchlosti podľa času sa nazýva zrýchlenie

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \tag{14.6}$$

a označuje sa obyčajne a (z francúzskeho slova acceleration — zrýchlenie).

Pretože rozmer rýchlosti je m/s, rozmer zrýchlenia bude m/s^2.

Nakoľko je zrýchlenie funkciou času, okamžitú hodnotu rýchlosti môžeme písať v tvare integrálu

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t \tag{14.7}$$

Napríklad v prípade voľného pádu sa $a = -g$, kde $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ (znamienko mínus je spojené s tým, že smer nahor počítame za kladný). Ak položíme v (14.7) $a = -g$, dostaneme:

$$v(t) = v(t_0) - \int_{t_0}^{t} g \, \mathrm{d}t = v(t_0) - (t - t_0)\, g$$

Zapíšeme rýchlosť v tvare derivácie dráhy podľa času $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ a dosaďme do (14.6). Vtedy

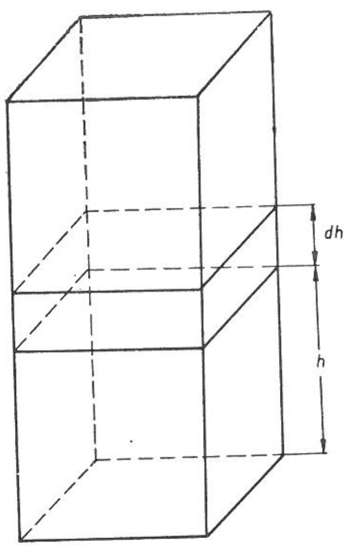
$$a = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$$

Táto funkcia — derivácia z derivácie — sa nazýva deriváciou druhého rádu alebo druhá derivácia a označuje sa:

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

a číta sa: „dé-dva es podľa dé-té na druhú".

Všimnime si, ako sú rozumne postavené exponenty (dvojky) vo výraze $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$. Rozmer zrýchlenia dostaneme z $\dfrac{s}{t^2}$ po odstránení bezrozmerného znamienka d.



Obr. 38

B. Derivácie podľa súradnice

4. Predstavme si v atmosfére zvislý stĺpec vzduchu s konštantným prierezom S m². Hustota vzduchu[1]) $\varrho(\mathrm{kg/m^3})$ závisí od výšky h nad povrchom Zeme. Objem tenkej vrstvy, uzavretej medzi h a $h + \mathrm{d}h$ (*obr. 38*), rovná sa $S\,\mathrm{d}h$. Vnútri tejto tenkej vrstvy možno hustotu $\varrho(h)$ pokladať za konštantnú. V tomto príklade si $\mathrm{d}h$ možno predstaviť ako 1 m alebo 10 m, dokonca aj s menšou presnosťou ako

[1]) ϱ — grécke písmeno a číta sa „ró". V školských fyzikách sa často používa označenie d, pochádzajúce z francúzskeho densité — hustota. Toto označenie je vcelku nevýhodné, keďže by sa mohlo zamieňať s označením diferenciálu.

100 m, nakoľko pri zmene výšky na 1 km hustota vzduchu sa mení o 12—14 %.

Hmotnosť vzduchu vo vrstve $\mathrm{d}h$ je $\mathrm{d}m = \varrho S\,\mathrm{d}h$. Hmotnosť vzduchu v stĺpci, ktorý sa rozprestiera od h_1 do h_2, sa určí pomocou integrálu

$$m(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} p(h)\,\mathrm{d}h$$

Hmotnosť vzduchu v stĺpci od povrchu Zeme ($h = 0$) do výšky h je:

$$m(0, h) = S \int_0^h \varrho(h)\,\mathrm{d}h$$

Hmotnosť vzduchu, ktorý sa nachádza nad výškou h, sa rovná:

$$m = S \int_h^\infty \varrho(h)\,\mathrm{d}h^{1)}$$

Tlak P vo výške h vynásobený obsahom prierezu S sa rovná sile, ktorou je celý stĺpec vzduchu, nachádzajúci sa nad výškou h, priťahovaný k zemi. Tiaž sa rovná hmotnosti násobenej zrýchlením voľného pádu g, odkiaľ

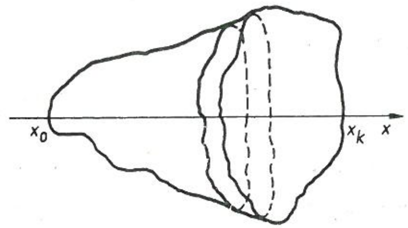
$$P(h) = \int_h^\infty s\varrho(h)\,\mathrm{d}h$$

Ak použijeme vzťah (12.5), dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}h} = -g\varrho(h)$$

Tento vzťah by bolo možné napísať odrazu, ak by sme skúmali rovnováhu tenkej vrstvy $\mathrm{d}h$, na ktorú zdola pôsobí tlak $P(h)$ a zhora tlak $P(h + \mathrm{d}h)$. Výslednica týchto dvoch síl je v rovnováhe s tiažou uvažovanej vrstvy.

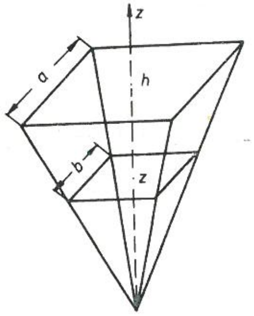
5. Vyjadrime v tvare integrálu objem telesa (*obr. 39*). Rozdeľme te-



Obr. 39

[1]) Znak ∞ v hornej hranici nahradzuje veľmi veľké číslo h také, že pri jeho ďalšom zväčšení hodnota integrálu sa prakticky nemení.

leso rovinami $x = \text{const}$ na tenké vrstvy. Objem dV tenkej vrstvy sa rovná súčtu obsahu prierezu S a hrúbky vrstvy dx. Ak poznáme obsah zvislého prierezu telesa v závislosti od súradnice prierezu x, môžeme takto vypočítať objem telesa podľa vzťahu



Obr. 40

$$V = \int_{x_0}^{x_k} S(x)\, dx \tag{14.8}$$

Tento vzťah použijeme na výpočet objemu pravidelného štvorbokého ihlana. Hranol umiestnime tak, aby jeho vrchol ležal v počiatku súradnicového systému a jeho os v osi z (*obr. 40*). Nech výška ihlana je h, jeho základňa (ktorá sa nachádza hore) je štvorec so stranou a. Z geometrie je známe, že aj prierez ihlana vodorovnou rovinou vo výške z je štvorec, ktorého strana b sa má k a, ako sa má z ku h

$$b = b(z) = a\frac{z}{h}$$

Teda obsah prierezu $S(z) = b^2 = \frac{a^2}{h^2} z^2$. Objem ihlana teda je:

$$V = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} z^2\, dz = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h z^2\, dz$$

Využijeme výsledok z čl. 11

$$\int z^2\, dz = \frac{1}{3} z^3, \qquad \int_0^h z^2\, dz = \frac{1}{3} h^3$$

a dostaneme

$$V = \frac{a^2}{h^2}\,\frac{1}{3}\, h^3 = \frac{1}{3} a^2 h$$

Objem ihlana sa rovná jednej tretine súčinu obsahu základne a výšky ihlana. Odvodenie tohto vzťahu v stereometrii bez použitia integrálneho počtu je oveľa zložitejšie.

Cvičenie

Odvoďte vzťah pre objem ľubovoľného ihlana, ak použijete vlastnosti rovnobežných rezov ihlana.

Záver

V kapitole I sú zavedené pojmy derivácie a integrálu, niektoré ich najjednoduchšie vlastnosti a vzťahy medzi nimi. Otázky praktického výpočtu derivácie a integrálov rôznych funkcií sú uvedené v kapitole II tejto knihy. V kapitole I je len niekoľko najjednoduchších príkladov.

Chceme študujúcim dať radu: nemerajte zložitosť článku počtom vzťahov, ich zložitosťou a ťažkopádnosťou. V skutočnosti najvážnejšia a najdôležitejšia je práve matematická formulácia úloh v tvare algebraickej rovnice, integrálu alebo diferenciálnej rovnice. Práve na toto treba sústrediť najväčšiu pozornosť.

Ak sa vám posledné tri články zdajú ťažké, je rozumné prečítať si ešte raz celú kapitolu I.

Autor podľa vlastných skúseností tvrdí, že práce, ktoré sa mu nepodarilo urobiť a ktoré v tom čase urobili iní, neurobil preto, že sa obmedzil len na všeobecné úvahy. Autor nemal odvahu písať rovnice, matematicky formulovať úlohu. Počtárske ťažkosti v presne formulovanej úlohe s jasným fyzikálnym obsahom možno vždy prekonať, ak nie presnými výpočtami, aspoň približnými metódami.

II. VÝPOČET DERIVÁCIÍ A INTEGRÁLOV

1. ZNAK DIFERENCIÁLU. DERIVÁCIA SÚČTU FUNKCIÍ

Vhodné názorné spôsoby zápisu vzťahov, jednoduché pravidlá, ktoré umožňujú mechanicky, bez rozmýšľania a bez chýb robiť výpočty, majú veľmi veľký význam ako pre učenie tak i pre samotný rozvoj matematiky.

V kapitole I sme sa oboznámili s pojmom derivácie. Cieľom kapitoly II bude výklad pravidiel derivovania rôznych funkcií: mnohočlenov, racionálnych funkcií, racionálne lomených, exponenciálnych, trigonometrických a iných funkcií. Treba nájsť všeobecné pravidlá pre derivácie rôznych kombinácií týchto funkcií: súčtu, súčinu funkcií, zloženej funkcie. Na konci kapitoly II str. 163 je uvedená tabuľka derivácií pre celý rad funkcií, zhŕňajúca obsah článkov 1 až 12.

Z definície derivácie vyplýva tento spôsob výpočtu: v každom prípade sa treba zaoberať ľubovoľnou hodnotou x a prírastkom Δx; nájsť funkciu $f(x)$ a $f(x + \Delta x)$ a určiť prírastok Δf; zostaviť pomer $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ a nakoniec prejsť k limite pre $\Delta x \to 0$.

Vzorec na všeobecné vyjadrenie $\Delta f/\Delta x$ pre ľubovoľné Δx (Δx sa neblíži k nule) je však obvykle zložitejší ako vzorec pre limitu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f/\Delta x = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, t. j. pre deriváciu. V ďalšom budeme preto často písať také vzťahy, ktoré platia iba v limite pre prírastok blížiaci sa k nule.

V tom prípade namiesto Δy, Δx budeme písať $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}x$. Treba vypracovať pravidlá na operácie s diferenciálmi $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x$, aby platila základná rovnica

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x)$$

t. j. aby podiel diferenciálov bol totožný s deriváciou. Predtým sme písali približný výraz pre prírastok funkcie

$$y(x + \Delta x) - y(x) = \Delta y \approx y'(x)\,\Delta x$$

Tento výraz je presný v limite pri $\Delta x \to 0$[1]).

Pre diferenciály budeme písať presnú rovnosť

$$\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$$

Slová o limite pri $\Delta x \to 0$, ktoré treba pripojiť k približnej rovnosti $\Delta y \simeq y'(x)\,\Delta x$, nie sú už pri napísaní druhého vzťahu potrebné. Pri používaní diferenciálov $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x$ ich máme len na mysli.

Pravidlá používania diferenciálov musia byť také, aby sa podiel diferenciálov rovnal derivácii; preto vo vzorcoch treba vynechať členy úmerné $(\mathrm{d}x)^2$ a vyšším mocninám $\mathrm{d}x$.

Vyšetrime jednoduchý príklad $y = x^2$ a na tomto príklade porovnáme techniku práce s prírastkami a diferenciálmi. Predtým sme písali:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x, \qquad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Pomocou diferenciálov napíšeme:

$$\mathrm{d}y = (x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2x\,\mathrm{d}x$$

Člen $(\mathrm{d}x)^2$ na pravej strane sme vynechali!

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

Ako druhý príklad preskúmame súčet dvoch funkcií vynásobených s konštantnými koeficientmi

$$y = Cf(x) + Eg(x)$$

---

[1]) Pozri poznámku pod čiarou na str. 53.

Pomocou diferenciálov napíšeme:

$$\begin{aligned} dy &= y(x + dx) - y(x) = \\ &= Cf(x + dx) + Eg(x + dx) - Cf(x) - Eg(x) = \\ &= C[f(x + dx) - f(x)] + E[g(x + dx) - g(x)] = \\ &= C\, df + E\, dg = Cf'\, dx + Eg'\, dx \end{aligned}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = Cf' + Eg'$$

Tento vzťah môžeme ľahko dostať pomocou prírastkov a limity.

Zápis dx, dy (číta sa: diferenciál x, diferenciál y) nahradzuje slová o limite a zjednodušuje tvar vzťahov. Všeobecné pravidlo je, že pri napísaní vzťahov pomocou diferenciálov treba vynechávať členy úmerné $(dx)^2$, $(dx)^3$ atď. Nakoniec treba zdôrazniť, že s diferenciálmi možno narábať ako s bežnými algebraickými veličinami.

Budeme sa zaoberať s diferenciálmi tej alebo inej premennej dx, t atď., s diferenciálom funkcie df, diferenciálom ľubovoľného zloženého výrazu, ktorý sa skladá z niekoľkých funkcií, napríklad $d\left(\frac{f^2}{g}\right)$. Ak určíme podiel $\frac{df}{dx}$, dostaneme deriváciu funkcie $f(x)$.

2. DERIVÁCIA INVERZNEJ FUNKCIE

Určenie y ako funkcie x znamená, že každému x zodpovedá určitá hodnota y. Naopak to znamená, že každej funkčnej hodnote y je priradené určité x[1]). Takýmto spôsobom môžeme aj z funkcie $y(x)$ dostať funkčnú závislosť $x(y)$. Túto závislosť nazývame inverznou funkciou k danej funkcii.

[1]) Ide o to x, pre ktoré $f(x) = y$. Autor pritom mlčky predpokladá, že také x je jediné. Tento predpoklad o jednoznačnom priradení je potrebný aj v ďalších úvahách. Pozn. prekl.

Ukážme si niekoľko príkladov: vľavo sú dané $y(x)$, vpravo sú ich inverzné funkcie $x(y)$:

$$\begin{aligned} y &= x + a, & x &= y - a \\ y &= x^2,\ ^{1)} & x &= \sqrt{y} \\ y &= x^3 + 1, & x &= \sqrt[3]{y - 1} \end{aligned}$$

V mnohých prípadoch inverzná funkcia má jednoduchší tvar ako pôvodná funkcia. Ak je napr. pôvodná funkcia $y = \sqrt[3]{x - 1}$, obsahuje odmocninu tretieho stupňa, tak inverzná funkcia $x = y^3 + 1$ obsahuje tretiu mocninu a je jednoduchšia ako pôvodná funkcia. V tomto prípade je jednoduchšie a ľahšie nájsť deriváciu inverznej funkcie $\frac{dx}{dy}$, ako nájsť deriváciu pôvodnej funkcie $\frac{dy}{dx}$. V tomto prípade nemožno vyjadriť deriváciu pôvodnej funkcie pomocou derivácie inverznej funkcie?

Pre pôvodnú funkciu $y(x)$ máme:

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx = y'(x)\, dx$$

Z toho dostaneme výsledok pre deriváciu $x'(y)$ inverznej funkcie $x(y)$

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)}\ ^{2)} \tag{2.1}$$

Na pravej strane (2.1) je výraz zapísaný ako funkcia premennej x, vyjadrená predovšetkým pomocou $y'(x)$. No ak je inverzná funkcia $x(y)$ známa, potom tento výraz môžeme upraviť na funkciu premennej y.

Čo sme si doposiaľ povedali, objasníme na príkladoch. Pretože lineárna funkcia je príklad celkom jednoduchý, začneme hneď od druhého príkladu

$$y = x^2, \quad \frac{dy}{dx} = y'(x) = 2x, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{2x} \tag{2.2}$$

[1]) Uvedená funkcia nie je jednoznačná. Pre $x - a$, $x - (-a)$ dostávame rovnaké hodnoty y. Uvedené tvrdenie platí iba v intervale $\langle 0, \infty)$. Pozn. prekl.

[2]) Pritom treba predpokladať, že existuje derivácia $y' \neq 0$ v každom bode uvažovaného intervalu a existuje inverzná funkcia $x = f^{-1}(y)$, ktorú treba dosadiť za x v menovateli. Pozn. prekl.

Dosadíme do výrazu (2.2) inverznú funkciu $x = \sqrt{y}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(\sqrt{y})}{dy} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \tag{2.3}$$

V kapitole I sme tento výsledok dosiahli oveľa zložitejšou cestou.

Tretí príklad:

$$y = x^3 + 1, \quad \frac{dy}{dx} = y'(x) = 3x^2, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{3x^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(\sqrt[3]{y-1})}{dy} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}} = \frac{1}{3}(y-1)^{-\frac{2}{3}}$$

Tento spôsob bude vhodný aj neskoršie. Keď preberieme exponenciálnu funkciu $y = a^x$, budeme môcť skúmať logaritmickú funkciu ako inverznú k exponenciálnej. Keď sa naučíme derivácie trigonometrických funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, budeme môcť nájsť derivácie inverzných trigonometrických funkcií $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$.

3. ZLOŽENÁ FUNKCIA

Nech z je funkcia y napr. $z = \frac{1}{y}$, y je funkcia x, napr. $y = x^2 + 5$. Je zrejmé, že každému x zodpovedá určité y, pričom každému y zodpovedá určité z. Potom v konečnom dôsledku každému x zodpovedá určité z, to znamená, že z je funkcia x. Vždy, keď sa dosadí za y výraz s x, možno napísať bezprostredne $z(x)$. V danom príklade

$$z = \frac{1}{x^2 + 5}$$

Lenže pre naše ciele je vhodnejšie všetky funkcie upraviť na čo najjednoduchšie tvary. Samostatne každá zo závislostí $z = \frac{1}{y}$ a $y = x^2 + 5$ je jednoduchšia ako $z = \frac{1}{x^2 + 5}$.

Ak upravíme všetky funkcie na najjednoduchšie, vystačíme s pravidlami pre derivovanie týchto jednoduchých funkcií.

Nájdime diferenciál zloženej funkcie $z[y(x)]$. Budeme skúmať z ako funkciu y. Napíšeme:

$$dz = \frac{dz}{dy}\,dy$$

Keďže y je funkciou x, preto

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx$$

Po dosadení dostaneme:

$$dz = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\,dx \tag{3.1}$$

Obidve strany (3.1) predelíme dx. Dostaneme pravidlo, podľa ktorého sa určí *derivácia zloženej funkcie*[1]).

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\ {}^{2)} \tag{3.2}$$

Zápis úplne zodpovedá tomu, čo sme si povedali o možnosti narábania s diferenciálmi ako s bežnými algebraickými veličinami: v derivácii $\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ možno zjednodušiť dy.

Nezabudnime, že z je funkciou y, preto aj $\frac{dz}{dy}$ je funkciou y. Pretože samotné y je funkciou x, po dosadení $y = y(x)$ do výrazu $\frac{dz}{dy}$ dostaneme $\frac{dz}{dy}$ ako funkciu x, potom aj $\frac{dz}{dx}$ je funkciou x.

Spravíme výpočet pre prípad, ktorý použijeme neskoršie. Nech

$$z = \frac{1}{y(x)}$$

---

[1]) V predchádzajúcich článkoch sme deriváciu označovali dz/dx a z'. Keďže označenie derivácie čiarkou môže viesť k nejasnostiam (ak napíšeme z', nie je jasné, či ide o $\frac{dz}{dx}$ alebo $\frac{dz}{dy}$) tam, kde môže vzniknúť pochybnosť, čiarku používať nebudeme.

[2]) Uvedený vzťah je pravdivý, ak existuje derivácia na pravej strane v príslušných bodoch. Pozn. prekl.

Vieme, že pri $z = \frac{1}{y}$ $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{y^2}$. To znamená, že

$$dz = -\frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} dx$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} \tag{3.3}$$

Tak napr. ak $y = x^2 + 5$, $z = \frac{1}{x^2 + 5}$, tak

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{(x^2 + 5)^2} \frac{d(x^2 + 5)}{dx} = -\frac{2x}{(x^2 + 5)^2}$$

Pravidlo na derivovanie zloženej funkcie platí i pri väčšom počte zložiek ako dve, napr.

$$\left.\begin{aligned} & z = z(y), \quad y = y(x), \quad y = x(t), \quad t = t(\omega) \\ & \frac{dz}{d\omega} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\omega} \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Ak je funkcia daná parametricky (pozri kap. IV, čl. 8), možno ju skúmať ako zvláštny prípad zloženej funkcie[1]). Ak je totiž dané

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

prvú z týchto rovníc možno skúmať ako rovnicu, ktorej riešenie je $t(x)$; po dosadení $t(x)$ do druhej rovnice dostaneme:

$$y = g(t) = g[t(x)]$$

teda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

Ak chceme tento vzťah použiť, netreba vyjadrovať t ako funkciu x. Ak by sme to urobili, odstránili by sme parameter a to nie je vždy možné. Stačí vedieť, že $x = f(t)$. Táto funkcia je inverzná k funkcii $t(x)$. To znamená, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

[1]) To je možné iba vtedy, keď existuje inverzná funkcia $t = f^{-1}(x)$. Pozn. prekl.

Takýmto spôsobom

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Aj tento vzťah ukazuje, že s diferenciálmi možno zaobchádzať ako s bežnými algebraickými veličinami: diferenciál dt sa na pravej strane zjednoduší.

Uveďme príklad

$$x = t^2 - t, \quad y = t^2 + t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2t + 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2t + 1}{2t - 1}$$

Keď budeme zostavovať tabuľku pre graf funkcie danej parametricky, zvolíme si hodnoty t a k nim nájdeme príslušné x a y. Na základe uvedeného môžeme nájsť v ľubovoľnom bode aj hodnotu derivácie dy/dx, ktorá sa rovná smernici dotyčnice v danom bode.

Cvičenia

1. Nájdite deriváciu $z = (ax + b)^2$ ako deriváciu zloženej funkcie $z = y^2$, keď $y = ax + b$. Deriváciu vypočítajte aj tak, že dvojčlen na pravej strane povýšite na druhú a zderivujete ho.
2. Nájdite deriváciu funkcií

$$z = \frac{1}{ax + b},$$

$$z = \frac{1}{(ax + b)^2},$$

$$z = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

4. DERIVÁCIA SÚČINU FUNKCIÍ

Nájdite deriváciu súčinu dvoch funkcií $g(x)$ a $h(x)$. Položíme:

$$f(x) = g(x)\, h(x)$$

$$df = f(x + dx) - f(x) = g(x + dx)\, h(x + dx) - g(x)\, h(x)$$

Ale

$$g(x + \mathrm{d}x) = g(x) + \mathrm{d}g$$

$$h(x + \mathrm{d}x) = h(x) + \mathrm{d}h$$

Preto

$$\mathrm{d}f = [g(x) + \mathrm{d}g]\,[h(x) + \mathrm{d}h] - g(x)\,h(x) =$$
$$= g(x)\,h(x) + g(x)\,\mathrm{d}h + h(x)\,\mathrm{d}g + \mathrm{d}g\,\mathrm{d}h - g(x)\,h(x) =$$
$$= g(x)\,\mathrm{d}h + h(x)\,\mathrm{d}g + \mathrm{d}g\,\mathrm{d}h$$

Všimnime si, že

$$\mathrm{d}g = g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}h = h'(x)\,\mathrm{d}x$$

odkiaľ

$$\mathrm{d}h\,\mathrm{d}g = g'(x)\,h'(x)\,(\mathrm{d}x)^2$$

Veličina $\mathrm{d}h\mathrm{d}g$ je úmerná $(\mathrm{d}x)^2$, preto súčin $\mathrm{d}h\mathrm{d}g$ vo výraze $\mathrm{d}f$ zanedbávame. Konečne dostaneme:

$$\mathrm{d}f = g(x)\,\mathrm{d}h + h(x)\,\mathrm{d}g \tag{4.1}$$

Ak predelíme všetky členy (4.1) s $\mathrm{d}x$, dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(gh)}{\mathrm{d}x} = g\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + h\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \tag{4.2}$$

Tento výraz si treba zapamätať takto: derivácia súčinu gh sa rovná súčtu derivácií, pričom v prvej považujeme g za konštantu a h za funkciu x $\left(\text{člen } g\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right)$ a v druhej predpokladáme, že h je konštanta a g je funkcia x $\left(\text{člen } h\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)$. Pritom prirodzene hodnota g v člene $\left(g\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right)$ sa počíta v tom čísle x, pre ktoré sa hľadá hodnota derivácie. To sa tiež vzťahuje na h v druhom sčítanci.

Ako by sme hľadali deriváciu súčinu pomocou prírastkov? Jednoduché počítanie dáva presnú rovnosť

$$\Delta f = g(x)\,\Delta h + h(x)\,\Delta g + \Delta h\,\Delta g$$

Predelíme obidve strany Δx

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = g(x)\,\frac{\Delta h}{\Delta x} + h(x)\,\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta h}{\Delta x}\,\frac{\Delta g}{\Delta x}\,\Delta x \tag{4.3}$$

Posledný sčítanec sme rozšírili o Δx. Doteraz všetky vzťahy sú presné a správne pre ľubovoľné hodnoty Δx. Prejdeme k limite pre $\Delta x \to 0$. Pritom

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f', \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = h', \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'$$

a vzhľadom na (4.3)

$$f' = gh' + hg'$$

Posledný sčítanec vo vzťahu (4.3) pri prechode k limite vypadol, lebo prvé dva súčinitele v limite dajú súčin hg'' a limita z x sa rovná nule. Pomocou prírastkov a prechodu k limite dostaneme ten istý výsledok ako pomocou diferenciálov, no počíta sa o niečo dlhšie. Nemáme sa čo čudovať, pretože pri diferenciáli sme odstránili $\mathrm{d}f \,.\, \mathrm{d}g$ mechanicky na základe skôr vysloveného pravidla, v súhlase s ktorým je potrebné odstrániť členy s $(\mathrm{d}x)^2$, $(\mathrm{d}x)^3$ atď., a to znamená, že treba odstrániť i ľubovoľné súčiny dvoch, troch a väčšieho počtu diferenciálov.

Pri výpočte pomocou prírastkov sme v podstate v priebehu výpočtu dokázali toto pravidlo ešte raz na príklade súčinu funkcií.

Dôsledné počítanie pomocou prírastkov je potrebné na zdôvodnenie pravidiel a na ich porozumenie. No po zvládnutí týchto pravidiel je vhodnejšie používať diferenciály, pretože vedú rýchlejšie k cieľu. Bolo by zbytočné stále sa opakovať a každý raz pri riešení konkrétnej úlohy vypisovať, že derivácia je limita podielu atď.

Príklad:

$$f = (2x^2 + 5)\,(3x + 4)$$

Nájdite $f'(x)$ a konkrétne $f'(2)$. V tomto prípade

$$g = 2x^2 + 5, \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = 4x$$

$$h = 3x + 4, \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = 3$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (2x^2 + 5) \,.\, 3 + (3x + 4) \,.\, 4x$$

$$f'(2) = \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{x=2} = (2 \,.\, 4 + 5) \,.\, 3 + (3 \,.\, 2 + 4) \,.\, 4 \,.\, 2 = 39 + 80 = 119$$

Pravidlo na hľadanie derivácie súčinu zovšeobecníme pre prípad niekoľkých súčiniteľov. Napríklad pre súčin štyroch funkcií $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}(fghk)}{\mathrm{d}x} = fgh\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} + fgk\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + fhk\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + ghk\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{4.4}$$

Deriváciu podielu dvoch funkcií nájdeme, ak podiel $f = \frac{g}{h}$ zapíšeme v tvare súčinu

$$f = h\frac{1}{g}$$

Vtedy

$$f' = h\left(\frac{1}{g}\right) - h'\frac{1}{g} \tag{4.5}$$

Deriváciu funkcie $\frac{1}{g}$ nájdeme, ak použijeme vzťah (3.3)

$$\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{1}{g^2}g'$$

Po dosadení do (4.5) dostaneme:

$$f' = \left(\frac{h}{g}\right)' = -\frac{h}{g^2}g' + h'\frac{1}{g}$$

alebo

$$\left(\frac{h}{g}\right) = \frac{h'g - hg'}{g^2} \tag{4.6}$$

Pravidlo, v súhlase s ktorým možno deriváciu súčinu niekoľkých funkcií nájsť ako súčet derivácií vypočítaných za predpokladu, že vždy iba jeden činiteľ je funkciou x a ostatné činitele považujeme za konštanty, v skutočnosti možno použiť nielen na súčin funkcií, ale i v druhých výrazoch. Ľahko sa presvedčíme, že aj vzťah pre deriváciu súčtu funkcií súhlasí s touto formuláciou.

Neskôr uvidíme, že táto formulácia sa používa napr. aj pri $g(x)^{h(x)}$, kde funkcia $g(x)$ je umocnená funkciou $h(x)$.

Cvičenia

1. Nájdite deriváciu funkcie $y = x^4$ ako deriváciu súčinu $x^4 = x^2 x^2$.
2. Nájdite derivácie funkcií:

$$y = (2x^2 + x)\sqrt{x},$$
$$y = \frac{x^3 + 5x^2}{x + 1},$$
$$y = \frac{x - 1}{x^2 + 2}.$$

5. MOCNINOVÁ FUNKCIA

Preskúmajme deriváciu funkcie

$$y = x^n$$

kde n je konštanta. Ak n je celé kladné číslo, x^n je súčin n rovnakých činiteľov

$$y = \overbrace{x\,x\,x \ldots x}^{n \text{ krát}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \overbrace{1 \,.\, x^{n-1} + 1 \,.\, x^{n-1} + \ldots + 1 \,.\, x^{n-1}}^{n \text{ krát}}$$

(podľa vzťahu tvaru 4.4), odkiaľ[1])

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = n\,x^{n-1}$$

Ukážeme, že tento vzťah je správny pre ľubovoľné n (racionálne, záporné).

Ak je n racionálne, zapíšeme ho v tvare $n = \frac{m}{p}$, kde m i p sú celé čísla. Dostaneme $y = x^{\frac{m}{p}}$ alebo

$$y^p = x^m \tag{5.1}$$

[1]) Pre n celé číslo možno tento vzťah dostať pomocou binomickej vety. Derivácia sa však ľahko nájde i bez binomickej vety, jej znalosť nie je nevyhnutne potrebná.

Výraz y^p na ľavej strane (5.1) je zložená funkcia, pretože y je závislé od x. Ak vypočítame derivácie obidvoch strán rovnice (5.1), dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^p) = py^{p-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = mx^{m-1}$$

Odtiaľ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{mx^{m-1}}{py^{p-1}} = \frac{m}{p}\,\frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{p}}\right)^{p-1}} = \frac{m}{p}\,\frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{p}}} = \frac{m}{p}\,x^{\frac{m}{p}-1}$$

Ak vezmeme do úvahy že $\frac{m}{p} = n$, nakoniec dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

Pri zápornom exponente $n = -k$, kde k je číslo kladné. Potom

$$y = x^n = x^{-k} = \frac{1}{x^k}$$

Podľa pravidla pre deriváciu zloženej funkcie $y = \frac{1}{f}$ pričom $f = x^k$, nájdeme:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f^2}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^{2k}}\,kx^{k-1} = -kx^{-k-1}$$

Po dosadení za $k = -n$ dostaneme aj pre záporné n výraz

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

Takýmto spôsobom výraz pre deriváciu $y = x^n$ možno použiť pre ľubovoľný racionálny exponent n. Možno ho rozšíriť aj pre prípad iracionálneho exponenta.

Tento vzťah má dôležitý význam. Hoci je veľmi jednoduchý, bude rozumné zapísať ho ešte v inom tvare

$$y = c\,x^n, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = n\,\frac{y}{x} \tag{5.2}$$

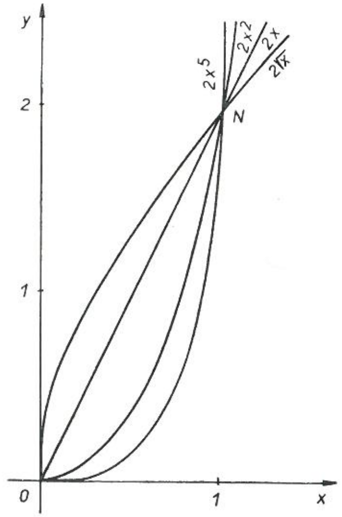
Nad týmto výsledkom sa treba hlboko zamyslieť. Pre kladné n funkcia $y = x^n$ sa vyznačuje tou vlastnosťou, že ak $x = 0$, aj y sa rovná 0. Krivku $y = c\,x^n$ pri danom $n > 0$ možno viesť ľubovoľným bodom (x_0, y_0). Nájdeme strednú hodnotu derivácie na úseku krivky od začiatku súradnicového systému po bod (x_0, y_0). V súhlase s poznatkom o strednej hodnote (pozri kap. I čl. 13)

$$\bar{y}' = \frac{\int\limits_0^{x_0} y'(x)\,\mathrm{d}x}{x_0 - 0}$$

ak použijeme vzťah (11.9) z kapitoly I, dostaneme:

$$\bar{y}' = \frac{y(x_0) - y(0)}{x_0} = \frac{y(x_0)}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$$

Totiž pri zmene x od 0 do x_0, y rastie od 0 do y_0. To znamená, že stredná rýchlosť rastu y (t. j. stredná hodnota derivácie) sa rovná $\frac{y_0}{x_0}$, čo je zrejmé aj bez integrálov!



Obr. 41

Ako vidieť zo vzťahu (5.2), hodnota derivácie v bode (x_0, y_0) je n-krát menšia (n-exponent) ako stredná hodnota derivácie. Na *obr. 41* je znázornených niekoľko kriviek s rôznymi n $\left(n = \frac{1}{2}, 1, 2, 5\right)$, ktoré prechádzajú tým istým bodom $N(x_0, y_0)$, a to znamená, že majú rovnakú strednú hodnotu derivácie na intervale $\langle 0, x_0\rangle$. Z obrázka názorne vidieť, že čím je väčšie n, tým je väčšia derivácia v bode N (krivka rastie strmšie). Vráťme sa ešte raz k vzťahu (5.2)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = n\,\frac{y}{x}$$

Odtiaľ $\mathrm{d}y = n\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x$ a pre malé prírastky

$$\Delta y = n\,\frac{y}{x}\,\Delta x \tag{5.3}$$

Závislosť (5.3) budeme pokladať za dostatočne presnú pre $\Delta x = 0{,}01x$, t. j. pri zmene argumentu o 1 %. Vtedy z (5.3) dostaneme:

$$\Delta y = n \frac{y}{x} \,.\, 0{,}01x$$

alebo

$$\Delta y = n \,.\, 0{,}01y$$

Pri zmene argumentu o 1 % funkcia $y = x^n$ s exponentom n sa mení o n %.

Cvičenia

Nájdite derivácie funkcií:

1. $y = x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 2x + 4$.

2. $y = (x^3 + x + 1)^2$.

3. $y = (x^2 - x + 1)^4$.

4. $y = (3x^3 - 1)^{10}$.

5. $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

6. $y = \sqrt[5]{x^2}$.

7. Nájdite hodnoty $y(9)$ a $y(11)$, ak je dané, že $y(10) = 5$ pre prípad:

a) $y \sim \sqrt{x}$, [1]

b) $y \sim \frac{1}{x}$,

c) $y \sim x^2$.

Úlohu riešte úvahou, bez výpočtov. Porovnajte výsledky s presným riešením.

6. DERIVÁCIA ALGEBRAICKÝCH FUNKCIÍ

Súhrn pravidiel v častiach 1 až 5 dovoľuje nájsť deriváciu ľubovoľnej funkcie, ktorú získame sčítaním, odčítaním, násobením a delením, umocnením na konštantného mocniteľa vrátane lomeného mocniteľa — odmocniny.

Na jednom príklade ukážeme, ako sa to prakticky robí. Nájdeme deriváciu funkcie

$$f(x) = x \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

Výsledok treba písať naraz, bez zavádzania nových označení (ako $\sqrt[3]{x^2 - 1} = y$). Derivácia sa počíta akoby osobitne podľa každého vý-

[1]) Znamienko $\sim$ označuje úmernosť.

razu, ktorý obsahuje x. Odporúčame si zapamätať ako vzor nasledujúce. (Písmená „a", „b", „c" ... ukazujú, na aké miesta vo vyjadrení derivácie, ktorá je uvedená nižšie, sa vzťahujú slová.) (a) — znamená deriváciu podľa x, ktoré stojí pred odmocninou, plus (b) derivácia podľa $\sqrt[3]{x^2 - 1}$ násobené (c), kde (c) je derivácia výrazu $\sqrt[3]{x^2 - 1}$ podľa $x^2 - 1$ násobená (d) t. j. deriváciou $x^2 - 1$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \overbrace{\sqrt[3]{x^2 - 1}}^{(a)} \overbrace{+\, x \,.}^{(b)} \overbrace{\frac{1}{3}\, \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{x^2 - 1}}^{(c)} \overbrace{2x}^{(d)}$$

Najrozumnejšie je hneď od začiatku sa naučiť tento užitočný spôsob, bez zbytočného písania, pričom sa dodržiavajú nasledujúce pravidlá:

a) pravidlo derivovania zloženej funkcie (čl. 3 vzťahy (3.2), (3.4));

b) ak je výraz zostavený z niekoľkých funkcií, jeho derivácia sa rovná súčtu derivácií, ktoré vypočítame za predpokladu, že vždy uvažujeme len jednu z funkcií a ostatné pokladáme za konštanty (čl. 4, vzťahy (4.2), (4.4), (4.6)).

Vzťahy pre deriváciu mocniny je vhodné používať v tvare

$$y = c\,x^n, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = n\,\frac{y}{x}$$

ako sme to urobili vo vyššie uvedenom príklade (pozri výraz (c)).

Aby sme získali zručnosť pri derivovaní, je potrebné vypočítať 10 až 20 cvičení len na techniku derivovania, bez zreteľa na fyzikálne úlohy.

Cvičenia

Nájdite derivácie funkcií:

1. $y = x^3 (x^2 - 1)^2$.

2. $y = x^3 \sqrt{x^2 + x}$.

3. $y = x^5 \sqrt[3]{x^2 - 1}\, (x^3 - 2x)^{\frac{1}{5}}$.

4. $y = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sqrt{x^3 - 2}$.

5. $y = x^2 \sqrt{\sqrt[3]{x} + x}$.

6. $y = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^5 x$.

7. $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$.

8. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

9. $y = \dfrac{(x - 1)(x + 3)}{x + 1}$.

10. $y = \dfrac{3x - 1}{x^5}\sqrt{x^3 + 2}$.

11. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

12. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x + 1}}$.

13. $y = \sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}$.

14. $y = x\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}$.

15. $y = \dfrac{x^2 - 2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$.

16. $y = x\sqrt[3]{(2x + 3)^2}$.

17. $y = (x^3 - 1)\sqrt{x - 1} + x\sqrt[3]{x^2 - 1}$.

18. $y = \dfrac{x\sqrt[3]{(2x - 3)^2}}{(x - 1)^2}$.

19. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$.

20. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}\sqrt{x + 1}$.

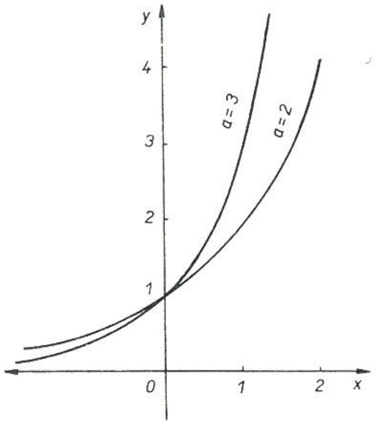
21. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2 - 1}}{x^3 + 1}$.

22. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}}$.

23. $y = x\sqrt{x^2 - 1}\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$.

24. $y = \left(x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{7}} x^2$.

25. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2x}{(x + 1)^{\frac{1}{3}}}$.



Obr. 42

7. EXPONENCIÁLNA FUNKCIA

Preskúmajme funkciu

$$y = a^x$$

kde číslo a je väčšie ako 1. Graf funkcie x je na *obr. 42*. Ak $x = 0$, sa $y = 1$ pre ľubovoľné a.

Funkcia y je kladná pre všetky hodnoty x. Pretože s rastúcim x funkcia y rastie, je aj jej derivácia všade kladná. Ak zväčšíme x o konštantu c, dostaneme:

$$y(x + c) = a^{x+c} = a^c a^x = b\, a^x = \\ = b\, y(x)$$

kde $b = a^c$; hodnota y sa násobí konštantou. Ak sa takto bude x meniť postupne, po rovnakých hodnotách (aritmetickou postupnosťou)

$$x = x_0, \quad x_0 + c, \quad x_0 + 2c, \ldots, x_0 + nc$$

y bude nadobúdať hodnoty y_0, by_0, b^2y_0, ..., b^ny_0. Takúto zákonitosť rastu nazývame geometrickou postupnosťou.

Nájdeme deriváciu exponenciálnej funkcie pre $a = 10$ [1])

$$\frac{\mathrm{d}(10^x)}{\mathrm{d}x} = \frac{10^{x+\mathrm{d}x} - 10^x}{\mathrm{d}x} = 10^x \frac{10^{\mathrm{d}x} - 1}{\mathrm{d}x}$$

Ako určíme podiel $\dfrac{10^{\mathrm{d}x} - 1}{\mathrm{d}x}$?

Vypočítame limitu z výrazu $\dfrac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, ak $\Delta x \to 0$. Túto limitu nájdeme výpočtom „aritmeticky". Ak použijeme štvormiestne logaritmické tabuľky, dostaneme:

$$10^{0,1} = 1{,}2586, \qquad \frac{10^{0,1} - 1}{0{,}1} = 2{,}586$$

$$10^{0,01} = 1{,}0233, \qquad \frac{10^{0,01} - 1}{0{,}01} = 2{,}33$$

$$10^{0,001} = 1{,}0023, \qquad \frac{10^{0,001} - 1}{0{,}001} = 2{,}3$$

Vypočítali sme, že

$$\frac{10^{\mathrm{d}x} - 1}{\mathrm{d}x} \doteq 2{,}3\ ^{2)}$$

Derivácia sa rovná

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(10^x) = 10^x \,.\, 2{,}3\ ^{3)}$$

[1]) Preto $a = 10$, aby sa zjednodušili výpočty.

[2]) Uvedený vzťah je len približný. Pre limitu uvedeného podielu presne platí:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln 10 = 2{,}302\,585\,09\ldots$$

Uvedené „hľadanie aritmetickým výpočtom" je založené na tom, že vopred predpokladáme existenciu tejto limity a uvedeným postupom nájdeme jej približnú hodnotu. Pozn. prekl.

[3]) Uvedený vzťah je opäť iba približný. Presne platí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(10^x) = 10^x \ln 10$$

Môžeme povedať, že deriváciu 10^x sme našli skusmo a pomocou tabuliek. Úlohu pre inú ľubovoľnú exponenciálnu funkciu budeme teraz riešiť tak, že ju prevedieme na predchádzajúcu. Ak použijeme definíciu logaritmu, môžeme písať:

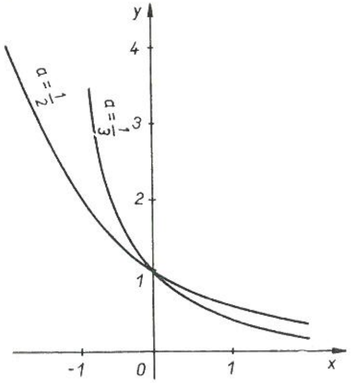
$$a = 10^{\log a}, \quad a^x = 10^{x \log a}$$

Podľa pravidla pre deriváciu zloženej funkcie dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = 10^{x \log a} \,.\, 2{,}3 \,.\, \log a = a^x \,.\, 2{,}3 \,.\, \log a \text{ [1]} \qquad (7.1)$$

Zvláštnosť exponenciálnej funkcie spočíva v tom, že jej derivácia je priamoúmerná samotnej funkcii. Z toho vyplýva hlavná vlastnosť geometrickej postupnosti: čím je väčší člen postupnosti, tým rýchlejšie postupnosť rastie $q > 1$.

Ak je v exponenciálnej funkcii $0 < a < 1$, graf funkcie má priebeh znázornený na *obr. 43.* Ak sa x zväčšuje podľa aritmetickej postupnosti, y sa zmenšuje geometrickou postupnosťou. Vzťah (7.1) sa dá použiť. V tomto vzťahu $\log a$ je záporný pri $a < 1$ a derivácia, pretože je priamoúmerná funkcii, má opačné znamienko.



Obr. 43

V kapitole V. ukážeme niekoľko príkladov, v ktorých sa veličina v priebehu času zmenšuje tak, že rýchlosť zmenšenia je v danom čase priamoúmerná samotnej veličine

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$$

Z predchádzajúceho vyplýva, že riešením úlohy v tomto prípade je exponenciálna funkcia

$$y = y_0 a^t \qquad (a < 1)$$

Podrobnejšie o týchto úlohách si povieme v kapitole V.

---

[1]) Presný vzťah je:

$$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = a^x \ln 10 \log a$$

Pozn. prekl.

Cvičenia

Nájdite derivácie funkcií:

1. $y = 10^{\sqrt{x}}$.
2. $y = 2^x$.
3. $y = 5^{x+1}$.
4. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

8. ČÍSLO e

Nájdime taký základ, pri ktorom derivácia exponenciálnej funkcie by mala najjednoduchší tvar, aby sa totiž koeficient priamej úmernosti rovnal jednej a nemusel sa písať. Tento základ označíme písmenom e. Potom

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x \qquad (8.1)$$

Pomocou vzťahu (7.1) možno toto číslo ľahko vypočítať:

$$2{,}3 \,.\, \log \mathrm{e} = 1, \qquad \log \mathrm{e} = \frac{1}{2{,}3} = 0{,}4343 \text{ [1]}$$

čomu v logaritmických tabuľkách zodpovedá číslo

$$\mathrm{e} = 2{,}718$$

Tento postup nezodpovedá historickému rozvoju vedy a v podstate nie je uspokojivý. Pri výpočte sme zobrali čísla z logaritmických tabuliek a pritom sme nepremýšľali, ako sú vypočítané[2]).

Nájdime číslo e zo vzťahu (8.1), podľa vlastností exponenciálnych funkcií $\mathrm{e}^\circ = 1$. Preskúmame funkciu $y = \mathrm{e}^x$. Vtedy $y(0) = 1$ a zo vzťahu (8.1) aj $y'(0) = 1$.

---

[1]) Uvedené vzťahy sú len približné. Presne platí:

$$\ln 10 \,.\, \log \mathrm{e} = 1, \qquad \log \mathrm{e} = \frac{1}{\ln 10}$$

$$\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$$

Pozn. prekl.

[2]) Presnosť, s akou je tu dané číslo e, je oveľa lepšia, ako keď sme číslo e určovali pomocou derivácie 10^x a použili sme štvormiestne logaritmické tabuľky.

Zoberieme malé $\Delta x = r$ a vypočítame prírastok funkcie $y = e^x$ pri prechode x od $x = 0$ do $x = r$; $y = y'\Delta x$. Preto $\Delta y = 1.\ x = r$; $y(x) = y(0) + \Delta y$, odkiaľ

$$e^r = 1 + r \tag{8.2}$$

Malé číslo r zapíšeme ako zlomok s veľkým menovateľom: $r = \frac{1}{n}$, ak $r \ll 1$, tak $n \gg 1$[1]). Vtedy z (8.2) vyplýva:

$$e^{\frac{1}{n}} \doteq 1 + \frac{1}{n} \quad \text{odkiaľ} \quad e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Tento výraz je tým presnejší, čím je väčšie n, takže presná definícia čísla e je:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(číta sa: e je limita postupnosti $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ak n sa blíži k nekonečnu).

Netreba sa obávať slov „limita", „nekonečno". Napríklad $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}705$, čo sa pomerne málo odlišuje od presnej hodnoty. Odporúčame, aby čitateľ sám našiel hodnotu výrazu $\left(1 + \frac{1}{8}\right)^8$.

Dostali sme, že pre malé r

$$e^r = 1 + r$$

čo je tým presnejšie, čím je r menšie[2]).

Preskúšajme to na číslach.

Tabuľka 1

r	$1 + r$	e^r	r	$1 + r$	e^r
—0,5	0,5	0,6065	0	1	1
—0,4	0,6	0,6703	+0,01	1,01	1,0101
—0,3	0,7	0,7408	0,1	1,1	1,1052
—0,2	0,8	0,8187	0,2	1,2	1,2214
—0,1	0,9	0,9048	0,3	1,3	1,3499
—0,01	0,99	0,9900	0,4	1,4	1,4918
			0,5	1,5	1,6487

[1]) Zápis $r \ll 1$ značí, že číslo r je oveľa menšie ako 1.

[2]) Pre funkciu $y = e^x$ sú zostavené podrobné tabuľky.

Z *tab. 1*[1]) vidíme, že dokonca pri $r = \pm 0{,}3$ chyba nie je vyššia ako 6 %. Pre výpočty je užitočné si zapamätať nielen $e = 2{,}718$, ale i približné hodnoty $e^2 \doteq 7{,}4$, $e^3 \doteq 20$, $e^4 \doteq 55$, $e^5 \doteq 150$. Stručná tabuľka e^x a e^{-x} je daná v prílohe ku kapitole II., str. 169.

Pomocou čísla e sa zjednodušuje riešenie úloh s geometrickou postupnosťou a zložité úlohy o percentách. Rozoberieme príklad: o koľkokrát vzrastie priemyselná výroba za 50 rokov pri každodennom raste o 2 %? Treba vypočítať $1{,}02^{50}$. Využitie čísla e spočíva v tom, že zameníme $1{,}02 = e^{0{,}02}$, odkiaľ dostaneme $1{,}02^{50} = e^{0{,}02 . 50} = e \doteq 2{,}72$. Všeobecný vzťah na využitie čísla e teda bude mať tvar

$$(1 + r)^m = e^{mr} \ (r \ll 1) \tag{8.3}$$

Ak chceme využiť tento vzťah m stačí, aby bolo r malé; m a mr nemusia byť malé. Ak je však aj mr malé, potom $e^{mr} = 1 + mr$ a dostaneme už skôr známy vzťah $(1 + r)^m = 1 + mr$, ktorý sa pri veľkých mr nemôže použiť. Vzťah (8.3) platí i pre veľké mr.

V príklade uvedenom vyššie je presná hodnota $1{,}02^{50} = 2{,}693$, približná hodnota je $1{,}02^{50} = e^1 = 2{,}718$ a podľa vzťahu $(1 + r)^m = 1 + mr$ dostaneme $1 + 50 . 0{,}2 = 2$. Pri výpočte pomocou čísla e je chyba 1 %, pri výpočte podľa vzťahu $(1 + r)^m = 1 + mr$ je chyba 25 %. Všeobecný tvar vzťahu na odhad presnosti je daný v čl. 17, cvičenie **5**.

Ak je číslo e určené podľa vzťahu (8.1), majú derivácie exponenciálnych funkcií zvlášť jednoduchý tvar i pre prípad, keď číslo e je umocnené. Tieto derivácie sa vhodne vyjadrujú pomocou samotnej funkcie. Uvedieme celý rad vzťahov

$$y = e^x, \qquad \frac{dy}{dx} = e^x = y$$

$$y = Ce^x, \qquad \frac{dy}{dx} = C\frac{de^x}{dx}\,Ce^x = y$$

$$y = Ce^{kx}, \qquad \frac{dy}{dx} = C\frac{de^{kx}}{dx} = Ce^{kx}\frac{d(kx)}{dx} = ky$$

$$y = e^{m(x)}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{de^{m(x)}}{dx} = e^{m(x)}\frac{dm(x)}{dx} = y\frac{dm(x)}{dx}$$

[1]) Hodnoty e^x sú brané zo štvormiestnych tabuliek.

$$y = f(x)\,e^{m(x)}, \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x)\,e^{m(x)} + f(x)\,e^{m(x)}m'(x) = $$
$$= y\left(\frac{f'(x)}{f(x)} + m'(x)\right)$$

Exponenciálna funkcia premennej x so základom e sa zapisuje v tvare e^x. Ak sa však x rovná zložitému a rozsiahlemu výrazu, tento zápis nie je už vhodný. Napríklad, ak $x = \left(\frac{7t^2 + 24t}{t^3 + 5}\right)^3$ vo výraze

$$e^{\left(\frac{7t^2+24t}{t^3+5}\right)^3}$$

môžeme jednoducho písmeno e nespozorovať, alebo nepochopiť, na čo sa vzťahuje. Preto sa používa ešte jeden zápis pre funkciu e^x

$$e^x = \exp(x)$$

(číta sa „exponent iks“, zo slova „exponent“ — mocniteľ) a závislosť e^x a samotná funkcia e^x sa nazýva exponenciálna.

