Funkcionální rovnice

Vít Musil

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

Funkcionální rovnice

Vít Musil, MFF UK

Tento text je určen středoškolským studentům, kteří mají hlubší zájem o matematiku či řeší matematickou olympiádu, a klade si za cíl seznámit čtenáře s metodami řešení funkcionálních rovnic. Výklad začíná vysvětlením základních pojmů a uvádí do problematiky řešení rovnic. Postupně představíme základní i pokročilejší metody řešení, definujeme několik základních vlastností reálných funkcí a vyslovíme o nich některá užitečná tvrzení.

Většina principů a nových pojmů je názorně vysvětlena na příkladech, apriori nepředpokládáme žádné znalosti nad rámec středoškolského učiva.

Text je doplněn množstvím řešených úloh a jednoduchou „kuchařkou", jak řešit rovnice.

Čtenář v textu nenalezne úlohy z oblasti funkcionálních rovnic na přirozených číslech, které spadají do problematiky posloupností.

Pojem funkce

Funkci nebo též zobrazení z množiny X do množiny Y většinou chápeme jako nějaký předpis, který prvkům z X přiřadí právě jeden prvek z Y. Funkce zpravidla značíme písmeny f, g, h. Definiční obor funkce f označíme jako $\mathrm{Dom}(f) = X$, obor hodnot jako $\mathrm{Rng}(f) \subseteq Y$. Pro zjednodušení používáme zápis

$$f\colon X \to Y.$$

V našem textu budeme za množiny X a Y brát většinou následující:

$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	množina nezáporných reálných čísel

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, říkáme často, že f je reálná funkce. S těmito funkcemi budeme pracovat nejčastěji. Uvědomme si ještě, že reálné funkce nemusejí být vždy dány explicitním vzorcem, jak jsme ze střední školy zvyklí. Existují například dobře popsatelné funkce, pro které žádný vzorec neexistuje. Funkce také můžeme definovat více vzorečky, uvažme například následující předpis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

což je korektně definovaná (tzv. Dirichletova) funkce.

Pojem funkcionální rovnice

Nyní si uvedeme několik zadání, a aniž bychom úlohy řešili, ozřejmíme si, co přesně se po nás chce a jak úlohy chápat.

Úloha 1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Především si všimněme základní odlišnosti od běžných rovnic: cílem není hledat hodnoty x a y, které rovnici vyhovují, ale hledáme takové funkce, které rovnici splňují pro každé přípustné dosazení hodnot za x a y. Všimněme si, že kupříkladu funkce $f(x) = 2x$ rovnici splňuje, neboť

$$f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y),$$

ale například funkce $f(x) = x + 1$ rovnici nevyhovuje, jelikož

$$f(x + y) = x + y + 1 \neq x + 1 + y + 1 = f(x) + f(y).$$

Ke správnému vyřešení úlohy navíc musíme najít všechny takové funkce neboli ukázat, že žádné jiné funkce než ty, které jsme našli, rovnici nesplňují. Dále si všimněme, že úkolem je hledat funkce definované v $\mathbb{Q}$, což úlohu podstatně zjednodušuje a odlišuje například od úlohy následující.

Úloha 2. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Rovnice má v tomto případě stejný tvar, ale funkce f musí být definována na celém $\mathbb{R}$ a může nabývat i libovolných reálných hodnot. Oproti předchozí úloze máme navíc zadanou omezující podmínku na funkci f. Bez této podmínky lze úlohu také řešit, ovšem řešení je ošklivé až lehce nechutné. Tato rovnice má dokonce i svůj název, říká se jí *Cauchyova rovnice* a ještě se o ní v textu zmíníme.

Úloha 3. Nalezněte všechny funkce definované na celém $\mathbb{R}$ splňující rovnici

$$f(x + y) + 2f(x - y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2$$

pro každou dvojici $[x, y] \in \mathbb{R}^2$.

V této úloze je pouze jinak napsané totéž. Máme hledat reálné funkce, které splňují rovnici pro každé dosazení $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Protože však vždy dosazujeme obě hodnoty zároveň, hovoříme o dvojici z $\mathbb{R}^2$.

Idea řešení

Základní myšlenkou řešení bude následující úvaha: Předpokládáme, že funkce f splňuje zadání a zkoumáme, jaké musí splňovat vlastnosti. Získáváme tak informaci, že pokud nějaké řešení rovnice existuje, tak musí něco splňovat. Mějme tedy na paměti, že obecně nepostupujeme ekvivalentními úpravami. Nejlépe je to vidět na příkladu.

Úloha 4. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x + y) = f(x) + y.$$

Řešení. Předpokládejme, že již máme funkci f splňující rovnici pro každou dvojici $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Pro tuto funkci si označme $c = f(0)$. Protože je rovnice splněna pro každou dvojici $[x, y]$, speciálně musí být splněna i pro jednu konkrétní dvojici $[0, y]$. Musí tedy platit

$$f(0 + y) = f(0) + y,$$

neboli $f(y) = y + c$. Dosazením do rovnice ověříme, že

$$f(x + y) = x + y + c = x + c + y = f(x) + y,$$

čili funkce $f(x) = x + c$ je řešením úlohy pro každé $c \in \mathbb{R}$. □

Proč jsme si však v řešení mohli říci, že $f(0)$ je konstanta? Předpokládali jsme totiž, že máme funkci f, která rovnici splňuje. Hodnota $f(0)$ je tak již konkrétní dosazení do konkrétní funkce, a tedy se dále nemění.

Pro názornou představu: „Je to jako se zajícem v pytli. Ještě nevíme, jak vlastně vypadá, ale můžeme dloubáním zjišťovat, jak rychle se vrtí, za jak dlouho se unaví, atp. Je to však již konkrétní zajíc, který má danou barvu očí, která se už nezmění, ač ji ještě neznáme.“ [1]

Uvědomme si však, že obrácená implikace, tj. „když má funkce f následující vlastnosti, tak řeší rovnici“, obecně platit nemusí. Ukažme si to opět na příkladu.

Úloha 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které vyhovují rovnici

$$f(x^2) = x + f(y) - \frac{y}{f(y)}$$

pro všechna x, y z definičního oboru f.

Řešení. Nechť f je funkce, která vyhovuje zadání. Protože definičním oborem f jsou pouze kladná reálná čísla, můžeme provést tzv. *substituci* neboli dosazení $[\sqrt{x}, 1]$ místo $[x, y]$. Funkce f tedy musí splňovat

$$f\big((\sqrt{x})^2\big) = \sqrt{x} + f(1) - \frac{1}{f(1)}.$$

Hodnota $f(1) - 1/f(1)$ je konstantní, označme ji c. Potom f musí mít tvar

$$f(x) = \sqrt{x} + c.$$

Zkouškou neboli dosazením do zadání zjistíme, že jediná funkce, která zadání vyhovuje, je pro $c = 0$, tj. $f(x) = \sqrt{x}$. □

Vidíme tedy, že provádět zkoušku je vždy nutné.

V předchozí úloze jsme provedli víc než jen dosazení konstanty za proměnnou, nahradili jsme proměnnou nějakou její funkcí. Této metodě řešení se budeme nyní věnovat podrobněji.

Substituce

Tento princip je elementární a zcela zásadní pro řešení funkcionálních rovnic. Téměř v každé úloze provedeme alespoň jednou nějaké dosazení nebo substituci. Klíčová pro nás bude následující formulace: „Pokud funkce f splňuje zadanou rovnici pro všechna $[x, y]$ z definičního oboru, pak tuto rovnici splňuje i pro nějaký speciální případ“. Přesně tuto úvahu jsme provedli v úloze 4. Podle tohoto schématu tedy můžeme snadno dosazovat konstanty z definičního oboru funkce f.

Zobecněním této úvahy okamžitě vidíme, že můžeme provádět i dosazení typu $[g(x), h(y)]$, kde g a h představují takové funkce, že $\mathrm{Rng}(g) \cup \mathrm{Rng}(h) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Tyto funkce chápeme jako operace s proměnnými před dosazením, můžou vypadat například jako $[-x, 0]$ nebo $[x^3 - x, y/2]$ atp.

Daleko divočejší substituci, zahrnující navíc předchozí dvě, dostaneme dosazením

$$[g(x, y), h(x, y)],$$

kde g a h jsou funkce dvou proměnných splňující tutéž podmínku na obory hodnot. Tato dosazení pak vypadají jako $[x - y, \frac{x+y}{2}]$ a podobně.

