5. TEORIE GENERICKÉHO MODELU

5.1. Poznávací proces

Existují různé teorie poznávacího procesu. Tu, kterou zde uvedeme, koncipoval na začátku sedmdesátých let minulého století Vít Hejný. Cílem modelu je vytvořit nástroj na odhalení formálních poznatků žáků a dát návrh na reedukační zásahy.

Model byl v uplynulých 35 letech rozpracováván a jeho novější verzi lze najít v knize [DŠM] ve druhé kapitole publikace [25K].

V roce 2003 na popud G. Littlera byl anglický termín „separate model“ nahražen termínem „isolate model“ a v roce 2005 navrhnul A. Simpson nahradit nevhodný anglický termín „universal model“ termínem „generic model“. Protože se vesměs jedná o slova latinského původu, byla stejná terminologická změna udělána i v českém jazyce.

Zde používáme termíny „izolovaný model“ a „generický model“. V starší literatuře najdeme termíny „separovaný model“ a „univerzální model“; ten je použit i v knize [DŠM].

Podle V. Hejného pojmotvorný proces lze chápat jako sekvenci pěti etap:

motivace	→	izolované modely	→	**generické modely**	→	abstraktní poznatek	→	krystalizace

Tab 5.1

Jednotlivé etapy pojednáme podrobněji. Klíčovou roli zde hraje etapa generických modelů.

5.1.1. Motivace[a] . Touha po poznávání pramení z rozporu mezi „nevím“ a „potřebuji znát“, někdy i z jiných potřeb a rozporů. Dítě je zvídavé, má silnou potřebu poznávání věci, které je obklopují. Ptá se na vše co se octne v jeho poli vnímání. Potřebuje získávat nové a nové zkušenosti, často i za cenu bolesti.

Touha získávat nové zkušenosti je příznačná pro duchem mladé lidi. Dítě, které sleduje zajímavou činnost někoho jiného, má potřebu zkusit si stejnou činnost samostatně.

<u>Příběh 5.1</u>. Máma myje nádobí a čtyřletá dcerka chce nádobí utírat. Máma se bojí, že dcerka něco rozbije, že ji to zdrží od práce a tak dcerku odbije, že ještě je malá, že na to má čas.

<u>Komentář.</u> Máma na nabízenou pomoc hledí účelově, neuvědomuje si, že to, o co zde jde, je naplnit potřebu dívky získávat nové zručnosti a zkušenosti. Hlavním výsledkem činnosti není utřené nádobí, ale to, co se dívka naučí. Matka navíc nechává nevyužitu příležitost k budování sociálních pracovních vazeb s dcerkou. To je chyba ještě závažnější. Obecně lze říct, že

[a] Ne vždy je žák k matematice motivován. Nezřídka bývá nucen. Pak nemluvíme o motivaci, ale stimulaci. Rozdíl vychází z latinských slov: moveō = hýbati, pohybovati, stimulō = ostnem bodati, píchati.

dospělí si často neuvědomují, že výsledkem práce dítěte není produkt, ale činnost sama, znalosti a zkušenosti, které dítě nabude a socialní vazby, která se zde utužuje.

Příběh 5.2. Táta se sedmiletým synem sledují v televizi fotbalový zápas. Syn žádá tátu, aby si šli na dvůr zakopat. Táta je zabrán do zápasu a odmítá. Hoch bere míč a jde na dvůr sám.

Komentář. Otec se domnívá, že syna zápas nezajímá. Není tomu tak. Kdyby jej to nezajímalo, nežádal by otce, aby si šli zahrát. Syna zápas zajímá, ale jeho potřeba nabývat vlastní zkušenosti je silnější, než jeho potřeba prožívat zápas.

Žáci, kteří jsou k učení se matematiky motivováni potřebou poznávat jsou na našich školách spíše výjimkou než pravidlem. Nejčastěji hlavním motivem bývá snaha získat dobrou známku, nebo strach ze známky špatné. Někdy i snaha zalíbit se učiteli, někdy třeba i ušlechtilá snaha udělat lepší známkou radost nemocné mamince.

Motivace dítěte se od motivace dospělého člověka liší přinejmenším ve dvou věcech. Jsou to:
1) **naléhavost potřeby** poznávat a
2) **motivační spektrum**.