Podľa nového označenia náš príklad nadobudne nasledujúci tvar

$$e^x = \exp\left[\left(\frac{7t^2 + 24t}{t^3 + 5}\right)^3\right]$$

Záver: Z predchádzajúcich úvah vyplývajú tri rozličné definície čísla e

1. z podmienky $(e^x)' = e^x$,
2. z podmienky $e^r = 1 + r$ pri $r \ll 1$,[1])
3. z limity $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pri $n \to \infty$.

Na objasnenie tohto veľmi dôležitého rozdielu musí čitateľ bez použitia knihy sám ukázať, ako z každej definície vyplývajú ďalšie dve, odvodené ako vlastnosti e.

Číslo e má aj iné pozoruhodné definície a vlastnosti. Napríklad rad, pomocou ktorého sa dá presne vypočítať číslo e, je daný v ďalšom na str. 143 vzťah (18.2). Správnosť vzťahu $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, kde $i = \sqrt{-1}$

---

[1]) V tomto prípade ide vlastne o limitu

$$\lim_{r \to 0} \frac{e^r - 1}{r} = 1$$

Pozn. prekl.

je imaginárna jednotka; pre malé φ možno si ju približne overiť tým, že z druhej podmienky pre e vyplýva $e^{i\varphi} = 1 + i\varphi$ a $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$ pre $\varphi \ll 1$. Keďže funkcie $\sin(\omega t)$ a $\cos(\omega t)$ opisujú harmonické kmitanie, funkcia $e^{i\omega t}$ sa veľmi často využíva v teórii kmitov.

Cvičenia

Nájdite derivácie funkcií v príkladoch **1** až **5**:

1. $y = e^{-x}$. **2.** $y = e^{x^2}$.

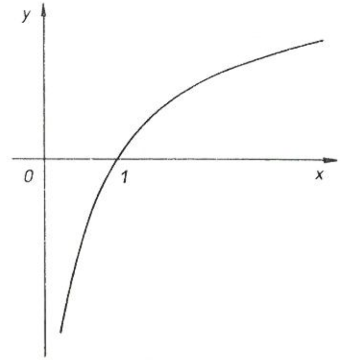
3. $y = e^{x^3-3x+1}$. **4.** $y = e^{\sqrt{x}}$.

5. $y = 5\,e^x - e^{3x}$.

9. LOGARITMY

Podľa definície logaritmom čísla f pri základe a je mocniteľ g, ktorým treba povýšiť číslo a (základ logaritmu), aby sme dostali dané číslo f

$$f = a^g, \qquad g = \log_a f$$



Obr. 44

Krivka, zobrazujúca závislosť $y = \log_a x$ (pre $a > 1$), je zobrazená na *obr. 44.* Poznamenajme, že $y = 0$ pri $x = 1$; $y > 0$ pri $x > 1$ a pri $x < 1$ je $y < 0$. Celá krivka je rozložená doprava od osi y. Pretože kladné číslo a umocnené ľubovoľným exponentom dá číslo kladné, logaritmy záporných čísiel neexistujú. Treba si ešte všimnúť, že v rovnostiach $y = \log_a x$, $x = a^y$ veličiny x, y, a sú bezrozmerné.

Ako vidieť z *obr. 44,* derivácia funkcie $y = \log_a x$ je kladná pre všetky hodnoty x; so zväčšovaním x sa derivácia zmenšuje. Logaritmy pri základe e (pozri čl. 8) sa nazývajú prirodzené. Označujú sa $\ln x$ ($\lg x$).

Nájdime deriváciu prirodzeného logaritmu. Uvažujme $d\ln x = \ln(x + dx) - \ln x$. Použijeme známy vzťah $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$. Potom

$$d\ln x = \ln\frac{x + dx}{x} = \ln\left(1 + \frac{dx}{x}\right) \tag{9.1}$$

Už vieme, (pozri čl. 8), že pre malé r

$$e^r \doteq 1 + r$$

Zlogaritmujeme obidve strany

$$\ln e^r = r \doteq \ln (1 + r) \tag{9.2}$$

Ak použijeme (9.2) z (9.1), dostaneme:

$$\mathrm{d} \ln x = \ln \left(1 + \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Preto

$$\frac{\mathrm{d} \ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \tag{9.3}$$

Deriváciu prirodzeného logaritmu možno nájsť ako deriváciu inverznej funkcie, pretože logaritmická funkcia je inverzná k exponenciálnej funkcii. Zapíšeme:

$$y = \ln x, \quad x = e^y, \quad x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}(e^y)}{\mathrm{d}y} = e^y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Keď sa x mení podľa geometrickej postupnosti, mení sa $\ln x$ podľa aritmetickej postupnosti

$$x = ab^m, \quad \ln x = \ln a + m \ln b$$

preto, čím je väčšie x, tým pomalšie rastie $\ln x$ a tým je menšia derivácia.

Odvodíme vzťah, ktorý spája logaritmy jedného a toho istého čísla pri rôznych základoch. Nech

$$f = \log_a h, \qquad a^f = h \tag{9.4}$$

Zlogaritmujeme obidve strany druhej rovnosti (9.4) pri základe b : $f \log_b a = \log_b h$, odkiaľ $f = \dfrac{\log_b h}{\log_b a}$. Ak vezmeme do úvahy (9.4), dostaneme:

$$\log_a h = \frac{\log_b h}{\log_b a} \tag{9.5}$$

Ak použijeme (9.5), môžeme dostať deriváciu logaritmu pri ľubovoľnom základe. Nech $y = \log_a x$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\ln a} \frac{\mathrm{d} \ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{9.6}$$

Dosaďme do (9.5) $b = e$ a $h = e$, dostaneme: $\log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$ a vzťah (9.6) prepíšeme na tvar

$$\frac{\mathrm{d} \log_a x}{\mathrm{d}x} = \frac{\log_a e}{x} \tag{9.7}$$

Zo vzťahov (9.3), (9.6), (9.7) je najjednoduchší (9.3), ktorý dostaneme logaritmovaním pri základe e.

Pre približné výpočty, ktoré sme robili v hlave, je užitočné si zapamätať: $\ln 2 \doteq 0{,}69$, $\ln 3 \doteq 1{,}1$, $\ln 10 \doteq 2{,}3 \doteq \dfrac{1}{0{,}434}$. Stručná tabuľka prirodzených logaritmov je v prílohe ku kapitole II, str. 169, *tab. V*.

Ak za znakom logaritmu stojí ľubovoľná funkcia $f(x)$, deriváciu nájdeme podľa pravidla na derivovanie zloženej funkcie (čl. 3):

$$\frac{\mathrm{d} \ln f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f(x)} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \tag{9.8}$$

Vidíme, že ak použijeme pojem logaritmu, ľahko nájdeme deriváciu funkcie $y = a^x$ pri ľubovoľnom a. Skutočne, keď $\ln y = x \ln a$, potom $y = e^{x \ln a}$, odkiaľ

$$y' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a = y \ln a$$

Vzťah (9.8) dáva možnosť hľadať derivácie výrazov tvaru $f(x)^{h(x)}$, t. j. takých, ktoré obsahujú premennú ako v základe, tak i v exponente. Nech

$$y = f(x)^{h(x)} \tag{9.9}$$

zlogaritmujeme tento vzťah (logaritmy možno zobrať pri ľubovoľnom základe; zoberieme prirodzené)

$$\ln y = h(x) \ln f(x) \tag{9.10}$$

Zderivujeme obidve strany (9.10), pritom musíme mať na zreteli, že $\ln y$ je zložená funkcia x [tak isto ako $\ln f(x)$]

$$\frac{1}{y} y' = h'(x) \ln f(x) + h(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

odkiaľ

$$y' = y \left[h'(x) \ln f(x) + h(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

alebo, ak použijeme (9.9),

$$y' = f(x)^{h(x)} h'(x) \ln f(x) + h(x) f(x)^{h(x)-1} f'(x) \tag{9.11}$$

Rozoberieme vzťah (9.11). Na pravej strane je súčet dvoch členov: prvý člen $f(x)^{h(x)} \,.\, h'(x) . \ln f(x)$ je derivácia výrazu f^h, ktorá sa vypočíta za predpokladu, že premennou je len h a f je konštanta; druhý člen $h(x) \,.\, f(x)^{h(x)-1} \,.\, f'(x)$ je derivácia výrazu f^h, ktorá sa vypočíta za predpokladu, že f je premenná a h je konštanta. Tým sa potvrdzuje všeobecné pravidlo uvedené na konci čl. 4.

Cvičenia

1. Na základe $\ln 10$ nájdite $\ln 100$.

2. Použite vzťah (9.5) a nájdite $\log_5 15$.

3. Použite vzťah $\ln (uv) = \ln u + \ln v$ a jeho deriváciu pri odvodení vzťahu pre deriváciu súčinu.

4. Pomocou vzťahu $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$ nájdite vzťah pre deriváciu podielu.

Nájdite derivácie funkcií v príkladoch **5** až **14**:

5. $y = \ln 2x$. **6.** $y = \ln (x + 3)$.

7. $y = \ln 3x$. **8.** $y = \ln (x^2 + 1)$.

9. $y = \ln (3x^2 - x + 1)$. **10.** $y = \ln \frac{x - 1}{x + 1}$.

11. $y = \ln \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$. **12.** $y = x \ln x$.

13. $y = x^3 \ln (x + 1)$. **14.** $y = x^x$.

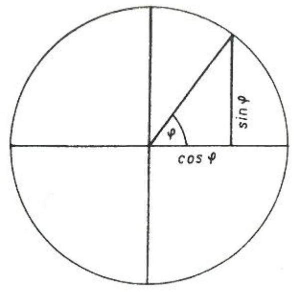
15. $y = x^{\sqrt{x^2-1}}$.

10. TRIGONOMETRICKÉ FUNKCIE

V tomto článku nájdeme derivácie trigonometrických funkcií.

Trigonometrické funkcie sa definujú ako pomer úsečiek, a teda sú bezrozmerné. Závisia od bezrozmernej veličiny, od uhla.

Trigonometrické funkcie pri veľkosti uhla od 0° do 90° sa definujú ako pomer úsečiek v pravouhlom trojuholníku (sínus uhla sa rovná pomeru protiľahlej odvesny k prepone atď.). My však chceme definovať funkcie pre ľubovoľné uhly, teda väčšie ako pravé i záporné, preto trigonometrické funkcie budeme definovať pomocou kružnice.

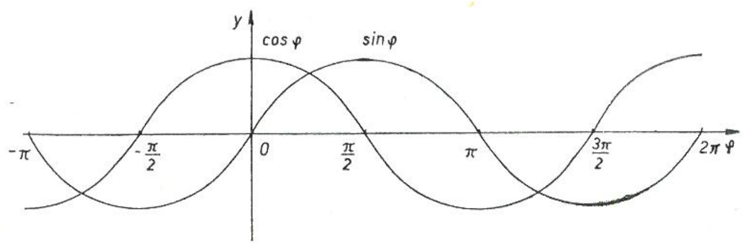


Obr. 45

Jedinou mierou uhla, ktorá sa používa vo vyššej matematike, je oblúková miera a jej jednotka — jeden radián. Stručné tabuľky trigonometrických funkcií, pričom uhol je v oblúkovej miere, sú dané v prílohe ku kapitole II, *tab. VI*.

Aby sme nemuseli vždy hovoriť o sínuse ako o pomere úsečky k polomeru kružnice alebo o uhle ako pomere dĺžky oblúka k polomeru, budeme uvažovať kružnicu s polomerom rovnajúcim sa jednej, tzv. jednotkovú kružnicu. Potom môžeme krátko povedať, že sínus sa rovná dĺžke úsečky $\sin \varphi$ v kruhu, v ktorom sa uhol rovná dĺžke oblúka atď.

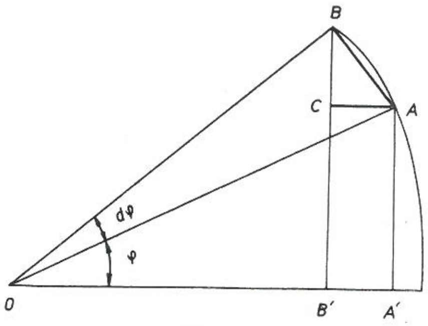
Musíme si pamätať, že trigonometrické funkcie aj uhly sú bezrozmerné a nemerajú sa jednotkami dĺžky (cm, dm, m). Sínus sa rovná dĺžke úsečky sínus (cm) delenej dĺžkou polomeru (cm) a pri $r = 1$ cm sa číselne rovná dĺžke úsečky sínus. Grafy funkcií sínus i kosínus sú znázornené na *obr. 45*.



Obr. 46

Pripomeňme si tvar grafov funkcií sínus a kosínus v závislosti od uhla (*obr. 46*). Perióda funkcie sínus aj kosínus sa rovná $2\pi \doteq 6{,}28$ a zodpovedá celej otáčke polomeru kružnice.

Nájdime derivácie funkcií sínus a kosínus pomocou geometrických úvah. Na *obr. 47* je koniec polomeru vedeného pod uhlom φ označený A; koniec polomeru vedeného pod uhlom $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ je označený B. Takýmto spôsobom dĺžka oblúka AB zodpovedá $\mathrm{d}\varphi$. Veďme z bodu A kolmicu AC na úsečku sínusu uhla $\varphi + \mathrm{d}\varphi$, BB'. Ako vidieť z *obr. 47*



Obr. 47

$$AA' = \sin\varphi, \quad BB' = \sin(\varphi + \mathrm{d}\varphi)$$

a

$$BC = \sin(\varphi + \mathrm{d}\varphi) - \sin\varphi = \mathrm{d}(\sin\varphi)$$

Ďalej

$$OA' = \cos\varphi, \quad OB' = \cos(\varphi + \mathrm{d}\varphi)$$

a

$$A'B' = AC = \cos\varphi - \cos(\varphi + \mathrm{d}\varphi) = -\mathrm{d}(\cos\varphi)$$

Ak je uhol $\mathrm{d}\varphi$ malý, dĺžka oblúka AB sa nelíši od dĺžky tetivy AB a uhol ABC utvorený tetivou AB a kolmicou BCB' sa rovná φ[1]).

V trojuholníku ABC platí, že $BC = AB\cos\varphi$, $AC = AB\sin\varphi$. Na základe tohto

$$\mathrm{d}(\sin\varphi) = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}(\cos\varphi) = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

a

$$\frac{\mathrm{d}(\sin\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \cos\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}(\cos\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = -\sin\varphi \tag{10.1}$$

Ukážeme ešte iný spôsob výpočtu derivácie $\sin\varrho$ a $\cos\varrho$ bez použitia obrázka. Podľa všeobecných vzorcov sa $\Delta\sin\varphi = \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi$. Pripomeňme si vzťah, ktorý udáva sínus súčtu dvoch uhlov

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

---

[1]) Presná hodnota uhla sa rovná $\varphi + \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{2}$, ale trojuholník ABC je malý ($AB = \mathrm{d}\varphi$), preto ak zanedbáme $\mathrm{d}\varphi$ vo výraze pre uhol ABC, dopustíme sa v hodnotách BC a AC chyby úmernej $(\mathrm{d}\varphi)^2$.

a použijeme ho na $\sin(\varphi + \Delta\varphi)$. Dostaneme:

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi\cos\Delta\varphi + \cos\varphi\sin\Delta\varphi$$

odtiaľ

$$\Delta\sin\varphi = \sin\varphi\cos\Delta\varphi + \cos\varphi\sin\Delta\varphi - \sin\varphi$$

Zostavme podiel prírastkov

$$\frac{\Delta\sin\varphi}{\Delta\varphi} = \cos\varphi\,\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} - \sin\varphi\,\frac{1 - \cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi}$$

Teraz treba prejsť k limite, ak $\Delta\varphi \to 0$. Je známe, že pri uhloch α alebo $\Delta\varphi$, ktoré sa blížia k nule, sínus sa rovná oblúku: $\sin\alpha \doteq \alpha$, $\sin\Delta\varphi \doteq \Delta\varphi$. Inými slovami

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1$$

Druhý člen nahradíme zo známeho vzťahu

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha, \quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$1 - \cos\Delta\varphi = 2\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

V tomto vzťahu pri malom $\Delta\varphi$ nahradíme $\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right) \doteq \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{2}$. Dostaneme:

$$\frac{1 - \cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \doteq \frac{2\left(\dfrac{\Delta\varrho}{2}\right)^2}{\Delta\varphi} \doteq \frac{\Delta\varphi}{2}$$

V limite pri $\Delta\varphi \to 0$ druhý člen vypadne: $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \dfrac{1 - \cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 0$.

Odtiaľ

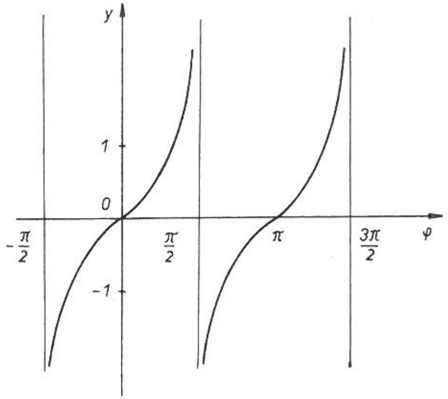
$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta\sin\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\mathrm{d}\sin\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \cos\varphi$$

Vzťahy (10.1) sú správne pre ľubovoľné uhly a nielen pre uhly z I. kvadrantu. Pri pohľade na graf funkcie $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ si overíme, že vzťah (10.1) dá správne znamienko derivácie pri ľubovoľnom uhle φ a nielen pre uhly z I. kvadrantu.

Overíme ešte vzťahy (10.1) pre malé uhly. Pri malom φ je z geometrického hľadiska zrejmé, že $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Prvý vzťah $\dfrac{\mathrm{d}\sin\varphi}{\mathrm{d}\varphi} =$

$= \cos\varphi$ pri malom φ sa $\frac{\mathrm{d}\sin\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \doteq 1$. Druhý vzťah $\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \doteq -\varphi$ a $\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = 0$, ak $\varphi = 0$. Z tohto vzťahu vyplýva, že funkcia kosínus má maximum pri $\varphi = 0$.

Ak poznáme deriváciu funkcie $y = \sin x$ a $y = \cos x$, ľahko nájdeme derivácie všetkých ostatných trigonometrických funkcií. Použijeme známe vzťahy medzi trigonometrickými funkciami.



Obr. 48

Napríklad vieme, že $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Preto

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{tg} x}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

podľa vzťahu pre deriváciu zlomku. Z tohto

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{tg} x}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{10.2}$$

Z *obr. 48*, na ktorom je graf $\operatorname{tg} x$, vidieť, že funkcia $y = \operatorname{tg} x$ má pre ľubovoľné x kladnú deriváciu. V okolí bodov nespojitosti $\left(x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, \ldots\right)$ derivácia rastie do nekonečna. Obidve tieto úvahy úplne súhlasia so vzťahom (10.2). Úplne analogickým postupom nájdeme:

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{cotg} x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Derivácie tangensu a kotangensu možno nájsť aj priamo. Pripomeňme si, že

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Odtiaľ

$$\Delta\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\Delta\varphi}{\cos(\varphi + \Delta\varphi)\cos\varphi} \tag{10.3}$$

Majúc na zreteli (pozri str. 111), že

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1$$

z (10.3) dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{1}{\cos(\varphi+\Delta\varphi)\cdot\cos\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

Cvičenia

Nájdite derivácie funkcií v príkladoch **1** až **9**:

1. $y = \sin(2x + 3)$.
2. $y = \cos(x - 1)$.
3. $y = \cos(x^2 - x + 1)$.
4. $y = \sin^2 x$.
5. $y = \sin 3x \cos^2 x$.
6. $y = (\sin 2x)^x$.
7. $y = x \operatorname{tg} x$.
8. $y = e^{\operatorname{tg} 2x}$.
9. $y = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$.

11. CYKLOMETRICKÉ FUNKCIE

Nové, veľmi zaujímavé výsledky dostávame pri skúmaní inverzných trigonometrických funkcií. Pripomeňme si definície týchto funkcií. Funkcia

$$y = \arcsin x \tag{11.1}$$

určuje taký uhol, pre ktorý platí:

$$\sin y = x\ [1] \tag{11.2}$$

Rovnosť (11.1) označuje to isté čo aj (11.2). Analogicky funkcia

$$y = \operatorname{arctg} x$$

určuje taký uhol y, pre ktorý platí:

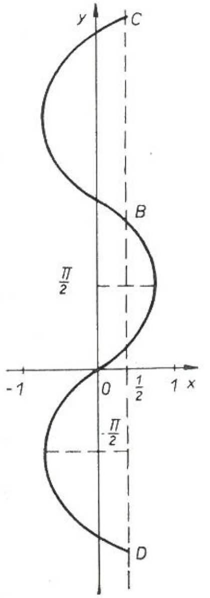
$$\operatorname{tg} y = x$$

[1] Takto zavedená funkcia je viacznačná, čiže nemožno ju chápať ako inverznú funkciu v zmysle vyššie uvedenej definície. Inverznou funkciou je jej „hlavná hodnota" $y = \sin x$, pozri ďalší text. Podobne pre ďalšie cyklometrické funkcie. Pozn. prekl.

Podobne sa určujú funkcie $y = \arccos x (x = \cos y)$ a $y = \operatorname{arccotg} x (x = \operatorname{cotg} y)$. Funkcia $y = \arcsin x$ je definovaná pre tie hodnoty x, ktoré vyhovujú nerovnosti $-1 \leqq x \leqq 1$, čo vidieť z (11.2). Funkcia $y = \operatorname{arctg} x$ je definovaná pre všetky hodnoty x.

Rozoberme podrobnejšie funkciu $y = \arcsin x$. Nech napr. $x = \frac{1}{2}$, $y = \arcsin \frac{1}{2}$. Keď zoberieme $y = \frac{\pi}{6}$, potom $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Môžeme takisto zobrať $y = \frac{5\pi}{6}$, potom $\sin \frac{5\pi}{6}$ sa tiež rovná $\frac{1}{2}$. Ďalej by bolo možné zobrať $y = \frac{13\pi}{6}$, $y = \frac{17\pi}{6}$ atď. Vidíme, že jednej hodnote x zodpovedá nekonečne veľa hodnôt y. Všetky tieto vlastnosti funkcie $y = \arcsin x$ sú viditeľné na grafe (*obr. 49*).

Budeme skúmať časť krivky, pre ktorú $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$. Táto časť krivky zodpovedá hlavnej hodnote funkcie $y = \arcsin x$, ktorá sa označuje $y = \arcsin x$ (píše sa s malým a). Ak sa obmedzíme na skúmanie $y = \arcsin x$, potom každému x zodpovedá len jedna hodnota y. Hlavnú hodnotu arkustangensu určujeme podobne



Obr. 49

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{arctg} x \leqq \frac{\pi}{2}$$

Nájdeme deriváciu funkcie $y = \arcsin x$. Využijeme tú vlastnosť, že arkussínus je inverzná funkcia k funkcii sínus

$$y = \arcsin x, \qquad x = \sin y$$

$$x'y = \frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$y'x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'y} = \frac{1}{\cos y} \tag{11.3}$$

Avšak argument funkcie je x, preto $\frac{dy}{dx}$ je potrebné vyjadriť pomocou x a nie pomocou y, ako je to v (11.3). Využijeme známy vzťah $\sin^2 y +$

$+ \cos^2 y = 1$, odkiaľ $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$. Nakoľko skúmame hlavné hodnoty arkussínusu, pre $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ je $\cos y \geqq 0$, preto pred odmocninou bude znamienko plus: $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$. Pretože $\sin y = x$ v súlade s (11.2), potom $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. Po dosadení do (11.3) dostaneme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

alebo

$$\frac{d\,(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{11.4}$$

Vzťah (11.4) môžeme použiť nielen pre hlavné hodnoty, ale aj pre iné úseky krivky, musíme však dať pozor na správne znamienko pred odmocninou. Skutočne, pri jednej a tej istej hodnote x na rôznych úsekoch krivky má derivácia rozdielne znamienka; napr. v bodoch A aj C (*obr. 49*) je derivácia kladná a v bodoch B a D je záporná.

Teraz nájdeme deriváciu $\frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx}$. Ak $y = \operatorname{arctg} x$, potom $x = \operatorname{tg} y$. Odtiaľ podľa predchádzajúceho nájdeme:

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x'(y)} = \cos^2 y \tag{11.5}$$

Z trigonometrie je známe, že

$$\operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$$

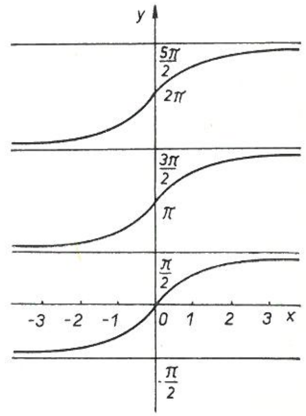
preto

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + x^2$$

Pomocou vzťahu 11.5 nakoniec dostaneme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \tag{11.6}$$

Pre ľubovoľnú inú vetvu grafu tangensu *obr. 50* zostane vzťah (11.6) správny, pre-



Obr. 50

tože ju dostaneme zo základnej vetvy rovnobežným posunutím, čo hodnotu derivácie nemení.

Cvičenia

1. Nájdite derivácie funkcií $y = \arccos x$ a $y = \operatorname{arccotg} x$.

2. Pomocou $\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$ nájdite $\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x}$, keď viete, že z rovnosti $y = \ln x$ vyplýva $x = \mathrm{e}^y$.

Nájdite derivácie funkcií v príkladoch **3** až **6**:

3. $y = \arcsin 2x$.
4. $y = \operatorname{arctg}(3x + 1)$.
5. $y = \operatorname{arctg}(x^2 - x)$.
6. $y = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

12. DERIVÁCIA IMPLICITNEJ (NEROZVINUTEJ) FUNKCIE

Funkcia $y(x)$, ktorá je daná rovnicou

$$F(x, y) = 0 \tag{12.1}$$

je udaná implicitne (nerozvinute).

Ak zodpovedajúcu rovnicu možno riešiť vzhľadom na x alebo y, potom sa vrátime k bežnému zadaniu funkcie. Takéto riešenie sa niekedy nazýva rozvinuté alebo explicitné. Môže však viesť k zložitým výrazom a občas ho vôbec nemožno nájsť. Napríklad rovnica kružnice v tvare

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{12.2}$$

je jednoduchšia, ako z nej vyplývajúce riešenia

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \tag{12.3}$$

Ak je v (12.1) ľavá strana ľubovoľný mnohočlen, ktorý obsahuje mocninu x alebo y vyššiu ako štvrtého stupňa,vo všeobecnosti ju nemožno rozriešiť vzhľadom na x alebo y. Takisto nemožno rozriešiť napr. na pohľad jednoduchú rovnicu

$$F(x, y) = x \sin x - y \sin y - \pi = 0 \tag{12.4}$$

No aj v tých prípadoch, keď riešenie nie je udané v tvare vzorca, pomocou ktorého možno priamo vypočítať y pre dané x, je y funkciou x. Ak sa bude riešiť rovnica číselne, ku každému x možno nájsť zodpovedajúce y a možno zostrojiť krivku v rovine R_{xy}. Body na krivke však nemusia existovať pre všetky x (napr. pri kružnici vyhovujú len x medzi $-r$ a r, kde r je polomer kružnice). Danému x môže zodpovedať i viac ako jedna hodnota y (v prípade kružnice zodpovedajú dve hodnoty, lebo kvadratická rovnica má dve riešenia). Tieto komplikácie nerušia základný fakt: rovnica $F(x, y) = 0$ definuje y ako funkciu x.

Ako sa nájde derivácia $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$? Možno ju nájsť bez riešenia rovnice, t. j. bez vypočítania y, x?

Takýto výpočet spravil ešte Newton. Nech x, y vyhovuje rovnici

$$F(x, y) = 0$$

Vezmime susedné hodnoty $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, ktoré tiež vyhovujú rovnici

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0 \tag{12.5}$$

Ak použijeme (12.1), môžeme napísať:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + \\ + F(x + \Delta x, y) - F(x, y) \tag{12.6}$$

Rozdiel $F(x + \Delta x, y) - F(x, y)$ znamená prírastok funkcie $F(x, y)$, ak ju berieme ako funkciu jednej premennej x pri konštantnom y. Tento prírastok môže byť v limite[1]) vyjadrený takto

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \left[\frac{\mathrm{d}F(x, y)}{\mathrm{d}x}\right]_{y=\mathrm{const}} \Delta x$$

Poznamenajme, že pri výpočte derivácie funkcie dvoch premenných x a y podľa x pokladáme y za konštantu. Takto vypočítaná derivácia sa nazýva parciálna derivácia a v jej označení namiesto písmena d sa píše ∂

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) \doteq \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \Delta x$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$$

---

[1]) Výraz „v limite sa rovná“ pri malom x alebo y je podrobne objasnený v čl. 4, kapitoly I, kde sa skúma výraz na prírastok funkcie pomocou derivácie.

Analogicky pre prvý rozdiel vo vzťahu (12.6) možno napísať:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) \doteq \frac{\partial F(x + \Delta x, y)}{\partial y} \Delta y$$

Použitím (12.5) dostaneme:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F(x + \Delta x, y)}{\partial y} \Delta y \doteq 0$$

alebo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \doteq - \frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x + \Delta x, y)}{\partial y}}$$

Ak prejdeme k limite pri $\Delta x \to 0$, dostaneme na ľavej strane rovnosti deriváciu a vpravo bude možné vynechať x. Nakoniec

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}} \tag{12.7}$$

Všimnite si, že vo výraze je (12.7) znamienko mínus a že v ňom nemožno zjednodušiť $\partial F(x, y)$ v čitateli a menovateli. Ukážeme použitie (12.7) na príklade rovnice (12.2). Máme funkciu $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} \tag{12.8}$$

Ľahko sa presvedčíme, že tento výsledok súhlasí s tým, čo dostaneme, ak vypočítame deriváciu (12.3).

Nájdeme deriváciu v prípade (12.4)

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \sin x + x \cos x, \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \sin y + y \cos y$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\sin x + x \cos x}{\sin y + y \cos y}$$

Vidíme, že výraz — derivácia implicitnej funkcie obsahuje obidve veličiny x a y. Ak by sme chceli deriváciu vyjadriť číselne, je potrebné pre dané x vypočítať y. No ak by sme nemali vzťahy (12.7) a chceli by sme deriváciu vypočítať, museli by sme vypočítať dve hodnoty y_2 a y_1 pre dve susedné x_2 a x_1 a nájsť pomer $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Čím sú bližšie x_2 a x_1, tým presnejšie by bolo treba vypočítať y_2 a y_1, čo je často obťažné.

Nakoniec si všimnime, že ak rovnica $F(x, y) = 0$ neurčuje jediné riešenie, tak pre jednu hodnotu x môžu existovať dve alebo viac hodnôt y (niekoľko vetiev krivky). Výraz (12.7) pre dané x dáva pri dosadzovaní rôznych y derivácie v zodpovedajúcich bodoch. Čitateľ si toto môže preveriť na príklade rovnice kružnice (12.2), pre ktorú je derivácia daná vzťahom (12.8).

Pri hľadaní derivácie implicitnej funkcie sme museli zaviesť nový pojem, pojem parciálnej derivácie. Tento pojem má veľký význam a je nevyhnutný pri funkciách s viac premennými, ktoré sa v tejto knihe nepreberajú. V skutočnosti sme sa už nepriamo zaoberali pojmom parciálnej derivácie skôr, pri takých elementárnych otázkach, ako bola derivácia súčinu niekoľkých funkcií $y = h(x)\, g(x)$ alebo napríklad derivácia exponenciálnej funkcie $y = h(x)^{g(x)}$, pozri str. 108. Hovorili sme, že y' je súčet dvoch členov, pričom prvý člen dostaneme, ak derivujeme funkciu podľa x tak, že $g(x)$ pokladáme za konštantu, a druhý člen dostaneme, ak pokladáme $h(x)$ za konštantu. Pomocou parciálnych derivácií zapíšeme toto pravidlo nasledovne. Ak

$$y = F(g(x), h(x))$$

potom

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial g} \frac{dg}{dx} + \frac{\partial F}{\partial h} \frac{dh}{dx}$$

Cvičenia

1. Nájdite deriváciu $\dfrac{dy}{dx}$ funkcie danej rovnicou (12.4) v bode $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{2}$. To isté pre bod $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Nájdite deriváciu $\dfrac{dy}{dx}$ funkcie danej rovnicou $x^3 + 3x + y^3 + 3y - 8 = 0$ v bode $x = y = 1$.

13. INTEGRÁL. FORMULÁCIA ÚLOHY

V kapitole I sme sa oboznámili s pojmom integrálu. Objasnili sme si veľmi úzky vzťah medzi dvoma na prvý pohľad rozdielnymi úlohami[1]. Tieto úlohy sú:

1. hľadanie súčtu veľkého počtu malých sčítancov, keď každý z týchto sčítancov si možno predstaviť ako $v(t)\,dt$;

2. hľadanie funkcie $s(t)$, ktorej derivácia sa rovná danej funkcii $v(t)$

$$\frac{ds}{dt} = v(t)\ ^1)$$

Odporúčame čitateľovi pred čítaním ďalšieho materiálu zopakovať si čl. 7 až 12 kapitoly I.

Úlohy fyziky, matematiky, chémie zväčša vznikajú ako úlohy na výpočet súčtu jednotlivých veličín. Takáto formulácia úlohy je oveľa názornejšia; samotná otázka už naznačuje jednoduchú, hoci len približnú cestu výpočtu hľadanej veličiny. Táto cesta však neudáva všeobecné vzťahy.

Druhá formulácia úlohy sa zdá veľmi umelo utvorená. Táto formulácia má však svoje prednosti. Derivovanie je jednoduché. Dá sa zredukovať na 4 až 5 vzťahov (derivácia x^n, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$) a na dve-tri pravidlá. Preto možno ľahko nájsť derivácie veľkého počtu funkcií. Vždy, keď nájdeme deriváciu ľubovoľnej funkcie $\dfrac{ds}{dt} = v$, môžeme povedať, že pre toto v je známy integrál s (pozri čl. 14). Poznáme mnoho jednotlivých, zvláštnych prípadov, v ktorých sa podarí riešiť úlohu — hľadať integrál. Pomocou zhodných algebraických transformácií sa podarilo pre niekoľko jednotlivých typov funkcií v nájsť pravidlá na výpočet integrálov (pozri čl. 15).

Toto sa však nepodarí urobiť pre všetky elementárne funkcie, takže integrovanie je ťažšie ako derivovanie. Tým viac vzorce, ktoré sme dostali pre niektoré typy integrálov v druhej formulácii úlohy, sú veľmi dôležité. Ak sa nám už podarilo pre funkciu v nájsť integrál (neurčitý integrál alebo primitívnu funkciu), všetky úlohy z prvej formulácie, všetky súčty, t. j. všetky určité integrály $\int_a^b v(t)\,dt$ budú sa dať vyjadriť jednoduchými vzťahmi prostredníctvom funkcie s ako $\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$. Takýto výsledok je oveľa úplnejší, veľmi presný a cenný v porovnaní s výsledkom každého jednotlivého číselného výpočtu súčtu, t. j. určitého integrálu $\int_a^b v(t)\,dt$ v stanovených hraniciach od a do b. Preto našou úlohou v prvom rade bude riešenie úlohy z druhej formulácie.

[1]) Prvá úloha vedie k riešeniu určitého integrálu, zatiaľ čo druhá k neurčitému integrálu. Pozn. prekl.

14. NAJJEDNODUCHŠIE NEURČITÉ INTEGRÁLY

Vypíšeme vzťahy pre derivácie, ktoré sme našli v predchádzajúcich článkoch a im zodpovedajúce integrály:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \qquad n\int x^{n-1}\,dx = x^n + C$$

$$\frac{d}{dx}(e^{kx}) = k\,e^{kx}, \qquad k\int e^{kx}\,dx = e^{kx} + C$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

$$\frac{d}{dx}(\sin kx) = k\cos kx, \qquad k\int \cos kx\,dx = \sin kx + C$$

$$\frac{d}{dx}(\cos kx) = -k\sin kx, \qquad -k\int \sin kx\,dx = \cos kx + C$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad -\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{cotg} x + C$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Urobme malé úpravy. V prvom integráli označíme $n - 1 = m$ (vtedy $n = m + 1$) a zapíšeme ho

$$\int x^m \, dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C$$

Je zrejmé, že vzťah platí pre všetky m okrem $m = -1$; pri $m = -1$ sa menovateľ rovná nule $x^{m+1} = x^0 = 1$, dostávame nedefinovaný výraz $\frac{1}{0} + C$. No práve pre $m = -1$, t. j. pre $\frac{1}{x}\, dx$ je vhodný vzťah

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x$$

Tento vzťah platí len pre kladné hodnoty x, pretože $\ln x$ má zmysel len pre $x > 0$. Pre $x < 0$ $\ln x$ nie je definovaný, má však zmysel $\ln(-x)$. Nakoľko

$$\frac{d \ln(-x)}{dx} = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

potom platí $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$, ak $x < 0$. Obidva vzťahy pre $\int \frac{dx}{x}$ môžeme spojiť do jedného

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \tag{14.1}$$

Tento vzťah možno použiť pre ľubovoľný integračný obor, ktorý neobsahuje $x = 0$.

Integrál z exponenciálnej funkcie zapíšeme takto

$$\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$$

Pre sínus a kosínus dostaneme:

$$\int \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$$

$$\int \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$$

15. VŠEOBECNÉ VLASTNOSTI INTEGRÁLOV

V článkoch 1 až 3 sme vyslovili vlastnosti derivácie súčtu funkcií, derivácie zloženej funkcie a derivácie súčinu funkcií. Každej z týchto vlastností zodpovedá určitá vlastnosť vzťahujúca sa na integrály.

Pre integrály je správna rovnosť

$$\int [Cf(x) + Eg(x)] \, dx = C \int f(x) \, dx + E \int g(x) \, dx \tag{15.1}$$

Aby sme rovnosť dokázali, musíme vziať deriváciu výrazu stojaceho na pravej strane; ak je rovnosť správna, musíme dostať funkciu nachádzajúcu sa pod integrálom. Po zderivovaní dostaneme:

$$[C \int f(x) \, dx + E \int g(x) \, dz]' = C[\int f(x) \, dx]' + E[\int g(x) \, dy]' =$$
$$= Cf(x) + Eg(x)$$

tým je rovnosť (15.1) dokázaná. Ukazuje, že integrál súčtu niekoľkých sčítancov sa rovná súčtu integrálov jednotlivých sčítancov, pričom konštantné činitele možno vybrať pred integrál.

Integračnú premennú môžeme nahradiť novou vhodnejšou premennou, t. j. zavedieme substitúciu. Ukážeme niekoľko jednoduchých príkladov.

1. Nájdime $\int (ax + b)^n \, dx \quad (n \neq -1)$.

Za novú premennú dosadíme výraz v zátvorke. Novú premennú označíme z

$$ax + b = z \tag{15.2}$$

Diferenciál dx musíme nahradiť diferenciálom dz. Z výrazu (15.2) dostaneme:

$$dz = a \, dx, \qquad dx = \frac{dz}{a}$$

Takto

$$\int (ax + b)^n \, dx = \int z^n \frac{dz}{a} = \frac{1}{a} \int z^n \, dz =$$

$$= \frac{z^{n+1}}{a(n+1)} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

O správnosti výsledku sa veľmi ľahko presvedčíme, ak pravú stranu zderivujeme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}\right]=$$
$$=\frac{n+1}{a(n+1)}(ax+b)^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax+b)\,\frac{(ax+b)^n}{a}\,a=(ax+b)^n$$

2. Podobne zavedieme substitúciu v integráli

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b},\qquad z=ax+b,\qquad \mathrm{d}z=a\,\mathrm{d}x,\qquad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}z}{a}$$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\int\frac{\mathrm{d}z}{az}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{1}{a}\ln z+C=\frac{\ln(ax+b)}{a}+C$$

V jednoduchých príkladoch substitúciu vôbec nebudeme zavádzať, ale budeme priamo integrovať. Napríklad

$$\int(ax+b)^n\,\mathrm{d}x=\int(ax+b)^n\frac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b)=$$
$$=\frac{1}{(n+1)\,a}(ax+b)^{n+1}+C$$

Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú dve rôzne funkcie premennej x. Pravidlo pre deriváciu súčinu hovorí, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)=g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\tag{15.3}$$

Z rovnosti (15.3) môžeme napísať:

$$fg=\int f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+\int g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\tag{15.4}$$

Správnosť (15.4) znova overíme, ak zderivujeme ľavú i pravú stranu rovnosti. Dostaneme pritom správnu rovnosť (15.3).

Prepíšeme (15.4) na tvar

$$\int f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=fg-\int g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

Skrátene sa táto rovnosť píše takto

$$\int f\,\mathrm{d}g=fg-\int g\,\mathrm{d}f\tag{15.5}$$

V čom je zmysel vzťahu (15.5)? Pri integrovaní nemáme pravidlo na výpočet integrálu súčinu dvoch funkcií pomocou integrálu každého zo súčiniteľov. Ak ale v súčine dvoch funkcií fw je integrál jedného zo súčiniteľov známy, napr.

$$\int w\,\mathrm{d}x=g,\qquad w=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

integrál $\int fw\,\mathrm{d}x$ možno vyjadriť pomocou integrálu, ktorý obsahuje deriváciu $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Pomocou w prepíšeme (15.5) na tvar

$$\int fw\,\mathrm{d}x=f\left(\int w\,\mathrm{d}x\right)-\int\left(\int w\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\tag{15.6}$$

Pretože $\int w\,\mathrm{d}x=g$, posledný integrál v (15.6) je $\int g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$; niekedy je jednoduchší ako pôvodný integrál $\int f\,w\,\mathrm{d}x$, alebo vedie na známy integrál. Konkrétne, ak f je mocninová funkcia, tak $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ má stupeň o jednotku menší ako f. Vzťah (15.5) alebo (15.6) je vzťah *na integrovanie po častiach alebo integrácia per partes.*

Uveďme príklady.

1. Nájdime $x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Položíme $f=x$; vtedy $w=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}g$, $g=\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}f=\mathrm{d}x$. Podľa vzťahu (15.5)

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=\mathrm{e}^x(x-1)+C$$

2. Nájdime $\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Položíme $f=x^2$; vtedy $w=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x$; $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}g$, $g=\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}f=2x\,\mathrm{d}x$. Použijúc (15.5) dostaneme $\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x^2\,\mathrm{e}^x-2\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; využijeme výsledok z prvého príkladu a dostaneme:

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x^2\,\mathrm{e}^x-2x\,\mathrm{e}^x+2\,\mathrm{e}^x+C=(x^2-2x+2)\,\mathrm{e}^x+C$$

Ak hľadáme $\int P_n(x)\,\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$, kde $P_n(x)$ je mnohočlen n-tého stupňa, treba urobiť integráciu per partes n-krát. Výsledok dostaneme v tvare

$Q_n(x)\,e^{kx}$, kde $Q_n(x)$ — je mnohočlen n-tého stupňa. Ak toto vieme, nemusíme n-krát integrovať per partes, ale priamo hľadať koeficienty mnohočlena $Q_n(x)$.

Preskúmajme nasledujúci príklad. Nájdime $\int x^2\,e^x\,dx$. Napíšeme rovnosť s doteraz neznámymi koeficientmi mnohočlena $Q_n(x)$

$$\int x^2\,e^x\,dx = (a_2x^2 + a_1x + a_0)\,e^x + C \tag{15.7}$$

Zderivujeme obidve strany rovnosti (15.7)

$$x^2\,e^x = (2a_2x + a_1)\,e^x + (a_2x^2 + a_1x + a_0)\,e^x$$

$$x^2\,e^x = [x^2a_2 + x(2a_2 + a_1) + (a_1 + a_0)]\,e^x$$

Porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách x v mnohočlenoch na pravej i ľavej strane. Dostaneme:

$$a_2 = 1$$

$$2a_2 + a_1 = 0 \quad \text{odkiaľ} \quad a_1 = -2$$

$$a_1 + a_0 = 0 \quad \text{odkiaľ} \quad a_0 = 2$$

nakoniec dostaneme ako už predtým

$$\int x^2\,e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)\,e^x + C$$

Analogicky možno vypočítať integrály z funkcií $P_n(x)\cos kx$ a $P_n(x)\sin kx$, kde $P_n(x)$ je mnohočlen. V obidvoch prípadoch má výsledok tvar

$$Q_n(x)\cos kx + R_n(x)\sin kx$$

kde $Q_n(x)$ aj $R_n(x)$ sú mnohočleny n-tého stupňa (alebo menšieho ako n). Príklady tohto typu sú uvedené v cvičení.

Ukážeme príklad na integrál, ktorý riešime tak, že ho algebraickou cestou upravíme na známy integrál.

Vypočítajme príklad $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$. Všimnime si, že je správna rovnosť

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$$

Pomocou nej dostaneme:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right]$$

Preto

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{a-b}[\ln(x-a) - \ln(x-b)] + C = \frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b} + C$$

Existujú postupy, ktoré umožňujú integrál ľubovoľného podielu dvoch mnohočlenov (racionálna funkcia) vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Vo výsledku sa však objavujú nielen racionálne funkcie, mnohočleny a podiely mnohočlenov, ale aj logaritmy a cyklometrické funkcie. Všeobecná teória hľadania týchto integrálov je pre našu knihu príliš zložitá.

Integrovanie mnohých funkcií, obsahujúcich odmocniny a trigonometrické funkcie, sa môže pomocou vhodnej zámeny premenných upraviť na integrovanie mnohočlenov alebo racionálnych lomených funkcií. Preskúmame nasledovný príklad.

Nájdite $\int x\sqrt{x+1}\,dx$. Zavedieme substitúciu: $z = \sqrt{x+1}$, teda $x + 1 = z^2$. Odkiaľ $2z\,dz = dx$. Ak prejdeme k novej premennej, dostaneme:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (z^2 - 1)\,z2z\,dz = 2\int (z^4 - z^2)\,dz =$$

$$= 2\frac{z^5}{5} - 2\frac{z^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$$

Niekoľko príkladov tohto druhu je uvedených v cvičeniach.

Nakoniec uveďme integrál, ktorý sa nedá vyjadriť pomocou konečného počtu elementárnych funkcií

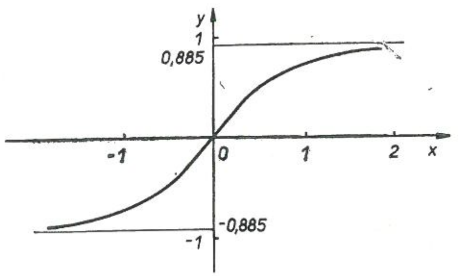
$$f(x) = \int e^{-x^2}\,dx$$

Dôkaz, že ho nemožno vyjadriť pomocou konečného počtu elementárnych funkcií, je veľmi zložitý a nebudeme ho uvádzať.

Tento integrál je funkcia, o vlastnostiach ktorej si môžeme niečo povedať. Z definície $f(x)$ vyplýva, že

$$\frac{df(x)}{dx} = e^{-x^2}$$

Pretože $e^{-x^2} > 0$ pre ľubovoľné x, potom $f(x)$ je rastúca funkcia. Derivácia je najväčšia pri $x = 0$, to znamená, že dotyčnica k $f(x)$ zviera maximálny uhol s osou x pri $x = 0$. Pre kladné aj záporné x, ktorých absolútna hodnota je veľká, derivácia $\frac{df}{dx}$ je veľmi malá, teda funkcia je takmer konštantná. Graf funkcie $f(x) = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$ je na *obr. 51* (pre určitosť sme zvolili dolnú hranicu, ktorá sa rovná nule).



Obr. 51

Pre túto funkciu sú zostavené podrobné tabuľky, preto výpočty, v ktorých vystupuje tento integrál, nie sú zložitejšie ako napríklad výpočty s trigonometrickými funkciami.

Cvičenia

1. $\int x(x - 1)^2\,dx$.

2. $\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x}\,dx$.

3. $\int \cos(3x - 5)\,dx$.

4. $\int \sin(2x + 1)\,dx$.

5. $\int \sqrt{3x - 2}\,dx$.

Návod. V príkladoch **3**, **4**, **5** zaveďte substitúciu.

6. $\int x \cos x\,dx$.

7. $\int \ln x\,dx$.

Návod. Príklady **6**, **7** integrujte per partes.

8. $\int x^2 \sin^2 x\,dx$.

9. $\int x^3 e^{-x}\,dx$.

10. $\int (x^2 + x + 1) \cos x\,dx$.

11. $\int (2x^2 + 1) \cos 3x\,dx$.

Návod. Príklad **11** je podrobne rozriešený vo „Výsledkoch a riešeniach". Predchádzajúce tri príklady sa riešia podobne.

12. $\int \frac{x\,dx}{(x - 2)(x - 3)}$.

Návod. Využite rovnosť $\frac{x}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$. Čísla A a B nájdeme porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách mnohočlena, po odstránení menovateľa.

13. $\frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx$.

14. $\frac{dx}{(x + 1)(x - 2)}$.

15. $\int \frac{x\,dx}{x + \sqrt{x}}$. Zaveďte substitúciu $\sqrt{x} = z$.

16. $\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$. Zaveďte substitúciu $x^2 - 5 = z$.

17. $\int \sin^3 x \cos x\,dx$. Zaveďte substitúciu $\cos x = z$.

18. $\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$. Zaveďte substitúciu $\sin x = z$.

19. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

20. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$. Zaveďte substitúciu $x = at$.

21. $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

22. $\int \arcsin x\,dx$.

23. $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

24. $\int e^{2x} \sin 3x\,dx$.

25. $\int e^x \cos 2x\,dx$.

Návod. V príkladoch **22**—**25** uskutočnite integráciu per partes. Všeobecná pripomienka. Niekedy dostaneme pri použití rôznych postupov pre jeden a ten istý integrál rôzne výrazy. Nesmie vás to zarážať. Ak sú výpočty urobené správne, výrazy sa odlišujú len konštantou. Pri výpočte určitého integrálu budú výsledky rovnaké.

Túto pripomienku si preverte na príklade **17**, ak zavediete substitúciu $\sin x = z$.

16. VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU SUBSTITUČNOU METÓDOU

Vypočítajme nasledujúci príklad

$$\int_n^k (ax + b)^2\,dx$$

Môžeme postupovať takto: vypočítame najprv neurčitý integrál $\int (ax + b)^2 \, dx$ a potom utvoríme rozdiel jeho hodnôt pre $x = k$ a pre $x = n$.

Pri výpočte $\int (ax + b)^2 \, dx$ zavedieme substitúciu premennej podľa vzťahu $z = ax + b$. Vtedy $dz = a \, dx$ a

$$\int (ax + b)^2 \, dx = \frac{1}{a} \int z^2 \, dz = \frac{z^3}{3a} = \frac{(ax + b)^3}{3a}$$

Preto

$$\int_n^k (ax + b)^2 \, dx = \left[\frac{(ax + b)^3}{3a} \right]_n^k \frac{(ak + b)^3 - (an + b)^3}{3a}$$

Môžeme postupovať aj iným spôsobom. Objasníme, ako sa bude meniť z, keď x sa mení od n do k. Pretože pre z a x platí vzťah $z = ax + b$, pri zmene x od n do k bude sa z meniť od $an + b$ do $ak + b$. Teda

$$\int_n^k (ax + b)^2 \, dx = \frac{1}{a} \int_{an+b}^{ak+b} z^2 \, dz = \left[\frac{z^3}{3a} \right]_{an+b}^{ak+b} = \frac{(ak + b)^3 - (an + b)^3}{3a}$$

Pri integrovaní je vhodné postupovať takto. Vykonáme substitúciu a súčasne nájdeme aj nové integračné hranice. Potom do výrazu pre neurčitý integrál netreba dosadiť naspäť predchádzajúcu premennú.