Předveďme si výše zmíněný recept na následujícím příkladu.

Úloha 6. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y platí

$$f(x + y) - f(x - y) = xy.$$

Řešení. Nechť f splňuje zadanou rovnici pro všechna x, y. Pak rovnice musí platit i pro hodnoty $[x/2, x/2]$, neboli

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{4}.$$

Odtud vidíme, že f musí být tvaru $f(x) = x^2/4 + c$, kde c je reálná konstanta. Zkouška ukáže, že tato funkce vyhovuje pro každé $c \in \mathbb{R}$. □

Ne vždy však dostaneme jediným dosazením přímo tvar řešení. Většinou je třeba zkoušet více dosazení, některá nám mohou poskytnout jen částečné informace, jako třeba hodnotu v některých bodech. Jen o málo složitější a méně přímočarý je příklad následující.

Úloha 7. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(xy+1) + f(x+y) = \big(f(x)+1\big)(y+1).$$

Řešení. Předpokládejme, že f řeší úlohu pro každé dosazení $x, y \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li dvojici $[0, 0]$ dostaneme

$$f(0+1) + f(0) = \big(f(0)+1\big)(0+1),$$

neboli $f(1) = 1$. Dosazením $[0, 1]$ a ze znalosti hodnoty $f(1)$ obdržíme

$$f(1) + f(1) = \big(f(0)+1\big)(1+1),$$

tedy $f(0) = 0$. Nyní dosadíme-li dvojici $[0, x]$ ihned dostáváme, že

$$f(1) + f(x) = \big(f(0)+1\big)(x+1),$$

čili $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. O správnosti řešení se přesvědčíme zkouškou. □

Cvičení 1. Vyřešte úlohu 3.

Cvičení 2. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Než se pustíme do řešení dalších příkladů, uvědomme si, že diskuse ohledně definičních oborů a oborů hodnot je podstatná a její opomenutí může vést k fatálním chybám. Může se totiž stát, že funkce v námi dosazených bodech není definována nebo dělíme nulou. Všechna taková $[x, y]$ pak musíme z dalších úvah vyloučit. Všimněme si změny v následujícím příkladě.

Úloha 8. Nejděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(x - y^2) = f(x) - y^2.$$

Řešení. Buď f funkce splňující zadání pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Pak pro $x \geq 0$ dosaďme $[x, \sqrt{x}]$ a obdržíme

$$f\big(x - (\sqrt{x})^2\big) = f(x) - (\sqrt{x})^2,$$

což po úpravě dává $f(x) = x + f(0)$ pro $x \geq 0$. Pro $x < 0$ dosaďme $[0, \sqrt{-x}]$ a ihned dostáváme

$$f\big(-(\sqrt{-x})^2\big) = f(0) - (\sqrt{-x})^2,$$

neboli $f(x) = x + f(0)$, kde $x < 0$. Pro $x \geq 0$ a $x < 0$ je tvar řešení stejný, lze tedy psát $f(x) = x + c$, $x \in \mathbb{R}$. Zkouškou ověříme, že taková f vyhovuje pro každou konstantu $c \in \mathbb{R}$. □

Vidíme, že již po první substituci nás úloha láká provést zkoušku a prohlásit f za řešení. Uvědomme si však, že tato substituce nám zajistila tvar f pouze pro nezáporná x. Skutečnost, že se tato f dala rozšířit na celé $\mathbb{R}$ se zachováním platnosti zadané rovnice, je pouze příjemnou náhodou. Nemůžeme tak beztrestně úlohu prohlásit za vyřešenou, neboť by mohla existovat jiná funkce, která by se na záporných číslech od f lišila.

Nejsme-li si jisti, že můžeme substituci provést, nikdy neuškodí napsat si tvar substituujících výrazů. Co bychom neměli nikdy provést, budeme demonstrovat na následujícím příkladu.

Úloha 9. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f^2(y) + 2xf(y).$$

V prvním kroku každého asi napadne vyzkoušet dosadit $[0, y]$, dostaneme tak, že $f\big(f(y)\big) = f^2(y) + f(0)$. Nyní je $f(y) \in \mathbb{R}$, tedy označme $x = f(y)$ a obdržíme, že $f(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, o čemž se přesvědčíme zkouškou.

Kde nastala chyba? První dosazení je zcela jistě správné, vztah $f\big(f(y)\big) = f^2(y) + f(0)$ platí pro každé $y \in \mathbb{R}$. Problém je v dosazení $x = f(y)$, nejde totiž o substituci podle naší definice. Pouze jsme si jinak označili symbol $f(y)$. Vztah $f(x) = x^2 + c$ tedy platí pouze pro $x \in \mathrm{Rng}(f)$, o kterém však doposud nebyla žádná řeč a nic o něm nevíme. Zřejmě funkce $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ splňuje zadanou rovnici, její obor hodnot je však jednobodový a platí pro něj jistě rovnice $f(x) = x^2 + c$ pro $c = 0$. Stejně tak bychom mohli říci, že pro toto řešení a $x \in \mathrm{Rng}(f) = \{0\}$ platí $f(x) = \sin(x)$ či cokoliv jiného. Bude to sice pravda, ale k ničemu nám to není.

Jak se tohoto problému zbavit, je vidět záhy.

Řešení. Funkce x^2 je na $\mathbb{R}$ zřejmě řešením zadané rovnice. Zvolme substituci $f(x) = x^2 + g(x)$. Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned}
\big(x + f(y)\big)^2 + g\big(x + f(y)\big) &= x^2 + g(x) + \big(y^2 + g(y)\big)^2 + 2x\big(y^2 + g(y)\big)\\
\big(x + y^2 + g(y)\big)^2 + g\big(x + y^2 + g(y)\big) &= \big(x + y^2 + g(y)\big)^2 + g(x)\\
g\big(x + y^2 + g(y)\big) &= g(x),
\end{aligned}$$

a tedy funkce g musí být periodická (viz kapitola *Vlastnosti funkcí*) pro každou periodu délky $y^2 + g(y)$. Je-li tato perioda pro každé $y \in \mathbb{R}$ nulová, je $g(y) = -y^2$ a $f(y) = y^2 + g(y) = 0$ pro všechna y. Předpokládejme nyní, že je tato perioda nenulová, označme ji p. Dosaďme nyní dvojici $[x, y + p]$ do posledního vztahu a upravujme

$$g(x) = g\big(x + (y+p)^2 + g(y+p)\big) = g\big(x + p(p+2y) + y^2 + g(y)\big) = g\big(x + p(p+2y)\big).$$

Vidíme, že g je také periodická s periodou $p(p + 2y)$, která však může nabývat libovolné hodnoty. Tedy pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ je $g(x) = g(y)$, a tedy g je na $\mathbb{R}$ konstantní. Funkce f tedy může mít tvar $f(x) = x^2 + g(x) = x^2 + c$. Zkouškou ověříme, že tato funkce spolu s funkcí $f(x) = 0$ jsou skutečně řešením. □

Cvičení 3. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f\big(x + f(y)\big) = x^2 + f^2(y) + 2xf(y).$$

Cvičení 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(x^2 + y) + f\big(f(x) - y\big) = 2f\big(f(x)\big) + 2y^2.$$

V následujícím případě provedeme podobnou substituci $y = f(x)$, jak však uvidíme, vše proběhne naprosto korektně.