Dítě chce např. papír a nůžky a dožaduje se toho ihned, teď. Právě teď je jeho připravenost získávat nové manipulativní zkušenosti intenzivní. Za nějakou chvíli již tato připravenost odezní. Dospělý dokáže na realizaci svého motivačního impulzu čekat.

Motivační spektrum dítěte je široké a těkavé. Motivace dospělého člověka je stálá a silně selektivní. Dítě se zajímá o pejska, pak o mapu, pak o šachy,… Zájmy dospělého člověka jsou soustředěné do několika málo oblastí.

Uvedená různost motivace dítěte a dospělého způsobuje, že dospělý člověk často nerozumí dítěti. Těkavost jeho zájmů považuje za nežadoucí, protože „chaotická a nesystematická práce k ničemu nevede“ a naléhavost potřeby poznávat ihned a po svém vnímá jako tvrdohlavost, nebo dokonce drzost.

Podnětné prostředí, které umožňuje dítěti seberealizaci a je k němu vstřícné, zvídavost dítěte umocňuje. Žel, škola většinou není podnětným prostředím a zvídavost dítěte spíše tlumí, než rozvíjí.

Výzva 5.1. Popište z vlastního života situaci, kdy jste byl(a) motivován(a) k nějaké poznávací činnosti, ne nutně matematické; popište i situaci, kdy jste k tomu byl(a) nucena.

5.1.2. Izolovaný model (IM) je konkrétní případ příští znalosti. Etapu izolovaných modelů rozdělíme na 4 podetapy:

1. Ve vědomí se usadí první konkrétní zkušenost, první model - zárodek příštího poznání.
2. Postupný příchod dalších a dalších izolovaných modelů, které zatím nejsou propojeny. Mohou se objevit i modely falešné a být zamítnuty modely správné.
3. Některé modely začnou na sebe navzájem poukazovat a shlukovat se do skupin a oddělovat od jiných. Vzniká předtucha, že tyto modely jsou v jistém smyslu „stejné“.
4. Zjištění podstaty oné „stejnosti“, vede k vytvoření komunity modelů.

Příběh 5.3. (Napsala Zdeňka Sýpalová, krátil MH.) Šestiletá dcera mé sousedky je velice bystré dítě. Ráda se učí, ale ještě nechodí do školy, protože je narozena v září. Ráda počítá. Když jsem jí dala sečíst čtyři čísla, řekla mi: „To je pro děti ze školičky, já chci nějakej těžšejší, teto!“ Napsala jsem jí tedy součet sedmi čísel. Asi za 15 minut přišla s výsledkem, byl správný. Dala jsem jí tedy znovu stejná čísla v jiném pořadí. Opět přišla se správným výsledkem asi po 15 minutách, ale se slovy: „To je divný, vyšlo to stejně!“. Čísla jsem jí tedy opět proházela a zadala „novou“ úlohu. Tentokrát přišla asi po 10 minutách, úplně nadšená a volala, že jsem kouzelník, že to vyšlo zase stejně. Po čtvrtém prohození čísel přišla za dvě minuty a povídá. „Teto, ty si ze mně děláš nějakou legraci. Ty čísla jsou přece pořád stejný, jsem to měla vypočítaný hned!“

Komentář. Dívka odhalila komutativitu sčítání. První výpočet byl první IM. Druhým výpočtem byl nejen druhý IM, ale i tušení souvislosti obou izolovaných modelů IMů). Dívka se dostává do třetí podetapy IM-ů. U řešení třetí úlohy dívka odhalí příčinu stejnosti tří výsledků a tím dosáhne do čtvrté podetapy IM-ů.

Příběh 5.4. (Napsala Marcela Sasková, krátil MH.) Mé dvě děti se dohadovaly, kdo snědl víc rohlíků. Ondra snědl celý rohlík, Šárka měla rohlík podélně rozkrojený a tvrdila, že snědla dva rohlíky. Ondra se hádal, že snědli oba dva stejně, tedy 1 rohlík, protože Šárka má dvě půlky. Šárka argumentovala, že toto nejsou dvě půlky, protože jsou stejně dlouhé, jako celý rohlík, dvě půlky by údajně byly tehdy, pokud by byl rohlík rozkrojen napříč.

Komentář. Rohlík rozpůlený příčně je pro Šárku IM slova „polovina“, ale rohlík rozkrojený podélně není. Pojem „polovina“ je u Šárky teprve ve druhé etapě IM-ů a příběh ilustruje zamítnutí správného modelu.