Uveďme príklady:

1. Vypočítajme integrál $\int_0^1 \frac{dx}{(2 - x)^3}$

Vidíme, že funkcia $\frac{1}{(2 - x)^3}$ pri zmene x od 0 do 1 nadobúda kladné hodnoty, preto

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2 - x)^3} > 0$$

menovateľ v týchto hraniciach nenadobúda nulovú hodnotu, takže integrand je na celom intervale konečný. Zavedieme substitúciu premennej

$2 - x = y$, potom $dx = -dy$. Vtedy pre $x = 0$ sa $y = 2$, pre $x = 1$ sa $y = 1$ a

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2 - x)^3} = - \int_2^1 \frac{dy}{y^3} \qquad (16.1)$$

Na pravej strane sú integračné hranice dané už pre y. Nemusí sa nám zdať správne znamienko mínus pred integrálom na pravej strane. Na pravej aj na ľavej strane skutočne stoja integrály z kladných funkcií. Prečo je pravá strana (16.1) kladná? Lebo v integráli vpravo je dolná hranica väčšia ako horná a pri zámene integračných hraníc integrál mení znamienko. Rovnosť (15.1) možno zapísať takto

$$\int_0^s \frac{dx}{(2 - x)^3} = \int_1^2 \frac{dy}{y^3}$$

Teraz integrál, ktorý stojí na pravej strane, má hornú hranicu väčšiu ako dolnú a je jasné, že je kladný. Výpočet ľahko dokončíme

$$\int_1^2 \frac{dy}{y^3} = \left[-\frac{1}{2y^2} \right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

2. V čl. 15 sme skúmali funkciu $f(x) = \int_0^x e^{-x^2} \, dx$. Často sa stretávame s funkciou $\varphi(a) = \int_0^a e^{-kx^2} \, dx$, kde k je konštanta. Ukážeme, že medzi funkciami φ a f je jednoduchá závislosť.

Vo výraze pre $\varphi(a)$ zavedieme substitúciu $kx^2 = t^2$. Odtiaľ nájdeme $\sqrt{k}x = t$, $x = \frac{t}{\sqrt{k}}$ a $dx = \frac{t}{\sqrt{k}} dt$. Pre $x = 0$ sa $t = 0$, pre $x = a$ sa $t = a\sqrt{k}$. Dostaneme:

$$\varphi(a) = \int_0^{a\sqrt{k}} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k} \int_0^{a\sqrt{k}} e^{-t^2} \, dt \, \frac{1}{\sqrt{k}} f(a\sqrt{k})$$

a teda $\varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{k}} f(a\sqrt{k})$. Teda pre ľubovoľnú hodnotu nezávisle premennej x

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} f(x\sqrt{k})$$

Ak máme danú tabuľku funkcií $f(x)$, môžeme nájsť aj integrál $\varphi(x)$ pre ľubovoľnú hodnotu k.

3. V kapitole I sme videli, že ak majú integrál a integračné hranice rozmer, v tom prípade má i určitý integrál rozmer. Často je však výhodné upraviť integrál na bezrozmerný. Všetky súčinitele, ktoré majú rozmer, treba písať pred znak integrálu. Ukážeme, ako sa to robí.

Nech je daný $\int_a^b f(x)\,dx$. Najväčšiu hodnotu funkcie $f(x)$ v obore integrácie označíme f_{max}.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{f(x)}{f_{max}} f_{max}\,dx = f_{max} \int_a^b \frac{f(x)}{f_{max}}\,dx \tag{16.2}$$

Integrand $\frac{f(x)}{f_{max}}$ v poslednom integráli je bezrozmerný, pretože $f(x)$ aj f_{max} majú rovnaký rozmer. Prejdeme k bezrozmerným integračným hraniciam. Vykonáme substitúciu podľa vzťahu

$$z = \frac{x - a}{b - a} \qquad \text{alebo} \qquad x = a + z(b - a) \tag{16.3}$$

Z (16.3) vidieť, že z je bezrozmerná veličina. Pretože $dx = (b - a)\,dz$ bude $z = 0$, ak $x = a$ a $z = 1$, ak $x = b$. Potom integrál zo vzťahu (16.2) nadobúda tvar

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f_{max}}\,dx = (b - a) \int_0^1 \frac{f[a + z(b - a)]}{f_{max}}\,dz \tag{16.4}$$

Položíme:

$$\frac{f[a + z(b - a)]}{f_{max}} = \varphi(z)$$

potom z (16.4)

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f_{max}}\,dx = (a - b) \int_0^1 \varphi(z)\,dz$$

a konečne

$$\int_a^b f(x)\,dx = f_{max}\,(b - a) \int_0^1 \varphi(z)\,dz \tag{16.5}$$

Vo vzťahu (16.5) $\int_0^1 \varphi(z)\,dz$ je bezrozmerná veličina.

Ak sa $f(x)$ na integračnom obore veľmi málo mení, tak $\frac{f(x)}{f_{max}} \approx 1$, preto

$$\varphi(z) \approx 1 \quad \text{a} \quad \int_0^1 \varphi(z)\,dz \approx 1 \Rightarrow \int_0^1 dz = 1$$

V tomto prípade hodnota bezrozmerného súčiniteľa je jednotkového rádu, preto hodnota integrálu sa určuje hlavne súčinom

$$f_{max}\,(b - a)$$

Vypočítame príklad: voľný pád telesa za čas t_0. Dráha, ktorú teleso preletí, je $\int_0^{t_0} v(t)\,dt$. Rýchlosť telesa sa rovná $v = gt$ a maximálnu rýchlosť nadobúda teleso v čase t_0, t. j. $v_{max} = gt_0$.

Poznamenajme, že tu maximum nie je podmienené zmenšovaním sa rýchlosti po $t = t_0$, ale jednoducho tým, že čas väčší ako t_0 je mimo integračného intervalu, $0 < t < t_0$. Zavedieme substitúciu

$$z = \frac{t}{t_0}, \qquad \varphi(z) = \frac{v}{v_{max}} = \frac{gt}{gt_0} = \frac{t}{t_0} = z$$

$$\int_0^{t_0} v(t)\,dt = v_{max}\,t_0 \int_0^1 z\,dz = gt_0^2 \int_0^1 z\,dz = \frac{gt_0^2}{2}$$

Na záver si vypočítame príklad, ktorý ukazuje, že funkcie treba veľmi dôkladne skúmať a že je nebezpečné len formálne postupovať.

Vypočítame $I = \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$. Neurčitý integrál $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$, preto

$$I = \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{b-a}{ab} \tag{16.6}$$

Pretože je integrand kladný, aj výsledok musí byť kladný, ak je $b > a$. Vzťah (16.6) je skutočne kladný pre $b > a$, ak majú a aj b rovnaké znamienko. Pre integrál $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ vychádza zo vzťahu (16.6) však nesprávny výsledok $I = -2$! Príčinou je, že integrovaná funkcia má nevlastnú limitu $+\infty$ v bode $x = 0$, ktorý leží v intervale integrovania. V tomto bode je funkcia $\left(-\frac{1}{x}\right)$, ktorá je výsledkom integrálu z $\frac{1}{x^2}$, nespojitá.

V ďalšom je potrebné z celého intervalu $-1 < x < 1$ vylúčiť malé okolie bodu $x = 0$: $-\varepsilon_1 < x < \varepsilon_2$($\varepsilon_1$ a ε_2 sú malé kladné čísla) a vypočítať

$$K = \int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

Podľa vzťahu (16.6) dostávame:

$$K = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} = -2 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}$$

Ak sa ε_1 a ε_2 blížia k nule, $K \to \infty$.

V iných prípadoch integrál z neohraničenej funkcie na intervale integrovania má určitú konečnú hodnotu. Tak napr. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$. Na dôkaz vypočítame $\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$; pri $\varepsilon \to 0$ integrál sa blíži k číslu 2.

Podrobné úvahy treba nevyhnutne uskutočniť vždy, keď integrovaná funkcia nie je ohraničená na uvažovanom intervale[1]).

[1]) Posledné dva integrály sú nevlastné integrály, ktoré sú definované inak ako určitý integrál. Pozn. prekl.

17. NEKONEČNÉ RADY

Postavíme si úlohu nájsť jednoduchý a vhodný, približný výraz pre funkciu $y(x)$ (presne zadanú nejakým vzťahom) pre všetky hodnoty x z malého intervalu, napr. pre hodnoty x blízke a.

Deriváciu odvodenú v kapitole I možno zapísať v nasledujúcom tvare

$$y'(a) = \lim_{x \to a} \frac{y(x) - y(a)}{x - a}$$

Z tejto definície vyplýva, že v limite, t. j. tým presnejšie, čím je menší rozdiel $(x - a)$, možno napísať:

$$y(x) \doteq y(a) + (x - a)\, y'(a) \tag{17.1}$$

Tento vzťah zodpovedá tomu významu derivácie, ktorým je rýchlosť zmeny funkcie. Ak je známa hodnota funkcie v danom bode $y(a)$, aj rýchlosť jej zmeny $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = y'(a)$, potom pre x blížiace sa k a, keď sa argument zmenil na hodnotu $(x - a)$ v porovnaní s počiatočnou hodnotou a, zmení sa funkcia na $(x - a)\, y'(a)$. Výraz (17.1) je približný a jeho presnosť je tým menšia, čím je väčšia vzdialenosť $(x - a)$. Skutočne pri výpočte zmeny funkcie podľa vzťahu $(x - a)\, y'(a)$ použili sme hodnotu rýchlosti zmeny funkcie $y'(a)$ na začiatku intervalu od a do x. Medzitým sa v tomto intervale mení i samotná rýchlosť y'. Presný vzťah má tvar

$$y(x) = y(a) + \int\limits_a^x y'(t)\, dt \tag{17.2}$$

Použime vzťah (17.1) na deriváciu $y'(x)$. Vtedy

$$y'(x) \doteq y'(a) + (x - y)\, y''(a) \tag{17.3}$$

Skôr ako pôjdeme ďalej, pripomenieme si, že $y''(x)$ je druhá derivácia funkcie y podľa x, ktorá sa tiež označuje $\frac{d^2y}{dx^2}$ a je to derivácia $y'(x)$ podľa x

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx}$$

to znamená, že y'' je spojená s y' práve tak, ako je y' spojená s y. Analogicky by sa určila y''' — tretia derivácia funkcie y

$$y'''(x) = \frac{dy''}{dx}$$

y^{IV} — štvrtá derivácia, y^{V} — piata derivácia atď., až n-tá derivácia, ktorú dostaneme ako výsledok n-krát postupného derivovania funkcie $y(x)$, označuje sa $y^{(n)}(x)$ alebo $\frac{d^ny}{dx^n}$. V označení $y^{(n)}$ znak n sa píše do zátvorky, aby sa odlišoval od mocniteľa.

Vráťme sa k úlohe približného vyjadrenia funkcie. Vzťah (17.3) pre deriváciu je vlastne vzťah (17.1), v ktorom je namiesto $y(x)$ dosadená funkcia $y'(x)$. Dosadíme výraz pre deriváciu (17.3) do vzťahu (17.2)

$$y(x) \doteq y(a) + \int_a^x [y'(a) + (t - a)\, y''(a)]\, dt =$$

$$= y(a) + (x - a)\, y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, y''(a) \tag{17.4}$$

Tento vzťah je presnejší ako (17.1). Pri odvodení (17.1) sa predpokladalo (v prvom priblížení), že rýchlosť zmeny funkcie y, t. j. jej derivácia y' je konštantná a rovná sa hodnote derivácie pri $x = a$. Dostali sme lineárnu závislosť $y(x)$.[1] Pri odvodení vzťahu (17.4) sa predpokladalo, že derivácia $y'(a)$ nie je konštantná, no zmena $y'(x)$ je vypočítaná len približne: vo vzťahu (17.3), ktorý sme použili pri odvodení vzťahu (17.4), sme predpokladali, že $y''(x)$ je konštantná, čo vedie k lineárnej závislosti y' ako funkcie x. Pre $y(x)$ potom dostávame kvadratickú závislosť.

Spresníme ešte vzťah (17.4). Preto treba predpokladať, že y'' nie je konštanta. Použijeme vzťah

$$y'(x) = y'(a) + \int_a^x y''(t)\, dt \tag{17.5}$$

[1]) Výraz pre y (17.1) obsahuje x len prvého stupňa. Možno povedať, že y je mnohočlen, v ktorom premenná x je prvého stupňa. Takáto závislosť sa nazýva lineárna, pretože jej graf je priamka (pozri čl. 4, kap. IV).

Dostali sme ho zo (17.2), ak sme zamenili y' za y. Tento vzťah (ako i (17.2)) sa ľahko overí, ak sa vypočíta integrál, ktorý obsahuje. Teraz zapíšeme $y''(x)$ podľa vzťahu typu (17.1)

$$y''(x) \doteq y''(a) + (x - a)\, y'''(a) \tag{17.6}$$

Vtedy zo vzťahov (17.5) (17.6) dostaneme:

$$y'(x) \doteq y'(a) + \int_a^x [y''(a) + (t - a)\, y'''(a)]\, dt$$

alebo

$$y'(x) \doteq y'(a) + y''(a)\,(x - a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, y'''(a) \tag{17.7}$$

Vidíme, že vzťah (17.7) je obdobný ako (17.4), ale zapísaný je pre $y'(x)$. Výraz pre $y'(x)$ zo (17.7) dosadíme do (17.2)

$$y(x) \doteq y(a) + \int_a^x [y'(a) + y''(a)\,(t - a) + y'''(a)\, \frac{(t-a)^2}{2}]\, dt =$$

$$= y(a) + y'(a)\,(x - a) + \frac{y''(a)}{2}\,(x - a)^2 + \frac{y'''(a)}{2 \cdot 3}\,(x - a)^3 \tag{17.8}$$

Teraz si ľahko predstavíme, aký tvar by mal vzťah pre $y(x)$, ak by sme ešte ďalej postupovali v spresňovaní: ak vezmeme do úvahy, že y''' nie je konštantná, vzťah bude obsahovať $y^{IV}(a)$; výraz pre $y(x)$ bude obsahovať $(x - a)^4$. Každý nasledujúci krok v spresňovaní $y(x)$ dáva doplňujúci člen s ešte vyššou mocninou $(x - a)$.

Táto zákonitosť je veľmi dobre viditeľná, keď získané výrazy porovnáme. Pri najhrubšom priblížení, ak $(x - a)$ je malé, možno pokladať $y(x) = y(a)$; v takomto prípade nie je potrebné poznať vyššiu matematiku. Túto rovnosť nazveme „nulovým priblížením", výraz (17.1) — „prvým priblížením", výraz (17.4) — „druhým priblížením", výraz (17.8) — „tretím priblížením" a spomenuté vzťahy jeden za druhým vypíšeme:

$$y(x) = y(a) \qquad \text{(nulové priblíženie)}$$

$$y(x) = y(a) + (x - a)\, y'(a) \qquad \text{(prvé priblíženie)}$$

$$y(x) = y(a) + (x - a)\, y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, y''(a) \qquad \text{(druhé priblíženie)}$$

$$y(x) = y(a) + (x - a)\, y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, y''(a)\, \frac{(x-a)^3}{2 \cdot 3}\, y'''(a) \qquad \text{(tretie priblíženie)}$$

Ľahko si domyslíme, aký tvar bude mať výsledok, ak budeme vzťah ďalej spresňovať. Každé nasledujúce priblíženie obsahuje o jeden sčítanec viac ako predchádzajúce priblíženie. Vzťah je tým presnejší, čím vyšší stupeň $(x - a)$ obsahuje.

Tento vzťah možno získať aj iným spôsobom. Rovnosť (17.2) budeme integrovať per partes. Najprv zameníme[1] pod integrálom $d(t - x)$ za dt.

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t)\,dt = y(a) + \int_a^x y'(t)\,d(t - x) =$$
$$= y(a) + [y'(t)\,(t - x)]_a^x - \int_a^x (t - x)\,y''(t)\,dt =$$
$$= y(a) + (x - a)\,y'(a) + \int_a^x (x - t)\,y''(t)\,dt \tag{17.9}$$

Ak budeme integrovať per partes n-krát, dostaneme pre $y(x)$ presný výraz, ktorý sa skladá z $n + 2$ členov. Prvých $n + 1$ členov súhlasí s n-tým priblížením predchádzajúceho odvodenia. Posledný člen je zvyšok v tvare integrálu z $(n + 1)$-ej derivácie funkcie $y(x)$

$$y(x) = y(a) + (x - a)\,y'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}\,y''(a) + \dots$$
$$\dots + \frac{(x - a)^n}{2\,.\,3 \dots n}\,y^{(n)}(a) + \frac{1}{2\,.\,3 \dots n}\int_a^x (x - t)^n\,y^{(n+1)}(t)\,dt \tag{17.10}$$

Bez zvyšku je vzťah len približný. Vo všeobecnosti pre ľubovoľnú funkciu $y(x)$ ani jeden konečný stupeň $(x - a)$ nedá absolútne presný vzťah[2]). Presný vzťah môže dať len výraz, ktorý obsahuje nekonečne mnoho mocnín dvojčlena $(x - a)$

$$y(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots \tag{17.11}$$

Tento výraz sa nazýva *nekonečným mocninovým radom*. Slovo „nekonečný" sa obyčajne vynecháva a hovorí sa jednoducho „mocninový rad".

Koeficienty $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ sú rôzne pre rôzne funkcie. Sú závislé aj od hodnoty čísla a. Tieto koeficienty možno (v porovnaní s uvedeným

---

[1]) Pri integrovaní je t premenná (zamlčaná), x pokladáme za konštantu, preto $dt = d(t - x)$ a substitúcia sa môže vykonať.

[2]) Okrem prípadu mnohočlena, pozri koniec čl. 18.

odvodením) veľmi rýchle nájsť. Budeme postupovať týmto spôsobom. Zapíšeme rovnosť (17.11) a vypočítane jeho prvú, druhú až ... n-tú deriváciu

$$y(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots,$$
$$y'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^3 + \dots + nc_n(x - a)^{n-1} + \dots,$$
$$y''(x) = 2c_2 + 3\,.\,2c_3(x - a) + \dots + n(n - 1)\,c_n(x - a)^{n-2} + \dots,$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(x) = n(n - 1)\dots 3\,.\,2c_n + (n + 1)\,n(n - 1)\dots 3\,.\,2c_{n+1}(x - a) + \dots,$$
$$\vdots$$

Každá zo zapísaných rovností dovoľuje určiť jeden z koeficientov c_i. Do každej z týchto rovností, napravo aj naľavo položíme $x = a$. Všetky členy obsahujúce súčinitele $(x - a)$ budú sa rovnať nule a dostaneme rovnice na výpočet koeficientov

$$\begin{array}{lll} y(a) = c_0 & \text{odkiaľ} & c_0 = y(a) \\ y'(a) = c_1 & & c_1 = y'(a) \\ y''(a) = 2c_2 & & c_2 = \dfrac{1}{2}\,y''(a) \\ y'''(a) = 3\,.\,2c_3 & & c_3 = \dfrac{1}{2\,.\,3}\,y'''(a) \\ \vdots & & \vdots \\ y^{(n)}(a) = n(n - 1)\dots 3\,.\,2\,.\,c_n & & c_n = \dfrac{y^{(n)}(a)}{2\,.\,3\dots(n - 1)\,n} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Po dosadení dostaneme:

$$y(x) = y(a) + y'(a)\,(x - a) + \frac{y''(a)}{2}\,(x - a)^2 + \frac{y'''(a)}{2\,.\,3}\,(x - a^3) +$$
$$+ \frac{y^{\mathrm{IV}}(a)}{2\,.\,3\,.\,4}\,(x - a)^4 + \dots + \frac{y^{(n)}(a)}{2\,.\,3\dots(n - 1)\,n}\,(x - a)^n + \dots \tag{17.12}$$

Prvých n členov tohto vzorca aj vzorca (17.10) sa zhoduje. Napíšeme ešte zvláštny prípad, keď $a = 0$

$$y(x) = y(0) + y'(0)\,x + \frac{y''(0)}{2}\,x^2 + \frac{y''(0)}{2\,.\,3}\,x^3 + \dots \tag{17.13}$$

Pre súčin $n - 1$ za sebou nasledujúcich prirodzených čísiel $n(n-1) \ldots . 3 . 2$ je vhodné označenie $n!$ (číta sa en-faktoriál, po latinsky faktor — súčiniteľ). Napríklad $3! = 3 . 2 = 6$; $4! = 4 . 3 . 2 = 24$; $5! = 120$. Pri definícii faktoriálu sa prijalo, že sa nakoniec bude ešte pripisovať súčiniteľ 1:

$$n! = n(n-1) \ldots . 3 . 2 . 1$$

Súčin sa tým nezmení a lepšie sa zapamätá: $n!$ je súčin n za sebou nasledujúcich prirodzených čísiel od n do 1. Napríklad $3!$ je súčin troch súčiniteľov $3 . 2 . 1$ od 3 do 1. Pri tejto definícii prirodzene dostaneme $1! = 1$. Pomocou tohto označenia zapíšeme vzťahy (17.12) a (17.13) vo vhodnej skrátenej forme

$$y(x) = y(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{y^n(a)}{n!} (x-a)^n \tag{17.14}$$

$$y(x) = y(0) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{y^n(0)}{n!} x^n \tag{17.15}$$

Vzorce (17.14) a (17.15) dávajú rozvoj funkcie $y(x)$ do mocninového radu podľa mocnín $(x-a)$ (alebo x). Vzorec (17.14) sa nazýva Taylorov rad, (17.15) sa nazýva MacLaurinov rad. Nech napr. $y(x) = e^x$. Vtedy

$$y' = e^x, \qquad y'' = e^x, \ldots, y^{(n)} = e^x, \ldots$$

Použijeme MacLaurinov rad (17.15). V našom prípade

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = 1$$

Po dosadení do (17.15) dostaneme rozvoj funkcie $y = e^x$ do mocninového radu podľa mocnín x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Preskúmame vzťah, ktorý dostaneme z Taylorovho radu, ak sa obmedzíme napríklad na tri členy

$$y(x) = y(a) + (x-a)\, y'(a) + \frac{(x-a)^2\, y''}{2} (a)$$

Na pravej strane odstránime zátvorky a upravíme výsledok podľa stupňa x

$$y(x) = \left[y(a) - ay'(a) + \frac{1}{2} a^2 y''(a)\right] + \\ + [y'(a) - ay''(a)]\, x + \frac{1}{2} y''(a)\, x^2 \tag{17.16}$$

Na pravej strane je mnohočlen druhého stupňa. Ak vezmeme tri členy v MacLaurinovom rade, nedostaneme výraz totožný so vzťahom (17.16)

$$y(x) = y(0) + y'(0)\, x + \frac{y''(0)}{2} x^2 \tag{17.17}$$

Toto pochopíme, ak si spomenieme, že vzťah (17.16) dá správny výsledok, ak sa x blíži k a a vzťah (17.17) je správny, ak sa x blíži k nule.

V kapitole VII sme uviedli definíciu derivácie ako limitu pomeru prírastku funkcie k prírastku nezávisle premennej.

Keď je už funkcia vyjadrená v tvare mocninového radu, možno dať všeobecnú odpoveď na otázku, podľa akého zákona pomer $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sa približuje k $\frac{dy}{dx}$, ak sa Δx približuje k nule.

Vezmeme Taylorov rad a označíme $(x-a) = \Delta x$. Pritom $y(x) - y(a) = \Delta y$. Dostaneme:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(a) + \frac{1}{2} y''(a)\, \Delta x + \frac{1}{6} y'''(a)\, (\Delta x)^2 + \ldots$$

Pre malé Δx je druhý člen s Δx väčší ako tretí člen s $(\Delta x)^2$. Berieme do úvahy len prvé dva členy. Vidíme, v čom je rozdiel medzi pomerom $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a hodnotou derivácie v krajnom bode intervalu. Rozdiel je priamoúmerný veľkosti intervalu Δx a druhej derivácie $y''(a)$. Musíme pripomenúť, že porovnávame vzťah pre prírastok na intervale od $x = a$ do $x = a + \Delta x$ s deriváciou v krajnom bode $y'(a)$.

Deriváciu možno vypočítať aj iným spôsobom: vezmeme prírastok pri zmene x od $a - \frac{\Delta x}{2}$ do $a + \frac{\Delta x}{2}$ a po predelení Δx porovnáme tento vzťah s deriváciou $y'(a)$, t. j. s deriváciou v strede intervalu. Dostaneme:

$$\Delta y = f\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(a - \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$f\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) = f(a) + \frac{\Delta x}{2} f'(a) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 f''(a) + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 f'''(a)$$

$$f\left(a - \frac{\Delta x}{2}\right) = f(a) - \frac{\Delta x}{2} f'(a) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 f''(a) - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 f'''(a)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \frac{2}{6 \cdot 2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 f'''(a) = f'(a) + \left(\frac{\Delta x}{24}\right)^2 f'''(a)$$

Tento spôsob je oveľa presnejší: rozdiel medzi pomerom prírastkov a deriváciou sa líši členom, ktorý je priamoúmerný $(\Delta x)^2$ a nie Δx a ku ktorému pristupuje koeficient $\frac{1}{24}$.

Cvičenia

1. Rozviňte polynóm tretieho stupňa $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ do mocninového radu podľa $x - x_0$. Porovnajte prvé dva, tri, štyri členy s polynómom.

2. Rozviňte do MacLaurinovho radu funkciu $y = x\,\mathrm{e}^x$; zistite, či jej rozvoj možno dostať z rozvoja e^x.

3. Rozviňte funkciu e^x do Taylorovho radu podľa mocnín $(x - 1)$.

4. Vypočítajte deriváciu funkcie e^x pri $x = 0$, ak vezmeme interval $\Delta x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

5. Objasnite presnosť vzťahu $(1 + r)^m \doteq \mathrm{e}^{mr}$. Jeho ľavú stranu zapíšte v tvare $(1 + r)^m = \mathrm{e}^{m \ln (1+r)}$ a $\ln (1 + r)$ rozviňte do radu.

18. VÝPOČET HODNÔT FUNKCIE POMOCOU RADOV

Zastavme sa na chvíľu pri princípoch, ktoré boli základom vzťahov v čl. 17. Na začiatku vyššej matematiky pokladáme pojem funkcie za známy a vychádzame z toho, že možno vypočítať hodnotu funkcie pre ľubovoľnú hodnotu argumentu. Preto pri skúmaní derivácie sme ich hľadali skusmo, keď sme počítali funkčné hodnoty pri blízkych hodnotách argumentu. Potom sme sa naučili derivovať podľa vzorcov a ukázalo sa,

že zostavovanie vzorcov na derivovanie je celkom jednoduché. Preto výpočet hodnôt funkcií pomocou vzorcov obsahujúcich derivácie sa veľmi často ukazuje jednoduchší ako priamy výpočet funkcie.

Pretože sa Taylorov rad preruší len v prípade mnohočlena a obsahuje konečný počet členov, potom ľubovoľná iná funkcia odlišná od mnohočlena sa nahradí nekonečným radom. Praktickosť radu pri výpočte spočíva v tom, že sa možno obmedziť na dva, tri členy radu a tak dostať dostatočne presný výsledok. Je ale nevyhnutné, aby zanedbané členy radu neboli veľké.

Vypočítame niekoľko jednoduchších príkladov. Nech $y = \mathrm{e}^x$. V predchádzajúcej časti sme dostali vzťah

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \tag{18.1}$$

V zvláštnom prípade, po dosadení $x = 1$, dostaneme vyjadrenie čísla e v tvare radu

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \tag{18.2}$$

Tento vzťah dovoľuje rýchle a s veľkou presnosťou vypočítať e^x, ako to vidieť z *tab. 2*.

Tabuľka 2

x	e^x	$1 + x$	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
0,10	1,1052	1,10	1,1050	1,1052	1,1052
0,25	1,2840	1,25	1,2812	1,2838	1,2840
0,50	1,6487	1,50	1,6250	1,6458	1,6484
0,75	2,1170	1,75	2,0312	2,1015	2,1147
1,00	2,7183	2,00	2,5000	2,6667	2,7083
1,25	3,4903	2,25	3,0312	3,3568	3,4585
1,50	4,4817	2,50	3,6250	4,1876	4,3986
2,00	7,3891	3,00	5,0000	6,3333	7,0000

Ak vezmeme iba dva členy vzťahu, dostaneme presnosť 0,5 % pri $x = 0{,}1$. Prvé tri členy vzťahu dávajú presnosť 1,4 % pri $x = 0{,}5$ a prvé štyri členy dávajú presnosť 1,8 % pri $x = 1{,}0$.

Pomerne dobrá presnosť je spojená zrejme s tým, že členy radu sa rýchle zmenšujú. Každý nasledujúci člen radu je menší ako predchádzajúci predovšetkým preto, že menovateľ $(n + 1)$-ho člena je n-krát väčší ako menovateľ predchádzajúceho n-tého člena. Ak je $x < 1$, tak sa k tomuto pridáva ešte fakt, že n^x je tým menšie, čím je väčšie n.

Pri $x > 1$ vo vzdialenejších členoch radu menovateľ rastie nutne rýchlejšie ako čitateľ. Ako vidieť z *tab. 2*, pri $x = 2$ pri sčítaní 5 členov radu dopustí sa chyby 5 %, ak pridáme 6. člen $\frac{x^5}{120}$, dostaneme 7,3500. Chyba je 0,5 %.

Nájdime mocninové rady pre trigonometrické funkcie

$$y(x) = \sin x,\ y'(x) = \cos x,\ y''(x) = \sin x,\ y'''(x) = -\cos x,$$
$$y^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x$$

Pravidlo pre nasledujúce derivácie je zrejmé.

Dosadíme $x = 0$ a dostaneme:

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -1,\ \ldots$$

teda

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots \tag{18.3}$$

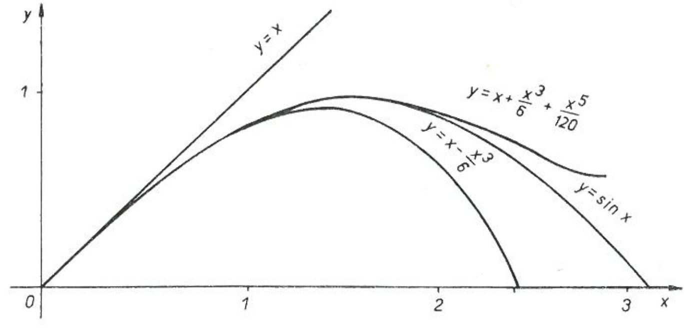
Analogicky dostaneme vzťah

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots \tag{18.4}$$

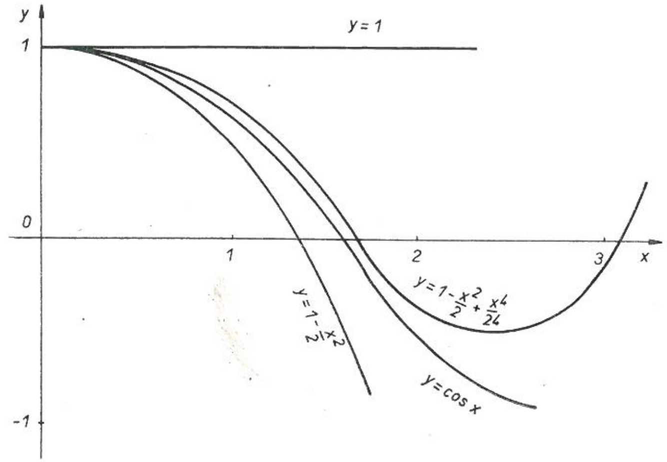
Na *obr. 52* a *53* sú grafy funkcií sínus, kosínus a grafy mnohočlenov, ktoré dostaneme, ak zoberieme jeden, dva, alebo tri členy zodpovedajúceho radu. Vidíme, ako sa zlepšuje presnosť, pretože berieme vždy väčší a väčší počet členov radu.

V *tab. 3* a *3a* sú uvedené číselné výsledky pre sínus a kosínus. Ako vidíme z tabuliek, stačia dva, tri členy radu, aby sme dostali veľmi peknú presnosť v intervale od 0 do $\frac{\pi}{4}$. Vidíme, že mocninový rad dáva

veľmi vhodný, praktický spôsob výpočtu hodnôt trigonometrických funkcií. V absolútnej hodnote nenulové členy radov pre sínus a kosínus sa presne rovnajú zodpovedajúcim členom radu funkcie e^x. Všetko, čo sme doteraz povedali o zanedbaní členov s vyššími mocninami x vo vzťahu (18.1) pre e^x, platí aj pre rady sínus a kosínus (18.3) a (18.4).



Obr. 52



Obr. 53

Ak dosadíme do výrazu (18.1) $x = \mathrm{i}\varphi$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ a vo výrazoch (18.3) a (18.4) zameníme x za φ, dostaneme vzťah $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, ktorý sme spomínali na str. 104.

Ak funkcia $y(x)$ je mnohočlen n-tého stupňa, tak $y'(x)$ je mnohočlen $(n-1)$-ho stupňa, $y''(x)$ — je mnohočlen $(n-2)$-ho stupňa, ..., $y^{(n)}(x)$ je konštanta a $y^{(n+1)}(x)$ a všetky derivácie vyššieho stupňa sa rovnajú nule.

Tabuľka 3

x	φ[1]	$\sin x$	x	$x - \frac{x^3}{3}$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
0	0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\frac{\pi}{20}$	9°	0,1564	0,1571	0,1564	0,1564
$\frac{\pi}{10}$	18°	0,3090	0,3142	0,3090	0,3090
$\frac{3\pi}{20}$	27°	0,4540	0,4712	0,4538	0,4540
$\frac{4\pi}{20}$	36°	0,5878	0,6283	0,5869	0,5878
$\frac{5\pi}{20}$	45°	0,7071	0,7854	0,7046	0,7071
$\frac{6\pi}{20}$	54°	0,8090	0,9425	0,8029	0,8091
$\frac{7\pi}{20}$	63°	0,8910	1,0996	0,8781	0,8914
$\frac{8\pi}{20}$	72°	0,9510	1,2566	0,9258	0,9519
$\frac{9\pi}{20}$	81°	0,9877	1,4137	0,9427	0,9898
$\frac{\pi}{2}$	90°	1,0000	1,5708	0,9248	1,0045

[1]) Uhol zodpovedajúci x, vyjadrený v stupňoch.

Preto sa Taylorov rad (17.14) pre mnohočlen preruší a bude sa skladať z konečného počtu členov. Dostaneme mnohočlen rozvinutý podľa mocnín $(x - a)$. Pritom pre mnohočleny n-tého stupňa súčet prvých $n + 1$ členov Taylorovho radu dá presnú rovnosť, správnu pre ľubovoľné x a nielen pre x blížiace sa k a.

Tabuľka 3a

x	φ	$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2}$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$
0	0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\frac{\pi}{20}$	9°	0,9877	0,9877	0,9877	0,9877
$\frac{\pi}{10}$	18°	0,9510	0,9506	0,9510	0,9510
$\frac{3\pi}{20}$	27°	0,8910	0,8890	0,8911	0,8910
$\frac{4\pi}{20}$	36°	0,8090	0,8026	0,8091	0,8090
$\frac{5\pi}{20}$	45°	0,7071	0,6916	0,7075	0,7071
$\frac{6\pi}{20}$	54°	0,5878	0,5558	0,5887	0,5877
$\frac{7\pi}{20}$	63°	0,4540	0,3954	0,4563	0,4539
$\frac{8\pi}{20}$	72°	0,3090	0,2105	0,3144	0,3089
$\frac{9\pi}{20}$	81°	0,1564	0,0007	0,1672	0,1561
$\frac{\pi}{2}$	90°	0,0000	—0,2337	0,0200	—0,0009

19. PODMIENKA POUŽITEĽNOSTI RADOV. GEOMETRICKÝ RAD

V predchádzajúcom článku sme našli vzorce, v ktorých sme funkcie e^x, $\sin x$ a $\cos x$ vyjadrili ako súčty mocninových radov podľa mocnín x. V týchto troch prípadoch sa ukázalo, že pre ľubovoľné x každý nasledujúci člen radu je menší ako predchádzajúci. Čím je člen v poradí ďalej, tým je bližšie k nule. Pri týchto funkciách možno pre ľubovoľné x vypočítať hodnotu funkcie pomocou radu, ak vezmeme dostatočný počet členov radu, aby zanedbané členy prakticky nemali na výsledok vplyv.

Pripomeňme, že sme začali s úlohou — približne vyjadriť funkciu na malom intervale z oboru definície funkcie. Zostrojovali sme čoraz presnejšie vzťahy pomocou prvej, druhej, tretej a ďalších derivácií. Presnosť každého vzťahu

$$y(x) = y(a) \tag{0}$$

$$y(x) = y(a) + (x - a)\, y'(a) \tag{I}$$

$$y(x) = y(a) + (x - a)\, y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, y''(a) \tag{II}$$

je tým väčšia, čím je rozdiel $(x - a)$ menší. Na druhej strane, pri danom $(x - a)$ vzťah (I) je presnejší ako vzťah (0), vzťah (II) je presnejší ako (I) atď. To znamená, pri zachovaní danej presnosti zväčšenie počtu členov radu dovoľuje zväčšovať číslo $(x - a)$.

Položme si otázku: možno vždy pri ľubovoľnej hodnote $(x - a)$ dosiahnuť danú presnosť zväčšovaním počtu členov radu? Na veľmi dôležitom príklade sa teraz presvedčíme, že to tak nie je. Mocninový rad, zostrojený tak, aby dal dobré priblíženie na malom obore hodnôt x, pri ľubovoľnom $(x - a)$ má prirodzenú hranicu použiteľnosti, hranicu prípustného zväčšenia $(x - a)$, ktorá nezávisí od počtu uvažovaných členov radu. V príkladoch z predchádzajúceho článku to tak nebolo.

Preskúmajme funkciu

$$y = \frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1}$$

Ak postupne vypočítame derivácie, dostaneme:

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad y'' = \frac{1 . 2}{(1-x)^3}, \ldots\; y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

dosadíme $x = 0$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2,\ \ldots,\ y^{(n)}(0) = n!$$

Dostaneme rad

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \tag{19.1}$$

Príklad funkcie $\dfrac{1}{1-x}$ nie je pozoruhodný len neobyčajne jednoduchým tvarom získaného mocninového radu (všetky koeficienty sa rov-

najú 1). V tomto prípade nie je ťažké dať presný vzťah pre súčet n prvých členov radu (19.1)

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \tag{19.2}$$

O správnosti tohto vzťahu sa presvedčíme, ak obidve strany (19.2) vynásobíme $(1 - x)$. Vzťah (19.2) možno napísať takto:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \tag{19.3}$$

Ak porovnáme (19.3) s (19.1) vidíme, že $\dfrac{x^n}{1-x}$ je hodnota, ktorú zanedbávame, ak berieme prvých n členov radu

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \tag{19.4}$$

Ak $-1 < x < 1$, tak x^n je tým bližšie k nule, čím je väčšie n a, ak vezmeme dostatočne mnoho členov radu, zanedbáme len malú hodnotu. Všimnime si, že čím je x bližšie k 1, tým viac členov radu musíme vziať, aby sme dostali danú presnosť.

Celý obraz sa zmení, ak zoberieme $x > 1$. V tomto prípade každý nasledujúci člen radu (19.4) je väčší ako predchádzajúci. Vzťah (19.3) je správny, avšak pre $x > 1$ rastie x^n neohraničene s rastúcim n, a preto nemožno zanedbať zlomok $\dfrac{x^n}{1-x}$. Vzťah (19.1) je v tomto prípade nesprávny. Dokonca nepoznáme ani jednu spoločnú vlastnosť medzi súčtom kladných sčítancov (19.4) a zápornou hodnotou $1/(1 - x)$ (pretože $x > 1$). Zo vzťahu (19.3) vidíme, že pri $x > 1$ súčet radu (19.4) neobmedzene rastie s rastúcim n. Takéto rady nazývame *divergentné*.

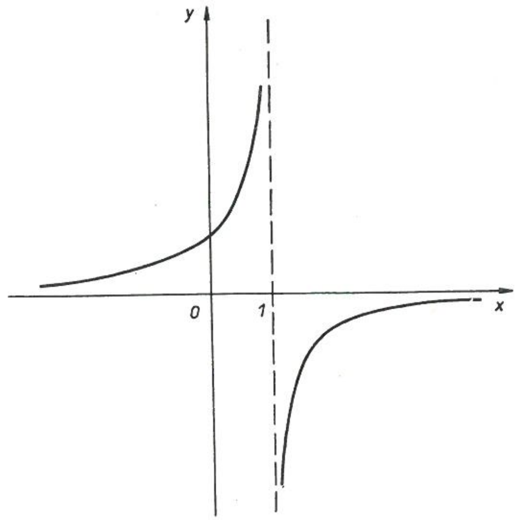
Rad (19.4) sa nazýva *geometrický rad.* Našli sme, že súčet členov nekonečného geometrického radu sa rovná $\dfrac{1}{1-x}$, ak $|x| < 1$. Ak $x \geqq 1$, nekonečný geometrický rad nemá súčet.

Ešte poznamenáme, že ľubovoľný periodický zlomok je súčtom príslušného geometrického radu, napr.

$$1,(1) = 1,111\ldots = 1 + 0,1 + 0,001 + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$$

S jednoduchým nekonečným geometrickým radom sme sa už stretli skôr v aritmetike a v algebre.

Funkcia $y = \frac{1}{1-x}$ (*obr. 54*) nie je spojitá v bode $x = 1$. Ak sa x blíži k číslu 1 z pravej strany, $\frac{1}{1-x}$ je v absolútnej hodnote veľké záporné číslo; ak sa x blíži z ľavej strany k 1, je $\frac{1}{1-x}$ veľké kladné číslo. Teda, ak x prechádza cez hodnotu 1, hodnota funkcie $\frac{1}{1-x}$ prechádza od veľkých kladných čísel k veľkým v absolútnej hodnote záporným číslam. Toto zvláštne správanie sa funkcie rad opísať nemôže.



Obr. 54

Ešte poznamenáme nasledujúcu okolnosť: pre $x = 1$ funkcia $y = \frac{1}{1-x}$ nie je definovaná a limita z $|y|$ je $+\infty$ (čím je bližšie x k 1, tým je y v absolútnej hodnote väčšie) a členy radu (19.4) pri tom istom $x = 1$ prestanú klesať. Rad je vhodný na výpočet, len ak jeho členy v absolútnej hodnote klesajú[1]). Pri $x = 1$ je rad nevhodný na výpočet, pretože jeho členy neklesajú. To znamená, že rad nie je vhodný na výpočet hodnôt funkcie aj pri $x = -1$ (pretože pri $x = -1$ ani jeho členy v absolútnej hodnote neklesajú), hoci samotná funkcia v tomto bode nie je spojitá a jej hodnota sa rovná $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$.

[1]) Nie je chybou, ak jeden, dva alebo niekoľko prvých členov radu rastie, ale nasledujúce ďalšie členy radu rýchle klesajú; pozri príklad s e^x pri $x = 2$, *tab. 2*.

Ak by sme zobrali mnohočlen, jeho grafom bude vždy spojitá čiara; mnohočlen nemá body nespojitosti. Preto, ak niektorá funkcia $f(x)$ má bod nespojitosti v $x = x_0$ (napr. $\frac{1}{1-x}$ v $x_0 = 1$), potom v okolí hodnoty $x = x_0$ je rad vyjadrujúci $f(x)$ na výpočet nevhodný. Pretože ľubovoľný člen radu $c_n x^n$ je v absolútnej hodnote tým väčší, čím je väčšie v absolútnej hodnote x, potom pri ľubovoľnom x a absolútnej hodnote väčšom ako x_0 je rad na výpočty tak isto nevhodný.

Na základe tohto, ak funkcia $f(x)$ obsahuje bod nespojitosti, možno vopred určiť také x_0, že pri všetkých x väčších ako x_0 v absolútnej hodnote rad na výpočty nebude vhodný.

Poznamenajme, že existencia bodu nespojitosti funkcie je postačujúcou podmienkou, ale nie nevyhnutnou, aby rad prestal konvergovať. Preskúmame funkciou $y = \frac{1}{1+x}$. Ak použijeme vzťah (17.13) nájdeme:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \tag{19.5}$$

Vezmime napr. $x = 2$. Vtedy

$$\left[\frac{1}{1+x}\right]_{x=2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

Súčet členov radu

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots \tag{19.6}$$

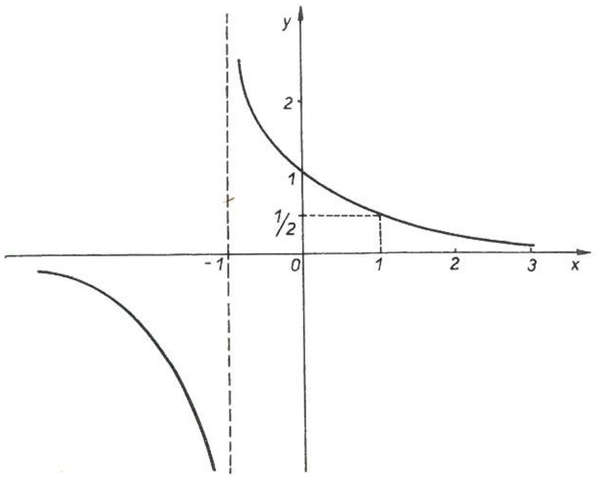
sa rýchle mení v závislosti od zmeny počtu členov n:

n	1	2	3	4	5	6	7
súčet členov	1	—1	3	—5	11	—21	43

Z tabuľky vidíme, že pri $x = 2$ tento rad nie je vhodný na výpočet. Prečo? Veď samotná funkcia $y = \frac{1}{1+x}$ ani pri $x = 2$ a ani pre x od $x = 0$ do $x = 2$ nemá bod nespojitosti (*obr. 55*).

Funkcia $y = \frac{1}{1+x}$ má bod nespojitosti pri $x = -1$. Preto pri $x = -1$ členy radu (19.6) neklesajú. Absolútne hodnoty členov radu (19.6) sú nezávislé od znamienka x. Teda pre $x = 1$, tým viac pre $x > 1$ nie je vhodný na výpočet.

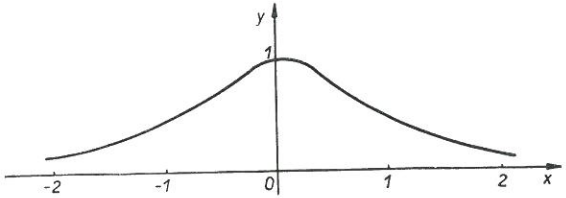
Preto, hoci nás zaujíma správanie radu len pre $x > 0$, to neznamená, že netreba brať do pozornosti všetky hodnoty x a teda i záporné, pre ktoré má rozvíjaná funkcia bod nespojitosti.



Obr. 55

Na konvergenciu radu má dokonca vplyv aj správanie sa funkcie pri komplexných hodnotách argumentu. Ukážeme príklad. Ak zameníme vo vzťahu (19.5) x za x^2, dostaneme:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \tag{19.7}$$



Obr. 56

Graf funkcie $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (*obr. 56*) nemá body nespojitosti. Ani pri kladných, ani pri záporných x nemá nevlastnú limitu plus alebo mínus nekonečno. No rad (19.7) je vhodný na výpočty len ak $x^2 < 1$, t. j. pri $-1 < x < 1$, lebo pri $x = \pm\sqrt{-1} =$

$= \pm i$, t. j. pre $x^2 = -1$, funkcia $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ [1]) má nevlastnú limitu plus nekonečno, preto členy radu v absolútnej hodnote pri $x^2 = -1$ neklesajú. To znamená, že v absolútnej hodnote neklesajú ani pri $x^2 = 1$. Otázku o správaní sa funkcie pri komplexných hodnotách x v tejto knihe nemožno podrobne a zrozumiteľnejšie vysvetliť. Kto sa o túto otázku bližšie zaujíma, tomu možno odporúčať napr. knihu Zeľdoviča a Myškisa „Základy aplikovanej matematiky".

Preskúmajme ešte jeden príklad. Nájdeme MacLaurinov rad funkcie $y = \operatorname{tg} x$. Podľa všeobecných pravidiel nájdeme:

$$y = \operatorname{tg} x \frac{\sin x}{\cos x}, \quad y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$y'''(x) = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}, \quad y^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{16\sin x + 8\sin^3 x}{\cos^5 x},$$

$$y^{\mathrm{V}} = \frac{16 + 88\sin^2 x + 16\sin^4 x}{\cos^6 x}$$

Odtiaľ

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y''(0) = 0$$
$$y'''(0) = 2, \quad y^{\mathrm{IV}}(0) = 0, \quad y^{\mathrm{V}}(0) = 16$$

preto

$$\operatorname{tg} x = 0 + 1 \,.\, x + 0 \,.\, x^2 + \frac{2}{3\,.\,2\,.\,1} x^3 + 0 \,.\, x^4 \frac{16}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} x^5 + \dots$$

Takýmto spôsobom

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{7}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots \tag{19.8}$$

V poslednom výraze koeficienty pri x^7 a x^9 sme dostali tak, ako v texte koeficienty pri x, x^3, x^5.

Pre ktoré x z oboru definície funkcie je vzťah (19.8) vhodný? Pri pohľade na graf tangensu (pozri *obr. 48*) si ľahko predstavíme, že rad (19.8) môže byť vhodný pre výpočty len pri $|x| < \dfrac{\pi}{2}$, pretože pri $x = \dfrac{\pi}{2}$ funkcia $\operatorname{tg} x$ sa správa práve tak zle, ako funkcia $\dfrac{1}{1-x}$ pri $x = 1$.

Z pohľadu na rad $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \dots$, by nebolo možné ľahko povedať, pri akej hodnote x nebude možné tento rad použiť, pretože pravidlo, podľa ktorého sa vypočítajú koeficienty radu, nie je také jednoduché, ako pri vyššie skúmanom rade $1 + x + x^2 + \dots$.

[1]) Uvedenú funkciu chápeme ako funkciu komplexnej premennej x. Pozn. prekl.

Cvičenia

1. Napíšte MacLaurinov rad pre funkciu $y = \dfrac{x+1}{1-x}$.
2. Napíšte MacLaurinov rad pre funkciu $y = \ln(1+x)$.
3. Napíšte Taylorov rad pre funkciu $y = \ln x$ podľa mocnín $(x-1)$. Aký je obor konvergencie radov z úloh **1** až **3**?
4. Rozložte podľa mocnín x súčin funkcií $f(x)\, g(x)$.
5. Napíšte prvé tri členy radu Napíšte tento rad, ak vynásobíte rady pre funkcie $f(x)$ a $g(x)$.

20. BINOMICKÁ VETA PRE CELÉ A LOMENÉ EXPONENTY

Rozložme do MacLaurinovho radu ľubovoľnú m-tú mocninu dvojčlena $(a + x)$; $y = (a+x)^m$.

Podľa všeobecného pravidla nájdeme najprv derivácie

$$\left.\begin{array}{l} y' = m(a+x)^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)(a+x)^{m-2}, \ \ldots \\ y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)(a+x)^{m-n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (20.1)$$

Hodnoty funkcie a derivácií pre $x = 0$ sú:

$$\left.\begin{array}{r} y(0) = a^m, \quad y'(0) = ma^{m-1} \\ y''(0) = m(m-1)\,a^{m-2}, \ \ldots \\ y^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,a^{m-n}, \ \ldots \end{array}\right\} \qquad (20.2)$$

Z tohto dostaneme MacLaurinov rad

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}x^2 + $$
$$+ \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \ldots \qquad (20.3)$$

Ak exponent m je celé kladné číslo, $(a+x)^m$ je mnohočlen m-tého stupňa, takže v tomto prípade rad (20.3) bude konečný: $(m+1)$-vá derivácia funkcie $(a+x)^m$, a to znamená, že aj všetky derivácie od nej vyššieho stupňa sa rovnajú nule. Vzťahy (20.1), (20.2), (20.3) túto vlastnosť vyjadrujú skutočne, činiteľ $(m-n+1)$ sa pri $n = m+1$ rovná nule;

pri $n > m+1$ sa niekde v postupnosti činiteľov m, $(m-1)$, ... nájde činiteľ, ktorý sa rovná nule, a tak teda celý súčin sa rovná nule.