Úloha 10. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f\big(y - f(x)\big) = f(y) - f\big(f(x)\big) + f(x) - x.$$

Řešení. Buď f funkce splňující zadání pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$. Protože $f(x) \in \mathbb{R} = \mathrm{Dom}(f)$, lze dosadit dvojici $[x, f(x)]$. Platí tedy

$$f\big(f(x) - f(x)\big) = f\big(f(x)\big) - f\big(f(x)\big) + f(x) - x,$$

což po úpravě dává $f(x) = x + c$. Zkouškou ověříme, že taková funkce vyhovuje pro každé $c \in \mathbb{R}$. □

Úloha 11. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(x^2 + y) + f\big(f(x) - y\big) = 2f\big(f(x)\big) + 2y^2.$$

Řešení. Dosazujme postupně

$$\begin{aligned}
&[x, f(x)]: && f\big(x^2 + f(x)\big) + f(0) = 2f\big(f(x)\big) + 2f^2(x),\\
&[x, -x^2]: && f(0) + f\big(x^2 + f(x)\big) = 2f\big(f(x)\big) + 2x^4.
\end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic okamžitě dostáváme $2f^2(x) = 2x^4$, neboli $f(x) = \pm x^2$. Označme si jako M množinu těch $x \in \mathbb{R}$, kde je $f(x) = -x^2$, pak jistě $f(x) = x^2$ na $\mathbb{R} \setminus M$. Chceme ukázat, že množina M obsahuje pouze nulu. Zřejmě $f(0) = 0$. Pak dosazením $[0, x]$ dostáváme

$$f(x) + f(-x) = 2x^2.$$

Protože je pro každé nenulové x levá strana kladná, totéž musí platit i pro pravou stranu, kde máme čtyři možnosti pro volbu znamének. Pouze volba $x^2 + x^2 = 2x^2$ dokáže tuto platnost zaručit. Musí tedy platit, že $f(x) = x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, o čemž se snadno přesvědčíme zkouškou. □

Tento příklad by pro nás měl být varováním, že z platnosti $f(x) = \pm x^2$ neplyne, že buďto $f(x) = x^2$ nebo $f(x) = -x^2$. Tímto postupem by sice druhá možnost neprošla zkouškou, to však nic neříká o funkcích, které jsou někde na M definovány jedním předpisem a jinde druhým. Mějme tedy na paměti, že chceme-li přesně popsat funkci, nestačí jen napsat její předpis, musíme se zmínit i o tom, kde je definována.

Poučeni z těchto chyb se pustíme do podobné úlohy.

Úloha 12. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ splňující pro každé přípustné x rovnici

$$x^3 f^3(x) + 1 = x f(x)\big(1 + x f(x)\big).$$

Řešení. Všimněme si, že rovnice je polynom třetího stupně v proměnné $xf(x)$. Snadnou úpravou na součin dostáváme

$$\big(xf(x) + 1\big)\big(xf(x) - 1\big)^2 = 0.$$

Odtud pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ musí platit $f(x) = 1/x$ nebo $f(x) = -1/x$. Buď nyní $M \subseteq \mathbb{R}^+$ libovolná množina. Pak definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in M, \\ -\frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}^+ \setminus M, \end{cases}$$

která je řešením zadané rovnice. Všechny úpravy byly ekvivalentní, zkoušku tedy není třeba provádět. □

Tento příklad sice nebyl na procvičení substituce, velmi dobře však demonstruje, na co si dávat pozor.

V úloze 11 si všimněme dalšího triku, který jsme použili, a to vytvoření soustavy rovnic.

Úloha 13. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ splňující pro x různá od 0 a 1

$$f(x) + f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = x.$$

Řešení. Buď f řešením úlohy. Dosaďme postupně $x = t$, $x = \frac{1}{1-t}$ a $x = 1 - \frac{1}{t}$. Snadno se ověří, že pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ jsou všechna čísla různá od 0 a 1. Dostáváme tedy soustavu

$$\begin{aligned} f(t) + f\Big(\frac{1}{1-t}\Big) &= t, \\ f\Big(\frac{1}{1-t}\Big) + f\Big(1 - \frac{1}{t}\Big) &= \frac{1}{1-t}, \\ f\Big(1 - \frac{1}{t}\Big) + f(t) &= 1 - \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Sečtením první a třetí a odečtením druhé rovnice dostáváme řešení ve tvaru

$$f(t) = \frac{t^3 - t + 1}{2t(t-1)},$$

které vyhovuje zadání. □

Cvičení 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y.$$

Cvičení 6. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ platí

$$f\Big(\frac{x-3}{x+1}\Big) + f\Big(\frac{x+3}{1-x}\Big) = x.$$

Použití matematické indukce

Tento metoda umožňuje odvodit tvar řešení pro racionální čísla. Nejlépe si ji představíme na již zmíněné úloze 1. Podle ní se této metodě říká také Cauchyova metoda.

Úloha 1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Řešení. Předpokládejme, že f je nějaké řešení této rovnice. Dosadíme-li dvojici $[0,0]$, obdržíme ihned $f(0) = 0$. Dále postupně dosazujme dvojice $[x,x]$, $[2x,x]$, ..., $[(n-1)x,x]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ indukcí dostáváme

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)\\ f(3x) &= f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)\\ &\ \vdots\\ f(nx) &= f\big((n-1)x+x\big) = f\big((n-1)x\big) + f(x) = nf(x). \end{aligned}$$

Právě dokázaný vztah $f(nx) = nf(x)$ platný pro přirozená n a racionální x použijeme hned dvakrát. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$nf(1) = f(n) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = mf\Big(\frac{n}{m}\Big).$$

Podělením obou stran číslem m dostáváme vztah

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m} f(1), \quad m, n \in \mathbb{N},$$

neboli

$$f(x) = xf(1), \quad x \in \mathbb{Q}^+.$$

Dosazením dvojice $[x, -x]$ do původní rovnice obdržíme vztah $f(x) = -f(x)$. Označíme-li si navíc $f(1) = c$, pak pro funkci f platí $f(x) = cx$ pro všechna racionální x. Zkouška ukáže, že taková funkce splňuje zadání pro každé reálné c. □

Z příkladu je vidět, proč tato metoda funguje jen pro čísla racionální. Funkce, které jsme nalezli, lze sice stejně tak rozšířit na celé $\mathbb{R}$ za použití stejného předpisu a rovnice bude platit pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$, ovšem nic nám nezaručuje, že žádné jiné funkce už rovnici neřeší. Jak jsme již naznačili v úvodu, další takové reálné funkce splňující Cauchyovu rovnici existují, tento postup nám k nim ale cestu neukazuje.

Zažijme si tuto metodu ještě na dalším, podobném příkladě.

Úloha 14. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

pro všechny dvojice $[x, y] \in \mathbb{Q}^2$.

Řešení. Předpokládejme, že f je nalezené řešení. Nabývá-li tato funkce v nějakém bodě x_0 nulové hodnoty, pak dosazením $[x - x_0, x_0]$ dostáváme

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$$

a f je funkce identicky nulová, tj. $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{Q}$. Zabývejme se nyní již pouze nenulovými řešeními. Nejprve si všimněme, že $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = f^2(x/2) > 0$, čili f nabývá pouze kladných hodnot. Nyní nasadíme indukci, podobně jako v předchozím případě. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{Q}$ tedy platí

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x+x) = f(x)f(x) = f^2(x)\\ f(3x) &= f(2x+x) = f^2(x)f(x) = f^3(x)\\ &\ \vdots\\ f(nx) &= f\big((n-1)x+x\big) = f^{n-1}(x)f(x) = f^n(x). \end{aligned}$$

Tento vzorec nyní dvakrát použijeme a pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$f^n(1) = f(n) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = f^m\left(\frac{n}{m}\right).$$

Všechna tato čísla jsou kladná, můžeme je tedy m-krát odmocnit a ihned vidíme, že $f(q) = f^q(1)$ pro kladná racionální q. Dosazení $[0,0]$ do původní rovnice nám poskytne informaci o hodnotě $f(0)$ neboť $f(0) = f^2(0)$. Protože $f(0) > 0$, musí nutně $f(0) = 1$. Informaci o záporných racionálních číslech nám dá dosazení $[q, -q]$, tj. $1 = f(0) = f(q)f(-q)$. Odtud ihned vyjádříme

$$f(-q) = \frac{1}{f(q)} = \frac{1}{f^q(1)} = f^{-q}(1)$$

pro $q \in \mathbb{Q}^+$. Pokud navíc pojmenujeme $f(1) = c > 0$, pak $f(x) = c^x$ pro všechna racionální čísla. Zkouškou ověříme, že f skutečně rovnici řeší pro všechna $c > 0$. Připočteme-li ještě triviální řešení $f(x) \equiv 0$, můžeme psát, že $f(x) = c^x$ pro libovolné $c \geq 0$ (a mlčky přijmeme, že $0^0 = 0$). $\square$

Žádnému čtenáři jistě neuniklo několik podobností s předchozí úlohou. Nejprve jsme pomocí matematické indukce odvodili důležitý vztah pro kladná celá čísla, dále jsme jeho platnost rozšířili i pro kladná racionální, posléze pro všechna racionální čísla. Stejně tak bychom postupovali i u dalších podobných příkladů.

Cvičení 7. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, pro které platí $f(1) = 2$ a pro každé $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1.$$

Abychom mohli platnost rozšířit na celá reálná čísla, museli bychom mít nějaké další omezující předpoklady na funkci f. Dříve než k takovému omezení přistoupíme, představíme si některé obecné vlastnosti funkcí, bez kterých se v dalším textu neobejdeme.