Příběh 5.5. (Podle vyprávění Jany Hrinkové, učitelky mateřské školy.) Ke svačině byly koláčky. Každému jsem koláček rozpůlila. Šestiletý Patrik řekl Milanovi „to je polovina i to je polovina“. Milan řekl: „to jsou dvě poloviny“. Pak mne Patrik žádal, abych jednu jeho půlku koláčku ještě rozkrojila. Když jsem to udělala, hoch ukázal postupně na všechny tři kusy a třikrát opakoval „to je třetina“. Milan to udělal stejně. Já rozpůlila i druhou Patrikovu polovinu koláčku. Na každou čtvrtinu jsem ukázala a řekla: „to je čtvrtina“. Oba hoši to opakovali. Chtěla jsem svým vysvětlením ukázat, že předchozí řeč o třetině byla chybná, ale nepovedlo se mi to. Řekla jsem si, že na to mají ještě kluci dost času.

Komentář. Důležitý je zájem obou hochů o poznávání částí. Není běžné že předškolák zná slovo třetina. Pro Partika to byla každá část celku, který je rozdělen na tři části. Zatím si hoch neuvědomuje, že části musí být stejné, že dělení musí být spravedlivé. Pojem „třetina“, který se teprve začíná ve vědomí hocha tvořit, ještě asi nemá žádný jasně pochopený IM a ten, který se v příběhu objevil je falešný. Učitelka si počínala rozumně. Nesnažila se chybnou představu Patrika korigovat – bylo by to předčasné. Ukázala jiný a správný pojem zlomku.

Výzva 5.2. Popište vlastní izolované modely pojmu a) pětina, b) dvě pětiny, c) tři poloviny.

5.1.3. Generický model (GM) vzniká AHA-efektem z komunity izolovaných modelů. Je jádrem skutečného poznání. Když chci zjistit do jaké míry žák ovládá nějaký pojem, vztah, operaci, proces nebo situaci, zjišťuji počet a kvalitu jeho GM-ů příslušného poznatku. Například kvalitu znalosti operace sčítání u daného žáka hodnotíme podle toho, kolik z GM-ů uvedených v tabulce 3.1. ovládá pasivně (tj. vyřeší slovní úlohu uvedeného typu) a kolik aktivně (tj. je schopen vytvořit slovní úlohu daného typu).

V poznávacím procesu hraje GM roli pivota. Směrem

dolů sjednocuje komunitu IM-ů a je prototypem každého jedince této komunity
nahoru je východiskem k vytvoření a porozumění abstraktního poznání.

Nás teď zajímá pouze první z obou směrů. Je ilustrován dvěma příběhy.

Příběh 5.6. Pětiletá Janka peče s maminkou vánoční cukroví. Na plech klade své rohlíčky a počítá „Jeden, dva, tři čtyři, pět, pět. Udělala jsem pět rohlíčků“. První plech donese maminka na balkón a připravuje druhý plech. Janka opět klade své rohlíčky. Tentokráte napočítala do sedmi. Maminka chválí dcerku a říká: „Na balkoně je pět tvých rohlíčků, teď v troubě je jich sedm. Kde jich máš více?“ Janka po chvilce uvažování odpoví: „řeknu ti to, až se upečou“.

Komentář. Pro Janku jsou čísla služebníky věcí, nemají ještě samostatnou existenci. Janka má představu o tom, co je „pět rohlíčků”, ale zatím neví, že při počítání rohlíčků může použít například prsty. Číslo zjišťuje říkankou a má ho vázáno na daný IM. Ještě neví, že porovnat „pět rohlíčků” a „sedm rohlíčků” lze udělat pomocí prstů. Prsty jsou jiný IM a dívka ještě neví, že tyto IM-y se mohou zastupovat. Poznání Janky je na úrovni druhé podetapy IM-ů.

Příběh 5.7. Pětiletá Františka ráda počítá. Zejména, s babičkou. Již několikrát sčítala 2 a 3 dohromady na bonbónech, panenkách, židlích ap. Pak ji babička dala náročnou úlohu: „Tady pod ubrouskem jsou dvě jahody a pod moji rukou jsou tři jahody. Kolik je tady jahod dohromady?“ Dívka jahody neviděla. Chvíli na ubrousek i babiččinu ruku hleděla, pak k ubrousku dala dva prsty levé ruky a k babiččině ruce tři prsty pravé ruky a prsty spočítala. Radostně zvolala: „Pět“. Babička ji velice pochválila. Františce zasvítila očka a řekla: „To pokaždé bude pět. Dvě a tři dohromady je pokaždé pět.