Súčin v čitateli sa pri celom kladnom m môže zapísať vo veľmi vhodnom tvare:

$$m(m-1)\ldots(m-n+1) =$$
$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{(m-n)(m-n-1)\ldots 3\,.\,2\,.\,1} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Nakoniec pre prirodzené číslo m dostaneme:

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m!}{1!(m-1)!}a^{m-1}x + \frac{m!}{2!(m-2)!}a^{m-2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m!}{n!(m-n)!}a^{m-n}x^n + \ldots + \frac{m!}{(m-2)!\,2!}a^2x^{m-2} +$$
$$+ \frac{m!}{(m-1)!\,1!}ax^{m-1} + x^m \qquad (20.4)$$

Vo vzťahu (20.4) sú vpravo i vľavo mnohočleny m-tého stupňa. Pre prípad celého kladného m dostaneme presnú rovnosť, správnu pre ľubovoľné hodnoty x. Vzťah (20.4) je symetrický vzhľadom na x a a: koeficienty pri členoch $a^{m-n}x^n$ a a^nx^{m-n} sú rovnaké. Je to zrejmé, pretože $(x+a)^m$ nie je závislé od poradia sčítancov v zátvorke

$$(x+a)^m = (a+x)^m$$

Vzťah (20.4) sa nazýva *binomická veta*. Možno ju dostať i bez použitia vyššej matematiky a derivácií. Je len potrebné vziať súčin

$$\underbrace{(a+x)(a+x)\ldots(a+x)}_{m\text{-krát}}$$

roznásobiť a zlúčiť rovnaké mocniny. Avšak pre m, ktoré je dané všeobecne a nie určitým číslom, je zlúčenie rovnakých mocnín ťažšie. Odvodenie binomickej vety pomocou MacLaurinovho radu je jednoduchšie.

Newton dostal všeobecný vzťah (20.3), t. j. rozklad $(x+a)^m$ pre prípad ľubovoľného exponentu m. Bolo by preto správne práve vzťah (20.3) nazývať binomickou vetou a nie (20.4), ktorý je len špeciálny, jednoduchší prípad vzťahu (20.3).

Vráťme sa k všeobecnému vzťahu (20.3). Nech m nie je prirodzené číslo. V MacLaurinovom rade (20.3) sú mocniny premennej x, t. j. čísla n sú prirodzené. To znamená, že v (20.3), ak m nie je prirodzené číslo, čitateľ sa nebude rovnať nule pre žiadne n, vzťah (20.3) je potom nekonečný rad. V prípade, že $m = -1$, má tento rad tvar

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \dots \tag{20.5}$$

Poznamenajme, že pre $a = 1$ vzťah (20.5) prechádza nám už do známeho vzťahu

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Zo vzťahu (20.5) tiež nájdeme:

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \dots$$

Pre $m = \frac{1}{2}$ dostaneme:

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{a\sqrt{a}} + \frac{1}{16}\frac{x^3}{a^2\sqrt{a}} - \frac{5}{128}\frac{x^4}{a^3\sqrt{a}} + \frac{7}{256}\frac{x^5}{a^4\sqrt{a}} - \frac{21}{1024}\frac{x^6}{a^5\sqrt{a}} + \dots \tag{20.6}$$

V rozvoji $(a + x)^m$ pre ľubovoľné m všetky členy majú rovnaký súčet exponentov mocnín x, a a každý nasledujúci člen sa odlišuje od predchádzajúceho násobkom $\left(\frac{x}{a}\right)$ a koeficientom. Fyzik by povedal, že a aj x vo vzťahu (20.3) musia mať rovnaký rozmer, to znamená, že $\left(\frac{x}{a}\right)$ je bezrozmerné. Od samého začiatku bolo možné vyňať pred zátvorku a, t. j.

$$(a+x)^m = a^m\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m$$

a rozvíjať $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ podľa mocnín $\frac{x}{a}$.

Ukazuje sa, že pre m (záporné i kladné lomené) možno rad (20.3) použiť, ak $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, t. j. pri $|x| < |a|$. Pri $\left|\frac{x}{a}\right| \geqq 1$ je rad (20.3) divergentný. Výnimkou sú prirodzené čísla m, pretože v tomto prípade vzťah (20.3) obsahuje konečný počet členov.

Vzťah (20.6) umožňuje výhodný spôsob výpočtu odmocnín. Pritom čím je menšia $\left|\frac{x}{a}\right|$, tým menej členov zo vzťahu (20.6) možno zobrať na dosiahnutie zadanej presnosti.

Cvičenia

1. Rozvinutím do radu nájdite hodnoty čísiel $\sqrt{1,1}$ a $\sqrt{1,5}$ podľa vzťahu $\sqrt{1+x}$ pre $x = 0,1$ a pre $x = 0,5$, ak v rozklade ponecháte dva, tri a štyri členy! Porovnajte s hodnotami v tabuľkách!

2. Ukážte, že pri $|x| < 1$ je správny približný vzťah $\sqrt[n]{1-x} \doteq 1 + \frac{x}{n}$, ktorý je tým presnejší, čím je menšie x.

3. Nájdite podľa vzťahu z predchádzajúceho cvičenia $\sqrt[3]{1,2}$, $\sqrt[3]{1,1}$, $\sqrt[3]{1,05}$. Porovnajte s hodnotami v tabuľkách!

4. Nájdite $\sqrt{6}$ na tri platné desatinné miesta.

Návod. Využite to, že $6 = 4 + 2$, $\sqrt{4} = 2$ a vzťah (20.6).

5. Prečo nemožno rozvinúť $y = \sqrt{x}$ podľa MacLaurinovho vzorca?

21. STUPEŇ RASTU A KLESANIA FUNKCIÍ

Rozvoj funkcie do radu dáva všeobecný spôsob upravenia rozličných funkcií na rovnaký tvar a umožňuje porovnať medzi sebou rôzne funkcie. Takýto spôsob porovnávania je potrebný napr. vtedy, keď skúmame pomer dvoch funkcií $\frac{f(x)}{g(x)}$ pri takej hodnote argumentu x, pri ktorej hodnoty obidvoch funkcií sú blízke k nule.

Na príklade výpočtu derivácií sme ukázali, že pomer dvoch funkcií blížiacich sa k nule môže byť celkom určité číslo. V niektorých prípadoch tento pomer sa môže rovnať nule, alebo nie je konečný. Ukážeme niekoľko príkladov. Pre jednoduchosť zápisu vezmeme príklady, v ktorých hodnota x, ktorá nás zaujíma, rovná sa nule.

Pre malé x aj funkcie $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$ sú malé. Funkcie e^x a $\cos x$ sú blízke k jednej a teda $e^x - 1$ a $1 - \cos x$ sú malé. Pritom hodnoty funkcie $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $e^x - 1$, $1 - \cos x$ sú tým bližšie k nule, čím je menšia $|x|$.

Porovnajme tieto funkcie s funkciou x. Napíšeme preto ich rozvoje do MacLaurinovho radu:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \dots \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \dots \\ 1 - \cos x &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots \\ e^x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + \dots \end{aligned} \tag{21.1}$$

Odtiaľ nájdeme:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \dots$$

Teda

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x \to 0}{\to} 1 \quad \text{alebo} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Analogicky z (21.1) nájdeme:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \dots \underset{x \to 0}{\to} 1$$

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + \dots \underset{x \to 0}{\to} 0$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots \underset{x \to 0}{\to} \frac{1}{2}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots \underset{x \to 0}{\to} 1$$

Môžeme nájsť i oveľa zložitejšie vzťahy. Napríklad

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \dots$$

odtiaľ vyplýva:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{8} x^5 + \dots$$

a

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} \underset{x \to 0}{\to} \frac{1}{2}$$

Môžeme zostrojiť stupnicu klesania rôznych funkcií, ak sa x blíži k nule: stupňom klesania nazveme stupeň tej mocniny x, ktorá klesá tak rýchlo ako skúmaná funkcia. Ak funkcia $f(x)$ má k-ty stupeň klesania pri malých x, to znamená, že klesá ako x^k, t. j. pomer $\dfrac{f(x)}{x^k}$ má konečnú limitu rôznu od nuly pre $x \to 0$.

Na základe toho môžeme povedať, že $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $e^x - 1$ klesá podľa prvého stupňa, $1 - \cos x$ klesá podľa druhého stupňa, $\operatorname{tg} x - \sin x$ klesá podľa tretieho stupňa pri malých x. Stupeň klesania v niektorých konkrétnych prípadoch možno určiť i bez rozvoja do radu. Napríklad, ak nakreslíme grafy funkcie sínus a kosínus, z obrázku sa presvedčíme, že $\sin x \approx x$, $\operatorname{tg} x \approx x$ pre malé x, t. j. $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$ klesajú podľa prvého stupňa. Zo vzťahu $1 - \cos x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$, pretože $\sin \dfrac{x}{2}$ je prvého stupňa, vidíme, že $1 - \cos x$ klesá podľa druhého stupňa. Funkciu $\operatorname{tg} x - \sin x$ možno napísať ako $\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \dfrac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x)$. Pretože pre malé x sa $\cos x$ blíži k 1, $\sin x$ je prvého stupňa, $1 - \cos x$ druhého stupňa, je jasné, že $\operatorname{tg} x - \sin x$ je tretieho stupňa. V týchto príkladoch je potrebné veľa dôvtipu, a práve preto je potrebná jednoduchá, bezchybná, všeobecná metóda.

Takýto vzájomný vzťah medzi vtipným riešením jednotlivých úloh a všeobecnými metódami pozorujeme všade: vlastnosti dotyčníc k parabole, obsah kruhu, objem ihlana, objem gule boli známe už starým Grékom, no len diferenciálne a integrálne výpočty dali všeobecné a jednoduché spôsoby riešenia všetkých úloh tohto typu.

Pomocou radov možno nájsť nielen pomer funkcie k mocnine x, ale i pomer jednej funkcie k druhej.

Uveďme príklady:

$$\frac{e^x - 1}{\sin x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots}{x - \frac{x^3}{6} + \dots} = \frac{1 + \frac{x}{2} + \dots}{1 - \frac{x^2}{6} + \dots} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

$$\frac{e^x - 1}{1 - \cos x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \dots}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots} = \frac{1 + \frac{x}{2} + \dots}{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + \dots} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$$

$$\frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \dots}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} x \sqrt{x} + \dots \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Koeficienty MacLaurinových radov sa vyjadrujú pomocou derivácií. Preto výsledky získané pomocou radov možno vysloviť v tvare pravidiel, ktoré sa vzťahujú na derivácie. Ak $f(0) = g(0) = 0$, potom zo vzťahov

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \dots$$

a

$$g(x) = g(0) + g'(0)\, x + \frac{1}{2} g''(0)\, x^2 + \dots$$

dostaneme:

$$f(x) = f'(0)\, x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \dots$$

a

$$g(x) = g'(0)\, x + \frac{1}{2} g''(0)\, x^2 + \dots$$

Odtiaľ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)\, x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \dots}{g'(0)\, x + \frac{1}{2} g''(0)\, x^2 + \dots} = \frac{f'(0) + \frac{1}{2} f''(0)\, x + \dots}{g'(0) + \frac{1}{2} g''(0)\, x + \dots} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

t. j.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

pri $f(0) = g(0) = 0$.

Teda namiesto toho, aby sme skúmali pomer dvoch funkcií, ktorých hodnoty sa blížia k nule (obidve funkcie nadobúdajú hodnotu nula pri rovnakých hodnotách argumentu, v blízkosti ktorého sa pomer skúma), možno skúmať pomer ich derivácií. Tento výsledok sa nazýva *L'Hospitalovo pravidlo*.

Po preštudovaní radov je výhodnejšie nepamatäť si nejaké zvláštne pravidlo, ale pre malé x použijeme mocninové rady funkcií podľa mocnín x. Všade tam, kde sa nachádza súčet rozličných stupňov x, pri prechode k malým hodnotám x, ponecháme len člen s najnižším stupňom.

Presne tak isto, ako sa skúma stupeň klesania funkcie pri malých x, pri $x = 0$ (rovnajúcich nule), tak isto možno skúmať správanie sa funkcií pri neobmedzenom raste x, t. j. pri $x \to \infty$. Pre mnohočlen je zrejmé, že pri veľkom x je dôležitý len člen obsahujúci najvyššiu mocninu x; možno hovoriť o stupni rastu x, x^2 atď.

Dôležitejšie je to, že funkcia e^x stúpa rýchlejšie ako ľubovoľná mocnina x^n pri neobmedzenom raste x. Aby sme to dokázali, použijeme vyjadrenie e^x v tvare radu, ktoré platí pre ľubovoľné x, pozri čl. 19.

Dostaneme:

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} + \frac{x^2}{(n+2)!} + \dots \qquad (21.2)$$

Pri danom n a dostatočne veľkom x zlomok $\frac{e^x}{x^n}$ bude ľubovoľne veľký vplyvom členov s kladnými mocniteľmi x vo vzťahu (21.2). To isté sa vzťahuje na funkcie e^{kx} s kladným k; ak označíme $kx = y$, nájdeme, že

$$\frac{e^{kx}}{x^n} = k^n \frac{e^{kx}}{(kx)^n} = k^n \frac{e^y}{y^n} \xrightarrow[y \to \infty]{} \infty \qquad (21.3)$$

Ešte poznamenáme, že ak $y \to \infty$, tak aj $x \to \infty$. Ak sa budeme zaoberať prípadom, kde n je v tvare zlomku, nič sa na výsledku nezmení. Vidíme, že exponenciálna funkcia, keď sa argument x blíži do ∞, rastie rýchlejšie ako ľubovoľná mocninová funkcia.

Exponenciálna funkcia so záporným mocniteľom, ak sa x v limite blíži do ∞, klesá rýchlejšie, ako ľubovoľná záporná mocnina. Toto tvrdenie zapisujeme takto: pre ľubovoľné n

$$f = \frac{e^{-x}}{x^{-n}} = x^n e^{-x} \to 0 \quad \text{ak} \quad x \to \infty$$

Rozvoj e^{-x} podľa mocnín x nemožno pri dôkaze použiť, pretože x je veľké a tento rozvoj má striedavé znamienka. Všimnime si preto prevrátenú hodnotu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x^n\, e^{-x}} = \frac{e^x}{x^n}$$

V súhlase s (21.3) pre ľubovoľné n hodnota $f^{-1} = \frac{e^x}{x^n} \to \infty$ pri $x \to \infty$. Z toho, že $f^{-1} \to \infty$, vyplýva, že $f \to 0$, čo bolo i potrebné dokázať.

Zistili sme, že v limite exponenciálna funkcia (pre veľké hodnoty argumentu, ktorý je v menovateli), závisí od x viac ako ľubovoľná mocnina x^n, n-konštanta; e^x rastie rýchlejšie ako x^n, e^{-x} klesá rýchlejšie ako x^{-n}. Je to názorne vidieť v tabuľke na príklade x^5 a e^x:

x	1	3	5	10	20	50	100
x^5	1	32	3 125	10^5	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^8$	10^{10}
e^x	2,72	20	150	$2 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^{21}$	10^{43}
$\frac{x^5}{e^x} = \frac{e^{-x}}{x^{-5}}$	0,37	1,6	21	5	0,01	10^{-13}	10^{-33}

Cvičenia

Vypočítajte limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{tg} x}{x^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x - \operatorname{tg} x}$.

PRÍLOHA KU KAPITOLE II

Tabuľka I

Tabuľka derivácií

1. $y = c$ $\quad \frac{dy}{dx} = 0.$
2. $y = x$ $\quad \frac{dy}{dx} = 1.$
3. $y = x^a$ $\quad \frac{dy}{dx} = ax^{a-1} = a\frac{y}{x}.$
4. $y = e^x$ $\quad \frac{dy}{dx} = e^x.$
5. $y = a^x$ $\quad \frac{dy}{dx} = a \ln a.$
6. $y = \ln x$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$
7. $y = \log_a x$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}.$
8. $y = \sin x$ $\quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$
9. $y = \cos x$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\sin x.$
10. $y = \operatorname{tg} x$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

11. $y = \operatorname{cotg} x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

12. $y = \arcsin x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

13. $y = \arccos x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

14. $y = \operatorname{arctg} x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + x^2}.$

15. $y = \operatorname{arccotg} x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{1 + x^2}.$

Tabuľka II

Integrály niektorých funkcií

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^a \, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C (a \neq -1).$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C.$

4. $\int \dfrac{dx}{ax + b} = \dfrac{1}{a} (ax + b) + C.$

5. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

6. $\int e^{kx} \, dx = \dfrac{1}{k} e^{kx} + C.$

7. $\int x^n e^{kx} \, dx = \dfrac{1}{k} x^n e^{kx} - \dfrac{n}{k} \int x^{n-1} e^{kx} \, dx.$

8. $\int \dfrac{dx}{1 + e^{kx}} = \dfrac{1}{k} \ln \dfrac{e^{kx}}{1 + e^{kx}} + C.$

9. $\int e^{kx} \sin ax \, dx = \dfrac{e^{kx}}{k^2 + a^2} (k \sin ax - a \cos ax) + C.$

10. $\int e^{kx} \cos ax \, dx = \dfrac{e^{kx}}{k^2 + a^2} (k \cos ax + a \sin ax) + C.$

11. $\int \sin kx \, dx = -\dfrac{1}{k} \cos kx + C.$

12. $\int \cos kx \, dx = \dfrac{1}{k} \sin kx + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 kx} = -\dfrac{1}{k} \operatorname{cotg} kx + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 kx} = \dfrac{1}{k} \operatorname{tg} kx + C.$

15. $\int \sin^2 kx \, dx = \dfrac{1}{2} x \dfrac{1}{4k} \sin 2kx + C.$

16. $\int \cos^2 kx \, dx = \dfrac{1}{2} x + \dfrac{1}{4k} \sin 2kx + C.$

17. $\int x^n \sin kx \, dx = -\dfrac{x^n}{k} \cos kx + \dfrac{n}{k} \int x^{n-1} \cos kx \, dx.$

18. $\int x^n \cos kx \, dx = \dfrac{x^n}{k} \sin kx - \dfrac{n}{k} \int x^{n-1} \sin kx \, dx.$

19. $\int \sin kx \sin lx \, dx = \dfrac{\sin (k - l) x}{2 (k - l)} - \dfrac{\sin (k + l) x}{2(k + l)} + C,$

ak $|k| \neq |l|$ (ak $|k| = |l|$, pozri č. 15).

20. $\int \cos kx \cos lx \, dx = \dfrac{\sin (k - l) x}{2(k - l)} + \dfrac{\sin (k + l) x}{2(k + l)} + C,$

ak $|k| \neq |l|$ (ak $|k| = |l|$, pozri č. 16).

21. $\int \sin kx \cos lx \, dx = -\dfrac{\cos (k + l) x}{2(k + l)} - \dfrac{\cos (k - l) x}{2(k - l)} + C,$

ak $|k| \neq |l|$.

22. $\int \operatorname{tg} kx \, dx = -\dfrac{1}{k} \ln \cos kx + C.$

23. $\int \operatorname{cotg} kx \, dx = \dfrac{1}{k} \ln \sin kx + C.$

24. $\int \sqrt{ax + b} \, dx = \dfrac{2}{3a} \sqrt{(ax + b)^3} + C.$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C.$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

27. $\displaystyle\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}}{15a^2} + C.$

28. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C.$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$

30. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+m}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+m)^3} + C.$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right) + C.$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C.$

33. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+m}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+m} + m\ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right)\right] + C.$

34. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C.$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C,$

ak $4ac - b^2 > 0$,

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C,$$

ak $4ac - b^2 < 0$.

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} +$

$\displaystyle + \frac{(2n-3)\,2a}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}.$

39. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

(pozri č. 37).

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2c}\ln\frac{x^2}{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

(pozri č. 37).

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{1}{(m-1)\,cx^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} -$

$\displaystyle - \frac{(2n+m-3)\,a}{(m-1)\,c}\int\frac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^n} -$

$\displaystyle - \frac{(n+m-2)}{(m-1)\,c}\int\frac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n}\ (m > 1).$

42. $\displaystyle\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)\,a}\sqrt[n]{ax+b} + C.$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)}{(n-1)\,a}\,\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} + C.$

44. $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$

45. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}\,dx.$

46. $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C.$

47. $\int \arccos \frac{x}{a}\, dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

48. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2) + C.$

49. $\int \operatorname{arccotg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2) + C.$

Tabuľka III

Niektoré rozvoje do mocninových radov

1. $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \newline + \ldots \; (-1 < x < 1).$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ (x — ľubovoľné).

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ (x — ľubovoľné).

4. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \newline + \ldots \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$

5. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ (x — ľubovoľné).

6. $\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \; (-1 < x \leqq 1).$

7. $\ln (1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \; (-1 \leqq x < 1).$

8. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots \; (-1 < x < 1).$

9. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \; (-1 < x < 1).$

Tabuľka IV

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0	1,000	1,000	2,2	9,025	0,1108
0,1	1,105	0,905	2,4	11,023	0,0907
0,2	1,221	0,819	2,6	13,464	0,0743
0,3	1,350	0,741	2,8	16,445	0,0608
0,4	1,492	0,670	3,0	20,086	0,0498
0,5	1,649	0,607	3,2	24,533	0,0408
0,6	1,822	0,549	3,4	29,964	0,0334
0,7	2,014	0,497	3,6	36,598	0,0273
0,8	2,226	0,449	3,8	44,701	0,0224
0,9	2,460	0,407	4,0	54,598	0,0183
1,0	2,718	0,368	4,5	90,017	0,0111
1,1	3,004	0,333	5,0	148,41	0,00674
1,2	3,320	0,301	5,5	244,69	0,00409
1,3	3,669	0,273	6,0	403,43	0,00248
1,4	4,055	0,247	6,5	665,14	0,00150
1,5	4,482	0,223	7,0	1 096,6	0,000912
1,6	4,953	0,202	7,5	1 808,0	0,000553
1,7	5,474	0,183	8,0	2 981,0	0,000335
1,8	6,050	0,165	8,5	4 914,8	0,000203
1,9	6,686	0,150	9,0	8 103,1	0,000123
2,0	7,389	0,135	9,5	13 360	0,000075
			10,0	22 026	0,000045

Tabuľka V

x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$
1,0	0	2,2	0,788	5,0	1,609
1,1	0,0953	2,4	0,875	5,5	1,705
1,2	0,182	2,6	0,956	6,0	1,792
1,3	0,262	2,8	1,030	6,5	1,872
1,4	0,336	3,0	1,099	7,0	1,946
1,5	0,405	3,2	1,163	7,5	2,015
1,6	0,470	3,4	1,224	8,0	2,079
1,7	0,531	3,6	1,281	8,5	2,140
1,8	0,588	3,8	1,335	9,0	2,197
1,9	0,642	4,0	1,386	9,5	2,251
2,0	0,693	4,5	1,504	10,0	2,303

Tabuľka VI

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0	0,000	1,000	0,000	3,2	—0,0584	—0,998	0,0585
1,0	0,0998	0,995	0,010	3,3	—0,158	—0,987	0,160
0,2	0,199	0,980	0,203	3,4	—0,256	—0,967	0,264
0,3	0,296	0,955	0,309	3,5	—0,351	—0,936	0,375
0,4	0,389	0,921	0,423	3,6	—0,443	—0,897	0,493
0,5	0,479	0,878	0,546	3,7	—0,530	—0,848	0,625
0,6	0,565	0,825	0,684	3,8	—0,612	—0,791	0,774
0,7	0,644	0,765	0,842	3,9	—0,688	—0,726	0,947
0,8	0,717	0,697	1,030	4,0	—0,757	—0,654	1,158
0,9	0,783	0,622	1,260	4,1	—0,818	—0,575	1,424
1,0	0,841	0,540	1,557	4,2	—0,872	—0,490	1,778
1,1	0,891	0,454	1,965	4,3	—0,916	—0,401	2,286
1,2	0,932	0,362	2,572	4,4	—0,952	—0,307	3,096
1,3	0,964	0,268	3,602	4,5	—0,978	—0,211	4,637
1,4	0,985	0,170	5,798	4,6	—0,994	—0,112	8,860
1,5	0,997	0,0707	14,101	4,7	—1,000	—0,0124	80,713
1,6	0,9996	—0,0292	—34,233	4,8	—0,996	0,0875	—11,385
1,7	0,992	—0,129	—7,697	4,9	—0,982	0,187	—5,267
1,8	0,974	—0,227	—4,286	5,0	—0,959	0,284	—3,381
1,9	0,946	—0,323	—2,927	5,1	—0,926	0,378	—2,449
2,0	0,909	—0,416	—2,185	5,2	—0,883	0,469	—1,886
2,1	0,863	—0,505	—1,710	5,3	—0,832	0,554	—1,501
2,2	0,808	—0,589	—1,374	5,4	—0,773	0,635	—1,218
2,3	0,746	—0,666	—1,119	5,5	—0,706	0,709	—0,996
2,4	0,675	—0,737	—0,916	5,6	—0,631	0,776	—0,814
2,5	0,598	—0,801	—0,747	5,7	—0,551	0,835	—0,660
2,6	0,516	—0,857	—0,602	5,8	—0,465	0,886	—0,525
2,7	0,427	—0,904	—0,473	5,9	—0,374	0,927	—0,403
2,8	0,335	—0,942	—0,356	6,0	—0,279	0,960	—0,291
2,9	0,239	—0,971	—0,246	6,1	—0,182	0,983	—0,185
3,0	0,141	—0,990	—0,143	6,2	—0,0831	0,997	—0,0834
3,1	0,0416	—0,999	—0,0416	6,3	—0,0168	1,000	0,0168

III. APLIKÁCIE DIFERENCIÁLNEHO A INTEGRÁLNEHO POČTU NA PRIEBEH FUNKCIE A V GEOMETRII

1. VYŠETROVANIE MAXIMA A MINIMA FUNKCIE POMOCOU DRUHEJ DERIVÁCIE

Úloha nájsť také x, pri ktorom daná funkcia $y = f(x)$ nadobúda maximum alebo minimum, všeobecne sa nedá riešiť prostriedkami elementárnej algebry.

V kapitole I sme si povedali, že v bodoch, kde funkcia dosahuje maximum alebo minimum, jej prvá derivácia sa rovná nule. Tiež sme ukázali, ako sa pomocou derivácie $y'(x)$ určí, či má funkcia v danom bode x_0 maximum alebo minimum.

Bolo treba vypočítať hodnoty y' pre hodnoty x blížiace sa k x_0 sprava i zľava.

V tomto článku sa budeme zaoberať iným spôsobom určenia maxima alebo minima funkcie, pri ktorom budeme brať do úvahy aj jej druhú deriváciu (y''). V tomto prípade musíme poznať len hodnotu y'' pri $x = x_0$.

Ukážeme, že ak $x = x_0$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0$$

potom v skúmanom bode funkcia $f(x)$ má maximum. Súčasne z podmienky $f'(x_0) = 0$ vyplýva, že dotyčnica v bode $x = x_0$ je vodorovná. Z nerovnosti $f''(x_0) < 0$ vyplýva,[1]) že bod $x = x_0$ je bod, v ktorom je krivka konkávna, t. j. graf v blízkosti $x = x_0$ sa nachádza pod dotyčnicou. Tieto dva fakty znamenajú, že funkcia $f(x)$ v bode $x = x_0$ má maximum.

Presne takou istou úvahou sa ľahko presvedčíme, že ak v bode $x = x_1$

$$f'(x_1) = 0, \quad f''(x^1) > 0$$

[1]) Pozri čl. 5 tejto kapitoly, str. 195.

tak v skúmanom bode má funkcia $f(x)$ minimum. Aj k týmto výsledkom sa dostaneme pomocou Taylorovho radu

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \tag{1.1}$$

Nech $f'(x_0) \neq 0$. Napríklad nech $f'(x_0) > 0$. Pre x blízke k x_0 veličiny $(x - x_0)^2$, $(x - x_0)^3$, ... možno v porovnaní s $(x - x_0)$ zanedbať. Dostaneme:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

alebo

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.2}$$

Z (1.2) vidíme, že pri $x > x_0$, $f(x) - f(x_0) > 0$, t. j. $f(x) > f(x_0)$. Ak $x < x_0$, tak $f(x) < f(x_0)$. Preto pri $x = x_0$ nie je ani maximum, ani minimum. Analogicky nie je ani maximum, ani minimum, ak $f'(x_0) < 0$. Ak $f'(x_0) = 0$, tak člen s $(x - x_0)^2$ už zanedbať nemožno. Ak zanedbáme členy s $(x - x_0)^3$, $(x - x_0)^4$ atď. a vezmeme do úvahy člen $(x - x_0)^2$. Z (1.1) dostaneme:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Odtiaľto vidíme, že pri $f''(x) > 0$ je $f(x) > f(x_0)$ nezávisle od toho, či $x < x_0$ alebo $x > x_0$. To znamená, že $f(x_0)$ je menšia ako všetky susedné hodnoty $f(x)$, a preto $f(x_0)$ je minimum funkcie. Ak $f''(x_0) < 0$, tak $f(x) < f(x_0)$ a $f(x_0)$ je maximum funkcie[1]).

Môže sa však stať, že aj $f''(x_0) = 0$. Ako v tomto prípade vyšetríme funkciu v okolí bodu $x = x_0$? Treba sa obrátiť k ďalším deriváciám funkcie $f(x)$. Ak $f'''(x_0) \neq 0$, pri zanedbaní veličiny $(x - x_0)^4$ atď., dostaneme z (1.1) vzťah obsahujúci člen s $(x - x_0)^3$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

Rozdiel $f(x) - f(x_0)$ mení znamienko v závislosti od toho, či bude $x > x_0$ alebo $x < x_0$. Pri $x = x_0$ neexistuje ani maximum, ani minimum.

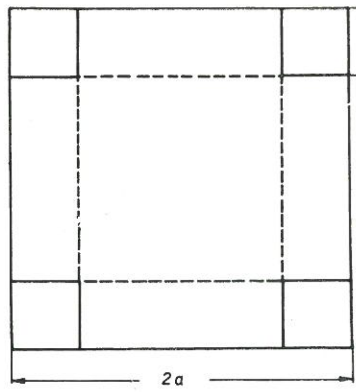
1) Autor uvažuje o lokálnych maximách a lokálnych minimách a nie o maxime, resp. minime funkcie. Pozn. prekl.

Ak sa aj $f'''(x_0) = 0$ a $f^{IV}(x_0) \neq 0$, potom

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{24}f^{IV}(x_0)(x - x_0)^4$$

Znamienko výrazu $f(x) - f(x_0)$ je rovnaké pri $x < x_0$ aj pri $x > x_0$, určuje sa znamienkom $f^{IV}(x_0)$. Ak $f^{IV}(x_0) > 0$, nastáva minimum, ak $f^{IV}(x_0) < 0$, nastane maximum.

Pozorný čitateľ si iste už domyslel, že ak pri $x = x_0$ je prvá od nuly rôzna derivácia nepárneho stupňa (prvá, tretia, piata atď.), tak maximum ani minimum neexistuje. Ak je prvá rôzna od nuly derivácia párneho stupňa (druhá, štvrtá atď.), potom maximum alebo minimum existuje a závisí od znamienka derivácie.



Obr. 57

Preskúmajme príklady.

1. Zo štvorcového plechu, ktorého strana sa rovná $2a$, treba urobiť zvrchu otvorenú debnu s čo najväčším objemom, v rohoch vyrezať rovnaké štvorce a potom zohnúť plech tak, aby tvoril bočné steny debny (*obr. 57*). Aká musí byť dĺžka steny vyrezaného štvorca?

Označíme strany vyrezaných štvorcov x. Objem debny závisí od toho, aký štvorec vyrežeme, preto je prirodzené označiť objem ako $V(x)$. Tento objem vypočítame:

$$V(x) = (2a - 2x)^2 x = 4(a - x)^2 x$$

Nájdeme deriváciu

$$V'(x) = -8(a - x)x + 4(a - x)^2$$

Riešime rovnicu $V'(x) = 0$:

$$-8(a - x)x + 4(a - x)^2 = 0 \quad \text{alebo} \quad (a - x)(a - 3x) = 0$$

odkiaľ

$$x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a}{3}$$

Vidíme, že hodnota $x_1 = a$ nás nezaujíma, pretože pri takejto voľbe strany by sme debnu nedostali. Zostáva $x = \frac{a}{3}$. Pri tomto

$$V\left(\frac{a}{3}\right) = 4 \cdot \frac{4a^2}{9} \cdot \frac{a}{3} = \frac{16a^3}{27},$$

$$V'\left(\frac{a}{3}\right) = 0$$

$$V''(x) = 8x - 8(a - x) - 8(a - x) = 24x - 16a$$

$$V''\left(\frac{a}{3}\right) = -8a < 0$$

Pretože $V''\left(\frac{a}{3}\right) < 0$, funkcia $V(x)$ má pre $x = \frac{a}{3}$ maximum.

To znamená, že najväčší objem bude mať debna pri $x = \frac{a}{3}$, t. j. treba vyrezať štvorčeky, ktorých strany sú $\frac{1}{6}$ strany základného štvorca.

Vypočítajme $V(x)$ pre niekoľko hodnôt x z okolia $\frac{a}{3}$. Výsledky výpočtov sú zhrnuté do tabuľky:

x	$V(x)$	x	$V(x)$
$0{,}25a$	$0{,}562a^3$	$0{,}40a$	$0{,}576a^3$
$0{,}30a$	$0{,}588a^3$	$0{,}45a$	$0{,}540a^3$
$0{,}33a$	$0{,}592a^3$		

Z tabuľky vidno, že malé zmeny x v okolí $x = \frac{a}{3}$, t. j. okolo hodnoty x, ktorej zodpovedá maximum funkcie, vyvolávajú celkom malé zmeny V. Funkcia v okolí maxima sa mení veľmi pomaly.

Toto vidieť i z Taylorovho radu (1.1). Pretože v bode maxima $f'(x_0) = 0$, potom (1.1) nadobúda tvar

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \dots$$

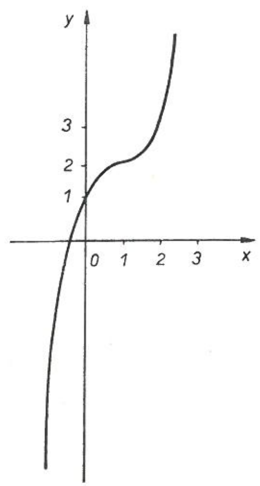
Rad neobsahuje $(x - x_0)$. Najnižšia mocnina je $(x - x_0)^2$ a je veľmi malá pre x z okolia x_0. V našom príklade zmena x o 9 % (z $0{,}33a$ na $0{,}30a$) vyvoláva zmenu objemu V menšiu ako 1 % a zmena x o 24 % vyvolá zmenu V o 5 %.

Preto ak zaujíma maximálna hodnota funkcie a pri riešení x_0 z rovnice $f'(x) = 0$ dopustili sme sa malej chyby, napr. ak sme riešili túto rovnicu približne, má to veľmi malý vplyv na maximum funkcie. Hodnota funkcie pre x z okolia x_0 bude veľmi blízka k jej hodnote v samotnom $x = x_0$.

2. $y = A + B(x - a)^3$. Nájdite maximum a minimum funkcie:

$$y' = 3B(x - a)^2, \quad y'(a) = 0$$
$$y'' = 6B(x - a), \quad y''(a) = 0$$
$$y''' = 6B \neq 0$$

Prvá od nuly rôzna derivácia je derivácia tretieho stupňa, preto v bode $x = a$ nie je ani maximum, ani minimum, ale je tam inflexný bod. Názorne to vidieť na grafe znázornenom na *obr. 58*. (Je zostrojený pre prípad $A = 2$, $B = 1$, $a = 1$.)



Obr. 58

3. $y = A + B(x - a)^4$. Nájdite maximum a minimum funkcie.

$$y' = 4B(x - a)^3, \quad y'(a) = 0$$
$$y'' = 12B(x - a)^2, \quad y''(a) = 0$$
$$y''' = 24B(x - a), \quad y'''(a) = 0$$
$$y^{\mathrm{IV}} = 24B \neq 0$$

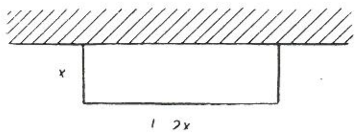
Prvá rôzna od nuly je derivácia štvrtého stupňa. Ak je $B > 0$, je kladná a funkcia má minimum; ak je $B < 0$, má maximum.

Tento záver možno urobiť i priamo. Skutočne pri $B < 0$ je $B(x - a)^4$ záporné pre všetky $x \neq a$, pri $x = a$ je to nula. Preto od A sa vždy odčíta nejaká kladná hodnota a pri $x = 0$ sa nič neodčíta. To znamená, že pri $x = a$ je maximum.

Analogicky, ak $B > 0$, je pri $x = a$ minimum.

4. Z dosiek môžeme urobiť ohradu l metrov dlhú. Ako touto ohradou ohradíme obdĺžnikový dvor s najväčším obsahom, ak vieme, že z jednej strany je stena susednej budovy (*obr. 59*)?

Nech dve strany sú x metrov dlhé. Vtedy tretia strana má dĺžku $2 - 2x$. Obsah dvora je $S(x)$, pričom $S(x) = 1 - 2x = -2x^2 + 1x$, $S'(x) = -4x + 1$. Ak riešime rovnicu $S'(x) = 0$, dostaneme $x = \frac{1}{4}$, $S''(x) = -4 < 0$. Pri $x = \frac{1}{4}$ má $S(x)$ maximum.



Obr. 59

Zapíšeme $S(x)$ podľa vzťahu (1.1). Ak položíme $x_0 = \frac{l}{4}$,

$$S(x) = \frac{l^2}{8} - 2\left(x - \frac{l}{4}\right)^2 \tag{1.3}$$

Pretože $S(x)$ je mnohočlen druhého stupňa, (1.3) je presná rovnosť (pozri čl. 17, kap. II.). Z nej priamo vidieť, že $S(x)$ má maximum pri $x = \frac{l}{4}$.

Rovnosť (1.3) možno dostať i bez aplikácie vyššej matematiky. Skutočne, nech treba vyhľadať maximum (alebo minimum) mnohočlena druhého stupňa

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1.4}$$

Upravme mnohočlen nasledujúcim spôsobom:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

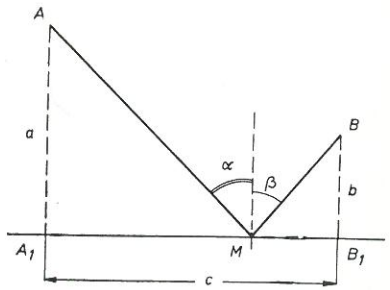
A tak

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{1.5}$$

Pretože $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqq 0$ pre všetky x, pričom rovnosť platí len pre $x = -\frac{b}{2a}$, dostaneme z (1.5), že y má maximum, ak $a < 0$, a toto maximum dostaneme pre $x = -\frac{b}{2a}$; y má minimum, ak $a > 0$ a toto minimum dostaneme pre $x = -\frac{b}{2a}$.

Hodnotu $x = -\frac{b}{2a}$ sme dostali tak, že sme urobili špeciálne umelé úpravy s mnohočlenom (1.4). Ak použijeme deriváciu, nájdeme $x = -\frac{b}{2a}$ automaticky. Skutočne, ak položíme deriváciu (1.4) rovnú nule, dostaneme $2ax + b = 0$, odkiaľ $x = -\frac{b}{2a}$. Druhá derivácia z (1.4): $y'' = 2a$. Preto otázka o tom, či nastáva maximum alebo minimum, sa rieši v závislosti od znamienka čísla a.

5. Chodec, ktorý ide z bodu A, musí prísť k rieke (priamka A_1B_1) a potom prejsť do bodu B. Ako musí chodec ísť, aby prešiel najkratšiu dráhu (*obr. 60*)?



Obr. 60

Nech $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$; čísla a, b, c sú dané. Dráha chodca nech je zobrazená lomenou čiarou AMB. Treba zistiť, pri akej polohe bodu M na priamke A_1B_1 bude táto dráha najkratšia. Aby sme určili polohu bodu M, stačí, aby sme poznali vzdialenosť M od bodu A_1, ktorý leží v päte kolmice spustenej z bodu A na priamku zobrazujúcu rieku. Označme túto vzdialenosť A_1M ako x. Vtedy

$$AM = \sqrt{a^2 + x^2}, \qquad MB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

Dráhu, ktorú prejde chodec, označíme $s(x)$

$$s(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2} \tag{1.6}$$

Nájdeme:

$$s'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

Ak sa $s'(x)$ bude rovnať nule, dostaneme:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} \tag{1.7}$$

Túto rovnicu nie je ťažko riešiť. Ak obidve strany umocníme, dostaneme:

$$\frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{(c - x)^2}{b^2 + (c - x)^2}$$

alebo

$$x^2b^2 + x^2(c - x)^2 = a^2(c - x)^2 + x^2(c - x)^2$$

$$x^2b^2 = a^2(c - x)^2$$

$$\frac{x^2}{(c - x)^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

Po odmocnení obidvoch strán dostaneme:

$$\frac{x}{c - x} = \pm \frac{a}{b}$$

odkiaľ

$$x_1 = \frac{ac}{a + b}, \qquad x_2 = \frac{ac}{a - b}$$

Po dosadení x_1 a x_2 do pôvodnej rovnice (1.7) vidíme, že druhý koreň rovnici nevyhovuje. Objavil sa preto, že sme rovnicu povýšili na druhú. Teda $x = \dfrac{ac}{a + b}$.

Názornú geometrickú predstavu, ktorá nám umožní nájsť riešenie, možno si utvoriť aj bez riešenia rovnice. Podmienku (1.7) prepíšeme:

$$\frac{A_1M}{AM} = \frac{MB_1}{MB} \tag{1.8}$$

Avšak $\dfrac{A_1M}{AM} = \cos \sphericalangle A_1MA = \sin \alpha$. Analogicky $\dfrac{MB_1}{MB} = \cos \sphericalangle B_1MB = \sin \beta$. Z podmienky (1.8) vyplýva, že

$$\sin \alpha = \sin \beta \tag{1.9}$$

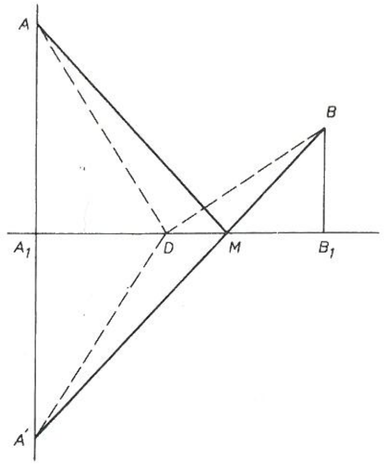
Uhly α a β sú ostré. Preto z (1.9) dostaneme:

$$\alpha = \beta$$

Takýmto spôsobom sa chodec musí pohybovať tak, ako sa pohybuje lúč svetla: uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu.

Pre úplné doriešenie úlohy ostáva dokázať, že pri tejto polohe bodu M dráha bude skutočne minimálna (a nie maximálna). Možno to dokázať, ak vypočítame druhú deriváciu z (1.6).

Možno však použiť aj iné spôsoby. Z výrazu (1.6) pre $s(x)$ vidíme, že pri ľubovoľnom x veličina $s(x)$ je kladná. Pritom $s(x)$ neobmedzene rastie spolu s rastom absolútnej hodnoty x nezávisle od toho, či je $x > 0$ alebo $x < 0$. Ak $s'(x)$ nadobúda nulovú hodnotu len pri jednej hodnote x, je jasné, že pri tejto hodnote x funkcia $s(x)$ má minimum. Ak v intervale, v ktorom funkciu skúmame, prvá derivácia má len jeden koreň, potom názorné úsudky nám často dovoľujú vyhnúť sa formálnemu skúmaniu pomocou druhej derivácie.



Obr. 61

Úlohu 5 možno riešiť aj čiste geometricky, bez použitia vyššej matematiky. Na predĺženie úsečky AA_1 (*obr. 61*) nanesieme $A_1A' = AA_1$ a bod A' spojíme s B. Vtedy $AM = A'M$, pretože $\triangle AA_1M = \triangle A_1A'M$. Preto $AM + MB = A'M + MB = A'B$. Pre ľubovoľný iný bod na úsečke A_1B_1 bude platiť $AD + DB = A'D + DB$ a $A'D + DB > A'B$, pretože lomená čiara je dlhšia ako úsečka. Hľadaný bod M je samozrejme priesečník priamok $A'B$ a A_1B_1. Odtiaľ vyplýva, že $\alpha = \beta$.

Dva posledné príklady ukazujú, že niektoré úlohy na hľadanie maxím a miním možno riešiť prostredníctvom elementárnej matematiky. No nie všetky úlohy možno zvládnuť bez použitia vyššej matematiky a riešenie elementárnymi prostriedkami vyžaduje dôvtip a bystrosť; vyššia matematika dáva štandardný spôsob riešenia takýchto úloh.

To neznamená, že vo vyššej matematike nie je potrebný dôvtip a bystrosť! No teraz bude dôvtip potrebný na ťažšie otázky.

Cvičenia

1. Z obdĺžnikového plechu so stranami a, b sa urobí debna tak, že sa vyrežú v rohoch rovnaké štvorce. Aká musí byť strana vyrezaného štvorca, aby debna mala maximálny objem?

2. Do ostrouhlého trojuholníka so základňou a, výškou H vpíšte obdĺžnik, ktorého dva vrcholy ležia na základni trojuholníka a ktorý bude mať najväčší obsah zo všetkých obdĺžnikov tohto tvaru.

3. Určte najväčší obsah obdĺžnika vpísaného do kruhu s polomerom R.

4. Pri akom polomere základne a pri akej výške bude mať uzavretá valcovitá banka daného objemu V najmenší povrch?

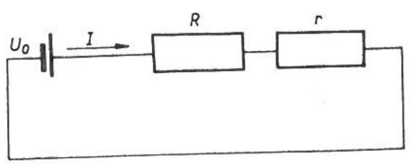
5. Dve telesá sa pohybujú po ramenách pravého uhla s konštantnými rýchlosťami v_1 a v_2 (m/s) smerom k vrcholu uhla, od ktorého na začiatku pohybu sa prvé nachádzalo vo vzdialenosti $a(m)$, druhé vo vzdialenosti $b(m)$. O koľko sekúnd od začiatku pohybu bude vzdialenosť medzi telesami najmenšia?

6. Dokážte, že súčin dvoch kladných čísiel, ktorých súčet je konštantný, má najväčšiu hodnotu pri rovnosti súčiniteľov.

7. Priamkou l je rovina rozdelená na dve časti (prostredie I a II). Teleso sa pohybuje v prostredí I rýchlosťou v_1 a v prostredí II rýchlosťou v_2. Po akej dráhe sa musí pohybovať bod, aby sa čo najskôr dostal z daného bodu A v prostredí I do daného bodu B v prostredí II?

2. INÉ TVARY MAXÍM A MINÍM. BODY ZLOMU A NESPOJITOSTI

Doteraz sme hovorili, že funkcia má maximum a minimum pre tie hodnoty x, pri ktorých sa prvá derivácia funkcie rovná nule. Avšak maximá a minimá môžu byť aj pri takých hodnotách argumentu, pri ktorých sa prvá derivácia nerovná nule.



Obr. 62

Preskúmajme nasledujúci príklad. Určte, pri akej hodnote odporu R, zapojeného do série s odporom r, bude na odpore r maximálny výkon (*obr. 62*). Odpor r a napätie batérie U_0 pokladáme za konštantné. Veľkosť prúdu v obvode dostaneme z Ohmovho zákona

$$I = \frac{U_0}{R + r}$$

Výkon $P(R) = IU_r$, kde U_r je úbytok napätia na odpore r. Podľa Ohmovho zákona $U_r = Ir$, teda

$$P(R) = IU_r = IIr = \frac{U_0^2 r}{(R + r)^2}$$

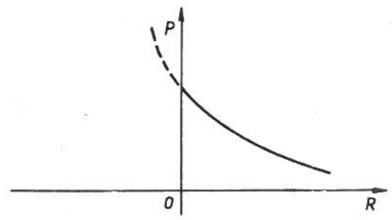
Na určenie maximálneho výkonu $P(R)$ riešime rovnicu $\frac{dP}{dR} = 0$. Odtiaľ vyplýva:

$$-2U_0^2 \frac{r}{(R + r)^3} = 0$$

Získaná rovnica nemá riešenie. To znamená, že výkon môže rásť neobmedzene a úloha o maximálnom výkone nemá zmysel? Veď z fyzikálneho hľadiska zo zmyslu úlohy vyplýva, že výkon je najväčší pri $R = 0$ $\left(\text{v tomto prípade } P = \frac{U_0^2}{r}\right)$. Prečo sme hodnotu $R = 0$ z rovnice $\frac{dP}{dR} = 0$ nedostali?

Aby sme tomu porozumeli, preskúmame graf závislosti $P(R)$ (*obr. 63*)[1].

Z grafu vidieť, že ak by R mohlo nadobúdať záporné hodnoty, pri $R = 0$ by maximum nebolo. Avšak záporný odpor neexistuje. V každej fyzikálnej úlohe sa predpokladá, že $R \geqq 0$. V takomto prípade veličina P má maximum pri $R = 0$, pretože interval hodnôt argumentu je ohraničený[2]). To znamená, že ak obor definície je ohraničený interval, potom pri hľadaní maxima a minima treba preskúmať hodnoty v koncových bodoch intervalu.



Obr. 63

V prípade, že maximum (minimum) sa dosahuje v koncovom bode intervalu, rad

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0)(x - x_0) + \\ + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$

sa môže začínať nie $(x - x_0)^2$, ale $(x - x_0)$. Preto, ak sa maximum funkcie dosahuje pri $x = x_0$ a my berieme x z okolia x_0, potom sa môžeme pri

[1]) Doteraz sme nerozlišovali lokálne maximum, resp. lokálne minimum funkcie od maxima, resp. minima funkcie. Z toho vzniká uvedený rozpor. Dosiaľ išlo o lokálne extrémy, zatiaľ čo v tomto prípade ide o absolútne maximum, resp. minimum funkcie. Pozn. prekl.

[2]) Uvedená podmienka ohraničenosti nepostačuje. Funkcia $y = x$ na ohraničenom intervale (0, 1) nemá ani maximum, ani minimum. Pozn. prekl.

určení hodnoty maxima dopustiť dosť veľkej chyby. Táto chyba je priamo úmerná $(x - x_0)$ a nie $(x - x_0)^2$, ako to bolo v čl. 1 tejto kapitoly. To znamená, že nepatrný odklon od hodnoty argumentu, v ktorom sa dosahuje maximum, je v tomto prípade nežiadúci.

V preskúmanom prípade sa rozumie, že vzťah pre funkciu $f(x)$ je správny aj pre $x < x_0$. Pre danú konkrétnu úlohu nás však hodnoty funkcie pri $x < x_0$ nezaujímajú (nemajú fyzikálny zmysel).

Môže sa stať, že $f(x)$ jednoducho nemá zmysel pre niektoré hodnoty argumentu[1]). Tak napr. ak funkcia obsahuje odmocninu párneho stupňa, napr. kvadratickú, potom interval hodnôt argumentu, ako vieme, je ohraničený[2]) (výraz pod odmocninou nemôže byť záporný). Potom hraničné sú tie hodnoty argumentu, pre ktoré sa výraz pod odmocninou rovná nule. Pri hľadaní maxima musia byť tieto hodnoty argumentu prešetrené zvlášť.