Vlastnosti funkcí

Definice. Řekneme, že funkce f je *sudá*, resp. *lichá*, pokud pro každé $x \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$f(x) = f(-x), \qquad \text{resp.} \qquad f(x) = -f(-x).$$

Definice vlastně říká, že sudé jsou právě ty funkce, které jsou osově souměrné podle osy $\mathcal{O}y$, liché jsou ty středově symetrické podle počátku. Příkladem sudé funkce na $\mathbb{R}$ je funkce x^2 či funkce $\cos x$. Mezi liché pak patří například funkce x^3 nebo $\sin x$.

Pokud se nám v úloze podaří zjistit, že hledaná funkce splňuje jednu z těchto vlastností, stačí nám hledat řešení pouze na polovině definičního oboru. Navíc získáme ze substitucí více informace, neboť můžeme snadno z argumentu funkce „odstranit“ minus.

Též se nám může hodit tvrzení, že každou reálnou funkci f lze napsat jako součet sudé a liché funkce, jejich předpisy jsou $\big(f(x) + f(-x)\big)/2$ a $\big(f(x) - f(-x)\big)/2$.

Definice. Řekneme, že funkce f je *prostá*, pokud pro každé $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y.$$

Definice. Řekneme, že funkce $f\colon X \to Y$ je *na*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ tak, že platí

$$f(x) = y.$$

Definice. Řekneme, že funkce $f\colon X \to Y$ je *bijekcí*, pokud f je zároveň prostá a na.

Prostá funkce tedy nabývá každé hodnoty nejvýše jednou, tj. neplatí pro ni $x \neq y$ a zároveň $f(x) = f(y)$. Funkce, která je na, pak každé hodnoty nabývá alespoň jednou, tj. „vyčerpá“ celé Y. Zkráceně můžeme zapisovat, že $\mathrm{Rng}(f) = Y$. Bijekce je pak spojení obou, tedy každé hodnoty z Y se nabude právě jednou. Tomuto zobrazení někdy říkáme *vzájemně jednoznačné* a výstižněji tak říká, že f určuje jednoznačné dvojice mezi X a Y.

A jak budeme tyto vlastnosti využívat v úlohách? Pokud o funkci víme, že je prostá, můžeme tak snadno z rovnosti funkčních hodnot odvodit rovnost argumentů. Je-li funkce na, můžeme provádět složitější substituce, které by jinak nebyly korektní (viz úloha 9). Bijekce spojuje obě tyto výhody. Procvičme si je na následujících úlohách.

Úloha 15. Najděte všechny bijekce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f\Big(f(x) + f\big(f(y)\big)\Big) = f\Big(f\big(f(x)\big) + f(y)\Big).$$

Řešení. Buď f řešením zadané rovnice. Protože f je prostá, musí platit

$$f(x) + f\big(f(y)\big) = f\big(f(x)\big) + f(y).$$

Protože f je navíc na, pro každé $z \in \mathbb{R}$ existuje $y \in \mathbb{R}$ tak, že $z = f(y)$. Můžeme tedy provést substituci $z = f(y)$. Platí tedy

$$f(x) + f(z) = f\big(f(x)\big) + z.$$

Ze stejného důvodu existuje $x_0 \in \mathbb{R}$, že $f(x_0) = 0$. Odsud dostáváme $f(z) = f(0) + z$, tj. $f(x) = x + c$. Zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce vyhovuje pro každé $c \in \mathbb{R}$. □

Cvičení 8. Najděte všechny prosté funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\big(f(x) + y\big) = f(2x^2) + 4f(x)y + 2y^2.$$

Následující úloha se od ostatních liší. Všimněme si, že nebudeme řešit funkcionální rovnici, ale rovnici obyčejnou.

Úloha 16. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje rovnici $f\big(f(x)\big) = x + f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Najděte všechna řešení rovnice $f\big(f(x)\big) = 0$.

Řešení. Zadanou rovnost si upravme na $f\big(f(x)\big) - f(x) = x$. Pokud je nyní $f(x) = f(y)$, pak

$$x = f\big(f(x)\big) - f(x) = f\big(f(y)\big) - f(y) = y$$

a f je prostá. Dosadíme-li do zadání $x = 0$, získáme $f\big(f(0)\big) = f(0)$ a z prostoty platí $f(0) = 0$. Obdrželi jsme tak i platnost $f\big(f(0)\big) = 0$. Nyní pokud existuje ještě nějaké řešení $f\big(f(x)\big) = 0$, pak $f\big(f(x)\big) = f\big(f(0)\big) = f(0)$ a $x = 0$. Tedy jediným řešením je $x = 0$. □

Definice. Řekneme, že funkce f je *rostoucí*, resp. *klesající* na svém definičním oboru, pokud pro každé $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y), \qquad \text{resp.} \qquad x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y).$$

Zcela analogicky se definují neostré verse, hovoříme pak o funkci *neklesající*, resp. *nerostoucí*. Splňuje-li nějaká funkce jednu z těchto charakteristik, nazveme ji obecně *monotónní*.

Uvědomme si, že je-li funkce rostoucí nebo klesající, pak je již prostá.

Cvičení 9. Najděte všechny neklesající funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x

$$f\big(f(x)\big) = x.$$

Definice. Řekneme, že funkce f je periodická s periodou p pokud pro každé $x \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$x + p \in \mathrm{Dom}(f) \quad \text{a} \quad f(x) = f(x + p).$$

Zřejmě platí tvrzení, že je-li funkce periodická pro všechny délky period, pak je již nutně konstantní. Obdobně je-li funkce monotónní a periodická, musí být konstantní.

Definice. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathrm{Dom}(f)$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že platí

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in \big(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big).$$

Řekneme, že f je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě $\mathrm{Dom}(f)$.

Definice. Buď $f\colon X \to Y$ prostá reálná funkce. Řekneme, že $f^{-1}\colon Y \to X$ je *inverzní funkcí* k f pokud pro všechna $y \in Y$ a $x \in X$ platí

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y.$$

Úloha 17. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x,$$

kde f^{-1} je inverzní funkce k f. (*APMO 1989*)

Řešení. Zřejmě $f(x) = x + d$ je řešením zadané rovnice, protože $f^{-1}(x) = x - d$. Označme si nyní S_d množinu těch bodů x, kde $f(x) = x + d$. Našim cílem bude ukázat, že pokud je S_d neprázdná, pak $S_d = \mathbb{R}$. Ukažme nejprve, že pokud $x \in S_d$, pak také $x + d \in S_d$. Protože $f(x) = x + d$ a $f^{-1}(x+d) = x$, platí $f(x+d) = x + 2d$ a $x + d \in S_d$. Indukcí tak dostáváme, že všechna čísla $x + kd \in S_d$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Ukažme nyní, že pokud je S_d neprázdná, pak $S_{d'}$ je prázdná pro $d' < d$. Přesněji dokážeme, že je-li $x \in S_d$ a

$$y \in \big\langle x + k(d-d'), x + (k+1)(d-d')\big)$$

pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, pak $y \notin S_{d'}$. Pro spor předpokládejme, že $x \in S_d$, $y \in S_{d'}$ a $x + k(d-d') \le y < x + (k+1)(d-d')$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Upravme nejprve nerovnost do tvaru

$$x + kd \le y - kd' < x + (k+1)d - d'.$$

Protože je f rostoucí, musí platit

$$x + (k+1)d = f(x+kd) \le f(y - kd') = y - (k+1)d',$$

neboli $y \ge x + (k+1)(d-d')$, což je spor. Obdobná úvaha platí pro S_d a $S_{d'}$, kde $d' > d$, neboť role d a d' jsou zaměnitelné. Protože každé $x \in \mathbb{R}$ patří do S_d pro nějaké d a pouze jedna z těchto množin může být neprázdná, musí platit $f(x) = x + d$, $x \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$. □

Cauchyova rovnice

Vraťme se nyní k již zmiňované úloze 2.

Úloha 2. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Již víme, že pro řešení musí platit $f(x) = f(1)x$ pro všechna racionální čísla. Ukážeme, že má-li navíc řešení splňovat jednu z následujících podmínek, pak $f(x) = f(1)x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- f je monotónní na nějakém intervalu,
- f je omezená na nějakém intervalu,
- f je kladná pro $x \ge 0$,
- f je v nějakém bodě spojitá.