Komentář. Při práci s malými čísly si běžně pomáháme prsty. Lhostejno zda počítáme holuby na střeše nebo dny strávené na služební cestě. Prsty jsou tedy generický nástroj na práci s malými čísly. Františka již určitě viděla, jak dospělí používají prstů k počítání, ale teď sama tento nástroj objevila. Objevila nejen generický nástroj ale i generický poznatek 2 + 3 = 5 bez ohledu na objekty, které počítáme. Mnohé předchozí součty 2* + 3*[a] zde slouží jako IM-y, součet uskutečněný na prstech je MG. Je sjednotitelem všech předchozích součtů 2* + 3*, a současně je prototypem všech dalších podobných součtů, které bude dívka počítat. V tomto objevu je již předznamenán abstraktní poznatek, že totiž výsledek součtu jakýchkolik objektů závisí pouze na číslech, nikoli na tom, co se počítá. Právě tento hluboký objev způsobil velikou radost dívky.

Budování GM-ů je zdlouhavé. Ve snaze urychlit proces poznávání, dospělí (rodiče i učitelé) často dávají dítěti příslušné poznání přímo ve formě instrukce, poučky, vzorce, definice, nebo návodu. Neuvědomují si, že nedávají dítěti poznání, ale pouze protézu poznání. Ta pak u mnoha žáků předznamenává následnou matematickou a někdy i intelektuální invaliditu. Poznání, které není opřeno o IM-y a GM-y, ale je uchováno pouze pamětí pomocí pouček, vzorců apod. nazveme poznáním **formálním**. (Mechanical, or parrot like knowledge).

[a] znak 2* představuje dva objekty; například dva bonbóny, dvě panenky, dvě židle, dva lidi, … stejně i znaky 3*, nebo 11*. Hvězdička zastupuje jakýkoli objekt.

5.1.4. Formální znalost se do vědomí žáka dostává zvenčí a je uchováváno pamětí. Když paměť selže, je žák je v koncích. Dva příběhy ilustrují, jak snaha dospělých urychlit učení se dítěte připomíná zahradníka, který v dobré víře, že urychlí růst květů, povytahuje je ze země.

Příběh 5.8. Pětiletý Filip spočítal, že 2 jablíčka a 3 jablíčka dohromady je 5 jablíček. Potom měl spočíst, 2 bonbony a 3 bonbony. Hoch začal počítat. Otec jej přerušil a ukázal mu, že nemusí počítat, co již bylo spočítané. Stačí využít předcházející výsledek. Otec chlapci ukázal, že vztah 2 + 3 = 5 je stejný, ať již k počítání použijeme prsty, židle, autíčka, nebo sirky. Hoch tátovo vysvětlování pochopil, ale nadšení z nové znalosti neprojevoval.

Komentář. Poznatek, že součet 2* + 3* = 5* nezávisí na objektech, ke kterým je vázán, byl Filipovi „zvěstován shůry“. Jistě by se k tomuto poznatku hoch dopracoval i samostatně, ale později. Otec, v domnění že pomáhá synovu vzdělávání, připravuje hocha o radostný zážitek autonomního objevu. Urychluje rozšíření rozsahu chlapcových vědomostí, ale zpomaluje rozvoj jeho schopnosti objevovat nové věci. Vnucuje chlapci protézu GM-u. Navíc, a to je zásadní, otcovo počínání deformuje Filipův styl učení se. Orientuje jej k přebírání hotových poznatků a ne ke konstrukci poznatků vlastních. Žák, kterému jsou poznatky vnucovány nebude v budoucnu ochoten, ani schopen dopracovat se k těmto vlastními silami. Stane se z něj intelektuální příživník, abychom použili slova A. M. Maťuščina.

Zcela jiná byla cesta poznání u Františky v příběhu 5.7. Babička Františce nic nevysvětlovala, ale dala ji náročnou úlohu. Dívka tak objevila, že prsty jsou generický nástroj pro počítání.