Preskúmajme príklad. Nech

$$y = a - \sqrt{b - x}, \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{b - x}} \tag{2.1}$$

hoci y' nenadobúda nulovú hodnotu, skúmanie nie je skončené. Pre hodnotu $x = b$ sa výraz pod odmocninou rovná nule. Z (2.1) vidíme, že $y = a$ pri $x = b$: ak je $x < b$, je $y < a$, pretože od a sa odčíta kladné číslo. Preto y má maximum pri $x = b$.

Maximum alebo minimum môže byť aj vo vnútorných bodoch, kde sa derivácia nerovná nule, ak krivka má body zlomu[3]). S takýmito bodmi sa menovite stretávame vtedy, keď krivka pozostáva z dvoch častí, zadaných rôznymi vzťahmi, napr. pri $x < x_0$ a pri $x > x_0$. Ukážeme fyzikálny príklad tohto typu. Nech na elektrickom variči s konštantným výkonom sa zohrieva čajník s vodou. Je potrebné určiť čas, keď čajník obsahuje najväčšie množstvo tepla. Pre jednoduchosť budeme pokladať, že koeficient účinnosti platne je 100 %, t. j. že platňa odovzdá všetko teplo

[1]) V takýchto prípadoch je presnejšie hovoriť, že funkcia nie je definovaná. Pozn. prekl.

[2]) Presnejšie zdola, resp. zhora ohraničený. Pozn. prekl.

[3]) Bodom zlomu funkcie nazývame bod, v ktorom existuje derivácia sprava i zľava, ale sa nerovnajú. Pozn. prekl.

čajníku. Čajník sme postavili na platňu v momente $t = 0$. V tomto momente čajník obsahoval q kalórií tepla[1]). Množstvo tepla odovzdané platňou je dané vzťahom

$$Q = 0{,}24I^2Rt$$

kde I je prúd v ampéroch,
R — odpor v ohmoch,
t — čas v sekundách;
v tomto prípade Q dostaneme v kalóriách.

Za čas t bude čajník obsahovať množstvo tepla

$$Q = q + 0{,}24I^2Rt$$

Nech v čase $t = t_0$ voda v čajníku zovrie. V tom momente je v ňom nahromadené množstvo $q + 0{,}24I^2Rt_0$ tepla.

Keď voda v čajníku zovrela, začína sa vyparovať[2]). Na premenu jedného gramu pary je potrebné 539 kalórií. Ak označíme $\mathrm{d}m$ množstvo vody, ktoré sa vyparí za čas $\mathrm{d}t$, dostaneme:

$$\mathrm{d}m = \frac{0{,}24I^2R\,\mathrm{d}t}{539}$$

Za jednu sekundu sa vyparí $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{0{,}24I^2R}{539}$ g vody.

Množstvo vody, ktoré sa vyparí za 1 s, odoberie z čajníka teplo

$$\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t} = 100 \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{24}{539} I^2R = 0{,}41I^2R \text{ cal}$$

Preto za čas $t(t > t_0)$ vyparená voda odoberie z čajníka

$$Q_1 = 0{,}041I^2R(t - t_0) \text{ cal}$$

Teda, ak $t \leqq t_0$ (do začiatku varu), množstvo tepla v čajníku možno vyjadriť vzťahom:

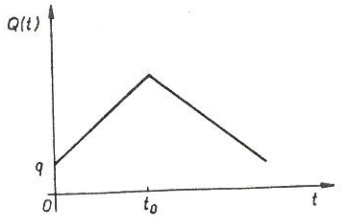
$$Q = q + 0{,}24I^2Rt$$

a ak $t \geqq t_0$ (potom keď už voda vrie), je toto teplo dané vzťahom

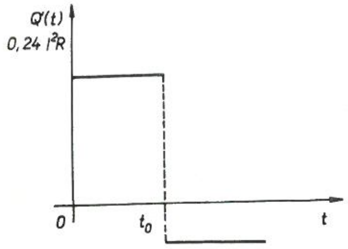
$$Q = q + 0{,}24I^2Rt_0 - 0{,}041I^2R(t - t_0) = q + I^2R(0{,}281t_0 - 0{,}041t)$$

[1]) Za nulovú sa berie tepelná energia vody pri 0 °C.

[2]) Premena nastáva i pri teplote menšej ako 100 °C, ale my to zanedbáme.



Obr. 64



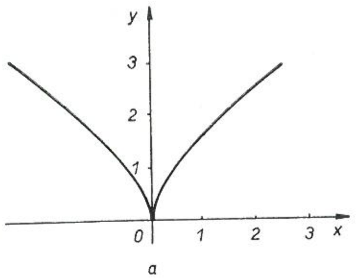
Obr. 65

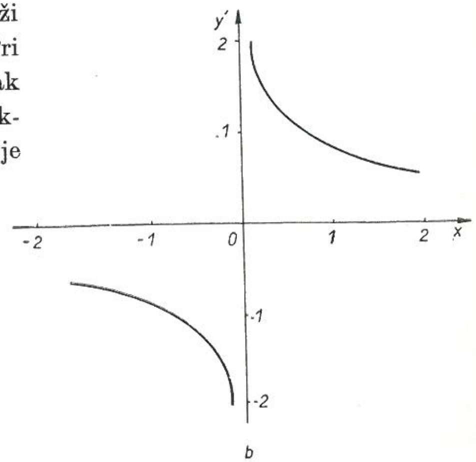
Graf $Q(t)$ je znázornený na *obr. 64*. Z obrázka je jasné, že $Q(t)$ má maximum pri $t = t_0$, hoci derivácia sa pri tejto hodnote t nerovná nule[1]).

Derivácia pri $t = t_0$ je nespojitá. Skutočne je $Q'(t) = 0{,}24I^2R$ ak $t < t_0$; $Q'(t) = -0{,}04I^2R$ ak $t > t_0$. Graf derivácie je znázornený na *obr. 65*.

Posledný príklad ukazuje, že maximum môže nastať i v prípade, ak derivácia je nespojitá, t. j. krivka má bod zlomu.

Nakoniec z *obr. 66*[2]) (graf derivácie pre tento prípad) vidieť, že maximum alebo minimum môže nastať pri tých hodnotách argumentu x_0, kde derivácia je nespojitá a neohraničená (má nevlastné limity $+\infty$, resp. $-\infty$). Zodpovedajúci bod krivky sa nazýva hrotom alebo bodom vratu. V tomto bode ako aj v prípade bežného minima, pri $x < x_0$ $y' < 0$; ak sa x blíži k x_0 funkcia zľava klesá. Pri $x > x_0$ $y' > 0$; pri zväčšení x, ak prekročíme hodnotu $x = x_0$, funkcia rastie. Pri $x = x_0$ derivácia nie je





Obr. 66

1) Derivácia v tomto bode neexistuje. Pozn. prekl.

2) Na grafe je zobrazená funkcia $y = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$ (a), a jej derivácia (b).

definovaná. Pre hodnoty x blízke k x_0, ale $x > x_0$ dosahuje derivácia ľubovoľné veľké hodnoty a pre x blízke k x_0 ale $x < x_0$ dosahuje v absolútnej hodnote veľké záporné hodnoty. V takomto prípade, t. j. ak pre hodnoty argumentu x z blízkeho okolia bodu x_0, také, že $|x - x_0| < \delta$ kde δ je ľubovoľne malé kladné číslo platí, že $f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$, hovoríme, že funkcia nadobúda ostré minimum [maximum].

V súvislosti s vyšetrovaním singulárnych bodov na krivkách a v prvom rade bodov zlomu (pozri *obr. 64*), možno spresniť úvahu, ktorá nás priviedla k pojmu derivácie. V kapitole I. sme o tomto nehovorili, skúmali sme len hladké krivky.

Derivácia $y'(t)$ v bode t sa rovná limite pomeru

$$\frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2.2}$$

ak sa t_2 aj t_1 blíži k t, (pritom rozdiel $t_2 - t_1$ sa zrejme blíži k nule). Špeciálne sa podčiarklo, že táto limita nezávisí od toho, ako sú určené t_2 a t_1: obidve môžu byť väčšie ako t, obidve menšie ako t, alebo jedno z nich väčšie a druhé menšie ako t, alebo jedno z nich sa rovná t a druhé väčšie alebo menšie ako t. V podstate, keď berieme:

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \quad \text{a} \quad \Delta t > 0$$

potom tento výraz zodpovedá prípadu, keď v (2.2) $t_1 = t$, $t_2 = t + \Delta t > t$. Keď berieme:

$$\frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad \text{a} \quad \Delta t > 0$$

toto zodpovedá vzťahu (2.2), ak $t_1 = t - \Delta t < t$, $t_2 = t$. Nakoniec sme počítali aj deriváciu ako limitu pomeru

$$\frac{y\left(t + \dfrac{\Delta t}{2}\right) - y\left(t - \dfrac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}$$

čo zodpovedá stavu, keď $t_1 = t - \dfrac{\Delta t}{2} < t$; $t_2 = t + \dfrac{\Delta t}{2} > t$.

V prípade spojitej krivky všetky tri výrazy dajú jednu a tú istú limitu, ktorá sa rovná derivácii v danom bode. V prípade krivky, ktorá má bod zlomu, sa situácia mení. Totiž, nech pre $t = t_0$ nastáva bod zlomu. Ak vezmeme vzťah

$$\frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}$$

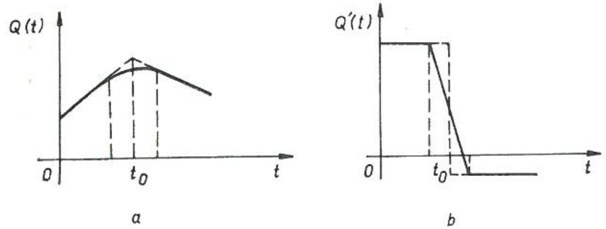
dostaneme pre Δt kladné a blížiace sa k nule určitú hodnotu — v príklade na str. 183 sa táto hodnota rovná $0{,}041 I^2 R$ a nazývame ju „derivácia sprava". Ak zoberieme

$$\frac{y(t_0) - y(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

dostaneme pre Δt kladné a blížiace sa k nule druhú limitu, ktorá sa v spomenutom prípade rovná $0{,}24 I^2 R$. Táto hodnota sa nazýva „derivácia zľava".

Ak zoberieme t_2 a t_1 z rôznych strán t_0, môžeme v limite pre $t_2 \to t_0$, $t_1 \to t_0$ dostať rôzne hodnoty pomeru (2.2). Takýmto spôsobom v bode zlomu derivácia neexistuje, ale možno určiť „deriváciu zľava" a „deriváciu sprava".

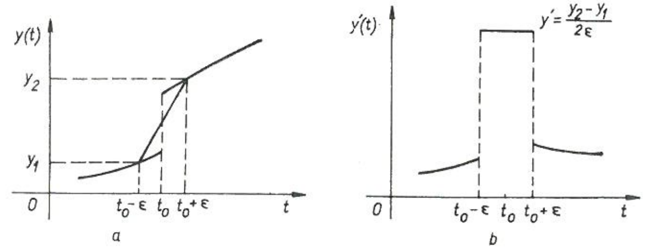
V kapitole I, keď sme sa prvý raz stretli s deriváciami, vedome sme pre zjednodušenie vždy zvlášť nezdôrazňovali, že určitá hodnota derivácie, ktorá nezávisí od spôsobu, ako sa blíži k nule (zľava, alebo sprava), existuje len v bodoch, v ktorých je krivka hladká. Ako vidieť z *obr. 65*, v bodoch zlomu krivky $y(t)$ je graf derivácie nespojitý. Ak graf v okolí bodu zlomu nahradíme oblúkom malého polomeru, ktorý sa dotýka krivky zľava aj sprava (ako hovoria kresliči, vyhladíme krivku), potom na intervale premennej, kde je krivka $y(t)$ nahradená oblúkom, sa krivka $y(t)$ prudko mení (*obr. 67*).



Obr. 67

Ak krivka $y(t)$ má bod nespojitosti v bode t_0 (pozri *obr. 68*), možno povedať, že v bode t_0 je derivácia $y'(t)$ nekonečná, prípadne neexistuje, ak funkcia nie je v bode t_0

definovaná; totiž, ak graf funkcie v malom okolí bodu nespojitosti od $t_0 - \varepsilon$ do $t_0 + \varepsilon$ nahradíme úsečkou od y_1 do y_2, potom v tomto okolí sa derivácia rovná $y_2 - y_1/2\varepsilon$, t. j. je veľmi veľká, tým väčšia, čím je menšie ε (*obr. 68*).



Obr. 68

Ako to bude s integrálom $\int_a^b y(t)\,dt$, ak funkcia $y(x)$ nie je hladká? Ak graf funkcie má bod zlomu, tak pri výpočte obsahu obrazca ohraničeného krivkou $y(t)$ nové otázky nevznikajú. V čl. 10, kapitoly I sme približne rozdelili obsah obrazca vyjadrený určitým integrálom na súčet obsahov obdĺžnikov tvaru

$$y(t_n)\,(t_{n+1} - t_n) \qquad \text{alebo} \qquad y(t_{n+1})\,(t_{n+1} - t_n)$$

V limite pri zmenšovaní veľkosti intervalov, t. j. rozdielov $(t_{n+1} - t_n)$, je jedno, či sa berie $y(t_n)$ alebo $y(t_{n+1})$, ako pre hladkú krivku $y(t)$, tak i pri krivke s bodmi zlomu.

Ak krivka $y(t)$ má bod nespojitosti v bode $t = t_0$, ale je ohraničená, potom pre interval, ktorý obsahuje bod nespojitosti $(t_n < t_0 < t_{n+1})$, hodnoty $y(t_n)$ a $y(t_{n+1})$ ostanú rôzne, akoby sa t_n a t_{n+1} navzájom nepribližovali. Takýmto spôsobom vo výraze integrálu ako súčtu hodnota jedného zo sčítancov v tomto prípade závisí od toho, či sa vezme súčet podľa vzťahu (8.1) alebo (8.2) z kapitoly I. Ak sa však hodnota rozdielu $t_{n+1} - t_n$ blíži k nule, samotný sčítanec sa blíži k nule. Preto limita súčtu, t. j. integrál, má úplne presnú hodnotu, (ktorá nezávisí od spôsobu výpočtu súčtu) i v tom prípade, keď integrand má v obore integrácie bod nespojitosti.

Zachováva sa i vzťah medzi integrálom a deriváciou.

Znova sa vráťme k *obr. 64* a *65:* označme teraz funkciu $Q'(t)$, ktorej graf je znázornený na *obr. 65* $Q'(t) = f(t)$. Potom funkcia $Q(t)$, ktorej graf je znázornený na *obr. 64*, je určená integrálom $Q(t) = \int f(t)\,dt$. Na tomto príklade vidíme, že nespojitosť integrandu $f(t)$ vedie v integrále k bodu zlomu funkcie $Q(t)$.

Určitý integrál funkcie s konečným počtom bodov nespojitosti sa vypočíta pomocou neurčitého integrálu podľa všeobecného pravidla

$$\int_a^b f(t)\,dt = Q(b) - Q(a)$$

Možno zájsť aj ďalej: skúmajme *obr. 68*, môžeme povedať, že pre funkciu, ktorá sa na danom intervale stáva neohraničená, pričom dĺžka intervalu sa blíži k nule, (*obr. 68* vpravo), integrál je nespojitá funkcia (*obr. 68* vľavo). Treba však spresniť pravidlo, kedy sa funkcia blíži do nekonečna a interval k nule. My sa však nebudeme týmto zaoberať. Príklady takéhoto druhu vedú k pojmu δ-funkcií. Pozri dodatok na konci knihy.

Cvičenia

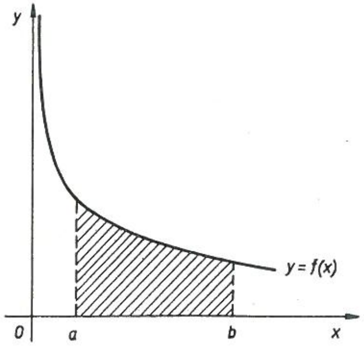
1. Nájdite najmenšiu hodnotu funkcie $y = x^2 - 2x + 3$ na intervale $2 \leqq x \leqq 10$

Nájdite ostré maximum funkcií:

2. $y = (x - 5)\sqrt[3]{x^2}$.
3. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

3. VÝPOČET OBSAHU OBRAZCA

V kapitole I sme ukázali, že hodnota určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ sa rovná obsahu obrazca ohraničeného zhora čiarou $y = f(x)$, zdola osou x a po stranách kolmicami $x = a$ a $x = b$ (*obr. 69*). Preto, ak vieme vypočítať určité integrály, budeme môcť vypočítať bežnými postupmi rôzne obsahy, nakoľko elementárna matematika dovoľuje vypočítať len obsahy priamočiarych obrazcov a kruhu.



Obr. 69

Nájdeme obsah obrazca ohraničeného zhora krivkou $y = cx^n (n > 0)$, zdola osou x a sprava priamkou $x = x_0$ (*obr. 70* $n = 2$, $c = 0{,}25$):

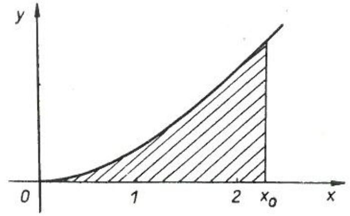
$$S = \int_0^{x_0} cx^n\,dx = \left[\frac{cx^{n+1}}{n+1}\right]_0^{x_0} = \frac{cx_0^{n+1}}{n+1} \tag{3.1}$$

Vzťah (3.1) prepíšeme takto

$$S = \frac{1}{n+1}\,cx_0^n x_0$$

ale pretože $cx_0^n = y(x_0)$, dostaneme:

$$S = \frac{1}{n+1}\,y(x_0)\,x_0 \tag{3.2}$$



Obr. 70

veličiny y a x majú rozmer dĺžky. Z (3.2) vidíme, že S sa meria v plošných jednotkách. Zo zápisu vidieť, že rádove je veľkosť obsahu daná súčinom $y(x_0)\,.\,x_0$; od toho súčinu sa hodnota obsahu obrazca odlišuje len súčiniteľom $\frac{1}{n+1}$, ktorý je rádove blízky jednotke pre nie veľmi veľké n.

Ako ďalší príklad nájdeme obsah obrazca ohraničeného zhora čiarou

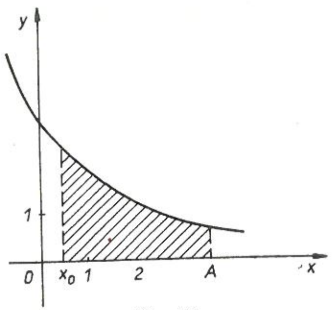
$$y = c\,e^{-\frac{x}{a}} \qquad (a > 0) \tag{3.3}$$

zdola osou x, zľava priamkou $x = x_0$ a sprava priamkou $x = A (A > x_0)$ (*obr. 71*). Obsah tohto obrazca sa rovná:

$$S_A = \int_{x_0}^{A} c\,e^{-\frac{x}{a}}\,dx = -ca\left[e^{-\frac{x}{a}}\right]_{x_0}^{A} = ca\left[e^{-\frac{x_0}{a}} - e^{-\frac{A}{a}}\right] \tag{3.4}$$

Ak je A v porovnaní s x_0 veľké, tak $e^{-\frac{x_0}{a}} \gg e^{-\frac{A}{a}}$. Ak zväčšíme číslo A, z (3.4) vidíme, že sa hodnota S_A takmer nezmení. Pri neobmedzenom vzraste A hodnota $e^{-\frac{A}{a}}$ sa neobmedzene približuje k nule. Obsah takéhoto obrazca (*obr. 71*), ktorý je z pravej strany neohraničený, potom je:

$$S_\infty = \int_{x_0}^{\infty} c\,e^{-\frac{x}{a}}\,dx = ca\,e^{-\frac{x_0}{a}} = y(x_0)\,a \tag{3.5}$$



Obr. 71

Vo vzťahu (3.3) musí byť mocniteľ bezrozmerné číslo. Preto rozmer a je taký istý, aký je rozmer x, t. j. dĺžka. Aj rozmer y je dĺžka. Rozmer S je plošná jednotka.

Ukazuje sa, že možno veľmi ľahko vyjadriť obsah pod jedným oblúkom sínusoidy (*obr. 72*). Tento obsah je:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

Určíme obsah elipsy. Vidíme, že na základe symetrickosti stačí nájsť obsah S_1 tej časti elipsy, ktorá leží v prvom kvadrante a výsledok vynásobíme štyrmi. Potom $S = 4S_1$. Aby sme S_1 vypočítali, vyjadríme z rovnice elipsy y. Rovnica elipsy s polosami a a b a so stredom v počiatku súradnicového systému má tvar

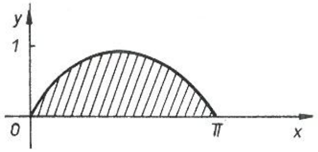
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(pozri čl. 7, kap. IV). Pretože v prvom kvadrante je $y > 0$, sa

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Preto

$$S_1 = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \tag{3.6}$$



Obr. 72

Hodnotu integrálu (3.6) si ľahko vypočítame, ak zavedieme substitúciu $x = a \sin t$. Dostaneme:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - \sin^2 t} \, a \cos t \, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t \, dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = a^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4} \tag{3.7}$$

Ak použijeme (3.7), dostaneme z (3.6) $S_1 = \frac{b}{a}\,\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi ab}{4}$. Obsah celej elipsy $S = \pi ab$. Ak $a = b = r$, dostaneme $S = \pi r^2$ (obsah kruhu) v úplnej zhode s tým, že pri $a = b = r$ prechádza elipsa do kružnice.

Pripomeňme ešte jednu vážnu okolnosť. V kapitole I sme poznamenali, že obsah obrazca (integrál) môže byť ako číslo kladné, ale aj záporné. Preto je pri hľadaní obsahov potrebná istá ostražitosť. Napr. chceme vedieť množstvo farby potrebnej na zafarbenie obrazca ohraničeného oblúkmi sínusoidy a osou x (*obr. 28*), ak vieme, že na zafarbenie jednotkového obsahu treba a gramov farby. V tomto prípade nemožno naraz vypočítať obsah celý jedným integrálom (pozri str. 66). Treba brať integrály oddelene, po intervaloch od 0 do π a od π do 2π.

Ak integrand $y = f(x)$ mení znamienko, pre riešenie úlohy o spotrebe farby treba integračný obor rozdeliť na časti, v ktorých funkcia znamienka nemení, vypočítať integrály jednotlivých častí a potom vziať súčet ich absolútnych hodnôt.

Nájdime ešte obsah obrazca ohraničený zhora čiarou $y = x^n \mathrm{e}^{-n}$ (n — prirodzené číslo), zdola osou x pri $x \geqq 0$ (sprava obrazec nie je ohraničený).

Tento obsah sa vyjadrí integrálom

$$S = \int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \, dx$$

Pri výpočte použijeme metódu per partes. Predpokladajme, že

$$\mathrm{e}^{-x} \, dx = dg, \qquad x^n = f$$

Vtedy

$$g = -\mathrm{e}^{-x}, \qquad df = nx^{n-1} \, dx$$

$$\int x^n \mathrm{e}^{-x} \, dx = -x^n \mathrm{e}^{-x} + \int nx^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \, dx$$

Preto

$$\int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \, dx = \left[-x^n \mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} = \int_0^{\infty} nx^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \, dx$$

V čl. 21, kapitoly II sme odvodili, že $x^n \mathrm{e}^{-x} = \frac{x^n}{e^x} \underset{x \to 0}{\to} 0$. Pretože $x^n \mathrm{e}^{-x} = 0$ pri $x = 0$, potom $\left[-x^n \mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} = 0$, tak

$$\int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \, dx = \int_0^{\infty} nx^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \, dx$$

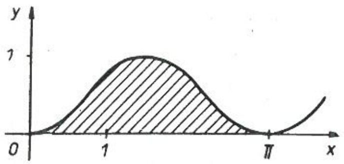
Označme $\int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \, dx = I_n$. Potom $I_n = nI_{n-1}$.

Ak budeme aj I_{n-1} integrovať per partes, dostaneme, že $I_{n-1} = (n-1) \cdot I_{n-2}$ atď. Preto

$$I_n = n(n-1)(n-2) \cdot 3 \cdot 2 \cdot I_0$$

Ale $I_0 = \int_0^\infty e^{-x}\, dx$. Hodnotu tohto integrálu dostaneme, ak do (3.5) dosadíme $c = 1$, $a = 1$, $x_0 = 0$. Vtedy $I_0 = e^0 = 1$. Takýmto spôsobom

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{3.8}$$



Obr. 73

Cvičenia

1. Nájdite obsah obrazca ohraničeného jedným oblúkom čiary $y = \sin^2 x$ a osou x (graf funkcie $y = \sin^2 x$ je znázornený na *obr. 73*).

Návod: Použite vzťah $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

2. Urobte to isté pre funkciu $y = \cos^2 x$.

3. Nájdite obsah obrazca ohraničeného zhora čiarou $y = x(1-x)$ a zdola osou x.

4. Nájdite obsahy obrazcov, na ktoré parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ rozdelí kruh $x^2 + y^2 = 8$.

5. Koľko farby je treba na zafarbenie obrazca ohraničeného krivkou $y = \frac{x}{1+x^2}$, osou x a kolmicami $x = 1$ a $x = -1$.

6. To isté vypočítajte pre obrazec ohraničený krivkou $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ a osou x.

Návod: Najskôr zostrojte graf funkcie $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

7. Nájdite obsah elipsy, ktorej rovnica je $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

4. STREDNÉ HODNOTY

Pripomeňme si, že strednou hodnotou funkcie $f(x)$ na intervale od $x = a$ do $x = b$ je

$$\overline{f}(a, b) = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a} \tag{4.1}$$

Vyzdvihnime dve základné vlastnosti, ktoré sa vzťahujú na stredné hodnoty.

1. Stredná hodnota konštanty na ľubovoľnom intervale je táto konštanta samotná. Je to jasné i z fyzikálneho hľadiska: ak sa okamžitá rýchlosť nemení, stredná rýchlosť na intervale sa rovná konštantnej hodnote okamžitej rýchlosti. Celkom jednoducho toto tvrdenie dostaneme i zo vzťahu (4.1)

$$\overline{C}(a, b) = \frac{\int_a^b C\, dx}{b - a} = \frac{C(b-a)}{b-a} = C$$

2. Stredná hodnota súčtu dvoch funkcií sa rovná súčtu stredných hodnôt jednotlivých sčítancov

$$\overline{y_1 + y_2} = \overline{y_1} + \overline{y_2}$$

Skutočne,

$$\overline{y_1 + y_2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b [y_1(x) + y_2(x)]\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b y_1(x)\, dx + {}$$

$$+ \frac{1}{b-a}\int_a^b y_2(x)\, dx = \overline{y_1} + \overline{y_2}$$

Nájdeme strednú hodnotu funkcie $y = \sin x$ na intervale od $x = 0$ do $x = \pi$

$$\overline{y}(0, \pi) = \frac{\int_0^\pi \sin x\, dx}{\pi - 0} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637$$

Stredná hodnota funkcie $y = \sin x$ na intervale od $x = 0$ do $x = b$

$$\overline{y}(0, b) = \frac{\int_0^b \sin x\, dx}{b - 0} = \frac{1 - \cos b}{b} \tag{4.2}$$

Čo sa stane, ak sa začne číslo b neohraničene zväčšovať, t. j. bude sa zväčšovať integračný obor?

Čitateľ vzťahu (4.2) pre ľubovoľné b nie je väčší ako dve (rovná sa dvom, ak $\cos b = -1$, t. j. pri $b = \pi, 3\pi, 5\pi$.) Menovateľ (4.2) bude neohraničene rásť, čím sa celý zlomok bude zmenšovať až na nulu. Preto čím je väčší interval, na ktorom skúmame strednú hodnotu, tým je stredná hodnota $\sin x$ menšia.

Ukážeme, že aj stredná hodnota funkcie $y = \cos x$ na nekonečne veľkom intervale sa rovná nule. Skutočne

$$\bar{y}(0, b) = \frac{\int\limits_0^b \cos x \, dx}{b - 0} = \frac{[\sin x]_0^b}{b} = \frac{\sin b}{b}. \tag{4.3}$$

Ak budeme teraz neobmedzene zväčšovať číslo b, menovateľ (4.3) bude neohraničene rásť a čitateľ nebude väčší ako jedna. Teda celý zlomok bude nadobúdať nulovú hodnotu: $\bar{y}(0, \infty) = 0$.

Rovnakým spôsobom dostaneme, že aj stredná hodnota funkcie $y = \cos kx$ na nekonečne veľkom intervale sa rovná nule.

Nájdeme strednú hodnotu funkcie $y = \sin^2 x$ na intervale od $x = 0$ do $x = \infty$. Podľa známeho vzťahu z trigonometrie

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Odtiaľ

$$\overline{\sin^2 x} = \overline{\frac{1}{2}} - \overline{\frac{1}{2}\cos 2x} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Ak použijeme vzťah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dostaneme strednú hodnotu $\cos^2 x$ na tom istom intervale

$$\overline{\cos^2 x} = \overline{1} - \overline{\sin^2 x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Cvičenia

1. Nájdite strednú hodnotu funkcie $y = x^n$ na intervale od $x = 0$ do $x = x_0$.
2. Nájdite strednú hodnotu funkcie $y = C\,e^{kx}$ na intervale, na ktorom sa y mení od $y = n$ do $y = m$. Vyjadrite túto strednú hodnotu pomocou n a m vylúčením C i k z výsledku. Preskúmajte získaný výraz pri m blízkom $k\frac{n}{m} = n + \nu$, $\nu \ll n$.
3. Nájdite stredné hodnoty funkcií $y = \sin^2 x$ a $y = \cos^2 x$ na intervale:
   a) od $x = 0$ do $x = \pi$,
   b) od $x = 0$ do $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Určte periódu funkcie $y = \sin(\omega t + \alpha)$, kde ω, α sú konštanty. Nájdite strednú hodnotu funkcie y^2 a jej periódu.

5. DĹŽKA OBLÚKA KRIVKY, KRIVOSŤ KRIVKY

Určíme si úlohu nájsť dĺžku oblúka krivky $y = f(x)$ od bodu $x = a$ do bodu $x = b$ (*obr. 74*).

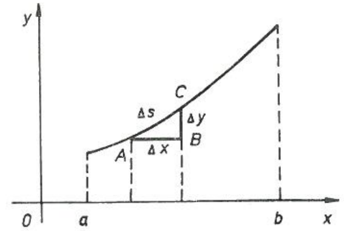
Dĺžku malej časti krivky AC zameníme dĺžkou úsečky spájajúcej body A a C. Budeme skúmať len krivky spojité a bez bodov zlomu. Podľa Pytagorovej vety dostaneme:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} =$$

$$= (\Delta x)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Odtiaľ

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \tag{5.1}$$



Obr. 74

Vo vzťahu (5.1) prejdeme k limite pre $\Delta x \to 0$; pritom $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ prejde do derivácie $y' = f'(x)$, kde $y = f(x)$ je rovnica krivky; dostaneme[1]):

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Celá hľadaná dĺžka je:

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \tag{5.2}$$

Pretože pod integrálom v (5.2) je odmocnina, integrál sa málokedy podarí ľahko vypočítať.

Ukážeme niekoľko príkladov, kedy dopočítanie integrálu nebude robiť ťažkosti.

1. *Dĺžka kružnice.* Budeme hľadať dĺžku kružnice $x^2 + y^2 = R^2$. Stačí nájsť dĺžku štvrtiny kružnice, ktorá leží v prvom kvadrante, a výsledok násobiť štyrmi. Z rovnice kružnice

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

[1]) Rozdiel medzi dĺžkou oblúka a dĺžkou úsečky je druhého stupňa $(\Delta x)^2$ a pri limitnom prechode (k diferenciálom) sme výrazy obsahujúce $(\Delta x)^2$ zanedbávali.

Podľa vzťahu (5.2)

$$s = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \int_0^R \frac{R\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \tag{5.3}$$

Zavedieme novú premennú t podľa vzťahu $x = R \sin t$; vtedy $dx = R \cos t\, dt$ a z (5.3) dostaneme[1]):

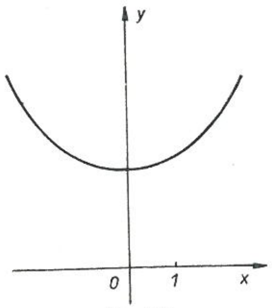
$$s = \int_0^{\pi/2} R\, dt = \frac{\pi R}{2}$$

odkiaľ dostaneme dĺžku kružnice $C = \frac{\pi R}{2} \cdot 4 = 2\pi R$.

2. *Reťazovka.* Je to krivka, ktorej rovnica je

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) \tag{5.4}$$

kde a je konštanta. Názov „reťazovka" je odvodený z toho, že podobný tvar nadobúda ohybná a neroztažná ťažká niť (napríklad reťaz) zavesená za obidva konce. Graf reťazovky je na *obr. 75* (pre $a = 2$).



Obr. 75

Nájdeme dĺžku oblúka reťazovky od bodu $x = 0$ do bodu $x = x_0$. Z (5.4)

$$y' = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$$

preto

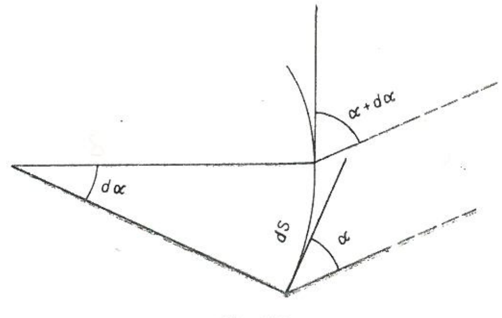
$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}}{4}} = \sqrt{\frac{e^{x/a} + e^{-x^2/a}}{4}} = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

$$s = \int_0^x \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\, dx = \frac{1}{2} a[e^{x/a} - e^{-x/a}]_0^{x_0} = \frac{a}{2}(e^{x_0/a} - e^{-x_0/a})$$

1) Pozri čl. 16, kap. II.

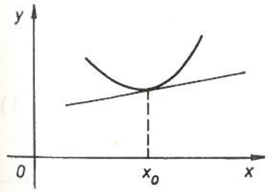
S dĺžkou oblúka je spojená definícia polomeru krivosti R v niektorom bode krivky. Veličinu $\frac{1}{R}$ nazývame krivosťou (čím je menší polomer, tým sa krivka ostrejšie zatáča).

Vezmime malý úsek krivky (*obr. 76*) s dĺžkou ds a nájdeme uhol medzi dotyčnicami ku krivke na koncoch tohto úseku. Tento uhol možno skúmať ako prírastok $d\alpha$ uhla α, ktorý zviera dotyčnica s osou x. V dvoch susedných bodoch veďme normály (kolmice na dotyčnice). Uhol, ktorý zvierajú normály, je ten istý uhol α, ktorý zvierajú dotyčnice podľa známej geometrickej vety. Z tohto možno nájsť vzdialenosť R priesečníka normál od krivky.



Obr. 76

Budeme skúmať malý úsek krivky ako oblúk kružnice. Normála ku kružnici je zrejme polomer. Priesečník normál je stred kružnice. Ak by krivka bola kružnicou, tak $ds = R\, d\alpha$ alebo $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$; táto derivácia je konštanta pre ľubovoľný úsek oblúka kružnice. Derivácia $\frac{d\alpha}{ds}$ pre ľubovoľnú krivku, ak uvažujeme jej nekonečne malý úsek, môže slúžiť ako definícia krivosti v danom bode. Ak použijeme vzťah pre ds, a to, že $\alpha = \operatorname{arctg} y'$, dostaneme výraz pre krivosť



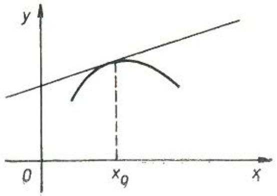
Obr. 77

$$d\alpha = d \operatorname{arctg} y' = \frac{dy'}{1 + y'^2}$$

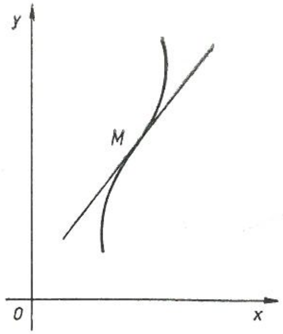
$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{(1 + y'^1)^{3/2}} \frac{dy'}{dx} =$$

$$= \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$



Obr. 78



Obr. 79

Znamienko krivosti $\frac{d\alpha}{ds}$ súhlasí so znamienkom druhej derivácie y'' a určuje, či je krivka konvexná alebo konkávna. Ak v bode x_0 hodnota $y'' > 0$ (*obr. 77*), potom krivka v blízkosti tohto bodu leží nad dotyčnicou a v tomto bode je konvexná. Ak $y''(x_0) < 0$ (*obr. 78*), krivka ide pod dotyčnicou a je konkávna.

Môže sa stať, že $y''(x_0) = 0$, pričom z pravej strany od x_0 (t. j. pri $x > x_0$) $y''(x) > 0$ a pri $x < x_0$ bude $y''(x) < 0$. To znamená, že napravo od bodu x_0 krivka je konvexná a z ľavej strany — konkávna (*obr. 79*). V tomto bode (bod M na *obr. 79*) prechádza krivka z jednej strany dotyčnice na druhú. Krivka v tomto bode sa mení z konvexnej na konkávnu alebo naopak, „prehýba sa". Také body sa nazývajú body obratu — *inflexné body*.

Cvičenia

1. Zapíšte v tvare integrálu dĺžku oblúka paraboly $y = x^2$ od bodu $(0, 0)$ do bodu $(1, 1)$!
2. Zapíšte v tvare integrálu dĺžku oblúka čiary $y = e^x$ od bodu $x = 0$ do bodu $x = 1$!
3. Zapíšte v tvare integrálu dĺžku oblúka elipsy.
4. Doriešte úlohu 2, ak zavediete substitúciu $1 + e^{2x} = z^2$.

6. PRIBLIŽNÝ VÝPOČET DĹŽKY OBLÚKA

V čl. 5 sme dostali vzťah na výpočet dĺžky oblúka krivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \tag{6.1}$$

Konštatovali sme, že integrovať funkciu $\sqrt{1 + y^2(x)}$ len pomocou elementárnych funkcií je ťažké (najčastejšie nemožné), pretože sa tu vyskytuje odmocnina. Pokúsime sa preto odvodiť približné vzťahy na výpočet dĺžky oblúka.

Predpokladajme, že hodnota $y'^2(x)$ je v porovnaní s jednotkou malá: $|y'(x)| \ll 1$. Ak vtedy zanedbáme v (6.1) $y'^2(x)$, dostaneme:

$$s \approx \int_a^b \sqrt{1}\, dx = b - a \tag{6.2}$$

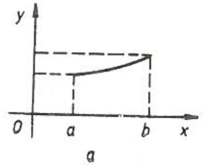
Rozdiel $b - a$ je dĺžka vodorovnej úsečky, ktorej konce sú $x = a$ a $x = b$. Vzťah (6.2) ukazuje, že ak je y' v absolútnej hodnote veľmi malá (krivka sa odchyľuje od osi x len veľmi málo), aj dĺžka oblúka tejto krivky sa blíži k dĺžke vodorovnej úsečky (*obr. 80a*).

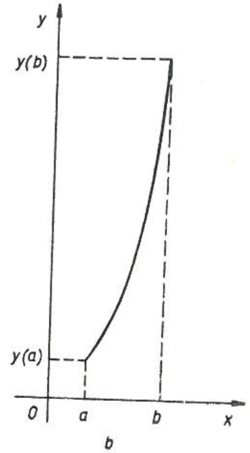
Ak $y'^2(x) \gg 1$, potom v (6.1) možno jednotku v porovnaní s $y'^2(x)$ zanedbať. Dostaneme:

$$s \approx \int_a^b \sqrt{y'^2(x)}\, dx = \int_a^b y'(x)\, dx = y(b) - y(a) \tag{6.3}$$

Vzťah (6.3) ukazuje, že v tomto prípade je dĺžka oblúka krivky veľmi blízka dĺžke kolmej úsečky, ktorej konce sú $y(a)$ a $y(b)$ (*obr. 80b*). Skutočne, ak derivácia y' je veľká, krivka sa strmo dvíha nahor, a preto sa podobá kolmici (pre priamky takmer kolmé je derivácia v absolútnej hodnote veľmi veľká).

Vzťahy (6.2) a (6.3) sú jednoduché približné vzťahy pre dĺžky oblúka, ale priblíženie, ktoré dávajú, je veľmi hrubé a možno ho dostať i bez (6.1).





Obr. 80

Odvodíme presnejšie vzťahy. Nech $| y'(x) | < 1$. Pri ponechaní dvoch prvých členov v binomickom rozvoji (čl. 20, kap. II.), dostaneme:

$$\sqrt{1 + y'^2(x)} = 1 + \frac{1}{2} y'^2(x)$$

Ak použijeme vzťah (6.1), bude sa s rovnať:

$$s \approx \int_a^b \left[1 + \frac{1}{2} y'^2(x)\right] \mathrm{d}x = (b - a) + \frac{1}{2} \int_a^b y'^2(x) \, \mathrm{d}x$$

Ak $| y'(x) | > 1$, tak

$$\sqrt{1 + y'^2(x)} = y'(x) \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2(x)}}$$

na poslednú odmocninu použijeme binomický rozvoj. Pretože $\frac{1}{y'^2} < 1$

$$y'(x) \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2(x)}} \doteq y'(x)\left[1 + \frac{1}{2y'^2(x)}\right] = y'(x) + \frac{1}{2y'(x)}$$

Ak toto dosadíme do (6.1), dostaneme:

$$s = \int_a^b \left[y'(x) + \frac{1}{2y'(x)}\right] \mathrm{d}x = \int_a^b y'(x) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{y'(x)} =$$

$$= y(b) - y(a) + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{y'(x)}$$

Takto sme dostali približné vzťahy

$$\left.\begin{aligned} s &= (b - a) + \frac{1}{2} \int_a^b y'^2(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \text{keď } | y'(x) | < 1 \\ s &= y(b) - y(a) + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{y'(x)}, \qquad \text{keď } | y'(x) | > 1 \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Integrály, ktoré sa tu nachádzajú, sú jednoduchšie ako integrál v (6.1), preto počítať pomocou týchto vzťahov je oveľa jednoduchšie ako podľa (6.1). Aj tieto vzťahy sú však len približné.

Akej chyby sa dopustíme pri ich použití? Prvý zo vzťahov je tým presnejší, čím je menšia $| y' |$, a druhý je tým presnejší, čím je $| y' |$ väčšia; obidva vzťahy dajú najhorší výsledok pri $| y' | = 1$. Preto ak chceme odhadnúť najväčšiu chybu, uvažujme o najnevýhodnejšom prípade $y(x) = 1$[1]. Podľa presného vzťahu 6.1

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + 1} \, \mathrm{d}x = \sqrt{2}\,(b - a) \tag{6.5}$$

Podľa prvého vzťahu zo (6.4)

$$s = (b - a) + \frac{1}{2} \int_a^b \mathrm{d}x = \frac{3}{2} (b - a) \tag{6.6}$$

Druhý vzťah (6.4) dá to isté: $s = \frac{3}{2} (b - a)$. Pri porovnaní (6.5) a (6.6) vidíme, že najväčšia chyba približného vzťahu je 6 %.

Pri výpočte dĺžky oblúka krivky treba rozdeliť oblúk na časti, v ktorých je alebo $| y' | \leqq 1$, alebo $| y' | \geqq 1$. Vtedy chyba bude v každom prípade menšia ako 6 %. Pretože $y'^2(x)$ nadobúda hodnotu, ktorá sa rovná 1 len v jednotlivých bodoch krivky, ak si krivku správne rozdelíme na časti, bude chyba menšia ako 6 %. Dĺžky priamočiarych úsekov netreba hľadať podľa približného vzťahu.

Preskúmame príklady.

1. Nájdite dĺžku oblúka paraboly $y = x^2$ od bodu (0,0) po bod (2,4)[2].

Nájdeme hodnotu derivácie $y' = 2x$ pre rôzne x. Pre $x = 0{,}5$ sa $y' = 1$ a je väčšia ako jedna pri $x > 0{,}5$. Preto dĺžku oblúka (s_1) zodpovedajúcu zmene x od 0 do 0,5 nájdeme pomocou prvého vzťahu (6.4) a dĺžku (s_2) zodpovedajúcu zmene x od 0,5 do 2 nájdeme podľa druhého vzťahu:

$$s_1 = (0{,}5 - 0) + 0{,}5 \int_0^{0{,}5} 4x^2 \, \mathrm{d}x = 0{,}5 + 2 \,.\, \frac{0{,}5^3}{3} = 0{,}58$$

$$s_2 = 4 - 0{,}25 + 0{,}5 \int_{0{,}5}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{2x} = 3{,}75 + 0{,}25(\ln 2 - \ln 0{,}5) = 4{,}10$$

---

[1]) Ak $y'(x) = 1$, tak $y(x) = x + c$. Graf tejto funkcie je priamka.

[2]) V týchto príkladoch počítame na dve platné desatinné miesta.

Hľadaná dĺžka oblúka

$$s = s_1 + s_2 = 0{,}58 + 4{,}10 = 4{,}68$$

Vypočítame presnú hodnotu dĺžky oblúka podľa vzťahu 6.1:

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Zavedieme substitúciu $2x = z$ a podľa vzorca 33 (str. 166) dostaneme:

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{4x^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)\right] \tag{6.7}$$

O správnosti vzorca sa môžeme presvedčiť tak, že pravú stranu (6.7) zderivujeme.

Použitím (6.7) dostaneme:

$$s = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln\left(4 + \sqrt{17}\right)\right] = 4{,}65$$

Chyba pri výpočte podľa vzťahu (6.4) je asi 0,7 %.

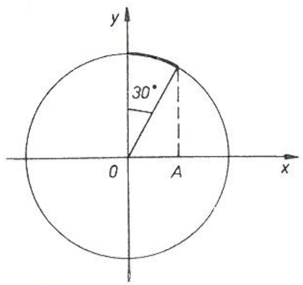
2. Nájdite dĺžku oblúka krivky $y = e^x$ od bodu (0,1) po bod (1, e).

V tomto prípade $y' = e^x$ a pri zmene x od 0 do 1 derivácia rastie od 1 do e. Preto použijeme druhý vzťah (6.4)

$$s = e^1 - e^0 + 0{,}5 \int_0^1 \frac{dx}{e^x} = 2{,}72 - 1 - 0{,}5\,[e^{-x}]_0^1 = 2{,}04$$

Z presného vzťahu vychádza hodnota dĺžky oblúka (pozri úlohy 2 a 4 v čl. 5)

$$s = \sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 - e^2} - 1}{\sqrt{1 - e^2} + 1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 2{,}00$$



Obr. 81

Chyba približného výpočtu je 2 %.

Niekedy približne počítame dĺžku oblúka pomocou rozvoja integrovanej funkcie v (6.1) do mocninového radu podľa mocnín x. Ak pritom zachováme patričný počet členov rozvoja, môžeme dostať hodnotu dĺžky oblúka s ľubovoľným stupňom presnosti.

Preskúmame príklad. Určíme dĺžku kružnice. Budeme hľadať dĺžku s oblúka kružnice,

ktorý zodpovedá stredovému uhlu 30° (*obr. 81*). Dĺžka celej kružnice $C = 12s$. Je zrejmé, že dostaneme taký integrál ako v 9.3, no s inou hornou hranicou

$$s = \int_0^{OA} \frac{R\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Poznamenajme, že $OA = R \,.\, \sin 30° = \frac{1}{2} R$. Preto

$$s = \int_0^{\frac{1}{2}R} \frac{R\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \tag{6.8}$$

Výraz pod integrálom upravíme nasledujúcim spôsobom

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R}{R\sqrt{\left(1 - \frac{x}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}$$

Ale

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} = \left[1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{6.9}$$

Výraz (6.9) rozložíme podľa binomického rozvoja[1]). Preto položíme $\left(\frac{x}{R}\right)^2 = t$. Dostaneme:

$$\left[1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = (1 - t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + \frac{5}{16}t^2 + \frac{35}{128}t^4 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{R}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{x}{R}\right)^6 + \frac{35}{128}\left(\frac{x}{R}\right)^8 + \ldots \tag{6.10}$$

Po dosadení (6.10) do (6.8) a integrovaní dostaneme:

$$s = \frac{1}{2}R + \frac{1}{8 \,.\, 6}R + \frac{3}{40 \,.\, 32}R + \frac{5}{16 \,.\, 7 \,.\, 2^7}R + \frac{35}{128 \,.\, 9 \,.\, 2^9}R +$$

$$+ \ldots = R\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{40 \,.\, 32} + \frac{5}{16 \,.\, 7 \,.\, 2^7} + \frac{35}{128 \,.\, 9 \,.\, 2^9} + \ldots\right] \tag{6.11}$$

---

[1]) Pozri kap. II, vzťah 20.3.

Vidíme, že členy radu (6.11) veľmi rýchle klesajú. Aby sme dostali s, stačí vziať niekoľko prvých členov radu. Ak vezmeme len jeden člen, dostaneme $s = \frac{1}{2} R$, z čoho dĺžka celej kružnice $C = 6R$. Ak sa vezmú dva členy, dostaneme $s = 0{,}521R$, $C = 6{,}252R$. Tri členy radu dajú $s = 0{,}523R$, $C = 6{,}276R$ atď.

Vieme, že dĺžka kružnice $C = 2\pi R$. Ak $2\pi R$ porovnáme s nájdenými výsledkami, dostaneme približnú hodnotu čísla π:

$$3,\ 3{,}126\ 3{,}138 \ldots$$

Čím viac členov radu (6.11) vezmeme, tým dostaneme presnejšiu hodnotu π. Hodnota čísla π na sedem platných desatinných miest je 3,141 5926.

Cvičenia

1. Použitím približných vzťahov nájdite dĺžku oblúka reťazovky medzi bodmi $x = 0$ a $x = 2(a = 1)$. Výsledok porovnajte s presnou hodnotou dĺžky oblúka.

2. Nájdite dĺžku oblúka hyperboly $xy = -1$ od bodu $(0{,}5, -2)$ po bod $(1, 1)$.

Poznámka: V tomto prípade nedostaneme presné riešenie, pretože integrál v (6.1) nemôže byť vyjadrený pomocou elementárnych funkcií.

3. Zistite približnú hodnotu čísla π, ak na výpočet použijete dĺžku oblúka kružnice so stredovým uhlom 45° (ponechajte tri, štyri a päť členov radu).

7. VÝPOČET OBJEMOV. OBJEM A POVRCH ROTAČNÉHO TELESA

V čl. 14, kapitoly I sme dostali vzťah

$$V = \int_{x_0}^{x_k} S(x)\, dx \tag{7.1}$$

kde $S(x)$ je obsah rezu telesa rovinou kolmou na os x a prechádzajúcou cez bod x (odporúčame zopakovať si odvodenie tohto vzťahu).

Pomocou tohto vzťahu sme dostali výraz pre objem ihlana. Doslovne takým istým spôsobom sa získa objem kužeľa. Nech počiatok súradnicového systému sa nachádza v strede kruhu, ktorý leží v základni kužeľa.

Os x nech má kladný smer v smere výšky kužeľa (*obr. 82*). S (x) je rez kužeľa rovinou kolmou na výšku a vzdialenou od základne kužeľa o dĺžku vzdialenosti x. Týmto rezom je kruh s polomerom r_x. Z podobnosti trojuholníkov

$$\frac{r_x}{r} = \frac{H - x}{H}$$

kde r je polomer základne, H — výška kužeľa.