Řešení. (Pro monotonii). Označme si $f(1) = c$ a předpokládejme, že $c > 0$, tj. f bude rostoucí (v opačném případě bychom pracovali s rostoucí funkcí $-f$). Chceme ukázat, že $f(x) = cx$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro spor předpokládejme, že existuje takové $x \in \mathbb{R}$, že $f(x) > cx$. Využijeme té vlastnosti racionálních čísel, že mezi každými dvěma různými reálnými čísly je alespoň jedno racionální. Existuje tedy $q \in \mathbb{Q}$ tak, že $f(x)/c > q > x$ neboli $f(x) > cq > cx$. Musí tedy platit

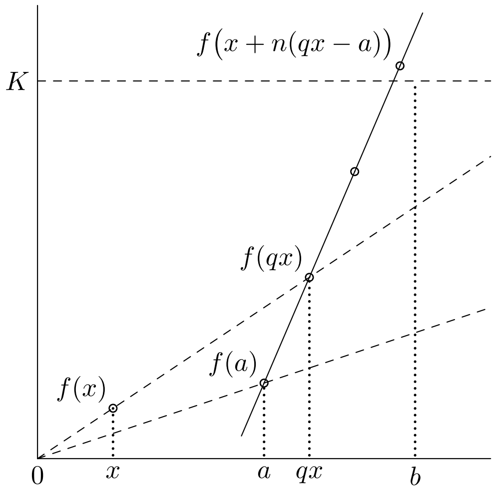
$$cq < f(x) = f(x - q + q) = f(x - q) + f(q) < 0 + f(q) = cq,$$

kde poslední odhad jsme dostali z platnosti $x - q < 0 \Rightarrow f(x - q) < f(0)$. Dostali jsme, že $cq < cq$, což je spor. Zcela obdobně se ukáže, že pro žádné $x \in \mathbb{R}$ neplatí $f(x) < cx$, a jsme hotovi. $\square$

Řešení. (Pro omezenost). Předpokládejme, že f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$, a to konstantou $K > 0$. Nejprve ukažme, že všechny body $[x+np, f(x+np)]$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a $p \in \mathbb{R}$, leží na přímce v rovině tvořené osami $\mathcal{O}x$ a $\mathcal{O}y$. Protože všechna čísla $x+np$ jsou od sebe vzdálená konstantně p, stačí ukázat, že $f(x+p)$ leží přesně mezi $f(x)$ a $f(x+2p)$, tj. že $2f(x+p) = f(x) + f(x+2p)$, což však plyne z rovnosti

$$f(x) + f(x + 2p) = f(2x + 2p) = 2f(x + p).$$

Funkční hodnoty f jsou tedy rozděleny podle toho, na které přímce leží. Pro spor předpokládejme, že existuje více takových přímek, tedy existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $[x, f(x)]$ leží na přímce neobsahující bod $[a, f(a)]$. Předpokládejme navíc, že přímka příslušná x leží nad přímkou příslušnou a. Pomocí Cauchyovy metody jsme odvodili, že pro každé $q \in \mathbb{Q}$ platí $f(qx) = qf(x)$, tedy na námi zvolené přímce leží i všechny racionální násobky x. Nyní stačí zvolit q tak blízko a/x, aby přímka procházející $[a, f(a)]$ a $[qx, f(qx)]$ byla dostatečně strmá na to, aby pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ už bylo $f\bigl(a + n(qx - a)\bigr) > M$, což je spor.



$\square$

Řešení. (Pro nezápornost). Postup je velmi podobný předchozímu. Pokud existují dvě různé přímky, najdeme třetí, která bude klesat, až se někde nabude záporné hodnoty. $\square$

Řešení. (Pro spojitost). Je-li funkce spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak volbou $\varepsilon = 1$ dostáváme $\delta > 0$ tak, že platí $x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(a) - 1 \le f(x) \le f(a) + 1$, tj. f je na $(x - \delta, x + \delta)$ omezená a lze použít první bod. $\square$

Z těchto řešení je dobré si zapamatovat principy, které jsme použili. Zvláště pak úvahy z řešení pro monotonii jsou dobře aplikovatelné i na jiné, podobné úlohy.

Úloha 18. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y).$$

(*Bělorusko 1997*)

Řešení. Konstantní funkce $f(x) = 0$ a $f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$ jsou zřejmě řešením zadané rovnice. Buď nyní f nekonstantní řešení. Použijme nyní několik jednoduchých dosazení.

$[x, 0]:$ $$f(x) + f(x)f(0) = f(0) + f(x) + f(0).$$

Protože f je nekonstantní, musí být $f(0) = 0$. Dále

$$[x, 1]: \qquad f(x+1) = f(x)\big(2 - f(1)\big) + f(1).$$

Po dosazení $x = 1$ do tohoto vztahu vyjádříme $f(2) = cf(1)$, kde $c = 3 - f(1)$ je konstanta. Všimněme si, že $c \neq 1$, jinak by dle předchozí rovnosti byla f konstantní. Nyní dvěma způsoby vyjádříme hodnotu $x + 2$ pomocí dvou vhodných dosazení.

$$[x+1, 1]: \qquad f(x+2) = f(x+1)\big(2 - f(1)\big) + f(1)$$
$$[x, 2]: \qquad f(x+2) = f(2x) + f(x)\big(1 - f(2)\big) + f(2).$$

Výrazy napravo upravíme pomocí předchozích vztahů tak, aby obsahovaly pouze $f(x)$ a $f(2x)$.

$$f(x+2) = f(x)\big(2 - f(1)\big)^2 + f(2)$$
$$f(x+2) = f(2x) + f(x)\big(1 - f(2)\big) + f(2).$$

Nyní máme rovnice připravené na odečtení, tj.

$$f(2x) = f(x)\big(2 - f(1)\big)^2 - f(x)\big(1 - f(2)\big) = cf(x).$$

Odsud mimo jiné vidíme, že $c \neq 0$. Nyní provedeme poslední dosazení. Využijeme zde právě objeveného vztahu a toho, že $f(4x) = c^2 f(x)$.

$$[2x, 2y]: \qquad cf(x+y) + c^2 f(x)f(y) = c^2 f(xy) + cf(x) + cf(y).$$

Po zkrácení $c \neq 0$ a odečtením od zadané rovnice dostáváme

$$(c-1)f(x)f(y) = (c-1)f(xy).$$

Protože $c \neq 1$, dostáváme, že f musí splňovat $f(xy) = f(x)f(y)$ a $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Užitím matematické indukce se snadno ukáže, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$. Nyní použijeme standardní obrat pro rozšíření na celé $\mathbb{R}$. Víme, že $f(-x) = -f(x)$ a dosazením $y = -x$ do původní rovnice dostaneme, že $f^2(x) = f(x^2)$, tj. $f \geq 0$, kdykoliv $x \geq 0$. Předpokládejme nyní, že existuje $x \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) < x$. Najdeme proto $q \in \mathbb{Q}$ tak, že $f(x) < q < x$. Potom platí

$$q > f(x) = f(x-q) + f(q) > f(q) = q,$$

což je spor. Obdobně se ukáže, že neexistuje $x \in \mathbb{R}$ splňující opačnou ostrou nerovnost. Dokázali jsme tedy, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zkouška ukáže, že tato funkce spolu s oběma konstantami 0 a 2 jsou řešením zadané rovnice. □

Nyní můžeme snadno vyřešit podobné úlohy s využitím znalostí o Cauchyově rovnici.

Úloha 19. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Řešení. Buď f řešením zadané rovnice. Uvažujme funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanou předpisem $g(x) = \log f(x)$. Protože f je rostoucí, také g je rostoucí. Navíc g splňuje Cauchyovu rovnici. Z předchozího víme, že všechna rostoucí řešení Cauchyovy rovnice jsou tvaru $g(x) = cx$, kde $c > 0$. Odsud snadno $cx = \log f(x)$ a $f(x) = a^x$, kde $a > 1$. Zkouškou snadno ověříme, že tyto funkce skutečně vyhovují. □

Úloha 20. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Řešení. Buď f řešením. Pracujme s funkcí $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x)$, kde $a > 1$. Potom g je jistě rostoucí a řeší Cauchyovu rovnici, tedy $cx = f(a^x)$, $c > 0$. Odtud $f(x) = \log_b(x)$ pro vhodnou konstantu $b > 1$. Zkouška ukáže, že tato řešení vyhovují zadání. □

Cvičení 10. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Metody řešení

Obecně je pro danou úlohu velmi těžké říci, která metoda povede k cíli. Pro vyřešení obtížnějších úloh je často třeba kombinovat několik přístupů, s náročností úloh jejich počet roste. Přesto se pokusím na tomto místě uvést co nejvíce metod používaných pro řešení funkcionálních rovnic, seřazených zhruba podle frekvence výskytu v úlohách.