Příběh 5.9. Alek (7. ročník) má dokázat, že 1/5 > 1/6. Hoch řekne: „Protože šest je více než pět (píše 6 > 5) a protože znaménko nerovnosti se při přetočení zlomků…“ po upozornění učitelky se opraví „…se při převrácení zlomků převrací, (pauza) je pětina více než šestina.“

Po hodině jsem s Alekem rozmlouval. Zjistil jsem, že hoch má dobrou představu o zlomcích ¼, ¾ i 2/3. Pak jsem se Aleka zeptal zda je víc 0,25, nebo 1/3. Po dvou vteřinách hoch řekl, že 0,25. Pak vysvětlil: „Těch nula celá dvacet pět, je jako čtvrtina (pauza) dvacet pět korun je čtvrtina stovky. No a čtvrtina je víc než třetina“.

Komentář. Překvapivé je, že Alek přesto, že zná pravidlo o porovnání kmenových zlomků a má dobrou představu o zlomcích ¾ a 2/3, odpověděl chybně. Proč? Zřejmě proto, že oblast zlomků je v hochově vědomí uložena ve třech různých kontextech. V kontextu životních zkušeností má hoch dobrou představu o několika „malých“ zlomcích. Jsou to IM-y hochova skutečného poznání. V kontextu školních znalostí nemá hoch o zlomcích žádné představy; zde jsou pouze poučky, návody a pravidla. Třetí kontext pracovně nazveme **lákavá pravidla**. Jsou to chybná jednoduchá pravidla, které si tvoří žák sám. Například pravidlo o porovnávání zlomků (protože je 4 >3 je též ¼ > 1/3), pravidlo o sčítání zlomků (a/b + c/d = (a+c)/(b+d)), pravidlo pro písemné odčítání (4284 – 1576 = 3312) apod. Alek nejprve správně převedl 0,25 na ¼, neboť zde použil životní zkušenost s penězi. K porovnání zlomků 1/3 a ¼ nepoužil ani poučkou učitelky, ani představou zlomků, ale lákavé pravidlo. To je příčina jeho chyby.

Alek ví, že vše, co se bude o zlomcích učit, bude zvládat pouze pamětí. Jeho strategie učení se zlomkům je orientována k paměťovému učení se pravidlům a jejich nácviku. IM-y zlomků a příslušné představy ustrnou na těch několika případech, které zná ze života. K žádnému GM se Alek nepropracuje, neboť, na rozdíl od práce s přirozenými čísly, s nimiž člověk nabývá mnohé zkušenosti v běžném životě, leží zlomky vně potřeb bežného dne. Proto zlomky zůstávají pro mnoho lidí oblastí matematické mágie. K příběhu se vrátíme v kapitole 5.2.1.

Výzva 5.3. V knize [Mareš] na straně 95 je tabulka různých typů pojetí učení. Pokuste se o zařazení sebe sama do této tabulky. Pak se pokuste zařadit sem i vám dobře známou osobu.

5.1.5. Převzetí, přijetí a osvojení GM. Zrod GM je vždy objevem. K tomu se ve třídě dopracuje jen několik málo žáků. Z toho ale neplyne, že poznání ostatních žáků musí být formální. Formální bude pouze u toho žáka, který nový objev **převezme** od objevitele jako hotový produkt a zatím se nesnaží porozumět mu, tj. propojit jej na vlastní zkušenosti, na vlastní IM-y. Žák, který nový poznatek vloží do kontextu svých IM-ů porozumí jeho vzniku i smyslu. V tomto případě řekneme, že žák nový poznatek od spolužáka **přijal**. Když navíc při přijetí nového poznatku dojde k takové jeho modifikaci, která je spojena s AHA-efektem, řekneme, že žák si poznatek **osvojil**. Může se dokonce stát, že osvojený poznatek se stane východiskem nového objevu.