Z tohto $r_x = \frac{r}{H}(H - x)$ a teda

$$V = \int_0^H \pi \frac{r^2}{H^2}(H - x)^2\, dx = \frac{\pi r^2}{H^2} \int_0^H (H - x)^2\, dx =$$

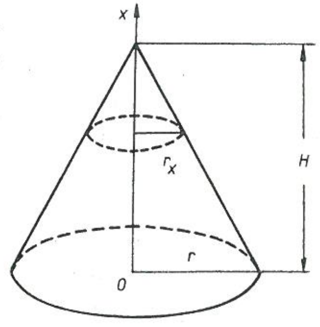
$$= -\frac{\pi r^2}{H^2}\left[\frac{(H - x)^3}{3}\right]_0^H = \frac{\pi r^2 H^3}{3H^2} = \frac{\pi r^2 H}{3}$$

Pre výpočet objemu gule položíme počiatok súradnicového systému do stredu najväčšieho kruhu a os x nech leží v smere priemeru gule kolmo na rovinu tohto najväčšieho kruhu.

Rezom kolmým na os x a vzdialeným od počiatku súradnicového systému o dĺžku x je kruh s polomerom R_x. Podľa Pythagorovej vety $R_x = \sqrt{R^2 - x^2}$. Preto

$$S(x) = \pi R_x^2 = \pi(R^2 - x^2)$$

$$V = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$



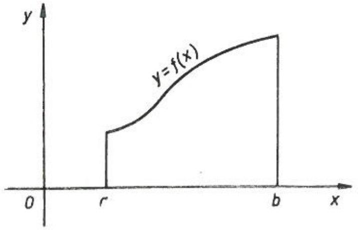
Obr. 82

Zo vzťahu (7.1) vyplýva Cavalieriho princíp[1]): nech medzi dvoma rovnobežnými rovinami α a β sú dve telesá. Ak rez týchto telies s ľubo-

[1]) Cavalieri — taliansky matematik z prvej polovice XVII. storočia. Spomenutý princíp bol vyslovený v podstate bez dôkazu v jeho knihe: „Nesúdeliteľná geometria" roku 1635.

voľnou rovinou rovnobežnou s α a β sú obrazce s rovnakým obsahom (rovnajúce sa integrandu $S(x)$), tak aj objemy týchto telies sú rovnaké.

Nech teleso dostaneme rotáciou obrazca zobrazeného na *obr. 83* okolo osi x (obrazce takéhoto tvaru sa nazývajú krivočiare lichobežníky). V tomto prípade rez je kruh polomeru $y = f(x)$ a $S(x) = \pi y^2$. Ak použijeme 7.1, dostaneme



Obr. 83

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx \tag{7.2}$$

Nájdime napr. objem telesa, ktoré dostaneme pri rotácii hornej polovice elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ okolo osi x. Toto teleso sa nazýva rotačný elipsoid.

Z rovnice elipsy $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ a zo (7.2) vyplýva, že

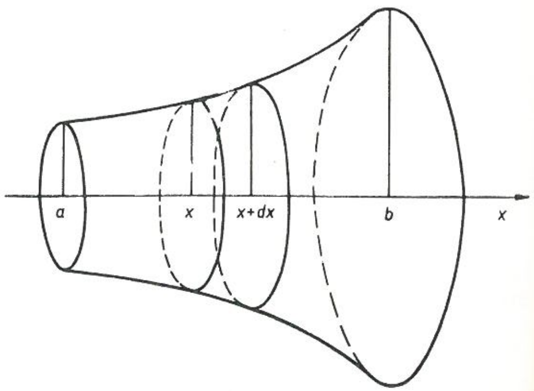
$$V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

Pri $a = b = R$ dostaneme objem gule s polomerom R.

Odvodíme teraz vzťah pre povrch rotačného telesa (*obr. 84*). Skúmajme teleso ohraničené rezmi, ktoré idú cez body x a $x + dx$. Označme povrch plášťa tohto telesa ako dF. Ak ho pokladáme za zrezaný kužeľ, dostaneme:

$$dF = \pi[y(x) + y(x + dx)]\, ds$$

kde ds je dĺžka malého úseku krivky, pričom $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$ (pozri čl.



Obr. 84

5). Súčet $y(x) + y(x + dx)$ možno nahradiť výrazom $2y(x)$, ak veličinu $y'(x)\, dx$ v porovnaní s $y(x)$ zanedbáme[1]).

Preto

$$dF = 2\pi y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$$

Celý obsah rotačnej plochy je:

$$F = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \tag{7.3}$$

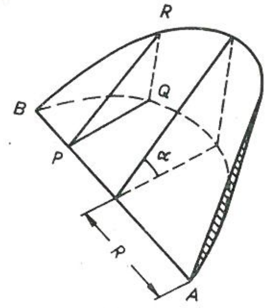
Pomocou tohto vzťahu ľahko nájdeme povrch gule. Guľu dostaneme rotáciou hornej polkružnice okolo osi x. Rovnica kružnice je $x^2 + y^2 = a^2$, odkiaľ

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Po dosadení do (7.3) dostaneme:

$$F = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = [2\pi a x]_{-a}^{a} = 2\pi a^2$$

Cvičenia



Obr. 85

1. Nájdite objem valcovitého odseku, t. j. telesa odseknutého z rotačného kruhového valca s polomerom R rovinou, vedenou priemerom základne valca pod uhlom α (*obr. 85*).

2. Nájdite objem kužeľa, ak ho považujeme za rotačné teleso, ktoré dostaneme rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jednej z jeho odvesien.

3. Nájdite objem telesa, ktoré dostaneme rotáciou obrazca ohraničeného zhora čiarou $y = \sqrt{x}$, zdola osou x, sprava kolmicou $x = 2$.

8. ZOSTROJOVANIE GRAFOV

Najjednoduchší spôsob zostrojiť graf funkcie $f(x)$ je vo vypočítaní hodnôt $f(x_n)$ pre veľký počet bodov x_n; pritom sa obyčajne body x_n

[1]) Poznamenávame, že vo výraze dF súčet $y(x) + y(x + dx)$ sa násobí ds, takže veličina, ktorú zanedbávame, je druhého stupňa $dx\, ds \approx dx^2$.

berú v tvare $x_n = x_0 + na$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Tento spôsob, pravda, nie je ekonomický. Preto, aby sme preskúmali zmenu funkcie na intervale Δx, treba voliť krok a oveľa menší ako Δx: $a \ll \Delta x$. No pri malom kroku je potrebné veľmi veľa bodov, aby sa obsiahla celá časť oboru definície, ktorá nás zaujíma.

Metódy vysvetlené v článkoch 1 a 2 dovoľujú veľmi rýchle a spoľahlivo zostrojiť graf a predstaviť si tvar krivky. Preto predovšetkým treba nájsť na grafe význačné body, t. j. body maxima, minima, body zlomu, inflexné body atď.

Ukážeme si to na príklade grafu mnohočlena tretieho stupňa, t. j. grafu funkcie

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{8.1}$$

Ak budeme poznať graf, budeme môcť o funkcii dostať viac dôležitých údajov, napr. počet reálnych koreňov, intervaly, v ktorých sa korene nachádzajú atď.

Zostrojme napr. graf funkcie

$$y = 0{,}5x^3 - 0{,}75x^2 - 3x + 2{,}5 \tag{8.2}$$

Predovšetkým nájdeme maximum a minimum. Ak vypočítame deriváciu z (8.2), ktorá sa rovná nule, dostaneme:

$$y' = 1{,}5x^2 - 1{,}5x - 3 = 0 \tag{8.3}$$

odkiaľ nájdeme $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Skúmajme každú z týchto hodnôt osobitne. Nájdeme preto $y'' : y'' = 3x - 1{,}5$, $y'' - 1 = -4{,}5 < 0$. To znamená, že v bode $x_1 = -1$ má funkcia maximum,

$$y_{\max} = -0{,}5 - 0{,}75 + 3 + 2{,}5 = 4{,}25$$

$y''(2) = 6 - 1{,}5 = 4{,}5 > 0$. Preto v bode $x_2 = 2$ má funkcia minimum

$$y_{\min} = -2{,}5$$

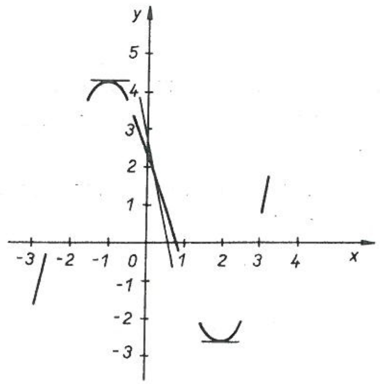
Teraz sa pozrieme, ako sa bude správať mnohočlen pri veľmi veľkých hodnotách x v absolútnej hodnote. Vidíme, že pri veľmi veľkých x člen obsahujúci x^3 bude prevyšovať v absolútnej hodnote všetky ostatné členy. Preto znamienko mnohočlena (8.1) bude dané znamienkom výrazu ax^3.

Ak je $a > 0$, tak $ax^3 > 0$ pri $x > 0$, pravé rameno grafu smeruje nahor; $ax^3 < 0$ pri $x < 0$, ľavé rameno grafu smeruje nadol. Je jasné, že pri $a < 0$ ľavé rameno smeruje nahor a pravé nadol.

Nájdeme inflexné body. Z toho, čo sme si povedali v čl. 5, je jasné, že ak hľadáme inflexné body, musíme riešiť rovnicu $f''(x) = 0$. Ak použijeme (8.3), nájdeme $y'' = 3x - 1{,}5$. Z rovnice $y'' = 0$ vychádza $x = 0{,}5$. Pretože $y''' = 3$, potom $y - \bar{y} = \frac{1}{2}(x - 0{,}5)^3$, kde ako $\bar{y}$ je označená y-ová súradnica dotyčnice. Preto ak $x > 0{,}5$, tak $y - \bar{y} > 0$, ak $x < 0{,}5$, tak $y - \bar{y} < 0$. Na základe tohto môžeme povedať, že bod, ktorý má x-ovú súradnicu $x = 0{,}5$, je inflexný.

Graf mnohočlena tretieho stupňa má vždy jediný inflexný bod. Ak y je mnohočlen tretieho stupňa, tak $y'' = 0$ je rovnica prvého stupňa. Rovnica prvého stupňa má vždy jediný koreň. Pretože $y''' = \text{const}$, potom $y - \bar{y} = A(x - x_0)^3$. Je jasné, že $y - \bar{y}$ mení znamienko pri prechode x cez hodnotu x_0.

Vráťme sa k zostrojeniu grafu. Vypočítajme y-ovú súradnicu inflexného bodu; dostaneme $y \doteq 0{,}88$. Určíme ešte smer dotyčnice ku grafu v inflexnom bode. Ak použijeme (8.3), dostaneme $\operatorname{tg} \alpha = y'(0{,}5) = 3{,}38$. Ak použijeme všetky odvodené výsledky, dostaneme pre (8.2) *obr. 86*.

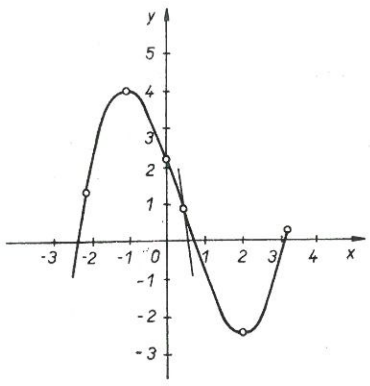


Obr. 86

Zaiste, ak by sme nevypočítali ďalšie hodnoty funkcie, dostaneme graf, ktorý zhruba kvalitatívne určuje priebeh funkcie. Už takýto graf dáva možnosť vypočítať počet koreňov (t. j. počet priesečníkov grafu s osou x) a urobiť aké-také závery o ich hodnotách. V našom príklade na *obr. 86* vidíme, že korene sú tri, že jeden z koreňov leží niekde medzi hodnotami 0,5 až +2, druhý koreň je určite kladný (je väčší ako 2) a tretí je záporný (je menší ako —1).

Graf možno spresniť, ak vypočítame hodnoty funkcie ešte pre niekoľko x.

V našom príklade vypočítame ešte tri hodnoty funkcie. Pri $x = 0$ $y = 2{,}5$. Toto nám dovolí lepšie si predstaviť priebeh krivky medzi maximom a minimom. Pre $x = 3$ $y = 0{,}25$. Túto hodnotu sme vypočítali, aby sme si predstavili, ako rýchle sa dvíha pravé rameno krivky. Analogicky by sme dostali predstavu o rýchlosti klesania ľavého ramena krivky, ak vezmeme $x = -2$. Dostaneme $y = 1{,}5$. Ak tieto hodnoty nanesieme, dostaneme graf priebehu funkcie (*obr. 87*). Z tohto grafu môžeme urobiť oveľa presnejšie závery o koreňoch: jeden koreň leží medzi $x = 0{,}5$ a $x = 1$; druhý medzi $x = 2$ a $x = 3$, bližšie k $x = 3$; tretí koreň je menší ako -2 (jeho hodnota je blízka k $x = -2{,}5$).



Obr. 87

Môže sa stať, že ak určíme deriváciu, ktorá sa rovná nule, nedostaneme reálne korene. To znamená, že skúmaný mnohočlen nemá ani maximum ani minimum. Pretože všetko, čo sme si povedali o priebehu mnohočlena pre čísla x v absolútnej hodnote veľmi veľké, ostáva v platnosti, tak v tomto prípade graf pretína os x len v jednom bode (mnohočlen má jeden reálny koreň).

Nakoniec derivácia môže mať len jeden dvojnásobný koreň x_0. Vtedy má tvar

$$y' = A(x - x_0)^2 \tag{8.4}$$

Ak integrujeme (8.4), dostaneme:

$$y = \frac{A}{3}(x - x_0)^3 + C \tag{8.5}$$

Vidíme, že v tomto prípade sa mnohočlen líši od tretej mocniny (kubickej paraboly) iba konštantným sčítancom. Z (8.5) vyplýva, že y nemá ani maximum ani minimum (pozri príklad 2, čl. 1). Graf pretína

os x v jednom bode. Tento bod nájdeme vtedy, keď v (8.5) zvolíme y tak, aby sa rovnalo nule

$$\frac{A}{3}(x - x_0)^3 + C = 0$$

$$(x - x_0)^3 = -\frac{3C}{A}$$

$$x = x_0 - \sqrt[3]{\frac{3C}{A}}$$

Hľadať maximum a minimum mnohočlena tretieho stupňa a skúmať jeho graf možno vždy, pretože ak položíme deriváciu rovnajúcu sa nule, dostaneme kvadratickú rovnicu, ktorej korene nie je ťažko vypočítať.

Cvičenia

1. Nájdite maximá a minimá nasledujúcich funkcií a zostrojte ich grafy:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$,

b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 15$,

c) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$.

2. Určte počet reálnych koreňov rovníc:

a) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 15 = 0$,

b) $4x^3 + 15x^2 - 18x - 2 = 0$,

c) $2x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0$,

d) $x^3 - x^2 + 2 = 0$.

IV. FUNKCIE A GRAFY

1. FUNKČNÁ ZÁVISLOSŤ

V prírode, technike a matematike sa veľmi často stretávame s funkčnými závislosťami. Skutočnosť, že každej hodnote x zodpovedá určitá hodnota y, nazývame funkčná závislosť veličiny (y) od (x)[1].

Veličina x sa nazýva nezávisle premenná a y je funkciou tejto premennej. Niekedy sa však nazýva i argumentom tejto funkcie. Tieto pojmy vysvetlíme na niekoľkých príkladoch z geometrie a fyziky:

1. Objem gule V je funkciou jej polomeru r

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

2. Objem kužeľa V s danou výškou h závisí od polomeru jeho podstavy r

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

3. Dráha voľného pádu s závisí od času t, ktorý uplynul od okamihu začiatku pádu

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

4. Intenzita prúdu I podľa Ohmovho zákona závisí od odporu vodiča R pri danom potenciálovom rozdiele U

$$I = \frac{U}{R} \tag{1.1}$$

[1]) V ďalšom texte už x a y nebudeme dávať do zátvoriek.

Mohli by sme ešte uviesť veľa takýchto príkladov. Vo väčšine prípadov v prírode aj technike, funkcia, ktorá nás zaujíma, závisí od niekoľkých veličín. Napríklad aj v poslednom príklade intenzita závisí od dvoch veličín: od potenciálového rozdielu U a od odporu vodiča R. Objem kužeľa závisí od jeho výšky h a od polomeru podstavy r.

Ak všetky veličiny okrem jednej máme dané a konštantné, skúmame funkcie, ktoré závisia len od jednej premennej. V tejto knihe sa budeme zaoberať prevažne funkciami jednej premennej.

Majme napríklad batériu akumulátora s daným napätím U. Budeme meniť odpor vodiča R a merať intenzitu prúdu I. V tomto prípade intenzita prúdu závisí len od odporu R a veličinu U vo vzťahu (1.1) považujeme za konštantu.

V matematike vyjadrujeme funkčnú závislosť obyčajne takýmito vzťahmi:

$$y = 2x + 3, \quad y = x^2 + 5, \quad y = 3x^3 - x^2 - x, \quad y = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \neq -1 \tag{1.2}$$

Zo vzťahov vidno, že sa zaoberáme funkciami jednej premennej. Takýto vzťah umožňuje vypočítať hodnoty funkcie pri každej danej hodnote nezávisle premennej.

Ak poznáme vzťah, ktorý udáva závislosť y od x, môžeme zostaviť tabuľku funkčných hodnôt y pre niekoľko ľubovoľne zvolených hodnôt x z oboru definície funkcie. Zostavíme napríklad *tab. 1* pre tretiu funkciu z (1.2). V hornom riadku sú uvedené nami zvolené hodnoty x a v dolnom riadku pod každým daným x je jeho zodpovedajúca hodnota y.

Tabuľka 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3x^3 - x^2 - x$	-87	-26	-3	0	1	18	69

Podľa daného vzťahu možno zostaviť aj oveľa podrobnejšiu tabuľku, ak vezmeme napr. hodnoty $x = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ \ldots$ atď. Teda vzťah je presnejší ako ľubovoľná tabuľka. Podľa vzťahu možno nielen zostaviť danú tabuľku, ale možno nájsť aj hodnoty funkcie pre tie nezávisle premenné x, ktoré daná tabuľka neobsahuje. Na druhej strane je tabuľka výhodnejšia, pretože pomocou nej možno rýchlejšie nájsť hodnotu y pre dané x, keď x je v tabuľke, pretože výpočty podľa vzťahu sme už urobili pri zostavovaní tabuľky.

Ak teda poznáme zákon skúmaného javu, môžeme ho vyjadriť vzťahom. Môže nastať aj taký prípad, že fyzik alebo chemik, biológ, technik môže dať len výsledky uskutočnených pokusov — závislosť skúmanej veličiny od veličiny danej pri realizácii pokusu, napr. pri hľadaní závislosti odporu vodiča od jeho teploty. V tomto prípade funkčná závislosť môže byť vyjadrená len tabuľkou, ktorá obsahuje výsledky pokusu.

Z pokusu vyplýva, že elektrický odpor pre daný vodič zo známeho materiálu, známeho prierezu, známej dĺžky závisí od teploty vodiča. Pri každej hodnote teploty vodiča T má vodič určitý odpor R, preto možno hovoriť o funkčnej závislosti R od T.

Meraním možno nájsť hodnoty R pre rôzne teploty T a takýmto spôsobom nájsť závislosť $R(T)$, pričom výsledkom pokusu je *tab. 2*, v ktorej sú dané hodnoty R pri rôznych T, napr.:

Tabuľka 2

T [°C]	0°	25°	50°	75°	100°
R [Ω]	112,0	118,4	124,6	130,3	135,2

Ak nás zaujímajú hodnoty R pri teplotách, ktoré tabuľka neobsahuje, musíme urobiť doplňujúce merania, pretože nepoznáme presný vzťah, ktorý udáva závislosť $R(T)$. Môžeme však zvoliť približný vzťah, ktorý by súhlasil s pokusom pre tie teploty, pri ktorých sa meranie robilo. Vezmime napr. vzťah

$$R = 112{,}0 + 0{,}272T - 0{,}0004T^2$$

a zostavme podľa neho *tab. 3*.

Tabuľka 3

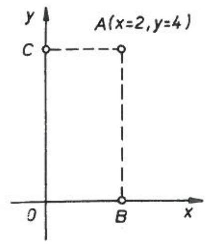
T	0	25	50	75	100
R (zo vzťahu)	112,0	118,55	124,6	130,15	135,2

Vzťah udáva hodnoty R veľmi blízke hodnotám z pokusu pre tie teploty, pri ktorých sa merania robili. Z *tab. 3* vyplýva, že vzťah presne vystihuje funkčnú závislosť $R(T)$ pre stredné teploty (10 °C—80 °C). Avšak použitím vzťahu za hranicami skúmaného intervalu (napr. pri —200 °C, alebo —500 °C) vznikajú chyby, nakoľko niet dôvodu, aby sme $R(T)$ vyjadrovali kvadratickým trojčlenom.

Vzťahy, ktoré získame z výsledkov meraní a nie teoreticky, nazývame empirické, t. j. skúsenostné, zakladajúce sa na pokusoch.

2. SÚRADNICE

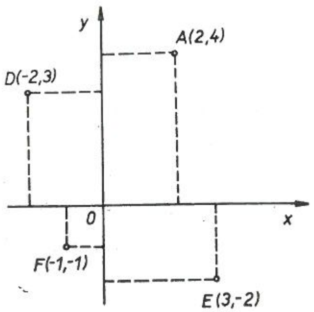
Pre názornosť zobrazujeme funkčnú závislosť na obrázku (grafe) pomocou *súradníc*. Majme v rovine dve navzájom kolmé priamky. Vodorovnú označíme „os x" alebo „os abscis" a zvislú „os y" alebo „os ordinát". Priesečník osi x a y nazývame „počiatkom súradnicového systému" (bod 0 na *obr. 88*). Rovinu, v ktorej sme zaviedli *súradnicový systém*, si predstavujeme ako zvislú stenu proti sediacemu čitateľovi. Os x orientujeme zľava doprava a os y zdola nahor.



Obr. 88

Dvojica hodnôt x a y, napr. $x = 2$, $y = 4$ je zobrazená na obrázku jedným bodom (*bod A*). Polohu tohto bodu určujú nasledujúce podmienky: kolmica AB spustená z bodu A na os x ohraničuje na tejto osi úsek OB, ktorý sa rovná dvom jednotkám dĺžky; úsek OB od počiatku súradnicového systému O po pätu kolmice B pokladáme za kladný a zodpovedá kladnej hodnote x, keď bod B leží napravo od bodu O.

Kolmica AC, spustená z bodu A na os y, ohraničuje na osi y úsek OC, ktorého veľkosť sa rovná 4 jednotkám dĺžky. Ak päta kolmice spustená z bodu A na os y leží nad počiatkom súradnicového systému, je hodnota y kladná. Kladný smer osi označujeme šípkou a písmenom, označujúcim, o ktorú os ide. Hovoríme, že čím väčšie je y, tým vyššie leží ním určený bod, záporné hodnoty y ležia pod kladnými. Funkčnú závislosť je najvhodnejšie zostrojovať na milimetrový papier.



Obr. 89

Dôležité je naučiť sa na obrázku priamo vyznačiť bod A, zodpovedajúci hodnotám x a y. Nie je vhodné rysovať do obrázku ďalšie body B a C pomocou prerušovaných čiar (kolmíc AB a AC), a tým preplňovať obrázok.

Záporné hodnoty x odčítame naľavo od O a záporné hodnoty y odčítavame nadol od O. Na *obr. 89* je znázornené niekoľko bodov, pre ktoré x a y majú rôzne znamienka. Zistite, či body na *obr. 89* sú zakreslené správne.

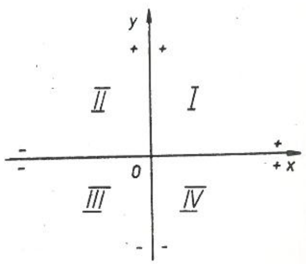
Sú to nasledujúce body:

A: $x = 2, y = 4$, $\qquad D$: $x = -2, y = 3$

E: $x = 3, y = -2$, $\qquad F$: $x = -1, y = -1$

Súradnice bodov sa niekedy označujú skrátene, v hranatých zátvorkách hneď za označením bodu, pričom na prvom mieste píšeme hodnotu x (abscisu bodu), na druhom mieste hodnotu y (ordinátu bodu), pozri *obr. 89*.

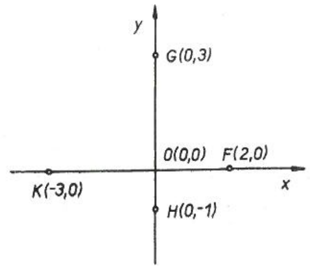
Súradnicové osi rozdeľujú rovinu obrázka na 4 časti — kvadranty (pozri *obr. 90*). V každom kvadrante majú hodnoty x a y presne stanovené znamienko. V I. kvadrante $x > 0$, $y > 0$, t. j. x a y sú kladné; v druhom kvadrante $x < 0$, $y > 0$, t. j. x je záporné a y je kladné; v III. kvadrante $x < 0$, $y < 0$, t. j. x a y sú záporné; v IV. kvadrante $x > 0$, $y < 0$, t. j. x je kladné a y je záporné. Znamienka v jednotli-



Obr. 90

vých kvadrantoch pozri na *obr. 90*. Porovnajte tieto hodnoty s hodnotami súradníc bodov A, D, E, F na *obr. 89*.

Ak má bod G (*obr. 91*) $x = 0$, bod G leží na osi y; kolmica z G na os x je totožná s osou y. To znamená, že päta kolmice je totožná s počiatkom súradnicového systému O. Pretože vzdialenosť päty kolmice od počiatku súradnicového systému sa rovná nule, možno povedať, že x-ová súradnica bodu G, ležiaceho na osi y, sa rovná nule. Ak bod F má $y = 0$, tak leží na osi x, pričom kolmica z bodu F spustená na os y je totožná s osou x a päta kolmice je totožná s počiatkom súradnicového systému O.



Obr. 91

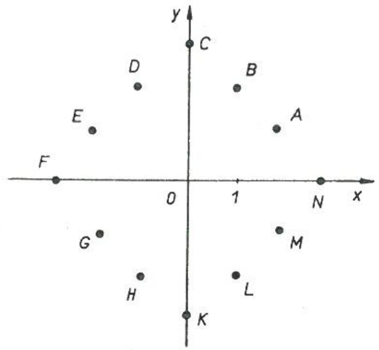
Na *obr. 91* sú príklady takých bodov:

G: $x = 0, y = 3$, $\qquad F$: $x = 2, y = 0$

H: $x = 0, y = -1$, $\qquad K$: $x = -3, y = 0$

Bod, ktorý má $x = 0$, $y = 0$, je počiatok súradnicového systému.

Vyššie sme radili nevynášať do obrázku päty kolmíc, t. j. nepostupovať tak, ako to bolo na *obr. 88* a *89*. Na *obr. 88* bolo treba nevyhnutne zaznačiť bod A ($x = 2$, $y = 4$), pričom body B a C boli pomocné len na zostrojenie bodu A. Boli užitočné len vtedy, keď sme robili prvý krok, keď sme prvý raz určovali súradnice. Treba sa naučiť priamo rysovať bod A; ak sú na obrázku nanesené aj body B a C, môžeme si myslieť, že sme mali zostrojiť 3 body: A (2,4), B (2,0), C (0,4).

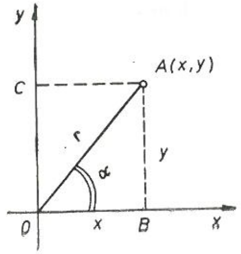


Obr. 92

Musíme sa dokonale naučiť zostrojovať body x, t. j. nanášať súradnice s kladnými, zápornými a nulovými hodnotami pre x a y. Tak isto sa musíme naučiť rýchle určovať, hoci len približne, správne hodnoty x a y pre body narysované na obrázku.

Cvičenie

1. Určte súradnice bodov od A do O narysované na *obr. 92*.



Obr. 93

3. GEOMETRICKÉ VELIČINY VYJADRENÉ POMOCOU SÚRADNÍC

Dve čísla — hodnoty x a y — určujú polohu bodu v rovine. Preto aj všetky geometrické veličiny, ktoré sa k tomuto bodu vzťahujú, možno vyjadriť pomocou súradníc bodu.

Nájdime vzdialenosť bodu A so súradnicami x a y od počiatku súradnicového systému, t. j. dĺžku úsečky $r = OA$, ktorá spája počiatok súradnicového systému O s bodom A (*obr. 93*). Nájdime aj uhol α (α—„alfa" prvé písmeno gréckej abecedy)[1]) medzi priamkou OA a osou x. Veďme pomocné úsečky AB a AC. Dĺžka OB sa rovná $|x|$, dĺžka AB sa rovná dĺžke OC, t. j. $|y|$. Z pravouhlého trojuholníka OAB podľa Pythagorovej vety platí:

$$(OA)^2 = r^2 = (OB)^2 + (AB)^2 = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ďalej pre tangens uhla α dostaneme:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x}$$

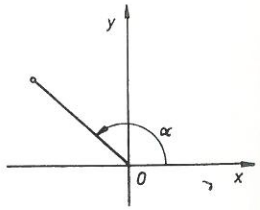
Nech napr. $x = 2$, $y = 3$ (*obr. 93*). Vtedy $r = \sqrt{13} \doteq 3{,}6$

$$\operatorname{arctg} \frac{3}{2} \doteq 56°$$

Vidíme, že uhol α sa vždy určuje od kladného smeru osi x, preto napr. ak $y = 2$, $x = -2$ (*obr. 94*), je uhol α tupý,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{-2} = -1, \ \alpha = 135°.$$

Keď bod leží pod osou x, je zvykom počítať uhol α od kladnej časti osi x smerom nadol, pričom ho pokladáme za záporný. Na *obr. 95* sú dva príklady: bod A ($x = 2$, $y = -2$), ktorého uhol $\alpha = -45°$ a bod B ($x = -3$, $y = -3$), pre



Obr. 94

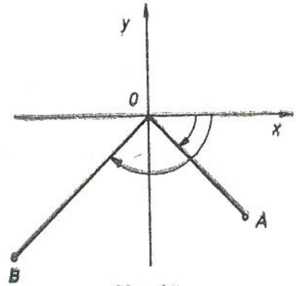
1) Grécka abeceda a názvy gréckych písmen sú na konci knihy, na str. 528.

tento bod sa uhol $\alpha = -135°$. Na základe tohto možno usúdiť, že uhol α pre ľubovoľný bod je v medziach od $-180°$ do $+180°$.

Ľahko sa rieši aj opačná úloha: nech sa bod A nachádza vo vzdialenosti r od počiatku súradnicového systému O a úsečka OA s osou x (rozumie sa kladnou, pravou časťou osi x) nech tvorí uhol α. Úloha znie: nájdite súradnice bodu A. Ak pozrieme na *obr. 93*, môžeme písať:

$$x = r \cos \alpha$$

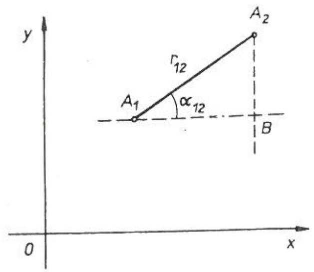
$$y = r \sin \alpha$$



Obr. 95

Tieto vzťahy platia pre ľubovoľné, kladné a záporné uhly α. Udávajú hodnoty x a y v ľubovoľnom kvadrante.

Prejdime k úlohám s dvoma bodmi A_1 a A_2; súradnice prvého bodu označíme x_1, y_1, súradnice druhého bodu x_2, y_2 (*obr. 96*). Nájdeme vzdialenosť r_{12} medzi týmito bodmi a uhol α_{12} medzi úsečkou A_1A_2 a osou x[1]).



Obr. 96

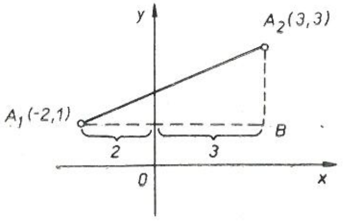
Veďme bodom A_1 priamku rovnobežnú s osou x a cez bod A_2 priamku rovnobežnú s osou y. Na *obr. 96* sú priamky naznačené prerušovane a ich priesečník sa označí B. V trojuholníku A_1A_2B dĺžka úsečky A_1B je $|x_2 - x_1|$, dĺžka úsečky A_2B je $|y_2 - y_1|$. Všetky konštruk-

1) Označenia dolu pri písmenách nazývame indexy. Po latinsky znamená index „ukazovateľ". Nesmieme si ho mýliť s mocniteľom (exponentom). Rovnaké písmená s rôznymi indexami y_0, y_1, y_2, y_3, y_a, y_b sa píšu namiesto rôznych písmen, aby sa ukázalo, že ide o podobné (no súčasne rôzne) veličiny. Tak napr. x_1 a x_2 sú dve veličiny vzťahujúce sa na os x, obidve sú x-ové súradnice bodu, no súčasne sa vzťahujú na dva rôzne body. Veličiny označené rôznymi písmenami, no s rovnakým indexom sa vzťahujú na jeden a ten istý bod: A_1 je označenie bodu, x_1 je jeho x-ová súradnica a y_1 je y-ová súradnica. Niekedy sa píšu i dva indexy, napr. r_{12} číta sa er jedna — dve a nie er dvanásť. Pomocou nich sa označuje napr. vzdialenosť medzi prvým bodom (A_1) a druhým (A_2).

cie trojuholníka A_1A_2B sú podobné ako konštrukcia na *obr. 93*[1]).

Z Pythagorovej vety dostaneme:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Obr. 97

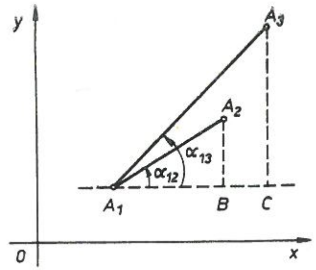
Uhol α_{12} sa určí z podmienky

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (3.1)$$

Musíme sa presvedčiť, či pri ľubovoľných znamienkach všetkých štyroch hodnôt x_1, x_2, y_1, y_2 a pri ľubovoľných vzťahoch $x_1 > x_2$, $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$, $y_1 < y_2$ sú vzťahy správne[2]).

Tak napr. na *obr. 97* sú narysované dva body A_1 $(x_1 = -2,\ y_1 = 1)$, A_2 $(x_2 = 3,\ y_2 = 3)$, v ktorých je $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. V tomto prípade dĺžka úsečky A_1B sa rovná súčtu absolútnych hodnôt[3]). $|x_1| = 2$, $|x_2| = 3$. Toto zodpovedá všeobecnému vzťahu

$$A_1B = |x_2 - x_1| = |3 - (-2)| = |3 + \\ + 2| = |5| = 5$$



Obr. 98

teda sú správne aj vzorce pre r_{12} a $\operatorname{tg} \alpha_{12}$.

Budeme riešiť aj úlohy, ktoré sa vzťahujú na tri body: A_1, A_2, A_3. Ako zistíme výpočtom pomocou súradníc bodov a bez zostrojenia bodov, či dané body ležia na jednej priamke? Je zrejmé, že keď uhol úsečky A_1A_2 s osou x, α_{12} sa rovná uhlu α_{13} úsečky A_1A_3 s osou x, to znamená, že úsečky A_1A_2 a A_1A_3 ležia na jednej priamke. Na *obr. 98* je prípad, keď

[1]) Platí pre prípad, že úsečka A_1A_2 nie je rovnobežná s niektorou súradnicovou osou. Pozn. prekl.

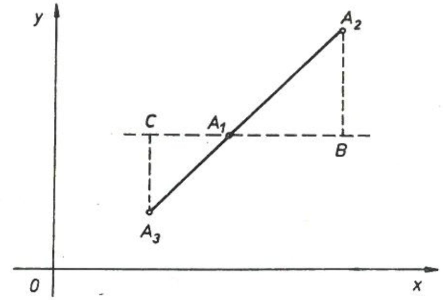
[2]) Správnosť vzťahu pre vzdialenosť bodov treba overiť aj v prípade rovnosti súradníc. Pozn. prekl.

[3]) Dve zvislé čiarky označujú „absolútnu hodnotu". Pre nezáporné čísla (kladné a 0) sa tým nič nezmení: $|3| = 3$, $|0{,}1| = 0{,}1$, $|0| = 0$. Absolútna hodnota záporného čísla je kladná a rovná sa súčinu $(-1)\,a$, čiže $|a| = -a$. Napríklad $|-3| = 3$, $|-0{,}1| = 0{,}1$. Niekedy sa používa slovo „modul" $|-3|$ — modul mínus troch sa rovná trom.

$\alpha_{13} > \alpha_{12}$, potom bod A_3 leží nad priamkou idúcou bodmi A_1A_2 a z tohto obrázka vidno, že ak by uhol α_{13} sa rovnal α_{12}, potom by bod A_3 ležal na priamke predlžujúcej úsečku A_1A_2.

Z výrazu pre tangens uhla (3.1) vyplýva, že pri $\alpha_{12} = \alpha_{13}$ pre súradnice bodov platí vzťah

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \qquad (3.2)$$



Obr. 99

Bez použitia trigonometrie možno povedať, že vzťah (3.2) je podmienkou podobnosti dvoch pravouhlých trojuholníkov A_1A_2B a A_1A_3C. Z podobnosti trojuholníkov vyplýva rovnosť uhla pri vrchole A_1.

Vzťah (3.2) možno použiť i v tom prípade, keď bod A_1 leží medzi bodmi A_2 a A_3 (*obr. 99*). Ak tri body ležia na jednej priamke, z podobnosti A_1A_2B a A_1A_3C vyplýva úmera (3.2). V príklade ukázanom na *obr. 99* je $x_3 - x_1 < 0$, $y_3 - y_1 < 0$, ich pomer je kladný a rovná sa pomeru dvoch kladných veličín $x_2 - x_1$ a $y_2 - y_1$.

Cvičenia

1. V súradnicovej rovine vyneste body (1, 1), (—1, 1), (—1, —1), (1, —1).

2. Vyneste body (1, 5), (5, 1), (—1, 5), (—5, 1), (—1, —5), (—5, —1), (1, —5), (5, —1).

3. Vyneste body (0, 4), (0, —4), (4, 0), (—4, 0).

4. Vypočítajte vzdialenosť od počiatku súradnicového systému a uhol α pre body (1, 1), (2, —2), (—3, 3), (—4, 4).

5. Určte vzdialenosť dvoch bodov: A_1 (1, 1), A_2 (1, —1); A_1 (1, 1), A_2 (—1, —1); A_1 (2, 4), A_2 (4, 2); A_1 (—2, —4), A_2 (—4, —2).

6. Zistite, či trojica bodov leží na jednej priamke:

A_1 (0, 0),	A_2 (2, 3),	A_3 (4, 6);
A_1 (0, 0),	A_2 (2, 3),	A_3 (—2, —3);
A_1 (0, 0),	A_2 (2, 3),	A_3 (—2, 3).

7. Nájdite súradnice vrcholov štvorca so stranou a, ak uhlopriečky štvorca sú totožné s osami x a y.

8. Nájdite súradnice vrcholov pravidelného šesťuholníka so stranou a, ak jedna z jeho uhlopriečok je totožná s osou x a stred leží v počiatku súradnicového systému.

9. a) Napíšte súradnice vrcholov rovnostranného trojuholníka so stranou a, ktorého základňa leží na osi x a protiľahlý vrchol na osi y.

b) To isté urobte v prípade, ak základňa leží na osi x a vrchol jedného z uhlov je totožný s počiatkom súradnicového systému.

10. Je daný bod A_1 so súradnicami x_1, y_1. Napíšte súradnice bodu A_2 súmerne združeného podľa osi x s A_1, súradnice bodu A_3 súmerne združeného s A_1 podľa osi y a súradnice bodu A_4 súmerne združeného s A_1 podľa počiatku súradnicovej sústavy.

4. GRAF FUNKCIE. ROVNICA PRIAMKY

V čl. 2 sme ukázali, že každej dvojici x, y zodpovedá v rovine jediný bod. Ak je y určitá funkcia x, to znamená, že každej hodnote x zodpovedá hodnota y. Pre rôzne hodnoty x nájdeme im zodpovedajúce hodnoty y a tieto dvojice hodnôt nám dajú množinu bodov v rovine. Ak zväčšujeme počet jednotlivých hodnôt x tak, že sú čoraz bližšie, tak nakoniec body splynú do súvislej čiary — do krivky. Táto krivka sa nazýva graf funkcie.

V skutočnosti stačí naniesť niekoľko bodov a ostatné body ako aj celý graf funkcie dostaneme, ak nanesené body pospájame súvislou čiarou. Aby sme sa pritom nedopustili veľkých chýb, treba mať všeobecnú predstavu o tvare čiar, ktoré znázorňujú rôzne funkcie.

Preskúmajme tzv. lineárnu závislosť

$$y = kx + q$$

Nech napr.

$$y = 2x + 1$$

Tabuľka 4

x	0	1	2	3
y	1	3	5	7

Zostrojíme niekoľko bodov, pre ktoré sú x a y udané v *tab. 4.*

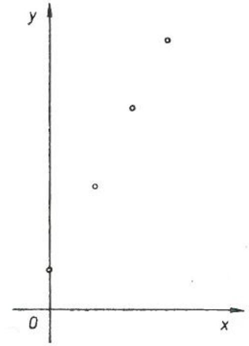
Tieto body vynesieme do grafu (*obr. 100*). Hneď vidieť, že tieto body ležia na jednej priamke. Ak v tomto prípade vedieme priamku (odtiaľ názov „lineárna závislosť", „lineárna funkcia"), dostaneme celý graf funkcie. Pre ľubovoľné x, bod, ktorý má súradnice (x, y), leží na priamke.

Pre ľubovoľnú funkciu tvaru $y = kx + q$ pre k aj q rôzne dokážeme, že všetky jej body ležia na jednej priamke. Prekontrolujeme, či podmienka odvodená na konci čl. 3 je splnená pre ľubovoľnú trojicu bodov grafu. Vezmeme dva body $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$. Ich súradnice musia spĺňať rovnicu $y = kx + q$. Vtedy

$$y_2 - y_1 = kx_2 + q - (kx_1 + q) = k(x_2 - x_1)$$

odkiaľ

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$



Obr. 100

Pomer nezávisí od x_1 a x_2. Pre ľubovoľnú inú dvojicu bodov z grafu, a teda aj pre dvojicu bodov $A(x_1, y_1)$ a $C(x_3, y_3)$, dostaneme:

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = k$$

To znamená, že pre ľubovoľnú trojicu bodov grafu $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ je správny vzťah

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

t. j. body A, B, C ležia na jednej priamke. Z toho vyplýva, že všetky body grafu funkcie $y = kx + q$ ležia na jednej priamke. Možno povedať, že grafom funkcie $y = kx + q$ je priamka.

Rovnica $y = kx + q$ sa nazýva rovnica priamky. Koeficient k (smernica priamky) určuje tangens uhla medzi priamkou a osou x. Ak v rovnici priamky položíme $x = 0$, dostaneme $y = q$. Z toho vyplýva, že jeden z bodov priamky je bod (O, q). Tento bod leží na osi y vo výške q nad počiatkom súradnicovej sústavy. Ak je $q < 0$, tak bod leží pod počiatkom súradnicovej sústavy. Teda q je y-ová súradnica priesečníka priamky s osou y a $|q|$ je dĺžka úsečky, ktorú priamka vytína na osi y (na *obr. 100* $q = 1$).

Ak chceme zostrojiť priamku zodpovedajúcu danej rovnici, nie je potrebné vypočítať súradnice veľkého množstva bodov a naniesť ich na graf: stačí zostrojiť dva body, a tým je priamka prechádzajúca týmito dvoma bodmi jednoznačne určená. Je napr. vhodné brať dva body

$x = 0$, $y = q$ a $x = 1$, $y = q + k$ a viesť priamku týmito bodmi. Ako druhý bod možno tiež vziať priesečník priamky s osou x ($x = x_0$, $y = 0$). Z podmienky $y = kx_0 + q = 0$ vyplýva $x_0 = -\dfrac{q}{k}$.

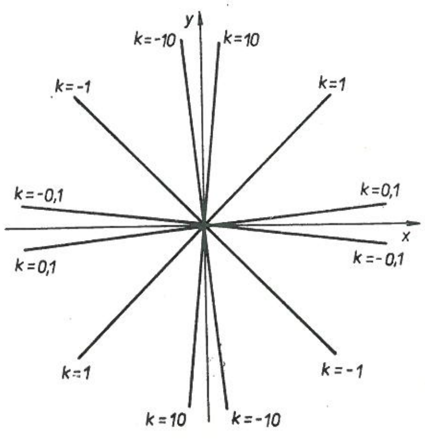
Dôležité je precvičiť sa v zostrojovaní grafov, aby sme si vedeli hneď z pohľadu na rovnicu predstaviť priebeh a polohu zodpovedajúcej čiary.

Pre lineárnu funkciu, ktorej grafom je priamka, je to veľmi jednoduché. Veď v skutočnosti priebeh priamky závisí len od dvoch veličín k a q, ktoré sa v rovnici priamky nachádzajú. Teda je potrebné preskúmať niekoľko prípadov: k môže byť kladné alebo záporné, k môže byť väčšie alebo menšie v absolútnej hodnote ako 1 (väčšie ako 1 alebo menšie ako 1), q môže byť kladné alebo záporné.

Ukážeme, ako to možno urobiť.

Začneme s prípadom $q = 0$, t. j. s rovnicou $y = kx$. Zodpovedajúca priamka prechádza počiatkom súradnicového systému, t. j. cez bod $x = 0$, $y = 0$. Na *obr. 101* je zobrazené niekoľko priamok pre rôzne k: $k = 0{,}1$; $k = 1$; $k = -0{,}1$; $k = -1$; $k = -10$. Hodnoty k pre jednotlivé priamky sú na obrázku naznačené z oboch strán každej priamky. Overte si správnosť zostrojenia každej danej priamky a presvedčte sa o platnosti nasledujúcich všeobecných záverov:

1. Ak je $k > 0$, priamka leží v I. a III. kvadrante, ak je $k < 0$, priamka leží v II. a IV. kvadrante.



Obr. 101

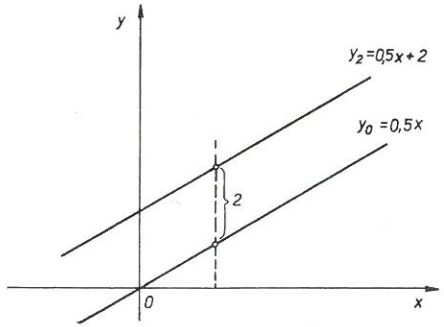
2. Pre $k = 1$ podľa uvedeného leží priamka v I. a III. kvadrante. Časť priamky ležiaca v I. kvadrante zviera s osou x uhol $\alpha = 45°$, t. j. rozdeľuje uhol medzi osou x a y na polovicu. Treba pripomenúť, že pod slovami „uhol s osou x" rozumieme uhol s kladným smerom osi x, ktorý je označený šípkou. Predĺženie priamky do III. kvadrantu utvára s osou x uhol $\alpha = -135°$ (na *obr. 101* nie sú uhly uvedené).

3. Pre $k = -1$ časť priamky, ktorá leží v II. kvadrante utvára

s osou x uhol $\alpha = 135°$ a predĺženie priamky do IV. kvadrantu uhol $\alpha = -45°$.

4. Ak $|k| < 1$, ide priamka mierne, t. j. je bližšie k osi x ako k osi y a ide tým miernejšie, čím je menšia $|k|$. Ak $|k| > 1$, ide priamka strmo, bližšie k osi y ako k osi x a tým strmšie, čím je väčšia $|k|$.

Teraz, keď už toto ovládame, vyšetríme všeobecný prípad priamky, ak q je rôzne od nuly. Nech je na grafe narysovaná priamka s $q = 0$, napr. $y = 0{,}5x$ (*obr. 102*). Čím sa od nej líšia priamky s tým istým k, ale $q \neq 0$, napr. priamka $y = 0{,}5x + 2$? Výhodnejšie bude, ak označíme $y_0 = 0{,}5x$ a $y_2 = 0{,}5x + 2$[1]). Pri každom danom x je hodnota y_2 o dve jednotky väčšia ako y_0. To znamená, že body priamky y_2 dostaneme z bodov priamky y_0 tak, že tomu istému x bude zodpovedať y zväčšené o dve jednotky. Priamka y_2 je rovnobežná s priamkou y_0 a leží nad ňou vyššie o dve jednotky. Je samozrejmé, že toto pravidlo je správne pre každé q (ak $q < 0$, leží priamka pod počiatkom súradnicového systému nižšie ako priamka $y = kx$).



Obr. 102

Ak vieme, ako prebiehajú priamky s rovnicami $y = kx$ pre rôzne k, ľahko si predstavíme všeobecný priebeh priamky $y = kx + q$ pre rôzne k aj q. Úlohy na precvičenie sú na konci článku.

Hodnota k v rovnici $y = kx + q$ sa nazýva smernica priamky, pretože od nej závisí sklon (smer) priamky. V osobitnom prípade, keď $k = 0$, dostaneme rovnicu $y = q$ (to znamená, že $y = q$ pre rozličné hodnoty x). Tejto rovnici zodpovedá vodorovná priamka, ktorej smernica sa rovná nule. Pre názornosť si môžeme predstaviť chodca, ktorý ide po priamke

[1]) Teraz používame indexy v inom význame ako prv, y_0 sa vzťahuje na celú priamku. Nie je to y-ová súradnica určitého bodu, ale y-ová súradnica ľubovoľného bodu na priamke s daným k a $q = 0$; y_2 je y-ová súradnica ľubovoľného bodu na priamke s daným k a $q = 2$, t. j. y_0 nie je číslo, ale funkcia premennej x, $y_0(x)$, a podľa toho $y_2(x)$ je iná funkcia premennej x.

zľava doprava, na stranu rastúcich hodnôt x. Ak je $k > 0$, ide chodec nahor (smernica je kladná), ak je $k < 0$, ide chodec nadol (záporná smernica). Veličina k udáva pomer zmeny funkčných hodnôt k zmene jej argumentu:

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{kx_2 + b - (kx_1 + b)}{x_2 - x_1} = k$$

S týmto vzťahom sme sa stretli už skôr, keď sme dokazovali, že grafom lineárnej funkcie je priamka.

V ďalšom všeobecnom prípade ľubovoľnej funkcie sa budeme zaoberať vzťahom

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ktorý sa rovná tangensu uhla utvoreného úsečkou, ktorá spája dva body $(x_1, y(x_1))$ a $(x_2, y(x_2))$, a osou x. Lineárna funkcia sa vyznačuje tým, že táto hodnota je pre ňu konštantná pre ľubovoľnú dvojicu bodov. Nezávisí od x_2 ani od x_1, preto dostávame, že všetky body grafu lineárnej funkcie ležia na jednej priamke.

Cvičenie

1. Zostrojte priamky: $y = 3x$, $y = 3x + 2$, $y = 3x - 1$, $y = 2 - x$, $y = 2 - 0{,}5x$, $y = -x - 3$.

5. PARABOLA

Preskúmajme funkciu

$$y = ax^2$$

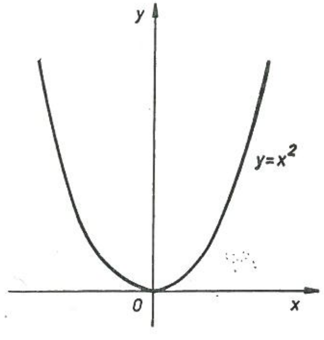
pre rôzne hodnoty a. Zo začiatku vezmeme prípad keď $a = 1$.

Aké sú všeobecné vlastnosti tejto funkcie?

1. Ako pre $x > 0$ tak i pre $x < 0$ je vždy $y > 0$. Z tohto vyplýva, že celá krivka leží nad osou x a len v počiatku súradnicového systému sa dotýka osi x.

2. Najmenšia hodnota (minimum) sa dosahuje pri $x = 0$. Minimum v $x = 0$ sa rovná 0. Minimum na grafe je najnižšie položený bod krivky.

3. Pre dve hodnoty x, ktoré sa líšia len znamienkom, ale v absolútnej hodnote sú rovnaké, dostaneme hodnoty y rovnaké čo do veľkosti i znamienka. To znamená, že krivka je súmerná podľa osi y.