- Dosazování hodnot do rovnice. Nejčastěji dosazujeme konstanty, později takové výrazy, abychom dostali některé části výrazů konstantní. Například vyskytuje-li se ve výrazu $f(x+y)$ a známe hodnotu $f(0)$, volíme substituci $[x, -x]$ atp. S obtížnějšími příklady jsou substituce méně zřejmé a vyžadují jistou zkušenost a cvik. (Úloha 6–11)
- Symetrické výrazy a vytvoření soustavy rovnic. Některé rovnice mohou mít buď rovnou, nebo po jednoduché úpravě jednu stranu symetrickou, tj. výraz na jedné straně se po záměně x a y nezmění. Totéž tedy musí platit i na straně druhé, odkud můžeme obdržet nový vztah. Vhodným dosazováním rovněž můžeme vytvořit soustavu rovnic a tu pak vyřešit. (Úloha 11, 13)
- Použití matematické indukce. Nejprve nalezneme hodnoty pro $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, závislé pouze na $f(1)$. Posléze najdeme hodnoty $f(1/n)$ a $f(q)$, kde $q \in \mathbb{Q}$. Tato metoda je vhodná pro funkce definované na $\mathbb{Q}$ nebo reálné funkce s omezující podmínkou. (Úloha 1, 2, 14, 18)
- Vyšetření, zda je funkce prostá, případně na. V mnoha případech není obtížné tyto vlastnosti dokázat, avšak užitek z nich je velký. (Úloha 15, 22)
- Užití Cauchyovy rovnice a rovnic podobného typu. Pomocí nějaké substituce můžeme rovnici převést na Cauchyovu rovnici nebo rovnice podobné, jejichž řešení již známe. (Úloha 19, 20)
- Monotonie a spojitost. Tyto podmínky jsou často dány pro zjednodušení úlohy jako dodatečné podmínky pro jednoznačnost řešení. (Úloha 2)
- Předpokládat, že funkce je v nějakém bodě větší či menší než hodnota funkce, o které chceme dokázat, že je řešením. (Úloha 2, 18)
- Zabývat se množinou bodů, kde se hledaná funkce shoduje s předpokládaným řešením. Cílem je ukázat, že tato množina je celý definiční obor. (Úloha 17)
- Zapsat f jako součet sudé a liché. Tento součet vždy existuje a vynutíme si jím alespoň nějaké vlastnosti, pokud o f nevíme nic. (Úloha 26)
- Vytváření rekurentních posloupností. Hodí se zejména pro ty úlohy, kde známe vztah mezi x, $f(x)$ a $f\big(f(x)\big)$ a obor hodnot je nějak omezen. (Úloha 24)
- Hledání pevných a nulových bodů funkce. Pevný bod funkce f je takové x, pro které platí $f(x) = x$. Úloh využívajících tuto metodu je poměrně málo, patří spíše k těm obtížnějším. (Úloha 25)
- Uhodnout řešení. Podle známého řešení se snáze volí substituce a můžeme tušit, které vlastnosti půjdou dokázat. (Úloha 9)
- Nikdy nezapomenout na zkoušku!

Řešení vybraných obtížných úloh

Úloha 21. Nejděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ nerovnost

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}.$$

Řešení. Dosadíme-li $[1,1,1]$, dostaneme, že

$$f(1) - f^2(1) \geq \frac{1}{4}, \quad \text{tj.} \quad 0 \geq \Big(f(1) - \frac{1}{2}\Big)^2,$$

odkud $f(1) = 1/2$. Stejně se ukáže, že $f(0) = 1/2$.

Dosazením $[x,1,1]$ a $[x,0,0]$ obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(x) &\geq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}f(x) &\geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Úpravou první rovnice máme $f(x) \geq 1/2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, z druhé pak opačnou nerovnost. Zkouška ukáže, že $f(x) = 1/2$ je skutečně řešením na $\mathbb{R}$. □

Úloha 22. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\big(xf(x) + f(y)\big) = y + f^2(x).$$

(*Velká Británie 1997*)

Řešení. Buď f řešením úlohy. Dosazením $[0,y]$ dostáváme, že $f\big(f(y)\big) = y + f^2(0)$. Pravá strana je na, totéž musí platit i pro levou. Existuje tedy $t \in \mathbb{R}$ takové, že $f(t) = 0$. Dosazením $[t,y]$ získáme $f\big(f(y)\big) = y$ a dosazením $[0,t]$ dostaneme $f(0) = t + f^2(0)$. Celkem tedy

$$t = f\big(f(t)\big) = f(0) = t + f^2(0)$$

a $f(0) = 0$. Navíc pokud $f(x) = f(y)$, pak

$$x = f\big(f(x)\big) = f\big(f(y)\big) = y$$

a f je bijekce. Dosazení $[f(x), y]$ dává

$$f\big(f(x)x + f(y)\big) = y + x^2,$$

odkud porovnáním se zadanou rovnicí dostaneme $f^2(x) = x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nyní máme dvě možnosti, $f(1) = \pm 1$. Dosazením $[1,y]$ dostaneme

$$f\big(\pm 1 + f(y)\big) = y + 1,$$

navíc jsme použili, že pokud $f(1) = -1$, pak $f(-1) = 1$, protože f musí být prostá. Umocněním předchozí rovnosti na druhou dostáváme

$$1 + 2y + y^2 = (1+y)^2 = f^2\big(\pm 1 + f(y)\big) = \big(\pm 1 + f(y)\big)^2 = 1 \pm 2f(y) + y^2,$$

Odkud přímo plyne, že $f(x) = x$ nebo $f(x) = -x$. Zkouška ukáže, že obě řešení vyhovují. □

Cvičení 11. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y + f^2(x).$$

(*IMO 1992*)

Úloha 23. Nalezněte všechny monotónní funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vyhovující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$f(xy)f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1.$$

(*MKS-27-7-8*)

Řešení. Buď f řešením zadané rovnice. Určeme nejprve hodnotu $f(1)$.

$[1, x]$: $\quad f(x)f\big(f(x)\big) = 1$

$\big[f\big(f(x)\big), f(x)\big]$: $\quad f\Big(f\big(f(x)\big)f(x)\Big)f(1) = 1,$

odkud $f(1) = 1$, jelikož $\mathrm{Rng}(f) \subseteq \mathbb{R}^+$. Předpokládejme nyní, že f nabývá jedničky pro nějaké $t \in \mathbb{R}^+$ a $t \neq 1$. Potom po dosazení $[x, t]$ a $[x, 1]$ máme

$$f(xt)f\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1 = f(x)f\Big(\frac{1}{x}\Big) \quad \text{a} \quad f(x) = f(xt).$$

Postupným dosazováním $x = \dots t^{-3}, t^{-2}, t^{-1}, 1, t, t^2, t^3, \dots$ dostaneme

$$\dots = f\left(\frac{1}{t^3}\right) = f\left(\frac{1}{t^2}\right) = f\left(\frac{1}{t}\right) = 1 = f(1) = f(t) = f(t^2) = f(t^3) = \cdots$$

Protože f musí být monotónní a pro každé $m \in \mathbb{Z}$ je $f(t^m) = 1$, musí již být $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$. Kdyby totiž existovalo číslo y tak, že $f(y) \neq 1$, pak bychom k němu našli $m \in \mathbb{Z}$ takové, že $y \in [t^m, t^{m+1}]$, resp. $y \in [t^{m+1}, t^m]$ pro $t < 1$. Ovšem v krajních bodech tohoto intervalu obsahujícího y nabývá f jedné a proto $f(y) = 1$, což je spor.