Proces, který probíhá ve třídě od okamžiku, když žák – objevitel seznámí spolužáky se svým objevem a který vede k tomu, že další a další žáci nový poznatek nejen převezmou, ale i příjmou nebo si jej dokonce osvojí pracovně nazveme **třídní osmóza (poznatku).**

Žák, který udělal objev nového poznatku seznámí se svým objevem třídu. Spolužák, který je již na úrovni čtvrté podetapy IM-ů s velikou pravděpodobností objev pochopí a porozumí mu v kontextu svých zkušeností. Ve třídě vznikne diskuse, která dá na nový objev více pohledů. To pomůže žákům, kteří ještě nejsou ve čtvrté podetapě IM-ů uvidět nové souvislosti, rozšířit vlastní zásobu IM-ů o další důležité zkušenosti a případně postoupit k vyšší podetapě. Tento proces třídní osmozy pokračuje. Narůstá počet žáků, kteří se posouvají v posloupnosti:

$$\text{Převzetí} \rightarrow \text{přijetí} \rightarrow \text{osvojení} \rightarrow \text{nový objev.} \qquad (1)$$

Příběh 5.10 je popsán v příloze 1. Popisuje jak žáci 3. ročníku hledali návod na řešení součtového trojúhelníku z Tab. 5.2 když jsou známa čísla A, C a F.

A	B	C
D	E	
F		

Tab. 5.2

Komentář. Každá vyřešená úloha byla pro žáka jeho IM-em. Případný objev GM-u byl pak objevem návodu. Došlo celkem ke dvěma dílčím objevům: Eva našla GM pro případ A = C a Robert pro případ, kdy rozdíl čísel A a C je 1. Úplných objevů bylo šest: Martin, Lenka s Veronikou, Michal, Sylva, Pavel a opět Lenka. Čtyři žáci návod Sylvy pouze převzali. Míša neměla potřebu návodu porozumět. Tím zde rezignovala na svůj další intelektuální růst. Naopak Boris, snad ještě slabší a určitě pomalejší než Míša, objev převzal, ale pak se zaměřil na dílčí úlohu (A = 0) a přes sérii IM-ů došel až k procesuálnímu GM-u. Měl obrovskou radost. Odhodlání nerezignovat je u slabších žáků rozhodující. Učitel slabšího žáka povzbuzuje tím, že mu častěji umožní radost z úspěchu.

Příběh 5.11. (Podle vypravování kol. Jitky Michnové). Ve druhém ročníku jsme na počitadle modelovali dvojmístná čísla. Většina třídy již číslo 32 modelovala oddělením tří desítek a pak dvou kuliček. Jen Ema stále počítala po jedné. Než zvládla jednu úlohu, třída jich zvládla pět. Pak se ale stalo něco nečekaného. Uviděla jsem záři v očích dívky a tušila jsem, že Ema objevila oddělování desítek. Dala jsem proto úlohu namodelovat číslo 98. A opět překvapení. Dívka překlopila počitadlo, aby se všechny kuličky padly na levou stranu, oddělila z nich dvě a hrdě zvedla počitadlo nad hlavu. Byla nejrychlejší z celé třídy. Byla hrozně šťastná.

Komentář zde snad je zbytečný. Kdyby byla Jitka dívku odepsala jako „hloupou“ a nepovzbuzovala její sebevědomí, nikdy by k této až neuvěřitelně šťastné chvíli nedošlo.

Výzva 5.4. Popište aspoň jednu vlastní zkušenost s převzetím, přijetím, osvojením nebo objevem matematického poznatku.

Autor přednášky se společně se spolupracovníky hlouběji zamýšlí nad procesem třídní osmózy a v příloze 2 je stručně uveden současný stav našeho bádání.

Charakteristika kvality porozumění objevu

Každý žák třídy se podílel na hledání řešení úloh typu (A,C,F). Proces jeho poznávání je možné měřit pomocí teorie generického modelu tím, že zjistíme, kdy byl ve které pod-etapě izolovaných modelů a kdy, a zda vůbec objevil generický model. Takové šetření nelze uskutečnit. K němu není možné získat potřebná data. Musíme se spokojit s evidencí jen malého počtu dat – v našem případě s těmi, které uvádí příběh. Navzdory tomuto omezení, můžeme o procese objevování některých žáků říct zajímavé skutečnosti, které nám pomohou popsat jevy důležité pro porozumění procesům objevování a šíření objevů ve třídě.

Uveďme nejprve přehledně všechny žáky odhalené návody. První, pouze pro speciální případ, dává Eva, druhý, obecný, dává Martin, třetí Veronika, čtvrtý Sylva, pátý Pavel a šestý Lenka. Návody, označíme v pořadí E, M, V, S, P a L.

Návod E. Když je A = C, vím, že D = E = polovina F. Dopočítám B = D – A.