Obr. 103

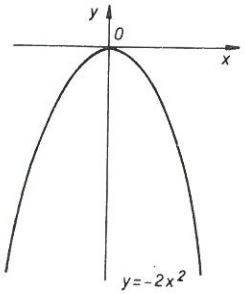
Krivka je zakreslená na *obr. 103*. Nazýva sa parabola (pre ľubovoľné hodnoty a, $a \neq 0$).

Pre ľubovoľné kladné a má rovnica $y = ax^2$ tie isté vlastnosti, ako sú uvedené vyššie pre $y = x^2$.

Čo sa stane, ak bude $a < 0$? Preskúmame prípad pre $a = -2$, $y = -2x^2$. Krivka je zakreslená na *obr. 104* (mierka na *obr. 104* je jemnejšia ako mierka na *obr. 103*). Vlastnosti tejto krivky sú:

1. Pre ľubovoľné x je $y < 0$. Celá krivka leží pod osou x a osi sa dotýka v počiatku súradnicovej sústavy.

2. Funkcia dosahuje najväčšiu hodnotu (maximum) pri $x = 0$. Hodnota tohto maxima je $y = 0$. Pripomeňme si, že záporné hodnoty sú menšie ako nula, takže najväčšia (maximálna) hodnota y je medzi hodnotami uvedenými v tabuľke, práve $y = 0$. Na grafe je maximum zobrazené najvyššie položeným bodom krivky.



Obr. 104

3. Krivka je súmerná podľa osi y, ako v prípade kladného a.

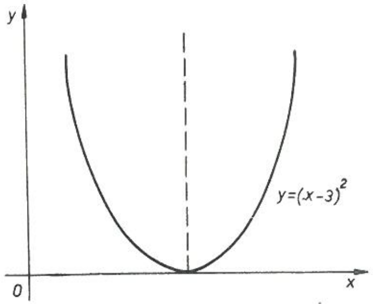
Skúmajme teraz podobnú rovnicu

$$y = a(x - n)^2$$

Vezmime napr. prípad, keď $a = 1$, $n = 3$. Krivka je zobrazená na *obr. 105*. Je to tá istá parabola ako na *obr. 103*, ale je posunutá v smere osi x o tri jednotky doprava.

Tento jednoduchý poznatok sa obyčajne ťažko osvojuje.

Ak je daná funkcia $y = f(x)$ a porovnávame ju s druhou funkciou $y = f(x - n)$, potom graf druhej funkcie je posunutý vzhľadom na prvý graf o n jednotiek doprava. Pritom predpokladáme, že v obidvoch prípadoch je f jedna a tá istá funkcia; v našom príklade f označuje druhú mocninu argumentu, t. j. druhú mocninu toho, čo je v zátvorkách pod znakom funkcie:



Obr. 105

$$f(g) = g^2, \quad f(h) = h^2$$
$$f(x) = x^2, \quad f(-x) = x^2$$
$$f(x - 2) = (x - 2)^2$$
$$f(x - n) = (x - n)^2$$

Prečo je graf posunutý doprava? Vysvetlíme to podrobnejšie. Nech na grafe funkcie $y_1 = f(x)$ existuje nejaký význačný bod $x = x_0$, akási „značka". Napríklad to môže byť maximum alebo bod zlomu, alebo jednoducho môže v ňom funkcia nadobúdať nejakú kladnú hodnotu y_0. Vtedy na grafe novej funkcie $y_2 = f(x - n)$ sa táto hodnota y_0 alebo tento bod zlomu objaví, ak argument funkcie f sa bude rovnať argumentu x_0, t. j. $(x - n) = x_0$. To znamená, že súradnice „značky" sú teraz $x = x_0 + n$, $y = f(x_0)$. Z toho vidno, že ľubovoľná „značka" sa spolu s grafom posunie doprava ($x = x_0 + n$ namiesto $x = x_0$). Porovnajte krivky na *obr. 103* a *obr. 105*. Tu je výhodné ako „značku" vziať $x_0 = 0$, $f(x_0) = (0)^2 = 0$.

Hoci sú tieto úvahy veľmi jednoduché, treba si ich dokonale osvojiť a nie im len rozumieť. Mnohí študujúci sú ochotní v prvom okamihu nesprávne odpovedať, že pri zmene $y = x^2$ na $y = (x - 3)^2$ sa krivka posunie doľava, pretože sme od x odpočítali 3. Netreba ľutovať čas na podrobný rozbor príkladov.

Teraz môžeme sformulovať všeobecné pravidlá:

1. Osou súmernosti krivky $y = a(x - n)^2$ je zvislá priamka $x = n$.

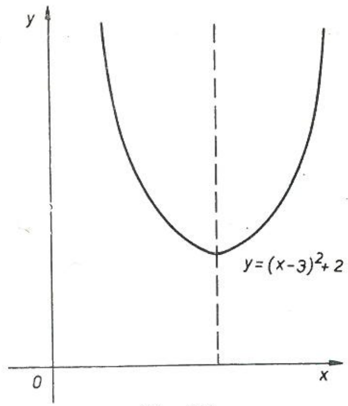
2. Táto krivka pre $a > 0$ leží nad osou x a má minimum $y = 0$ pri $x = n$. Ak je $a < 0$, krivka leží pod osou x a má maximum $y = 0$ pre $x = n$.

Nakoniec existuje ešte jedna zmena rovnice, pri ktorej krivka nemení tvar. Preskúmajme funkciu

$$y = a(x - n)^2 + m$$

Vieme, že krivka zodpovedajúca tejto rovnici, sa líši od predchádzajúcej (ktorá m neobsahuje) len posunutím v zvislom smere o hodnotu m. Poloha osi súmernosti sa nemení; pri $a > 0$ má funkcia minimum pri $x = n$ a hodnota funkcie v minime sa rovná $y = m$ (spolu s celou krivkou sa posunie aj minimum o hodnotu m). Ak je $a < 0$, má funkcia v bode $x = n$, $y = m$ maximum. Ukážeme dva príklady (pozri *obr. 106* a *obr. 107*):

$$y = (x - 3)^2 + 2$$
$$y = -(x - 3)^2 + 2$$

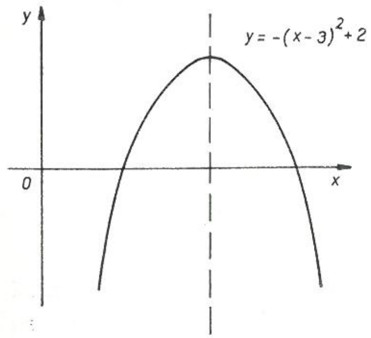


Obr. 106

Os súmernosti na oboch obrázkoch je vyznačená prerušovanou čiarou. Minimum na *obr. 106* a maximum na *obr. 107* ležia v priesečníkoch kriviek s osami súmernosti (prerušovaná priamka).

Teda funkcia

$$y = a(x - \mathrm{n})^2 + m$$



Obr. 107

je znázornená parabolou s osou súmernosti $x = n$ a minimom y (ak $a > 0$) v bode $x = n, y = m$. Pri $a < 0$ ten istý bod predstavuje maximum y.

Na grafe zodpovedá minimálna (najmenšia) hodnota y bodu krivky, ktorý leží najnižšie zo všetkých ostatných bodov, t. j. bodu krivky, ktorý má y-ovú súradnicu menšiu ako ostatné body. Maximum funkcie $y(x)$ (najväčšia hodnota funkcie) zodpovedá na grafe bodu, ktorý leží najvyššie. Aby sme nemuseli hovoriť o bode na grafe, ktorému zodpovedá minimum alebo maximum funkcie, budeme skrátene tento bod nazývať bod maxima, alebo minima krivky.

Ak odstránime zátvorku vo výraze $y = a(x - n)^2 + m$, môžeme písať:

$$y = ax^2 - 2anx + an^2 + m$$

Tento výraz je polynom (mnohočlen) druhého stupňa. Polynom druhého stupňa všeobecne zapisujeme:

$$y = a_1x^2 + bx + c$$

Ak si v predchádzajúcom výraze vhodne zvolíme hodnoty a, n, m, môžeme ho stotožniť s posledným výrazom. Preto porovnáme zodpovedajúce si členy s x^2, x a bez x:

$$a_1x^2 = ax^2, \qquad -2anx = bx, \qquad an^2 + m = c$$

Z prvého výrazu vyplýva že $a_1 = a$,

z druhého $-2an = b$, odkiaľ $n = -\dfrac{b}{2a}$,

a z tretieho $an^2 + m = c$, $m = c - an^2 = c - \dfrac{b^2}{4a}$.

Môžeme teda napísať identitu

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Pomocou grafu paraboly možno sa orientovať v riešení kvadratickej rovnice pre rôzne prípady. K riešeniu kvadratickej rovnice

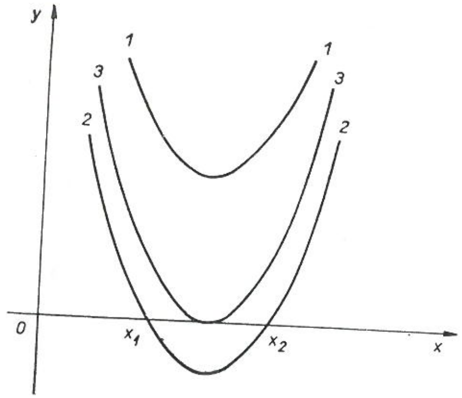
$$ax^2 + bx + c = 0$$

možno prísť takto: preskúmajme celú krivku

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

a nájdime priesečníky tejto krivky s osou x. V týchto bodoch sa musí $y = 0$, z čoho vyplýva, že hodnoty x zodpovedajúce priesečníkom, sú korene kvadratickej rovnice.

Vieme, že krivka $y = ax^2 + bx + c$ je parabola. Vieme, že pre túto parabolu je os súmernosti kolmica $x = -\dfrac{b}{2a}$, že pri $a > 0$ má parabola minimum a výška tohto minima sa rovná $y = c - \dfrac{b^2}{4a}$ (uvažujeme o ľavej strane posledného vzťahu, ktorý má obvykle tvar $a(x - n)^2 + m$). Konce ramien paraboly pri $a > 0$ sú obrátené nahor.



Obr. 108

Je jasné, že ak minimum leží nad osou x, vtedy parabola os x nepretína (*obr. 108*, krivka 1). To znamená, že pri $a > 0$, $c - \dfrac{b^2}{4a} > 0$ kvadratická rovnica nemá reálne korene[1]).

Ak minimum leží pod osou x a konce ramien paraboly sa dvíhajú nahor, parabola pretína os x v dvoch bodoch; tieto body sú súmerne položené vzhľadom na priamku $x = n = -\dfrac{b}{2a}$ (krivka 2, *obr. 108*). To znamená, že pri $a > 0$, $c - \dfrac{b^2}{4a} < 0$ má rovnica dva korene x_1 a x_2, ktoré sú zakreslené na *obr. 108*.

Nakoniec je možný i krajný prípad, keď sa parabola dotýka osi x (krivka 3, *obr. 108*). Tento prípad nastane vtedy, keď

$$c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

Ak prechádzame postupne od krivky 2 ku krivke 3 tým, že posúvame parabolu nahor, obidva korene sa budú približovať, kým nesplynú do jedného dotykového bodu. Preto v prípade $c - \dfrac{b^2}{4a} = 0$ nehovoríme

[1]) Na grafe sa vynášajú iba reálne x a y. Preto komplexné a imaginárne korene nezodpovedajú na grafe žiadnym priesečníkom.

o jednom koreni, ale o dvoch navzájom rovnakých koreňoch rovnice (dvojnásobných koreňoch).

Podobne sa skúma aj prípad pre $a < 0$, keď má krivka maximum a konce jej ramien sú obrátené nadol. Nakreslite si teraz sami krivky a preverte, že pri:

$a < 0, \quad c - \dfrac{b^2}{4a} < 0$ — nie sú reálne korene,

$a < 0, \quad c - \dfrac{b^2}{4a} > 0$ — sú dva reálne korene,

$a < 0, \quad c - \dfrac{b^2}{4a} = 0$ — dotyk, jeden dvojnásobný koreň.

Všeobecný vzťah na výpočet koreňov kvadratickej rovnice je:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Rovnica má dva reálne rôzne korene v tom prípade, ak je reálna odmocnina $\sqrt{b^2 - 4ac}$, t. j. ak

$$b^2 - 4ac > 0$$

Tento výraz zapíšeme takto:

$$b^2 - 4ac = -4a\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Podmienka $b^2 - 4ac > 0$ je splnená v dvoch prípadoch:

1. $a > 0, \quad c - \dfrac{b^2}{4a} < 0,$

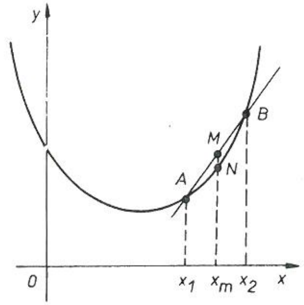
2. $a < 0, \quad c - \dfrac{b^2}{4a} > 0.$

Toto zodpovedá pre tie prípady existencie dvoch koreňov, ktoré sme dostali vyššie, keď sme skúmali krivky $y = ax^2 + bx + c$.

Nakoniec si všimnime, že v závislosti od znamienka koeficienta pri x^2 v rovnici paraboly je krivka (pri $a > 0$) konvexná alebo (pri $a < 0$) konkávna. Táto vlastnosť nezávisí od hodnôt a znamienok b a c v rovnici paraboly $y = ax^2 + bx + c$.

Presná definícia konvexnosti, resp. konkávnosti znie: Vezmime na krivke dva body $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ a veďme nimi priamku. Ak tá časť krivky, ktorá je medzi týmito bodmi, leží pod priamkou, hovoríme, že je krivka *konvexná*. Ak časť krivky, ktorá sa nachádza medzi bodmi, leží nad priamkou, hovoríme, že je krivka *konkávna*.

Konvexnosť, resp. konkávnosť paraboly je ľahko a názorne viditeľná z obrázka, no možno ju určiť aj algebraicky. Vezmime nezávisle premenné x_1 a x_2. Im zodpovedajú na parabole body A $(x_1, y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c)$ a B $(x_2, y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c)$. Nájdeme súradnice bodu M, ktorý leží v strede úsečky AB. Pomocou geometrie môžeme ukázať, že ak sa úsečky AM a MB rovnajú (*obr. 109*), tak súradnice bodu M (x_m, y_m) sú aritmetickým priemerom súradníc bodov A a B



Obr. 109

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{a} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Teraz nájdeme súradnice bodu N (x_n, y_n), ktorý leží na parabole a jeho x-ová súradnica $x_n = x_m = \dfrac{x + x_2}{2}$. Ak toto x_n dosadíme do rovnice, vypočítame y_n. Môžeme sa presvedčiť, že

$$y_n - y_m = a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(a\frac{x_1^2}{2} + a\frac{x_2^2}{2}\right) = -a\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$$

Ostatné členy, ktoré obsahujú b a c sa zrušia. Hodnota $\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$ je kladná pre ľubovoľné x_1, x_2. Teda pri $a > 0$, $y_n < y_m$ bod na parabole leží nižšie ako jemu zodpovedajúci bod (s tým istým x), ktorý leží na priamke, t. j. parabola je konvexná.

6. KUBICKÁ PARABOLA, HYPERBOLA, KRUŽNICA

Ešte krátko rozoberieme niekoľko príkladov kriviek, ktoré zobrazujú jednoduché funkcie.

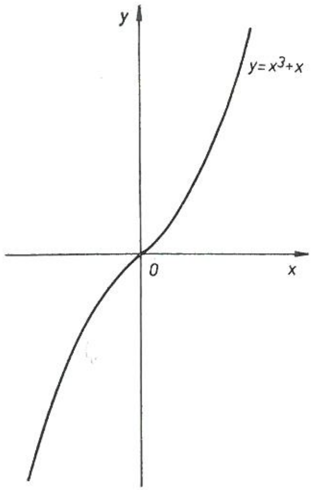
Na *obr. 110* je krivka, ktorá je zostrojená podľa vzťahu

$$y = x^3 + x$$

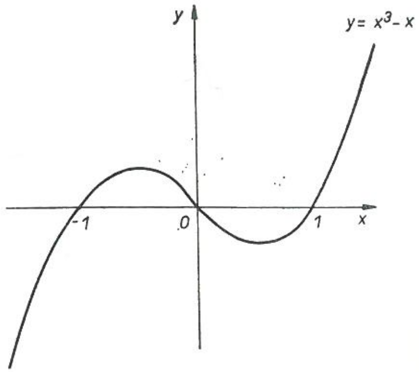
Táto krivka sa vyznačuje tým, že na ľubovoľnom úseku so zväčšovaním x zväčšuje sa aj y: krivka prechádza tak, že pri prechode zľava doprava sa čiara dvíha. Krivka nemá ani minimum ani maximum. Je teda jasné, že táto krivka pretína os x len raz, pri $x = 0$. Na nasledujúcom obrázku je krivka (*obr. 111*), ktorá je zostrojená na základe vzťahu

$$y = x^3 - x \tag{6.1}$$

Ako vidieť, na tejto krivke možno nájsť dva úseky, kde y so zväčšovaním x rastie — pri záporných x, $x < -0{,}57$[1]) a pri kladných $> 0{,}57$. Medzi nimi na úseku $-0{,}57\ldots < x < 0{,}57\ldots$ funkcia y s rastom x klesá. Funkcia má maximum v bode, ktorého $x \doteq -0{,}57$, $y \doteq 0{,}38$. Slovo maximum v tomto prípade neznamená, že $y \doteq 0{,}38$ je vždy najväčšia možná hodnota y pre vzťah (6.1). Pri veľkých, kladných hodnotách x aj hodnota y nadobúda veľké hodnoty. Čím sa vyznačuje maximum ($x \doteq -0{,}57$, $y \doteq 0{,}38$)?



Obr. 110



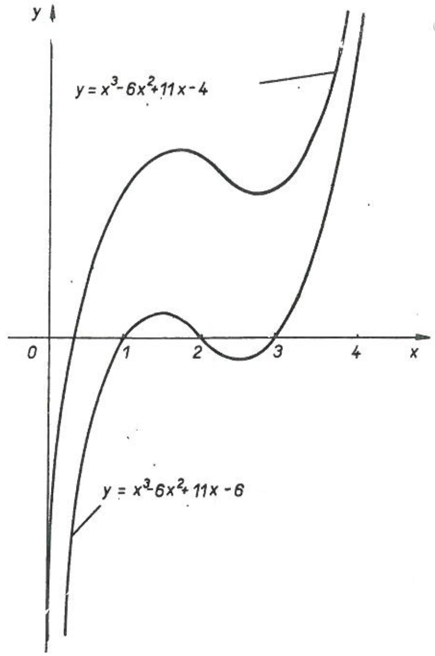
Obr. 111

Ako vidieť z grafu, hodnota y je väčšia ako v susedných bodoch. Maximum oddeľuje úsek na grafe, kde je funkcia rastúca (naľavo od maxima), od úseku, kde funkcia klesá (sprava od maxima). Takéto maximum sa nazýva miestne (lokálne), pretože hodnota y v tomto bode je najväčšia z hodnôt $y(x)$ v tých bodoch, v ktorých súradnica x nie je veľmi

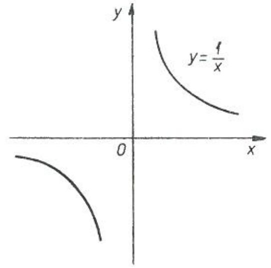
[1]) Presná hodnota je $\sqrt{3}/3 = 0{,}577\,35\ldots$

vzdialená od $x \doteq -0{,}57$. Analogicky v bode $x \doteq 0{,}57$, $y \doteq -0{,}38$ má funkcia lokálne minimum.

Na *obr. 112* sú uvedené ďalšie dva príklady kriviek, ktoré zobrazujú mnohočlen tretieho stupňa. Rovnica tretieho stupňa, ktorú dostaneme, ak sa tento mnohočlen bude rovnať nule, v prípade hornej krivky má jedno reálne riešenie $x \doteq 0{,}48$ a v prípade dolnej krivky — tri riešenia $x = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Ľahko sa presvedčíme, že rovnica tretieho stupňa nemá nikdy menej ako jeden reálny koreň: pre toto odporúčame porozmýšľať o priebehu krivky $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pre kladné aj záporné x veľmi veľké v absolútnej hodnote.



Obr. 112



Obr. 113

Odporúčame ďalej zostrojiť si krivky $y = x^3$ a $y = -x^3$.
Na *obr. 113* je zobrazená krivka

$$y = \frac{1}{x}$$

ktorá sa nazýva *hyperbola*. Zvláštnosťou tejto krivky je, že pre malé záporné x je y záporné, v absolútnej hodnote veľmi veľké a pri x malom kladnom je y veľmi veľká kladná hodnota — pozri *tab. 5*.

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	1
y	-1	-10	-100	$-1\,000$	$1\,000$	100	10	1

Preto sa hovorí, že hodnota y pri $x = 0$ je $\pm\infty$, t. j. plus nekonečno, alebo mínus nekonečno, v závislosti od toho, z ktorej strany sa k $x = 0$ blížime[1]).

Ako vidieť z *obr. 113,* krivka sa skladá z dvoch vetiev. Pri $x < 0$ a pri $x > 0$, ktoré nie sú medzi sebou spojené.

Doteraz sme poznali y ako funkciu x a zostrojovali zodpovedajúcu krivku. Teraz na príklade kružnice budeme riešiť opačnú úlohu. Udáme krivku a budeme hľadať, aká funkčná závislosť y od x tejto krivke zodpovedá. Preskúmajme kružnicu s polomerom r a so stredom v počiatku súradnicového systému. Body kružnice sa nachádzajú vo vzdialenosti r od počiatku súradnicového systému. Podľa Pythagorovej vety to znamená, že

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ak vyjadríme y pomocou x, dostaneme:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Keď skúmame kružnicu ako graf funkcie $y(x)$, z grafu vidíme, že máme dve funkcie: pri každej hodnote x (pri $|x| < r$) možno na krivke nájsť dva body — jeden na dolnej a jeden na hornej polkružnici. Týmto dvom bodom zodpovedajú dve znamienka druhej odmocniny. Funkcii $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ zodpovedá horná polkružnica, funkcii $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ dolná polkružnica.

Teraz zostavíme rovnicu kružnice so stredom v bode (a, b). Budeme postupovať formálne: ak zameníme vo vyjadrení funkcie $(x - a)$ za x, graf funkcie sa posunie o a jednotiek doprava. To znamená, že

$$y = \pm\sqrt{r^2 - (x - a)^2}$$

[1]) Uvedené tvrdenie je nepresné. Funkcia $y = 1/x$ nie je v čísle 0 definovaná, a preto nemá ani hodnotu pri $x = 0$. Existuje limita sprava a limita zľava, pričom $\lim\limits_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$. Pozn. prekl.

je rovnica kružnice posunutej vpravo o a jednotiek, t. j. so stredom v bode $(x = a,\ y = 0)$ na osi x.

Ďalej, ak ku všetkým hodnotám y pridáme jednu a tú istú hodnotu b, celý graf sa posunie nahor o b jednotiek[1]).

To znamená, že hľadaná rovnica kružnice so stredom v bode (a, b) je

$$y = \pm\sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b$$

V danom prípade by bolo jednoduchšie odvodiť rovnicu bezprostredne geometricky z výrazu pre vzdialenosť dvoch bodov (x, y) a (a, b)

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

Vedome sme postupovali oveľa formálnejšie, aby sme ešte na jednom príklade ukázali, ako zmena x na $(x - a)$ a y na $(y - b)$ posunie krivku.

7. ZMENA MIERKY KRIVKY

Z predchádzajúceho článku vieme, ako treba meniť rovnicu krivky, ak chceme, aby sa krivka posunula, t. j. aby išlo o rovnobežný posun krivky. Zmena x na $(x + a)$ v rovnici krivky vyvolá posunutie krivky o a jednotiek doľava. Pri zmene y na $(y + b)$ krivka sa posunie o b jednotiek nadol. Ak chceme, aby sa krivka posunula o g jednotiek doprava, treba zameniť x na $(x - g)$ a aby sa posunula krivka o h jednotiek nahor, treba zameniť y na $(y - h)$.

Rovnica kružnice polomeru r a so stredom v počiatku súradnicovej sústavy je $x^2 + y^2 = r^2$. Rovnica kružnice so stredom v bode $x_s = g$, $y_s = h$ a s rovnakým polomerom, t. j. posunutá o g jednotiek doprava a o h jednotiek nahor (pôvodná poloha — stred v počiatku), je

$$(x - g)^2 + (y - h)^2 = r^2$$

[1]) Bolo by aj tu možné povedať, že graf sa posunie nahor o b jednotiek, ak sa $(y - b)$ zamení za y. Potom by sme dostali

$$y - b = \pm\sqrt{r^2 - (x - a)^2}$$

čo je ekvivalentný vzťah k rovnici v texte.

Pre ľubovoľnú krivku, ktorej rovnica je zapísaná v tvare $y = f(x)$, pre posunutie o g jednotiek doprava a o h jednotiek nahor dostaneme:

$$y - h = f(x - g) \quad \text{alebo} \quad y = h + f(x - g)$$

Pre krivku, ktorej rovnica je zapísaná v tvare $F(x, y) = 0$, pre ten istý posun je potrebné previesť rovnicu na tvar $F(x - g;\ y - h) = 0$.

Teraz si postavíme otázku: ako treba zmeniť rovnicu krivky, aby sa všetky jej zvislé rozmery zväčšili C—krát[1]?

Namiesto rovnice $y_0 = f(x)$ treba vziať rovnicu $y_1 = Cf(x)$. Potom pri tom istom x je hodnota y_1 C-krát väčšia ako predtým, t. j. je C-krát väčšia ako y_0.

Ako príklad uvažujme rovnice priamok, ktoré prechádzajú počiatkom súradnicovej sústavy. Rovnica priamky, ktorá v I. kvadrante zviera s osou x uhol 45°, je

$$y_0 = x$$

Rovnica

$$y_1 = 10x$$

zodpovedá priamke, ktorá ide veľmi strmo a má pri danom x súradnicu y 10-krát väčšiu (*obr. 101*).

Pravidlo zmeny $y_0 = f(x)$ na $y_1 = Cf(x)$ možno zapísať aj takto: v rovnici krivky $y_0 = f(x)$ vymeníme y_0 na $\frac{y_1}{C}$, t. j. píšeme $\frac{y_1}{C} = f(x)$. Vtedy závislosť y_1 od x je charakteristická tým, že krivka $y_1(x)$ je predĺžená C-krát v zvislom smere vzhľadom na krivku $y_0(x)$.

Na prvý pohľad sa nám zdá, že nie sú potrebné dve rôzne formulácie, ktorých totožnosť je natoľko zrejmá

$$y_1 = Cf(x) \rightarrow \frac{y_1}{C} = f(x)$$

Druhá formulácia, zmena y_0 na $\frac{y_1}{C}$ je vhodná vtedy, keď krivka je daná implicitne, t. j. rovnicou tvaru $F(x, y) = 0$.

[1] V ďalšom budeme pre jednoduchosť výkladu predpokladať, že $C > 1$; zväčšiť ľubovoľnú hodnotu dva razy, znamená vynásobiť ju dvoma, ale zväčšiť 0,3krát, to znamená vynásobiť ju 0,3, t. j. v skutočnosti ju zmenšiť.

Tak napr. rovnicu kružnice s polomerom 1 možno vhodne zapísať

$$F(x, y_0) = x^2 + y_0^2 - 1 = 0$$

Ako napíšeme rovnicu krivky, ktorá je 3-krát predĺžená v zvislom smere (*obr. 114*, krivka označená $y_1(x)$)?

Podľa pravidla práve vysloveného stačí vymeniť v rovnici kružnice y_0 na $\frac{y_1}{3}$. Dostaneme:

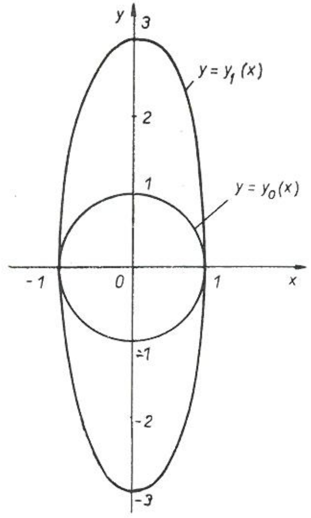
$$x^2 + \left(\frac{y_1}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

Táto krivka sa nazýva „elipsa".

V tomto príklade možno rovnice ľahko riešiť:

$$y_0 = \sqrt{1 - x^2}, \quad y_1 = 3\sqrt{1 - x^2}$$

a názorne vidíme, že pre rovnaké x je $y_1 = 3y_0$. Pravidlo, ktoré hovorí, že zmena y na $\frac{y}{C}$ predlžuje krivku C-krát v zvislom smere, je správne i pre krivky, ktoré určuje taká zložitá rovnica $F(x, y) = 0$, ktorú algebraicky nemožno vzhľadom na y riešiť. Napríklad



Obr. 114

$$x + y \log y = 0$$

Ako sme vymenili y na $\frac{y}{C}$, podobne urobíme zmenu i pre súradnicu x. Pri zámene $\frac{x_1}{C}$ za x_0 v rovnici krivky graf krivky sa roztiahne v smere osi x C-krát, t. j. pre rovnaké y je hodnota x_1 C-krát väčšia ako hodnota x_0.

Nezačneme s dôkazom, ale si najskôr ukážeme príklady:

$$y = x_0, \qquad y = \frac{x_1}{10} = 0{,}1x_1$$

(pozri *obr. 101*). Prvá priamka zviera s osou x uhol 45°, druhá stúpa veľmi mierne.

Druhý príklad:

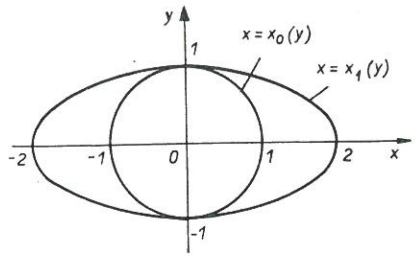
$$x_0^2 + y^2 - 1 = 0, \qquad \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + y^2 - 1 = 0$$

Prvá rovnica zodpovedá kružnici s polomerom 1, druhá je rovnica krivky roztiahnutej v smere osi x dvakrát. Ľahko sa presvedčíme, že priesečník krivky s osou x je v bodoch

$$y = 0,$$

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 - 1 = 0, \qquad x_1 = \pm 2$$

(pozri *obr. 115*).



Obr. 115

Ak to chceme dokázať, musíme vyriešiť rovnicu vzhľadom na x: ak $y = f(x_0)$, $y = f\left(\frac{x_1}{C}\right)$. Po vyriešení dostaneme:

$$x_0 = \varphi(y), \qquad \frac{x_1}{C} = \varphi(y)$$

kde φ je inverzná funkcia k funkcii f.

Je dôležité, že v hornom riadku je f jedna a tá istá funkcia vo vzťahoch k x_0 aj k x_1. Preto φ je rovnaké pre x_0 aj x_1. Druhú rovnosť prepíšeme takto

$$\frac{x_1}{C} = \varphi(y) \to x_1 = C\varphi(y)$$

dostaneme:

$$x_1(y) = Cx_0(y)$$

čo zodpovedá formulácii: Ak zmeníme x na $\frac{x}{C}$, krivka sa roztiahne C-krát pozdĺž osi x.

Ukážeme príklad

$$y = 10^{x_0}, \qquad y = 10^{\frac{x_1}{2}}$$

Inverzná funkcia je logaritmus

$$x_0 = \log y, \qquad \frac{x_1}{2} = \log y, \qquad x_1 = 2 \log y$$

Čo sa stane, ak sa v rovnici $y = f(x)$ zmení x na kx? Preto, aby sme použili vyššie vyslovené pravidlo, pripomenieme pravidlo delenia zlomkov: násobenie s k je to isté ako delenie $\frac{1}{k}$

$$kx = \frac{1}{\frac{1}{k}}$$

To znamená, že $\frac{1}{k}$ teraz nahradzuje C z predchádzajúcich vzťahov.

Ak napr. $k = \frac{1}{2}$, tak $\frac{1}{k} = 2$, t. j. $C = 2$; to znamená, že zmena x_0 na $0{,}5x_1$ je zmena x_0 na $\frac{x_1}{2}$ a vedie k dvojnásobnému roztiahnutiu krivky v smere osi x.

Ak $k = 3$, tak $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$, t. j. $C = \frac{1}{3}$. To znamená, že ide o zmenu x na $3x$. Je to zmena x na $\frac{x}{\frac{1}{3}}$. Čo to znamená z geometrického hľadiska?

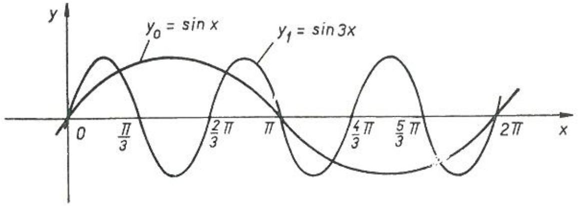
Doteraz sme skúmali len prípad, keď hodnoty C boli kladné a väčšie ako jedna, $C > 1$ a potom sme formulovali výsledok takto: pri zmene y na $\frac{y}{C}$ v rovnici krivky sa krivka C-krát predĺži v zvislom smere, pri zmene x na $\frac{x}{C}$ sa krivka C-krát roztiahne vo vodorovnom smere.

Ak je C kladné, ale menšie ako 1, $0 < C < 1$, čo zodpovedá $k > 1$, pri zmene y na $\frac{y}{C}$ sa zvislé rozmery zmenia C-krát; keďže je $C > 1$, potom C-násobná zmena znamená teraz stlačenie; napr. pri $C = 0{,}5$ bude C-násobná zmena rozmeru znamenať vynásobenie výšky číslom 0,5, t. j. zmenšenie na polovicu. To isté sa vzťahuje aj na zmenu x na $\frac{C}{x}$, ak:

$0 < C < 1$ vedie táto zmena k stlačeniu krivky. Ukážeme ešte jeden príklad.

Na *obr. 116* sú znázornené dve krivky

$$y_0 = \sin x, \quad y_1 = \sin 3x$$



Obr. 116

Druhá krivka má vodorovné rozmery zmenšené 3-krát.

Závislosť $y = \sin x$ je periodická: pri $x = 2\pi \approx 6{,}3$ radiánu (čo v stupňovej miere zodpovedá uhlu 360°) sínus má takú vlastnosť ako $x = 0$, ak k ľubovoľnému uhlu pripočítame hodnotu 2π, hodnota sínusu sa nezmení. Aj funkcia $y = \sin 3x$ je periodická, no jej perióda je 3-krát menšia: stačí, aby sa x zmenilo o $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}1$ radiánu, vtedy $3x$ (ten uhol, ktorého sínus nanášame na os poradníc) sa mení o 2π a $\sin 3x$ nadobúda tú istú hodnotu

$$\sin 3x = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Na tomto príklade porozmýšľajme, či platí všeobecné tvrdenie, že zmenou x na kx v rovnici krivky sa všetky vodorovné rozmery násobia $\frac{1}{k}$. V danom príklade $k = 3$ vodorovné rozmery, a teda aj vzdialenosť na osi x medzi bodmi, v ktorých $y = 0$, sa násobia $\frac{1}{3}$, t. j. 3-krát sa zmenšia.

Pri periodickej funkcii sa pri zmene x na kx k-krát zmenší perióda, ale následkom toho sa k-krát zväčšuje počet periód na jednotku dĺžky.

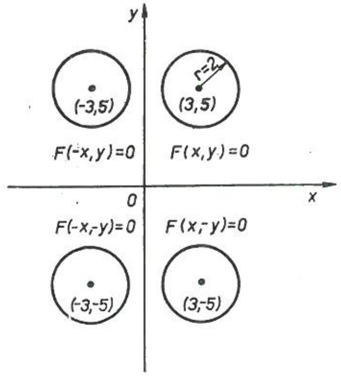
Akokoľvek sú tieto úvahy „aritmeticky" jednoduché, predsa začiatočníci (ktorým je táto kniha adresovaná) sa v nich často zmýlia.

Nakoniec preskúmajme, čo sa stane s funkciou pri zmene y na $\frac{y}{C}$ alebo x na $\frac{x}{C}$, ak C bude záporné. Túto zámenu možno urobiť dvoma

spôsobmi: napíšeme $C = (-1)\,b$, kde b je kladné a urobíme dve zmeny

$$y_0 \to \frac{y_1}{b} \to \frac{y_2}{(-1)\,b} = -\frac{y_2}{b}$$

Prvú zmenu y_0 na $\frac{y_1}{b}$, kde $b > 0$ sme už prebrali, následkom nej sa b-krát zmenia zvislé rozmery. Ostáva preskúmať, čo sa stane zmenou znamienka y, t. j. zmenou y na $-y$. Pre jednotlivé body sa táto otázka už skúmala v čl. 1. Uveďme výsledok bez dôkazu: pri zmene znamienka y dostaneme krivku súmernú podľa osi x, zmena znamienka x prevedie krivku na krivku s ňou súmernú podľa osi y.



Obr. 117

Príklad:

$$F(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 5)^2 - 4 = 0$$

Je to rovnica kružnice s polomerom 2, ktorej stred má súradnice $x = 3$, $y = 5$.

Na *obr. 117* sú znázornené krivky

$$F(x, -y) = (x - 3)^2 + (-y - 5)^2 - 4 = 0$$
$$F(-x, y) = (-x - 3)^2 + (y - 5)^2 - 4 = 0$$
$$F(-x, -y) = (-x - 3)^2 + (-y - 5)^2 - 4 = 0$$

Ako zo vzťahov vidieť, znak F vo všetkých prípadoch predstavuje jednu a tú istú funkciu (pozorne skúmajte pravú časť vzťahu). Pozorujte, čo sa robí s krivkou (kružnicou) pri zmene x na $-x$, y na $-y$, ak sa súčasne mení $x \to -x$ a $y \to -y$. Aby ste porozumeli uvedeným pravidlám, zostrojte a vyšetrite ľubovoľnú krivku.

$$y = f(x) \quad \text{alebo} \quad F(x, y) = 0$$

Predstavte si, aký priebeh majú krivky pre všetky podobné funkcie

$$\frac{y-b}{c_2}=f\left(\frac{x-a}{c_1}\right) \quad \text{alebo} \quad F\left(\frac{x-a}{c_1}, \ \frac{y-b}{c_2}\right)=0$$

pri ľubovoľných znamienkach konštánt a, b, c_1, c_2.

Cvičenia

1. Zostrojte krivky $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0$, $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{9}-1=0$, $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{4}-1=0$, ak viete, že $x^2+y^2-1=0$ je rovnica kružnice. Pri zostrojovaní kriviek odporúčame postupovať takto: nájdite stred, najnižšie a najvyššie položený bod, krajný pravý a krajný ľavý bod a tieto body od ruky spojte plynulou čiarou.

2. Zostrojte krivku $y=\sin x$ tak, že vezmete interval od $-\pi$ do π s krokom $0{,}25\pi$. Uhol x je vyjadrený v radiánoch. Je výhodné vziať uvedené násobky π, keďže potom uhly vyjadrené v stupňoch budú celé: $0{,}25\pi=45°$, $0{,}5\pi=90°$ atď.

Možno použiť tabuľky na konci kapitoly II, kde je daný sínus v závislosti od uhla vyjadreného v radiánoch. Na súradnicovú os nanášame vo všetkých prípadoch x v radiánoch.

Zostrojte krivky:

a) $y=2\sin x$,

b) $y=\sin 0{,}5x$,

c) $y=3\sin 3x$,

d) $y=\cos x$.

Návod: Použite trigonometrický vzťah $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$:

e) $y=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

f) $y=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$,

g) $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Všetky tieto krivky od a) do g) zostrojte tak, že posuniete, predĺžite alebo stlačíte krivku $y=\sin x$.

3. Zostrojte krivky z bodov:

a) $y=\pm\sqrt{x^2-1}$

alebo v implicitnom tvare $y^2-x^2+1=0$, v intervale od -5 do 5 s krokom 0,5. Ak dostaneme hodnotu y imaginárnu, pre dané x krivka neexistuje;

b) $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2-1}$,

c) $y=\pm\sqrt{x^2+1}$.

Návod: Ak upravíte funkciu na tvar $x^2-y^2+1=0$, všimnite si, že prípad c) dostanete z a) zámenou x a y;

d) $4y^2+4y-x^2=0$.

Návod: Zapíšte rovnicu v tvare $4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-x^2-1=0$. Túto krivku dostanete posunutím a stlačením krivky v príklade c).

8. KRIVKA DANÁ PARAMETRICKY

Nech každá z hodnôt x a y je daná ako funkcia času t, t. j. sú dané dve funkcie $x(t)$ a $y(t)$, napr.

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t$$

Tieto závislosti možno zobraziť graficky ako dve krivky, ak budeme nanášať na prvý obrázok na os úsečiek t a na os poradníc x a na druhom obrázku na os úsečiek t a na os poradníc y.

No je možná aj iná formulácia otázky: predstavme si, že x a y sú súradnice bodu, každej hodnote t zodpovedá určitá poloha bodu; akú krivku bude opisovať bod v rovine x, y pri zmene t?

Pre odpoveď na túto otázku je vhodné z dvoch rovníc $x=x(t)$, $y=y(t)$ vylúčiť veličinu t; dostaneme výraz, ktorý bude obsahovať len x a y, t. j. $y=y(x)$, alebo $F(x, y)=0$. Potom zostrojíme krivku ako obyčajne, ak budeme voliť rôzne x a hľadať im zodpovedajúce y.

Tak v uvedenom príklade nájdeme:

$$x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

$$y=\pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{alebo} \quad x^2+y^2-1=0$$

z čoho vidíme, že v rovine x, y je krivka kružnica.

No pomerne jednoduché funkcie $x(t)$ a $y(t)$ vedú pri pokuse vylúčiť t dosť často k takým zložitým vzťahom, že sa s tým nemá vôbec zmysel zaoberať. Napríklad, ak

$$x=a_1t^4+b_1t^3+c_1t^2+d_1t+e_1$$

$$y=a_2t^4+b_2t^3+c_2t^2+d_2t+e_2$$

a chceme z nich vylúčiť t, treba riešiť rovnicu štvrtého stupňa, čo vedie k veľmi zložitým výrazom.

Krivku v rovine x, y možno zostrojiť i bez vylúčenia t: stačí vziať rozličné hodnoty t a pre každú z nich vypočítať x a y. Pozri *tab. 6* pre prvý príklad.

Tabuľka 6

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$x = \cos t$	1	0,7	0	—0,7	—1	—0,7	0	0,7	1
$y = \sin t$	0	0,7	1	0,7	0	—0,7	—1	—0,7	0

Pravda, netreba brať hodnoty t väčšie ako 2π, pretože sa budú hodnoty x a y opakovať. Pomocou tejto tabuľky zostrojíme jednotlivé body krivky. Potom používame len hodnoty x a y. Hodnoty t, pre ktoré sme x a y počítali, sa pri zostrojovaní bodov nepoužívajú. (Podľa porekadla „Maur si prácu vykonal, Maur môže odísť".)

Takýto spôsob zadania krivky, resp. funkcie $y(x)$ nazývame parametrickým a hodnota t sa nazýva parameter.

Cvičenia

1. Zostrojte krivku, ktorá je udaná rovnicami

a) $x = \cos t, \quad y = \sin 2t,$
b) $x = \cos t, \quad y = \sin 3t.$

Návod: Pretože $\sin 3t$ sa mení veľmi rýchle, treba voliť hodnoty t dostatočne blízko, napr. d: 0; 0,1; 0,2; . . .

2. Úloha na dôvtip: zostrojte krivky

a) $x = \cos 3t, \quad y = \sin 3t,$
b) $x = \cos(5t + 1), \quad y = \sin(5t + 1).$

3. Vážna úloha: zostrojte krivku

$$x = \cos t, \qquad y = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Zostrojte krivku

$$x = \cos t, \qquad y = \cos t.$$

5. Zostrojte krivku, po ktorej sa pohybuje bod A, ktorý leží na obvode kotúča, na kružnici s polomerom 1 cm. Nech sa kotúč kotúľa po osi x rýchlosťou 1 cm/s. Stred kruhu Q leží na začiatku na osi y a skúmaný bod A — v počiatku súradnicového systému. Za čas t budú súradnice $Q_t(t, 1)$, kruh sa otočí o uhol t radiánov. Krivka sa nazýva cykloida.

V. VÝTOK VODY. RÁDIOAKTÍVNY ROZPAD A ŠTIEPENIE JADIER

Absorpcia svetla

1. VÝTOK VODY Z NÁDOBY. ZADANIE ÚLOHY

Budeme sa zaoberať výtokom vody z nádoby cez otvor alebo cez tenkú trubicu na jej dne. Do nádoby môže voda aj pritekať z vonkajšieho zdroja. Je to úloha veľmi jednoduchá, ale tie matematické metódy, ktoré potrebujeme na opísanie výtoku vody, sa používajú aj v zložitejších a zaujímavejších úlohách.

Uvažujme nádobu, do ktorej priteká (alebo z ktorej vyteká) voda. Nech V (m³) je objem vody v nádobe. Tento objem sa s časom mení, t. j. V je funkciou času t (s). Aký má veličina $\frac{dV}{dt}$ fyzikálny zmysel?

Je zrejmé, že $dV = V(t + dt) - V(t)$ je ten objem vody, ktorý za čas dt v nádobe pribudne. Preto $\frac{dV}{dt}$ je množstvo vody, ktoré pribudne v nádobe za jednotku času, t. j. je rýchlosťou zmeny množstva vody v nádobe. Túto veličinu nazývame tok kvapaliny a označujeme ako $v(t)$. Ak je $v > 0$, voda do nádoby priteká, ak je $v < 0$, voda z nádoby vyteká a množstvo vody v nádobe sa zmenšuje.

Ak poznáme závislosť toku kvapaliny od času, t. j. funkciu $v(t)$, tak

$$\frac{dV}{dt} = v(t) \tag{1.1}$$

V tomto prípade určenie V je analogické určeniu dráhy podľa danej rýchlosti. Už v kapitole I sme ukázali, že takúto úlohu môžeme vyriešiť integrovaním.

ZÁVER

AKO ĎALEJ?

„Vyššia matematika", presnejšie diferenciálny a integrálny počet, umožňuje riešiť úlohy rôznych druhov, ktoré nemožno vyriešiť metódami aritmetiky, algebry a geometrie. Veľký význam má samotná formulácia nových pojmov, ako okamžitá rýchlosť, zrýchlenie, impulz sily (a mnohé iné z ďalších oblastí fyziky), ktoré možno presne formulovať len pomocou derivácií a integrálov.

Poznatky, ktoré ste získali prečítaním „Vyššej matematiky pre začiatočníkov", predstavujú len malú časť matematiky, malú časť tých matematických disciplín, ktoré sa využívajú vo fyzike.

Spomenieme teraz ešte niektoré z tých oblastí fyziky a s nimi súvisiace oblasti matematiky, ktoré máme ešte pred sebou.

Knihu sme písali ako učebnicu, takže pri dostatočnej snahe a pozornosti sa dalo podrobne pochopiť všetko, o čom sme hovorili. Musíme vás upozorniť, že v ďalšom texte, kde budeme hovoriť o zložitých otázkach, musíme sa učebnicovej formy zrieknuť. V krátkom závere nemôžeme vysvetliť celú matematickú fyziku, môžeme sa len pokúsiť vytvoriť u vás nejakú predstavu a zvýšiť váš záujem.

Aby sme ľahšie pochopili ďalšie úvahy, pokúsime sa stručne charakterizovať úlohy, ktorými sme sa zaoberali doteraz. Boli to úlohy o pohybe jednej častice v mechanike, úlohy o časovej zmene jednej alebo dvoch veličín: polohy a rýchlosti telesa alebo náboja na kondenzátore a prúdu v sieti. Zaoberali sme sa funkciami jednej premennej — času. Skúmali sme funkciu jednu (prúd ako funkcia času) alebo dve — poloha telesa $x(t)$ a rýchlosť telesa $v(t)$.

Ponúka sa nám prirodzené, čisto kvantitatívne zovšeobecnenie: nasledovať budú úlohy o pohybe dvoch telies, troch telies atď. Za týmto „atď." príde úloha o pohybe plynu alebo kvapaliny. Veď jeden kg vodíka obsahuje $3 \cdot 10^{26}$ molekúl, t. j. $3 \cdot 10^{26}$ samostatných telies.

Tu nám už musí byť jasné, že treba hľadať nové metódy: nielen že $3 \cdot 10^{26}$ rovníc nemôžeme riešiť, ale na napísanie toľkých rovníc nemáme ani dosť miesta ani dosť času.

Vznikajú nové odvetvia fyziky — hydrodynamika a dynamika plynov, a na rozdiel od mechaniky hmotného bodu, aj nové metódy, formulácie a riešenia úloh. Zaujíma nás, koľko molekúl sa nachádza v tej, alebo inej časti vyšetrovaného objemu.

Tuto úlohu môžeme riešiť určením rozdelenia mernej hmotnosti plynu v priestore $\varrho(x, y, z)$, tlaku plynu $p(x, y, z)$ a rýchlosti plynu v rôznych bodoch priestoru. Treba dodať, že všetky tieto veličiny sú i funkciami času, napr. $\varrho\,(x, y, z, t)$. Okrem toho rýchlosť plynu je vektor, t. j. v každom bode musíme poznať jej veľkosť a smer. Inými slovami, musíme poznať tri zložky rýchlosti. Takto sa dostávame od úloh s niekoľkými funkciami jednej premennej k úlohám, v ktorých sa stretávame s funkciami niekoľkých nezávislých premenných.

V dôsledku toho sa pri zostavovaní rovníc objavujú derivácie podľa času i podľa súradníc, napr. $\dfrac{\partial\varrho}{\partial t}$ a $\dfrac{\partial\varrho}{\partial x}, \dfrac{\partial\varrho}{\partial y}, \dfrac{\partial\varrho}{\partial z}$. Pripomíname, že písmeno ∂ píšeme vtedy, keď ide o parciálne derivácie, t. j. keď uvažujeme zmenu funkcie pri zmene jednej z premenných, pričom hodnoty ostatných premenných sa nemenia. Napr.

$$\frac{\partial\varrho}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varrho(x, y + \Delta y, z, t) - \varrho(x, y, z, t)}{\Delta y}$$

Jednou z najdôležitejších častí matematickej fyziky je práve skúmanie vlastností parciálnych diferenciálnych rovníc. Parciálne diferenciálne rovnice opisujú pohyb kvapalín, plynov i tuhých telies, šírenie tepla v týchto prostrediach, difúziu atómov a molekúl.

Vo všetkých týchto prípadoch, ako sme už spomenuli, by bolo principiálne možné, tak, ako predtým, skúmať osobitne jednotlivé častice a veľké množstvo funkcií jednej premennej — času. Existujú však aj iné fyzikálne teórie — predovšetkým teória elektriny a magnetizmu, kde to tak nie je.

Uvažujme dva bodové náboje, ktoré sú v pokoji. Sila, ktorá medzi nimi pôsobí, závisí od polohy (od vzdialenosti medzi nimi). Zdalo by sa, že ide o úlohu so šiestimi funkciami (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) a s jedinou premennou — časom. Pohyb nábojov situáciu v prvom priblížení prakticky nemení: treba brať do úvahy len to, že nastáva vzájomné pôsobenie magnetických polí oboch nábojov, ktoré závisí od ich rýchlosti.

Omnoho dôležitejšia skutočnosť, ktorá vyžaduje principiálne nový prístup, je tá, že vzájomné pôsobenie nábojov sa nedeje okamžite, ale sa šíri s rýchlosťou svetla. Preto pôsobenie jedného náboja na druhý závisí od polohy (i rýchlosti) prvého náboja v určitom predchádzajúcom čase. Teória, v ktorej všetko, čo sa deje s nábojmi v čase $t + \Delta t$, je úplne určené stavom v čase t, nazýva sa teóriou elektromagnetického poľa. V tejto teórii spolu s jednotlivými nábojmi uvažujeme elektrické pole E a magnetické pole H, ktoré sú určené a zapĺňajú celý priestor. Veličiny E a H sú vektory a súčasne funkcie súradníc a času. Z matematickej stránky je teória elektromagnetického poľa teóriou parciálnych diferenciálnych rovníc, ktorá je podobná teórii pružnosti, akustike alebo dynamike plynov. Rozdiel je len to, že sme v poslednom prípade odvodili rovnice na základe zidealizovaných predpokladov: keď sme totiž hovorili o mernej hmotnosti plynu, nebrali sme do úvahy molekulárnu štruktúru plynu. Len pri tomto priblížení môžeme hľadieť na plyn ako na kontinuum, ktoré charakterizuje spojitá funkcia $\varrho(x, y, z, t)$. Naproti tomu intenzita elektrického poľa E je skutočne spojitou funkciou.