Nyní nechť $f(x)$ nenabývá jedničky jinde než pro $x = 1$. Pak volme substituci

$[f(x), x]$: $\quad 1 = f\big(xf(x)\big)f(1) = f\big(xf(x)\big).$

Odtud již musí platit $f(x) = 1/x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Zkouškou se přesvědčíme, že funkce $f(x) = 1/x$ a $f(x) = 1$ vyhovují zadání. □

Úloha 24. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\big(f(x)\big) + af(x) = b(a + b)x,$$

kde a, b jsou kladné reálné konstanty. (*IMO 1992 shortlist*)

Řešení. Protože známe vztah x, $f(x)$ a $f\big(f(x)\big)$ a obor hodnot je omezený, můžeme s výhodou použít rekurentní vztahy. Zvolme $x_0 \geq 0$ libovolně a definujme rekurentní posloupnost $x_n = f(x_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$. Ze zadání víme, že $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ musí splňovat

$$x_{n+2} = -ax_{n+1} + b(a + b)x_n$$

pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Řešením této diferenční rovnice je každá posloupnost

$$x_n = c_1 b^n + c_2(-a - b)^n,$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Navíc víme, že $0 \leq x_0 = c_1 + c_2$ a $0 \leq x_1 = c_1 b - c_2(a + b)$. Odtud máme, že $c_2 = 0$, tedy $x_0 = c_1$ a $f(x_0) = x_1 = bc_1 = bx_0$. Protože x_0 bylo na začátku zvoleno libovolně, musí platit, že $f(x) = bx$ pro každé $x \in \mathbb{R}^+$, o čemž se přesvědčíme zkouškou. □

Úloha 25. Najděte vsechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$f\big(f(x)\big) = x^2 - 2.$$

Řešení. Označme si funkci na pravé straně jako g. Všimněme si, že g má právě dva pevné body, tj. existují dvě různá $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $g(a) = a$ i $g(b) = b$. Zobrazení $g \circ g$ má čtyři pevné body, již zmiňované a, b a navíc nějaké $c, d \in \mathbb{R}$. Našim cílem bude ukázat, že neexistuje zobrazení f takové, že $f \circ f = g$.

Označme si $y = g(c)$. Potom musí platit $c = g\big(g(c)\big) = g(y)$ a $y = g(c) = g\big(g(y)\big)$ a y je pevným bodem zobrazení $g \circ g$, musí tedy $y \in \{a, b, c, d\}$. Je-li $y = a$, pak $a = g(a) = g(y) = c$ vede ke sporu, je-li $y = b$, pak obdobně $b = c$ je sporné. Jistě $y \neq c$, neboť c není pevným bodem g, a proto nutně $g(c) = d$ a ze stejných důvodů $g(d) = c$.

Nyní z původní rovnice odvoďme důležitý vztah

$$g\big(f(x)\big) = f\big(f\big(f(x)\big)\big) = f\big(g(x)\big),$$

kde první rovnost plyne z dosazení $f(x)$ za x a druhá je dosazení levé i pravé strany do f. Nyní je-li $x \in \{a, b\}$, pak

$$f(x) = f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$$

a $f(x) \in \{a, b\}$. Předpokládáme-li $x \in \{c, d\}$, pak

$$f(x) = f\big(g\big(g(x)\big)\big) = g\big(f\big(g(x)\big)\big) = g\big(g\big(f(x)\big)\big)$$

a $f(x) \in \{a, b, c, d\}$. Sledujme nyní hodnotu $f(c)$.

- Je-li $f(c) = a$, pak $f(a) = f\big(f(c)\big) = g(c) = d$, spor.
- Je-li $f(c) = b$, pak $f(b) = f\big(f(c)\big) = g(c) = d$, spor.
- Je-li $f(c) = c$, pak $c = f(c) = f\big(f(c)\big) = g(c) = d$, spor.

Musí tedy platit $f(c) = d$. Potom $f(d) = f\big(f(c)\big) = g(c) = d$ a $d = f(d) = f\big(f(d)\big) = g(d) = c$, což je ve sporu s předchozím pozorováním a funkce f splňující zadání neexistuje. □

Úloha 26. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos(y).$$

Řešení. Buď f řešením. Pak f lze zapsat jako $f = g + h$, kde g je sudá funkce a h lichá. Rovnice pak přejde do tvaru (1). Dosazením $[-x, -y]$ pak obdržíme tvar (2).

$$g(x+y) + g(x-y) + h(x+y) + h(x-y) = 2\big(g(x) + h(x)\big)\cos(y) \tag{1}$$

$$-g(x+y) - g(x-y) + h(x+y) + h(x-y) = 2\big(-g(x) + h(x)\big)\cos(y) \tag{2}$$

Sečtením, resp. odečtením obou rovnic dostáváme přesně tvar původní rovnice pro funkci h, resp. g. Řešme tedy původní rovnici za předpokladu, že f je sudá, resp. lichá.

Je-li f sudá, pak dosazením $[0, x]$ získáme

$$f(x) + f(-x) = 2f(0)\cos(x),$$

tedy $f(x) = f(0)\cos(x)$. Je-li f lichá, pak nejprve dosaďme $[x, \pi/2]$ a potom $[\pi/2, x]$.

$[x, \pi/2]$: $$f\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) + f\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) = 0$$

$[\pi/2, x]$: $$f\Big(\frac{\pi}{2} + x\Big) + f\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = 2f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\cos(x).$$

Dosazením prvního vztahu do druhého a použitím lichosti f dostáváme

$$f\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\cos(x),$$

odkud $f(x) = f(\pi/2)\sin(x)$. Funkce f tak musí být tvaru $f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zkouškou se přesvědčíme, že tomu tak je pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$. □

Úlohy pro samostatné studium

V tuto chvíli již máme dostatečný aparát na vyřešení všech následujících úloh. Pro dokonalé zažití naučených metod je nejdůležitější řešit neznámé problémy, byť se nám někdy nepodaří řešení nalézt. Student, který zvládne vyřešit většinu těchto úloh, by měl být velmi dobře připraven na řešení funkcionálních rovnic, které se mohou vyskytnout v matematické olympiádě.

K úlohám neuvádím vzorová řešení ani návody, pouze na konci uvádím výsledek a zdroj, je-li to možné. Jde především o známé úlohy z národních a mezinárodní olympiády, jejich vzorová řešení lze nalézt na internetu (většinou v angličtině) na oficiálních stránkách olympiády nebo na fóru [4]. Některá řešení lze nalézt i v [1] a [2].

Úloha 27. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro každé $x, y \in \mathbb{R}^+$ vyhovují rovnici

$$f(x)f(y) = f(y)f\big(xf(y)\big) + \frac{1}{xy}.$$

(*MO-60-III-6*)

Úloha 28. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y).$$

(*MEMO 2008*)

Úloha 29. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$f\big(xf(x)\big) + f\big(f(x) + f(y)\big) = yf(x) + f\big(x + f(y)\big).$$

(*MEMO 2009*)

Úloha 30. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y + 1)f(x) + (x + 1)f(y).$$

(*MEMO 2010*)

Úloha 31. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro každou čtveřici $x, y, z, w \in \mathbb{R}^+$ splňující $xw = yz$ platí

$$\frac{f^2(w) + f^2(x)}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}.$$

(*IMO 2008*)

Úloha 32. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

(*USA 2002*)

Úloha 33. Zkonstruujte funkci $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ vyhovující funkcionální rovnici

$$f\big(xf(y)\big) = \frac{f(x)}{y}$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$. (*IMO 1990*)

Úloha 34. Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce splňující $|f(x)| \le 1$ a

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že f je periodická. (*IMO 1996 shortlist*)

Úloha 35. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$

$$f\big(f(x) - x\big) = 6x.$$

Úloha 36. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f\big((x - y)^2\big) = f^2(x) - 2xf(y) + y^2.$$

Úloha 37. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f\big(f(x)+y\big)=2x+f\big(f(y)-x\big).$$

(*IMO 2002 shortlist*)

Úloha 38. Určete hodnoty reálného parametru α, pro který existuje právě jedna funkce $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ splňující pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$

$$f\big(x^2+y+f(y)\big)=f^2(x)+\alpha y.$$

(*Vietnam 2004*)

Úloha 39. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f\big(f(x)+y\big)=f(x^2-y)+4f(x)y.$$

(*Írán 1999*)

Úloha 40. Buď $\lambda>0$. Nalezněte všechny funkce $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ takové, že $f(\lambda)=1$ a pro každé $x,y\in\mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)f(y)+f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f\left(\frac{\lambda}{y}\right)=2f(xy).$$

(*Španělsko 2006*)

Úloha 41. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y).$$

Úloha 42. Buď f rostoucí reálná funkce splňující pro všechna reálná x, y

$$f(x+y)+f\big(f(x)+f(y)\big)=f\Big(f\big(x+f(y)\big)+f\big(y+f(x)\big)\Big).$$

Dokažte, že $f\big(f(x)\big)=x$. (*Írán 1997*)