Návod M. Zvolím B‘, najdu F‘. Polovina čísla F – F‘ plus B‘ je B.

Návod V. (Lenka) Od F odečtu součet A + C. Polovina tohoto čísla je číslo B.

Návod S. Je pouze písemný přepis předchozího ústního návodu do tvaru (*)

Návod P. Když je A < C, napíši nový trojúhelník, ve kterém A‘ = 0, C‘ = C – A, F‘ = F – 2A. Polovina čísla F‘ – C‘ je B‘ i B. Případ A > C je obdobný.

Návod L. Je-li A > C, od F odečtu A – C, to rozpůlím, mám E.

Z přehledu vidíme, že k AHA efektu, tedy k objevu generického modelu došlo aspoň dvakrát u Lenky a aspoň jednou u Evy, Martina, Sylvy a Pavla. Z příběhu ale víme, že těch AHA efektů bylo více. Na druhé straně víme, že Míša a Hanka nezvládly ani celou etapu izolovaných modelů. I těchto žáků asi bylo více. Naše evidence jsou sice jen epizodické, ale přesto z nich dokážeme vyvodit poznatky o objevování a kognitivní osmóze třídy, poznatky, které řeknou učiteli, co tento proces povzbuzuje a co tlumí.

5.1.6. Abstraktní poznatek vzniká procesem odloučení tj. abstrahování jádra poznání od konkrétních podmíneká v nichž je poznání uloženo. Charakteristickým rysem abstraktního poznání je změna jazyka. Pojem „dvě“ je nejprve vázán na konkrétní sémantickou skutečnost (dvě jablíčka je něco jiného než dvě panenky a to je něco jiného než dvě ruce) Z těchto IM-ů vzniká GM dva prsty, nebo //. Z něj se pak abstrakcí od sémantiky rodí pojem „dvě“ zapsaný znakem 2. Podobně různé IM-y vztahu 2* + 3* = 5* vytvoří nejprve GM // + /// = ///// a ten pak přechází do abstraktního poznatku zapsaného 2 + 3 = 5. Podobně pojem „polovina“ je zapsán ½, resp. 0,5, resp. 50%.

Klíčové pro proces abstrakce je to, zda nový jazyk přichází jako nové jméno pro již existující poznání, nebo jako nositel nového poznání přichází. Když nový jazyk přichází jen jako nové jméno pro to, co již ve vědomí existuje, pak nový jazyk organicky napomáhá posouvat existující generické modely na úroveň abstraktního poznání. Není-li tomu tak, pak nový jazyk je pouze komunikační nástroj často pro žáka bezobsažný. Žák, který již dobře umí počítat do 20, ale dosud nezná číslice, je poučen, že čísla budeme psát pomocí znaků 1, 2, … Tím se jeho poznání malé aritmetiky začíná zvedat na úroveň abstraktního poznání. Jestliže ovšem se znakový systém zavede příliš brzy, dříve než byly vytvořeny generické modely pro číslo, nejedná se o abstraktní poznání, ale o komunikační nástroj. Když tento nástroj zživotněn budováním GM-ů, ale doplňováním o další poučky udržován jako protetické poznání, pak dané poznání je formální. Je to pouze protéza skutečného poznání i když žák bezpečně odříká pravidla a správně pomocí nich vyřeší standardní úlohy. Na nestandardních úlohách ztroskotá. Příklady není nutno uvádět. Každý je zná a v některých případech sám může použit jako ilustrace. Například autor tak kdysi znal jisté statistické zákonitosti, které ale již dávno vyprchaly z jeho hlavy.

V následující kapitole se budeme věnovat zlomkům. V abstraktně pojaté matematice je zlomek zaveden dosti krkolomně. To se nejprve zavedou přirozená čísla **N**, pak jsou tato rozšířena na celá čísla **Z** a zlomek je zaveden následující definicí. Pokuste se této definici porozumět.

Definice. Když je $q \in \mathbf{N}_{\varnothing} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a $p \in \mathbf{Z}$, tak existuje jediné číslo x, které je kořenem rovnice $q.x = p$. Toto číslo označujeme p/q a nazýváme jej zlomek.

V uvedeném příběhu bylo ukázáno, jak přímá zkušenost žáka přináší kvalitní představu. Ne vždy tomu tak je, jak ukazuje následující příběh.