Matematický aparát pre elektromagnetickú teóriu pripravila hydrodynamika, ktorá vznikla v XVIII. storočí. Nemožno sa preto čudovať, že spočiatku boli snahy preniesť do elektromagnetickej teórie aj niektoré ďalšie myšlienky z mechaniky — napr. myšlienku o zvláštnej látke, étere, ktorého pohyb vysvetľuje všetky elektrické a magnetické javy. Vieme, že takáto matematická analógia síce jestvovala, avšak fyzikálny zmysel elektromagnetickej teórie je úplne iný.

Keď hovoríme o matematickej teórii, musíme rozhodne hovoriť nielen o formulácii úlohy a východiskových rovniciach, ale aj o vlastnostiach výsledkov.

Pri parciálnych diferenciálnych rovniciach môžeme rozdeliť riešenia na

dva druhy. Jeden druh je typický pre ohraničený objem — sú to vlastné kmity s určitými frekvenciami. Telesu určitého tvaru prislúcha určitý súbor frekvencií.

Spomeňte si na kyvadlo: kyvadlo má určitú vlastnú frekvenciu kmitania. Ak na kyvadlo pôsobí vonkajšia sila, ktorej frekvencia približne zodpovedá vlastnej frekvencii kyvadla, vzniká rezonancia. Tieto výsledky sme získali na základe teórie obyčajných diferenciálnych rovníc: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + f(t)$. Z teórie parciálnych diferenciálnych rovníc vyplýva, že teleso má celý súbor vlastných frekvencií a správa sa ako súbor, ako množstvo kyvadiel s rôznymi vlastnými frekvenciami, má mnoho rezonančných frekvencií. Ak máte doma klavír alebo pianino, presvedčte sa o tom. Pomaly, potichu stlačte kláves, tak, aby ste len uvoľnili strunu a neudreli ju kladivkom. Teraz krátko udrite po druhých klávesoch a počúvajte, ako odpovedá voľná struna...

Pre látku, ktorá zapĺňa celý priestor, je charakteristický druhý typ riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc — šírenie vlnenia. Takým vlnením sú v elektromagnetickej teórii rozhlasové vlny a svetlo, v pružných prostrediach — zvuk. Pozoruhodná vlastnosť vĺn je ich schopnosť prenášať informáciu: tlak alebo intenzita elektrického poľa v danom bode (v blízkosti prijímača — ako funkcia času) závisí od času tak, ako tá istá veličina v blízkosti zdroja — vysielača.

Vieme nájsť riešenie rovníc, ktoré opisujú usmernený lúč svetlometu alebo lasera. Do očí bije podobnosť medzi lúčom zo svetlometu a prúdom vody z hadice. Znalosť vlastností riešení úloh rôznych typov malo a má veľký význam pre rozvoj fyziky.

Spektrá atómov boli pre fyzikov dlho záhadou. Záhadou neboli ani natoľko konkrétne zákonitosti a číselné hodnoty frekvencií, ako to, že určitý atóm vyžaruje alebo rezonančne absorbuje vlnenia niekoľkých rôznych, ale presne určitých frekvencií. Podobnosť s kmitaním tuhých telies umožnila prejsť k formulácii rovníc kvantovej mechaniky. Kvantová mechanika využíva i podobnosť vlnenia a prúdu pohybujúcich sa častíc.

Na matematiku môžeme principiálne hľadieť ako na druh spresnenej, zdokonalenej logiky. Je zaujímavé, že keď človek objavil zákonitosti tejto logiky a naučil sa ich využívať, získal omnoho mocnejší prostriedok, ako je obyčajný „zdravý rozum“.

Človek zhotoví rukami jednoduché nástroje, pomocou nich vie vyrobiť obrábacie stroje, ktoré používa na výrobu čoraz dokonalejších a zložitejších mechanizmov. Tieto mechanizmy zase umožňujú urobiť to, čo holými rukami urobiť nemožno. Tak aj matematika, tým, že rozvíja čoraz zložitejšie teórie a zavádza stále nové pojmy, umožňuje pochopiť a ovládať aj najčudesnejšie prírodné javy.

Doteraz sme uviedli len niekoľko príkladov, ktoré sa vzťahovali na teóriu rovníc určitého druhu.

Druhý zaujímavý príklad môžeme nájsť v geometrii.

Doterajšie skúsenosti nás presvedčili o tom, že je vhodné zaviesť v priestore tri súradnice x, y, z. Zdalo by sa, že ďalšie diskusie o tejto otázke sú už zbytočné. Okrem toho však môžeme zaviesť súradnice aj inak, tak, aby súradnica $\xi = \text{const}$ zodpovedala nejakej zakrivenej ploche (ak by $x = \text{const}$, pri ľubovoľných y, z by táto podmienka bola rovnicou roviny, ktorá je kolmá na os x).

Môžeme teda zaviesť krivočiare súradnice ξ, τ, ζ a s veľkými ťažkosťami sa naučiť počítať vzdialenosť dvoch bodov a ostatné veličiny pomocou nových súradníc.

Na prvý pohľad je to nudná a zbytočná práca. Treba mať veľmi zvláštny spôsob myslenia, aby si človek obľúbil prekonávanie ťažkostí pri rozvíjaní teórie s ľubovoľnými, zovšeobecnenými súradnicami.

A zrazu, ako úder hromu, vzniká všeobecná teória relativity (môžeme povedať, že teórie Lobačevského, Bólyaiho a Riemanna boli len bleskami, ktoré tomuto úderu hromu predchádzali). Zovšeobecnené súradnice sú rovnako výhodné (alebo rovnako nevýhodné) na opísanie priestoru, v ktorom platí Euklidova geometria, ako na opísanie zakriveného priestoru. Pravouhlé súradnice x, y, z sú vhodné na opísanie obyčajného priestoru, ale úplne nevhodné na opísanie zakriveného priestoru. Súradnice x, y, z dokonca ani nenaznačujú možnosť existencie nejakého iného priestoru.

Štúdium krivočiarych súradníc, ktoré sa zdalo byť zbytočnou komplikáciou, nás pripravilo na štúdium vlastností takého priestoru, o existencii ktorého sme vôbec nevedeli. Pri tomto štúdiu sa ukázalo, že gravitačná sila súvisí predovšetkým s tým, že priestor je do istej miery zakrivený. Veľkosť zakrivenia súvisí pritom s podmienkami na Zemi a v slnečnej sústave. Pri javoch veľkého meradla (katastrofy hviezd, evolúcia Slnka) môže byť priestor aj silne zakrivený. Pri výskume prírody treba vedieť prekonávať matematické ťažkosti, ovládať matematický aparát a mať istú fyzikálnu intuíciu, treba vedieť nájsť súvislosti medzi výsledkami teórie a experimentu. Len syntéza všetkých týchto vlastností umožňuje vykonať pri výskume prírody ďalší krok dopredu.

Vráťme sa ešte k matematike a špeciálne k matematickej fyzike.

Niektorí ľudia hovoria: „Matematika je mlyn, ktorý zomelie len to, čo sa do neho vloží." Tak odôvodňujú ľudia zlé výsledky, ku ktorým dospeli pomocou nesprávnych matematických postupov a na základe nesprávnych predpokladov. V skutočnosti totiž tento mlyn dá často viac, ako sa do neho vložilo, dá i to, čo sa vôbec neočakávalo!

Na konci kurzu matematickej fyziky sa môžeme opäť opýtať „ako ďalej". Netreba si však zúfať, pretože tam je už blízko hranica, na prechod ktorej už učenie nestačí. Tu už treba i tvoriť, rozvíjať nové teórie.

Chceli by sme vidieť čitateľa, ktorý o niekoľko minút s uľahčením túto knihu odloží. Predpokladáme, že väčšina z vás sú študenti posledných ročníkov stredných škôl a prvých ročníkov vysokých škôl, ktorí sa ešte nemali možnosť presvedčiť o tom, čo matematika v živote dnešnej spoločnosti znamená.

Želáme vám však, aby pre vás bola matematika vždy presným a pekným jazykom, spôsobom vyjadrovania myšlienok a metódou myslenia. Nech pre vás nikdy nie je matematika len predmetom, z ktorého treba urobiť skúšku a ktorý vám nič nového neprinesie. Obľúbte si matematiku a tento vzťah bude vzájomný. Matematika vám pomôže.

RIEŠENIA A VÝSLEDKY

Kapitola I.

Čl. 3

1. a) $s = t^2$, $\Delta s = \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = 2t\,\Delta t$; $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2t$, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2t$; b) $s = t^3$, $\Delta s = \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)^3 - \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)^3 = 3t^2\,\Delta t + \frac{(\Delta t)^3}{4}$; $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t^2 + \frac{(\Delta t)^2}{4}$, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3t^2$. Výsledky súhlasia s výpočtami v čl. 3; všimnite si, že v prípade $s = t^2$ pomer $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nezávisí od Δt a v prípade $s = t^3$ pomer $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ obsahuje len $(\Delta t)^2$. **2.** $y' = 4x^3$. **3.** $y' = 2x + 2$. **4.** $y' = -\frac{2}{x^3}$. **5.** $y' = -\frac{2b}{x^3}$. **6.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Čl. 4

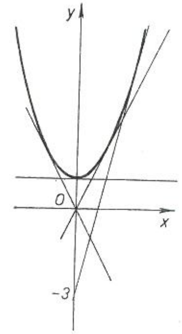
1. Nájdeme $(1{,}2)^2$. Preskúmame funkciu $s = t^2$; nech $t = 1$ a $\Delta t = 0{,}2$; $s' = 2t$; $s'(1) = 2$; preto $\Delta s = 2 \,.\, 0{,}2 = 0{,}4$; $(1{,}2)^2 = 1^2 + 0{,}4 = 1{,}4$. Presná hodnota $(1{,}2)^2 = 1{,}44$. Chyba je približne 3%. $(1{,}1)^2 = 1{,}2$; presná hodnota 1,21. Chyba je 1%. $(1{,}05)^2 = 1{,}1$; presná hodnota je 1,1025. Chyba je 0,2%. $(1{,}01)^2 = 1{,}02$; presná hodnota 1,0201. Chyba je 0,01%. **2.** Pozri *tab.* 1.

Tabuľka 1

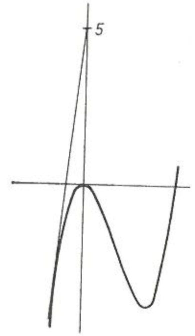
t	S_Φ	S presné	Zaokrúhlená chyba v %
1,1	18,0	17,5	0,3
1,05	17,5	17,4875	0,07
0,98	16,8	16,798	0,01

Čl. 5

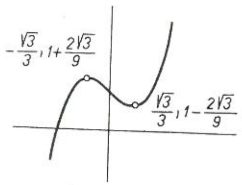
1. Pozri *obr. 231*. **2.** Pozri *obr. 232*. **3.** Pozri *obr. 233*. **4.** Pozri *obr. 234*. **5.** Pozri *obr. 235*. **6.** $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$; $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$; $y = 3x - 2$, $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $(0,\ -2)$.



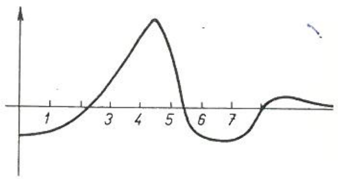
Obr. 231



Obr. 232

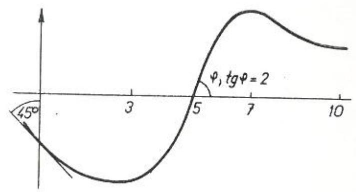


Obr. 233



Obr. 234

7. Dotyčnica ku krivke $y = ax^2$ v bode $(x_0,\ y_0)$ pretína súradnicové osi v bodoch $\left(\frac{x_0}{2},\ 0\right)$ a $(0,\ -y_0)$ (pozri str. 31). Rovnica dotyčnice ku krivke $y = ax^3$ je v bode $(x_0,\ y_0)$ $y = 3ax_0^2x - 2y_0$. Priesečníky dotyčnice so súradnicovými osami sú $\left(\frac{2}{3}x_0,\ 0\right)$, $(0,\ -2y_0)$.



Obr. 235

Čl. 6

1. $x = 0$, minimum pre $a > 0$, maximum pre $a < 0$. **2.** $x = -1$ maximum, $x = 1$ minimum. **3.** $x = -\sqrt{a}\ (a > 0)$ maximum, $x = \sqrt{a}\ (a > 0)$ minimum. Pre $a < 0$ neexistuje ani minimum ani maximum. **4.** $x = -1/\sqrt{3}$ maximum, $x = 1/\sqrt{3}$ minimum. **5.** a) $a > 0$, $x = 0$ minimum; b) $a = 0$, $x = 0$ minimum; c) $a < 0$, *Tabuľka 2*

m	10	20	50	∞
Δt	0,1	0,05	0,02	0
$\sum t_{i-1}^2 \Delta t$	2,18	2,26	2,30	2,33
$\sum t_i^2 \Delta t$	2,49	2,41	2,37	2,33

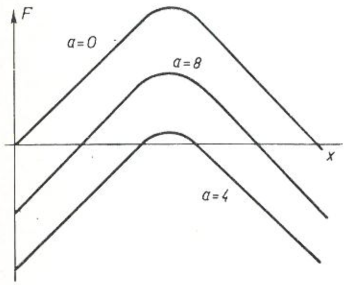
$x = 0$ maximum, $x = -\sqrt{-\frac{a}{2}}$ minimum, $x = \sqrt{-\frac{a}{2}}$ minimum.

Čl. 8

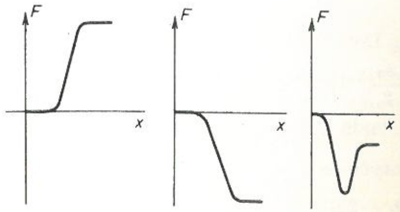
2. V *tab.* **2** sú vypočítané hodnoty súčtov pri delení intervalu na m častí, kde $m = 10, 20, 50, \infty$. Vidieť, že už pri $m = 50$ súčty sú málo odlišné od limitnej hodnoty pri $m \to \infty$.

Čl. 11

1. $\frac{1}{3}$. **2.** 0,11033... **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $2(\sqrt{3} - 1)$. **5.** $S = \int_0^b y(x)\,dx$, kde $y = y(x)$ je rovnica prepony. Vezmeme na prepone ľubovoľný bod A so súradnicami x, y. Cez tento bod vedieme zvislú priamku (pozri *obr. 19*). Z podobnosti trojuholníkov $\frac{x}{b} = \frac{y}{h}$. Z tohto $y = \frac{h}{b}x$. $S = \int_0^b \frac{h}{b}x\,dx = \frac{h}{b}\int_0^b x\,dx = \frac{h}{b}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2}bh$. **7.** $S = \frac{1}{3}x_0y_0$. **8.** $S = \frac{2}{3}x_0y_0$. **9.** $S = \int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$. **10.** 0,7837 pre $m = 5$; 0,7850 pre $m = 10$. **11.** Pozri *obr. 236*. **12.** Pozri *obr. 237*.



Obr. 236



Obr. 237

Čl. 13

1. $\bar{y} = \overline{x^2} = \int_0^2 \frac{x^2\,dx}{2} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$. **2.** $y(0) = 0$, $y(2) = 4$; $\frac{y(0) + y(2)}{2} = 2$; $y(1) = 1$; $y(1) = 1 < \bar{y} = 1{,}33 < \frac{y(0)+y(2)}{2} = 2$. **3.** $\bar{y} = \frac{1}{6}y(0) + \frac{2}{3}y(1) + \frac{1}{6}y$

$(2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\cdot 4 = 1{,}33$. **4.** $\int_a^b y\,dx = \left[\left(\frac{1}{3}rx^3 + \frac{1}{2}px^2 + qx\right)\right]_a^b = \frac{1}{3}r(b^3 - a^3) + \frac{1}{2}p(b^2 - a^2) + q(b - a) = (b - a)\left[\frac{1}{3}r(b^2 + ab + a^2) + \frac{1}{2}p(b + a) + q\right]$. Podľa vzťahu (13.2) musí byť $\int_a^b y\,dx = (b - a)\,\bar{y} = (b - a)\left[\frac{1}{6}y(a) + \frac{2}{3}y\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}y(b)\right]$. Ak dosadíme $y(a)$, $y\left(\frac{a+b}{2}\right)$ a $y(b)$ a porovnáme s vyššie získaným výrazom, presvedčíme sa, že sú totožné. **5.** $\bar{F} = \frac{1}{2R - R}\int_R^{2R}\frac{A}{r^2}\,dr = \frac{1}{R}\left[\left(-\frac{A}{r}\right)\right]_R^{2R} = \frac{1}{R}\left(-\frac{A}{2R} + \frac{A}{R}\right) = 0{,}5\frac{A}{R^2}$. Stredná hodnota sily na tomto úseku je polovičná ako sila na povrchu Zeme, $\bar{F} = 0{,}5F_0$. **6.** $F(R) = F_0$, $F(2R) = \frac{1}{4}F_0$; $\frac{F(R) + F(2R)}{2} = 0{,}625E_0 > 0{,}5F_0$. **7.** $F\left(\frac{R + 2R}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}R\right) = \frac{4}{9}F_0$. $\frac{1}{6}F_0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}F_0 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}F_0 = \frac{109}{216}F_0 = 0{,}505F_0$. Chyba je 1%!

Kapitola II

Čl. 3

1. Nájdeme deriváciu $z = (ax + b)^2$, ak odstránime zátvorky: $z = a^2x^2 + 2abx + b^2$, $z' = 2a^2x + 2ab = 2a(ax + b)$. Teraz nájdeme tú istú deriváciu podľa pravidla pre deriváciu zloženej funkcie $z = y^2$, $y = ax + b$, $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 2ya = 2ay = 2a(ax + b)$. **2.** $z' = -\frac{a}{(ax + b)^2}$; $z' = -\frac{2a}{(ax + b)^3}$; $z' = \frac{1}{(x + 1)^2}$.

Čl. 4

1. $y = x^4 = x^2x^2$; $y' = 2x\,x^2 + x^2 . 2x = 4x^3$. **2.** $y' = (4x + 1)\sqrt{x} + (2x^2 + x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **3.** $y' = \frac{(3x^2 + 10x)(x + 1) - (x^3 + 5x^2)\,1}{(x + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 4x + 5)}{(x + 1)^2}$. **4.** $y' = \frac{-x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2)^2}$.

Čl. 5

1. $y' = 5x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 14x - 2$. **2.** $y' = 2(x^3 + x + 1)(3x^2 + 1)$. **3.** $y' = 4(x^2 - x + 1)^3(2x - 1)$. **4.** $x' = 10(3x^2 - 1)\cdot 6x$. **5.** $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. **6.** Je vhodné zapísať y ako mocninu s lomeným exponentom $y = y^{2/5}$. Teraz sa nájde derivácia podľa všeobecného pravidla pre deriváciu mocninovej funkcie; $y' = \frac{2}{5} x^{-3/5}$. **7.** a) Ak sa x zmení o 1%, potom $\Delta y = n \,.\, 0{,}01y$; preto pri zmene x o k % bude $\Delta y = n \,.\, 0{,}01 \,.\, y \,.\, k$. V danom prípade sa x zmení o 10%, $\Delta y = n \,.\, 0{,}1y$. Pretože $n = \frac{1}{2}$, potom $\Delta y = \frac{1}{2} \,.\, 0{,}1y = 0{,}05y$. Preto $y(11) = y(10) + 0{,}05 \,.\, 5 = 5{,}25$; $y(9) = y(10) - 0{,}05 \,.\, 5 = 4{,}75$. Hľadajme presné riešenie. Koeficient úmernosti označíme k; vtedy $y = k\sqrt{x}$. Pretože pri $x = 10$, musí sa $y = 5$, musí sa $5 = k\sqrt{10}$, odkiaľ $k = 1{,}58$ (výpočty sú správne na dve miesta za desatinnou čiarkou). Preto $y = 1{,}58\sqrt{x}$; $y(11) = 1{,}58\sqrt{11} = 5{,}24$; $y(9) = 4{,}74$. b) Približné hodnoty $y(11) = 4{,}50$; $y(9) = 5{,}50$. Presné hodnoty $y(11) = 4{,}54$; $y(9) = 5{,}56$. c) Približné hodnoty $y(11) = 6{,}00$; $y(9) = 4{,}00$. Presné hodnoty $y(11) = 6{,}05$; $y(9) = 4{,}05$.

Čl. 6

1. $y' = 3x^2(x^2 - 1)^2 + x^3 \,.\, 2(x^2 - 1)\, 2x = x^2(x^2 - 1)(7x^2 - 3)$. **2.** $y' = 3x^2\sqrt{x^2 + x} + \frac{(2x - 1)\, x^3}{2\sqrt{x^2 + x}}$. **3.** $y' = 5x^4 \sqrt[3]{x^2 - 1}\,(x^3 - 2x)^{1/5} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{x^2 - 1}\, 2x \,.\, x^5(x^3 - 2x)^{1/5} + \frac{1}{5} \frac{(x^3 - 2x)^{1/5}}{x^3 - 2x} (3x^2 - 2)\, x^5 \sqrt[3]{x^2 - 1}$. **4.** $y' = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)\sqrt{x^3 - 2} + \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 2}}$ **5.** $y' = 2x\sqrt{\sqrt[3]{x} + x} + x^2 \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1}{2\sqrt{\sqrt[3]{x} + x}}$. **6.** $y' = 5\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right) x + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$. **7.** $y' = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$. **8.** $y' = 2\, \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}$. **9.** $y' = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x + 1)^2}$. **10.** $y' = \frac{-12x + 5}{x^6}\sqrt{x^3 + 2} + \frac{3(3x - 1)}{2x^3\sqrt{x^3 + 2}}$. **11.** $y' = -\frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$. **12.** $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x + 1}} - \frac{x}{3\sqrt[3]{(x + 1)^4}} = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x + 1)^4}}$. **13.** $y' = \frac{4x + 3\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$. **14.** $y' = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}} + \frac{6x^2 + \sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}} = \frac{7x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}}$. **15.** $y' = \frac{(8x - 3^3)\sqrt{1 + x^2}}{(1 + x^2)^3}$. **16.** $y' = \sqrt[3]{(2x + 3)^2} + x\, \frac{4}{3\sqrt[3]{(2x + 3)}}$. **17.** $y' = 3x^2\sqrt{x - 1} + \frac{x^3 - 1}{2\sqrt{x - 1}} + \sqrt[3]{x^2 - 1} + \frac{2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$. **18.** $y' = \frac{-2x^2 - x + 9}{3(x - 1)^3\sqrt[3]{2x - 3}}$. **19.** $y' = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\, \frac{1}{(x + 1)^2}$. **20.** $y' = \frac{4x^3 - 10x^2 - 22x - 11}{3(x - 2)^2\sqrt[3]{(x + 1)^2}}$. **21.** $y' = \frac{-x^5 + 2x^3 + 2x^2 - 1}{(x^3 + 1)^2\sqrt{x^2 - 1}}$. **22.** $y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x + 1}{x^2 + x + 1}\right)^2}\, \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$. **23.** $y' = \sqrt{x^2 - 1}\,\sqrt[3]{x + \sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\sqrt[3]{x + \sqrt{x}} + \frac{(1 + 2\sqrt{x})\, x\sqrt{x^2 - 1}}{6\sqrt{x}\,\sqrt[3]{(x + \sqrt{x})^2}}$. **24.** $y' = \frac{1}{7}\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-6/7}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right) x^2 + 2x\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/7}$. **25.** $y' = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2}{\sqrt[3]{x + 1}} - \frac{1}{3}\, \frac{\sqrt[3]{x} - 2x}{(x + 1)\sqrt[3]{x + 1}} = \frac{1 - 6\sqrt[3]{x^2} - 4x\sqrt[3]{x^2}}{3(x + 1)\sqrt[3]{x^2(x + 1)}}$.

Čl. 7

1. $y' = 10^{\sqrt{x}} \ln 10\, \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **2.** $y' = 2^x \log 2 \ln 10$. **3.** $y' = \ln 10 \log 5 \,.\, 5^{x+1}$. **4.** $y' = -\ln 10 \log 2 \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Čl. 8

1. $y' = -e^{-x}$. **2.** $y' = 2x\, e^{x^2}$. **3.** $y' = (3x^2 - 3)\, e^{x^3 - 3x + 1}$. **4.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}$. **5.** $y' = 5\, e^x - 3\, e^{3x}$.

Čl. 9

1. 2,3026; 4,6052. **2.** $\log_5 15 = \frac{\log 15}{\log 5} = 1{,}6825$. **3.** Po zderivovaní obidvoch strán dostaneme $\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$. Z toho $(uv)' = u'v + uv'$. **5.** $y' = \frac{1}{2x}(2x)' = \frac{1}{x}$. Tento výsledok môžeme dostať aj takto: $y = \ln 2x = \ln 2 + \ln x$; $y' = (\ln 2)' + (\ln x)' = \frac{1}{x}$. **6.** $y' = \frac{1}{x + 3}$. **7.** $y' = \frac{1}{x}$. **8.** $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$. **9.** $y' = \frac{6x - 1}{3x^2 - x + 1}$. **10.** $y' = \frac{2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2}{(x^2 - 1)}$. **11.** $y' = \frac{1 - x}{2x(x + 1)}$. **12.** $y' = \ln x + 1$. **13.** $y' = 3x^2 \ln(x + 1) + \frac{x^3}{x + 1}$. **14.** Aby sme našli deriváciu, musíme najprv obidve strany rovnosti zlogaritmovať (základ logaritmov môže byť ľubovoľný, budeme brať prirodzené logaritmy) $\ln y = x \ln x$. Teraz vezmeme deriváciu obidvoch strán tejto rovnosti, ak vieme, že y je funkcia x aj $\ln y$, tak zložená funkcia: $\frac{1}{y}\, y' =$

$= \ln x + 1$. Dostaneme, $y' = y(\ln x + 1)$, alebo nakoniec $y' = x^x(\ln x + 1)$. Analogicky sa rieši nasledujúci príklad. **15.** $y' = x^{\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{x \ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

Čl. 10

1. $y' = 2\cos(2x+3)$. **2.** $y' = -\sin(x-1)$. **3.** $y' = -(2x-1)\sin(x^2 - x + 1)$. **4.** $y' = 2 \sin x \cos x$. **5.** $y' = 3\cos 3x \cos^2 x - 2\cos x \sin x \sin 3x$. **6.** $y' = (\sin 2x)^x \left[\ln \sin 2x + \frac{2x \cos 2x}{\sin 2x}\right]$ (pozri riešenie príkladu 14 z čl. 9). **7.** $y' = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$. **8.** $y' = \frac{2}{\cos^2 2x} e^{\operatorname{tg} 2x}$. **9.** $y' = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

Čl. 11

1. a) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; a) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$. **3.** $y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. **4.** $y' = \frac{3}{9x^2 + 6x + 2}$. **5.** $y' = \frac{2x-1}{x^4 - 2x^3 + x^2 + 1}$. **6.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

Čl. 12

1. -1; 1. **2.** $1-$.

Čl. 15

1. Pre výpočet integrálu odstránime zátvorky; dostaneme integrál z mnohočlena $\int x(x-1)^2\,dx = \int x(x^2 - 2x + 1)\,dx = \int (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$. **2.** Integrand zapíšeme takto: $\frac{x^2 + 2x - 3}{x} = x + 2 - \frac{3}{x}$. Integrál sa teraz ľahko vypočíta: $\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x - 3\ln x + C$. **3.** Zavedieme substitúciu $3x - 5 = t$; $dt = 3\,dx$, $\int \cos(3x-5)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x-5) + C$. **4.** Rieši sa analogicky ako predchádzajúci. Dostaneme $-\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$. **5.** $\frac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3} + C$. **6.** $\cos x + x \sin x + C$. **7.** $x(\ln x - 1) + C$. Príklady **8** až **11** možno počítať metódou per partes. Vhodnejšie však je použiť metódu neurčitých koeficientov. **8.** $\frac{1}{2}x \sin 2x - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)\cos 2x + C$. **9.** $(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x} + C$. **10.** $(2x+1)\cos x + (x^2 + x - 1)\sin x + C$. **11.** $\int (2x^2+1)\cos 3x\,dx = (a_1x^2 + b_1x + c_1)\cos 3x + (a_2x^2 + b_2x + c_2)\sin 3x$. Zderivujeme obidve strany rovnosti: $(2x^2+1)\cos 3x = (2a_1x + b_1)\cos 3x - (3a_1x^2 + 3b_1x + 3c_1)\sin 3x + (2a_2x + b_2)\sin 3x + (3a_2x^2 + 3b_2x + 3c_2)\cos 3x$, alebo takto: $(2x^2+1)\cos 3x = (-3a_1x^2 - 3b_1x - 3c_1 + 2a_2x + b_2) \cdot \sin 3x + (3a_2x^2 + 3b_2x + 3c_2 + 2a_1x + b_1)\cos 3x$. Preto sa musí $2x^2 + 1 = 3a_2x^2 + 3b_2x + 3c_2 + 2a_1x + b_1$, $0 = -3a_1x^2 - 3b_1x - 3c_1 + 2a_2x + b_2$. Ak sa majú dva mnohočleny rovnať, je potrebné, aby sa rovnali koeficienty pri rovnakej mocnine x. Po porovnaní koeficientov dostaneme: $3a_2 = 2$, $3b_2 + 2a_1 = 0$, $3c_2 + b_1 = 1$, $-3a_1 = 0$, $-3b_1 + 2a_2 = 0$, $-3c_1 + b_2 = 0$. Z tohto vyplýva, že $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_1 = 0$, $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_1 = \frac{4}{9}$, $c_2 = \frac{5}{27}$. Preto $\int (2x^2+1)\cos 3x\,dx = \frac{4}{9}x\cos 3x + \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{27}\right)\sin 3x + C$.

12. $\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$. Po upravení na spoločného menovateľa a jeho odstránení dostaneme: $A(x-3) + B(x-2) = x$ alebo $x(A+B) - 3A - 2B = x$. Ak porovnáme koeficienty pri rovnakej mocnine x, dostaneme $A + B = 1$, $-3A - 2B = 0$, odkiaľ $A = -2$, $B = 3$; $\int \frac{x\,dx}{(x-2)(x-3)} = \int \left\{\frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}\right\}dx = -2\ln(x-2) + 3\ln(x-3) + C$. **13.** $\frac{x+1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$, $A(x-2) + B(x-1) = x + 1$. V poslednej rovnosti položíme $x = 2$, dostaneme $B = 3$; ak položíme $x = 1$, dostaneme $A = -2$, $\int \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = -2\ln(x-1) + 3\ln(x-2) + C$. **14.** $-\ln(x-1) + \ln(x-2) + C$. **15.** Položíme $\sqrt{x} = z$. Potom $x = z^2$ a $dx = 2z\,dz$; $\int \frac{x\,dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{z^2\,2z\,dz}{z^2 + z} = 2\int \frac{z^2\,dz}{1+z} = 2\int \frac{z^2 - 1 + 1}{1+z}\,dz = 2\int \left[(z-1) + \frac{1}{1+z}\right]dz = z^2 - 2z - \ln(1+z) + C = x - 2\sqrt{x} + \ln(1 + \sqrt{x}) + C$. **16.** $\sqrt{x^2 - 5} + C$. **17.** $-\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x + C$. **18.** $-\frac{1}{3\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} + C$. **19.** $-\ln \cos x + C$. **20.** $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$. **21.** $\arcsin \frac{x}{a} + C$. **22.** $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$. **23.** $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$. **24.** Budeme integrovať per partes, položíme $f = \sin 3x$, $dg = e^{2x}\,dx$. Dostaneme $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x = \frac{3}{2}e^{2x}\cos 3x\,dx$. Posledný integrál znova integrujeme per partes, položíme $f = \cos 3x$, $dg = e^{2x}\,dx$. Dostaneme $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\right)$. Ak riešime poslednú rovnosť ako rovnicu pre $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$, dostaneme $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x)}{13}$.

25. $\frac{e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)}{5}$.

Čl. 17

1. $y = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0^2 + d + (3ax_0^2 + 2bx_0 + c)(x - x_0) + (3ax_0 + b) \cdot (x - x_0)^2 + a(x - x_0)^3$. Všetky nasledujúce členy sa rovnajú nule. Súčet vypísaných štyroch členov sa rovná mnohočlenu. 2. $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2, \ldots, y^{(n)}(0) = n$, $y = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \ldots = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right) = x\,e^x$. **3.** $y = e\left[1 + (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \ldots\right]$. **4.** Prvý spôsob: $y(0) = 1$, $\Delta y = y(\Delta x) - 1$.

Δx	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\Delta x \to 0$
$y(\Delta x)$	2,7183	1,6487	1,2840	1,1331	$1 + \Delta x$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	1,718	1,297	1,136	1,065	1

Druhý spôsob: $\Delta y = y\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - y\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)$.

Δx	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\Delta x \to 0$
$y\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$	1,6487	1,2840	1,1331	1,064 494	$1 + \frac{\Delta x}{2}$
$y\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)$	0,6065	0,7788	0,8825	0,939 412	$1 - \frac{\Delta x}{2}$
Δy	1,042	0,5052	0,2506	0,125 082	Δx
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	1,042	1,010	1,002	1,0006	1

5. Nájdeme derivácie: $\frac{d \ln(1+r)}{dr} = \frac{1}{1+r}$, $\frac{d^2 \ln(1+r)}{dr^2} = -\frac{1}{(1+r)^2}$, $\frac{d^3 \ln(1+r)}{dr^3} = \frac{2}{(1+r)^3}$, ... Hodnoty týchto derivácií pri $r = 0$ sa rovnajú: 1; —1; 2; ... Z MacLaurinovho vzťahu vychádza $\ln(1+r) = r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{6} \cdot 2r^3 + \ldots = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} + \ldots$, $e^{m \ln(1+r)} = e^{mr} \cdot e^{-\frac{mr^2}{2} + \frac{mr^3}{3} + \ldots} \ldots$; pri malom r e^{mr} sa odlišuje od skutočnej hodnoty súčiniteľom $e^{-\frac{mr^2}{2}}$. V príklade z čl. 8 na str. 103. $m = 50$, $r = 0{,}002$; $e^{-\frac{mr^2}{2}} = e^{-0{,}01} = 0{,}99$; chyba je 1 %; m môže byť ľubovoľné veľké číslo, nech je malý len súčin mr^2, potom mr^3, mr^4, ... sú určite malé.

Čl. 19

1. $y = \frac{x+1}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \ldots$ **2.** $y = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ **3.** $y = \ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots$ V prvom i druhom príklade sú rady vhodné na výpočty, ak $|x| < 1$; v treťom, ak $0 < x < 2$. **4.** $f(x)\,g(x) = f(0)\,g(0) + [f'(0)\,g(0) + g'(0)\,f(0)]\,x + \frac{1}{2}[f''(0)\,g(0) + 2f'(0)\,g'(0) + g''(0)\,f(0)]\,x^2 + \ldots$

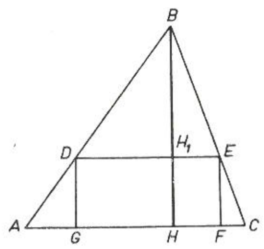
Čl. 21

1. 1. **2.** $-\frac{1}{2}$. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** ∞. **5.** 1. **6.** $\frac{1}{2}$.

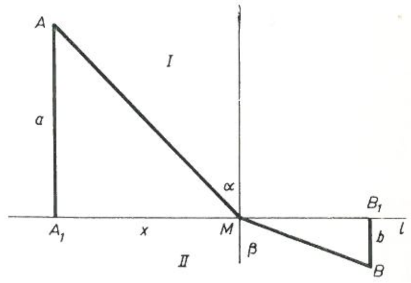
Kapitola III

Čl. 1

1. $x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$. **2.** Základňa trojuholníka je $AC = a$, výška $BH = h$, $DEFG$ je hľadaný obdĺžnik. Z podobnosti (*obr. 238*) vyplýva $\frac{DE}{AC} = \frac{BH_1}{BH}$; ak označíme $DE = x$, dostaneme $\frac{x}{a} = \frac{h - H_1H}{h}$, odkiaľ $H_1H = h\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Obsah



Obr. 238



Obr. 239

obdĺžnika $S(x) = xh\left(1 - \frac{x}{a}\right) = hx - \frac{h}{a}x^2$. Po vyriešení rovnice $S'(x) = 0$, dostaneme $x = \frac{a}{2}$; vtedy $H_1H = \frac{h}{2}$. **3.** Hľadaný pravouholník je štvorec, $S = \frac{1}{2}R^2$. **4.** Polomer základne banky $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, jej výška $H = 2r$. **5.** $t = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$. **7.** Čas pohybu $T = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{b^2 + (c-x)^2}$, kde $c = A_1B_1$ (*obr. 239*). Z podmienky $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$ vyplýva $\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 - (c + x)^2}}$. Ak si všimneme, že $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin\alpha$, $\frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin\beta$, dostaneme $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$. To je Snellov zákon lomu, t. j. bod sa pohybuje tak, ako prebieha svetelný lúč na rozhraní dvoch prostredí. Aby sme dokázali, že skutočne dostaneme minimum T, stačí napísať $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}$. Ľahko sa presvedčíme, že pri všetkých x bude $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} > 0$.

Čl. 2

1. $y_{\min} = 3$. **2.** Pre $x = 0$, $y_{\max} = 0$. **3.** Pre $x = 0$, $y_{\max} = 1$.

Čl. 3

1. $\frac{\pi}{2}$. **2.** $\frac{\pi}{2}$. **3.** $\frac{1}{6}$. **4.** $2\pi + \frac{4}{3}$ a $6\pi - \frac{4}{3}$. **5.** $a \ln 2$, kde a je množstvo farby, potrebnej na zafarbenie jednotkového plošného obsahu. **6.** $\frac{37}{12}a$. **7.** 10π.

Čl. 4

1. $\frac{x_0}{n+1}$. **2.** $\frac{m - n}{\ln m - \ln n}$. Pre $m = n + \nu$ $\ln m = \ln(n + \nu) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{\nu}{n}\right) = \ln n + \frac{\nu}{n} - \frac{\nu^2}{2n^2} + \ldots$; $\bar{y} = \frac{\nu}{\frac{\nu}{n} - \frac{\nu}{2n^2}} = n\left(1 + \frac{\nu}{2n}\right) = \frac{n + m}{2}$.

3. a) Obidve stredné hodnoty sú rovné $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$ a $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$. **4.** Ak je T perióda, potom sa musí $\sin[\omega(t + T) + \alpha] = \sin(\omega t + \alpha)$, odkiaľ $\omega(t + T) + \alpha = \omega t + \alpha + 2\pi$, $\omega T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Perióda funkcie y^2 sa rovná $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$. Tak teda treba nájsť strednú hodnotu funkcie $y = \sin^2(\omega t + \alpha)$ na intervale od $t = 0$ do $t = \frac{\pi}{\omega}$. $\bar{y} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t + \alpha)\,\mathrm{d}t}{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega t + \alpha)\right\}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Čl. 5

1. $S = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x$. **2.** $S = \int_0^1 \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$. **3.** $S = \frac{4}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 + \frac{b^2x^2}{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$.

4. Ak uskutočníme danú substitúciu, dostaneme $S = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}} \frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z^2 - 1}$. Nájdeme

$\int \frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z^2 - 1}$. Máme $\int \frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z^2 - 1} = \int \frac{z^2 - 1 + 1}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z = \int\left(1 + \frac{1}{z^2 - 1}\right)\mathrm{d}z = z + \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 1}$. V poslednom integráli zapíšeme integrand takto: $\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 1}$. Čísla A a B nájdeme, ak zlomky upravíme na spoločného menovateľa a porovnáme čitateľov $A(z + 1) + B(z - 1) = 1$, odkiaľ $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Nakoniec $\int \frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z^2 - 1} = z + \frac{1}{2}\ln\frac{z - 1}{z + 1}$, preto $S = \left[z + \frac{1}{2}\ln\frac{z - 1}{z + 1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}} = \sqrt{1 + \mathrm{e}^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + \mathrm{e}^2} - 1}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^2} + 1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.

Čl. 6

1. Interval rozdelíme na úseky od $x = 0$ do $x = 0{,}9$ od $x = 0{,}9$ do $x = 2$, dostaneme $S_1 = 1{,}043$, $S_2 = \frac{\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{0,9} + \mathrm{e}^{-0,9}}{2} + \frac{1}{2}\int_{0,9}^{2} \frac{2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$. V poslednom integráli možno položiť $e^x = t$. Nakoniec dostaneme $S_2 = 2{,}624$, $S = S_1 + S_2 = 3{,}667$. Podľa presného vzťahu dostaneme $S = 3{,}627$. Chyba je 1 %. **2.** $S = 1{,}146$. **3.** Dĺžka oblúka kružnice, o ktorú ide, je $S = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{R\,\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{R}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{x}{R}\right)^6 + \frac{35}{128}\left(\frac{x}{R}\right)^8 + \ldots\right\}\mathrm{d}x = R\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896} + \frac{35}{18\,432} + \ldots\right\}$. Vzhľadom na toto dostaneme pre číslo π:

$$\text{a)}\quad \pi \approx \frac{4}{\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160}\right\} = 3{,}117,$$

$$\text{b)}\quad \pi \approx \frac{4}{\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896}\right\} = 3{,}133,$$

$$\text{c)}\quad \pi \approx \frac{4}{\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896} + \frac{35}{18\,432}\right\} = 3{,}138.$$

Čl. 7

1. Zvolíme os x v priemere AB, bod A je počiatok súradnicovej sústavy. Prierez, ktorý je kolmý na priemer AB, je pravouhlý trojuholník PQR, jeho obsah (pozri *obr. 85*) $S(x) = \frac{1}{2}PQ\,.\,QR = \frac{1}{2}PQ^2\operatorname{tg}\alpha$. Podľa známej vety z geometrie

$PQ^2 = AP \, . \, PB = x(2R - x)$. Preto $S(x) = \frac{1}{2} x(2R - x) \operatorname{tg} \alpha$. $V = \int_0^{2R} S(x) \, dx = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha$. **3.** $V = 2\pi$.

Čl. 8

1. $y_{\max} = 2$ pre $x = 0$, $y_{\min} = -2$ pre $x = 2$. **2.** Maximá a minimá neexistujú. Krivka pretína os x v bode $x = 1 + \sqrt[3]{14} \approx 3{,}4$ a os y v bode $y = -15$. **3.** Maximá a minimá neexistujú. Krivka pretína os x medzi bodmi $x = 0$ a $x = -1$ a os y v bode $y = 3$. **4.** Tri korene. **5.** Tri korene. **6.** Dva korene. **7.** Jeden koreň.

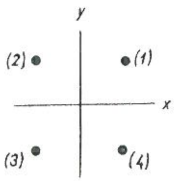
Kapitola IV

Čl. 2

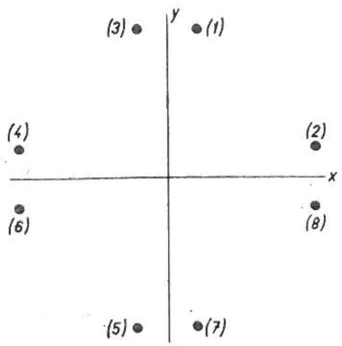
$A(2, 1)$, $B(1, 2)$, $C(0, 3)$, $D(-1, 2)$, $E(-2, 1)$, $F(-3, 0)$, $G(-2, -1)$; $H(-1, 2)$, $K(0, -3)$, $L(1, -2)$, $M(2, -1)$, $N(3, 0)$, $O(0, 0)$.

Čl. 3

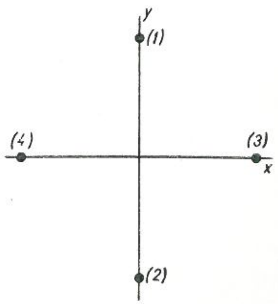
1. Pozri *obr. 240*. **2.** Pozri *obr. 241*. **3.** Pozri *obr. 242*. **4.** $r = \sqrt{2}$, $\alpha = 45°$; $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -45°$; $r = 3\sqrt{2}$, $\alpha = -135°$; $r = 4\sqrt{2}$, $\alpha = 135°$. **5.** 2; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **6.** $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 3)$, $A_3(4, 6)$ ležia na jednej priamke; $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 3)$, $A_3(-2, -3)$ ležia na jednej priamke; $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 3)$, $A_3(-2, 3)$ neležia na jednej priamke. **7.** $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$; $\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$; pozri *obr. 243*. **8.** $(a, 0)$; $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-a, 0)$; $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, pozri *obr. 244*. **9.** a) Dva prípady: $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; $\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; pozri *obr. 245a*; $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; $\left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. b) Štyri prípady: $(0, 0)$; $(a, 0)$; $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; pozri *obr. 245b*; $(0; 0)$; $(a; 0)$; $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0, 0)$; $(-a, 0)$; $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0, 0)$; $(-a, 0)$; $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. **10.** $A_2(x_1, -y_1)$; $A_3(-x_1, y_1)$; $A_4(-x_1, -y_1)$; pozri *obr. 246*.



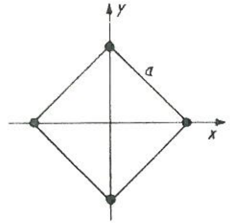
Obr. 240



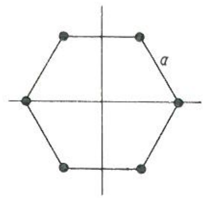
Obr. 241



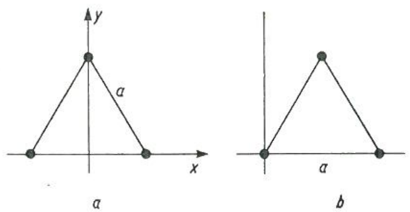
Obr. 242



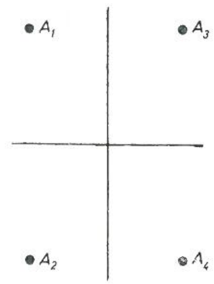
Obr. 243



Obr. 244



Obr. 245



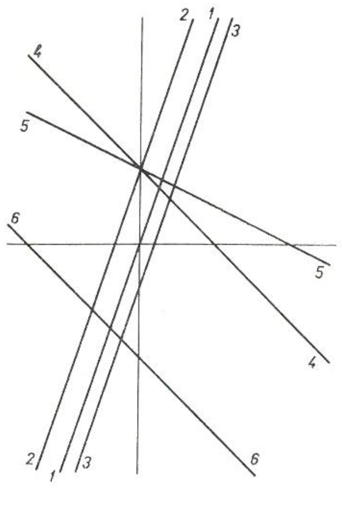
Obr. 246

Čl. 4

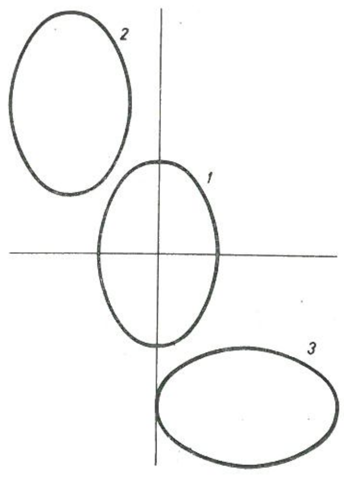
1. Pozri *obr. 247*.

Čl. 7

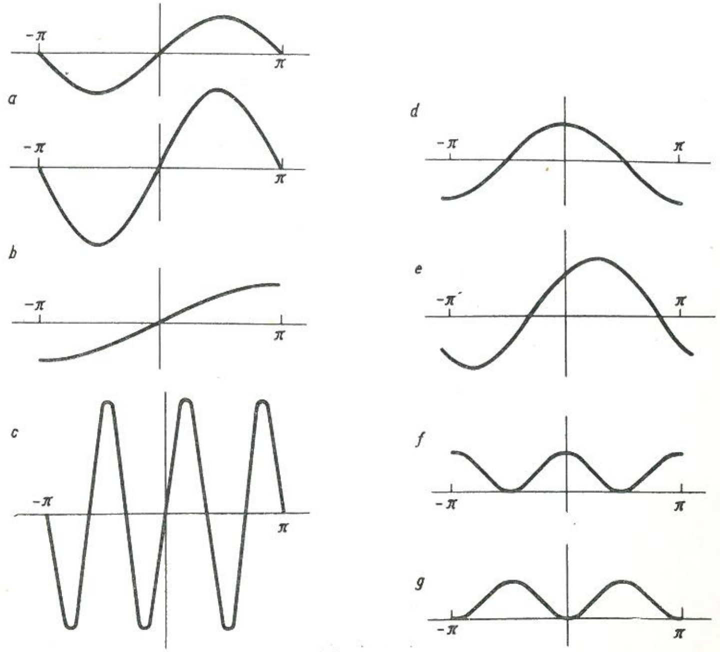
1. Pozri *obr. 248*. **2.** Pozri *obr. 249*. **3.** Pozri *obr. 250*.



Obr. 247



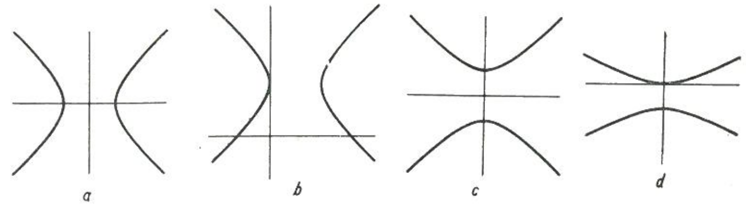
Obr. 248



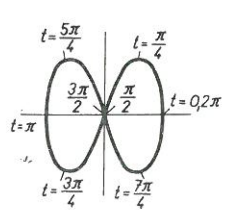
Obr. 249

Čl. 8

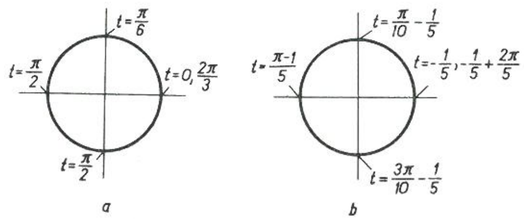
1. Prvá krivka je znázornená na *obr. 251.* **2.** Pozri *obr. 252.* **3.** Pozri *obr. 253.* **4.** Hľadaný graf — priamka $y = x$, no nie celá priamka ale len úsečka určená bodmi (—1, —1), (1, 1), pozri *obr. 254.* **5.** Pozri *obr. 255.* Návod. Parametrické rovnice krivky sú $x = t—\sin t$, $y = 1—\cos t$.



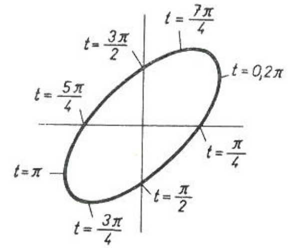
Obr. 250



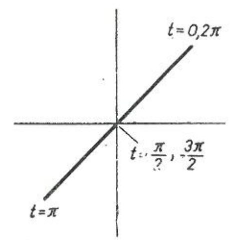
Obr. 251



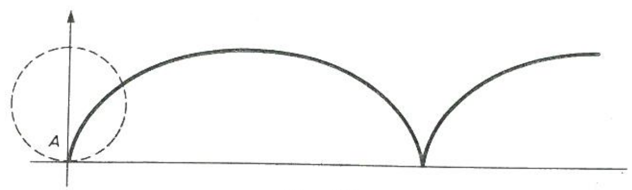
Obr. 252



Obr. 253



Obr. 254



Obr. 255