Úloha 43. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá $x\neq y$ rovnici

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}.$$

Úloha 44. Nalezněte všechny funkce $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ splňující pro všechna $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ vztah

$$\big(f(x)+f(y)\big)\big(f(u)+f(v)\big)=f(xu-yv)+f(xv+yu).$$

(*IMO 2002*)

Úloha 45. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$\big(f(x+y)-f(x-y)\big)^2=f(x)f(y).$$

Úloha 46. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f\big(x-f(y)\big)=f\big(f(y)\big)+xf(x)+f(x)-1.$$

(*IMO 1999*)

Úloha 47. Nalezněte všechny funkce $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ splňující pro každá $x,y\in\mathbb{R}$ rovnici

$$f(x^3+y^3)=xf(x^2)+yf(y^2).$$

(*Rumunsko 2009*)

Návody ke cvičením

1. $f(x)=x^2$; Dosazení $[x,0]$. **2.** $f(x)=x+1$; Dosazení $[1,1]$, možnosti: $f(1)=-1$: nemá řešení, $f(1)=2$: $f(x)=x+1$. **3.** $f(x)=x^2$; Úprava na čtverec, substituce $t=x+f(y)$. **4.** $f(x)=x^2$; Dosazení $[x,f(x)-x^2]$, odečtení od původní rovnice. **5.** $f(x)=x+c$; $c\in\mathbb{R}$; Dosazení $[0,y]$ a $[0,-y]$, soustava rovnic. **6.** $f(x)=\frac{x^3+7x}{2(1-x^2)}$; Dosazení $x=\frac{t-3}{t+1}$ a $x=\frac{t+3}{1-t}$, soustava rovnic. **7.** $f(x)=x+1$; Dosazením $[1,n]$ máme $f(n)=n+1$, $n\in\mathbb{N}$, $[-1,1]$ a $[-1,n]$ dá $f(n)=n+1$, $n\in\mathbb{Z}$. $[1,\frac{1}{n}]$ a $[1,m+\frac{1}{n}]$ s indukcí dá $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}+1$, $[m,\frac{1}{n}]$ dá $f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}+1$, rozšíření na celé $\mathbb{Q}$. **8.** $f(x)=2x^2$; Dosazení $[x,0]$. **9.** $f(x)=x$; f je prostá, tj. rostoucí, $f(x)\gtrless x$ vede ke sporu. **10.** $f(x)=x^c$; $c>0$; Substituce $g(x)=\log f(a^x)$, Cauchyho rovnice. **11.** $f(x)=x$; f je bijekce, $f(0)=0$, f je rostoucí, $f(x)\gtrless x$ vede ke sporu.

27. $f(x)=1+1/x$. **28.** $f(x)=x$ nebo $f(x)=0$. **29.** $f(x)=x$ nebo $f(x)=0$. **30.** $f(x)=x^2+x$, $f(x)=3x$ nebo $f(x)=0$. **31.** $f(x)=x$ nebo $f(x)=1/x$. **32.** $f(x)=cx$, $c\in\mathbb{R}$. **33.** konstrukce je popsána např. v [1]. **34.** $f(x+1)=f(x)$. **35.** $f(x)=3x$. **36.** $f(x)=x+1$ nebo $f(x)=x$. **37.** $f(x)=x+c$, $c\in\mathbb{R}$. **38.** $\alpha=2$. **39.** $f(x)=x^2$ nebo $f(x)=0$. **40.** $f(x)=1$. **41.** $f(x)=x$ nebo $f(x)=x$. **42.** Platí. **43.** $f(x)=x$. **44.** $f(x)=x^2$, $f(x)=1/2$ nebo $f(x)=0$. **45.** $f(x)=0$. **46.** $f(x)=1-x^2/2$. **47.** $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$.

Literatura a zdroje

[1] *Funkcionální rovnice*, František Konopecký, bakalářská práce, 2008.
[2] *Functional Equations*, The IMO Compendium Group, `http://www.imocompendium.com`
[3] *Matematický korespondenční seminář MFF UK*, `http://mks.mff.cuni.cz`
[4] *Mathlinks*, `http://www.mathlinks.ro`

Funkcionální rovnice - Cvičení

Vít Musil, MFF UK

Cvičení 1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá x, y rovnici

$$1 + f(x+y) = 2f(x)f(y).$$

Cvičení 2. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá x, y rovnici

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

Cvičení 3. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá x, y rovnici

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Cvičení 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro každá $x \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$f(f(f(x))) + 4f(f(x)) + f(x) = 6x.$$

Cvičení 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$\big(1 + yf(x)\big)\big(1 - yf(x+y)\big) = 1.$$

Řešení

Cvičení 1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá x, y rovnici

$$1 + f(x+y) = 2f(x)f(y).$$

Řešení. Buď f řešení zadané rovnice. Dosazením $[x, y] = [x, 0]$ obdržíme vztah $f(x)\big(2f(0) - 1\big) = 1$. Jelikož $f(0) \neq 1/2$, lze dělit a dostáváme

$$f(x) = \frac{1}{2f(0) - 1},$$

tedy f musí být konstantní. Položíme-li $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ a dosadíme-li do zadání, ihned vidíme, že $c \in \{1, -1/2\}$. Zkouškou se přesvědčíme, že $f(x) = 1$ a $f(x) = -1/2$ jsou skutečně řešením na $\mathbb{R}$. □

Cvičení 2. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá x, y rovnici

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

Řešení. Předpokládejme, že f je řešením. Dosazením $[x, y] = [0, 0]$ získáme, že $f(0) = 1$. Dosadíme-li dvojici $[0, y]$ a $[0, -y]$ obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} 2f(-y) + f(y) &= 3 - y, \\ 2f(y) + f(-y) &= 3 + y, \end{aligned}$$

Jejímž řešením je $f(y) = y + 1$, $y \in \mathbb{R}$. Správnost řešení ověříme zkouškou. □

Cvičení 3. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá x, y rovnici

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Řešení. Buď f řešením zadané úlohy. Dosazením $[x, y] = [1, 1]$ dostaneme kvadratickou rovnici $f^2(1) - f(1) - 2 = 0$, jejímž řešením je dvojice $\{-1, 2\}$. Dále dosaďme $[x, 1]$ a po úpravě máme

$$f(x) = \frac{x + 1}{f(1) - 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

jelikož $f(1) \neq 1$. Odtud $f(x) = -1/2(x + 1)$ nebo $f(x) = x + 1$, o čemž se přesvědčíme zkouškou. □

Cvičení 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro každá $x \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$f(f(f(x))) + 4f(f(x)) + f(x) = 6x.$$

Řešení. Buď $x_0 \in \mathbb{R}^+$ zvoleno libovolně a definujme $x_{n+1} := f(x_n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ze zadání sestavíme rekurentní vztah

$$x_{n+3} + 4x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0.$$

Charakteristický polynom má kořeny -3, -2 a 1, tedy lze psát $x_n = c_1(-3)^n + c_2(-2)^n + c_3$, kde c_1, c_2 a c_3 jsou konstanty. Kdyby c_1 a c_2 byly nenulové, bylo by $x_n = f(x_{n-1}) < 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, což nelze, jelikož $\operatorname{Rng}(f) > 0$. Tedy $x_n = x_0$ pro všechna přirozená n a $f(x_0) = x_0$. Protože jsme x_0 zvolili libovolně, lze psát $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$. Zkouškou se snadno přesvědčíme o správnosti řešení. □

Cvičení 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$\big(1 + yf(x)\big)\big(1 - yf(x+y)\big) = 1.$$

Řešení. Buď f řešení zadané rovnice. Roznásobením a dělením $y > 0$ získáme $f(x+y)\big(1+yf(x)\big) = f(x)$. Jelikož $yf(x) > 0$ lze dělit výrazem $1 + yf(x)$ a obdržíme rovnost se symetrickou levou stranou

$$f(x+y) = \frac{f(x)}{1 + yf(x)}.$$

Využitím symetrie, dostaneme $f(x)\big(1+xf(y)\big) = f(y)\big(1+yf(x)\big)$. Dosaďme za $y = 1$ a označme $c := f(1)$, potom $f(x) = c/(1 + xc - c)$. Jistě $c > 0$ a aby $f(x) > 0$, musí být $0 < c < 1$. Zkouškou se přesvědčíme, že tato f je řešením zadané rovnice pro každé takové c. □