Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

# Úvod do studia analytické geometrie

**Naďa Stehlíková,**

**Milan Hejný, Darina Jirotková**

ISBN 80-7290-188-5

# Obsah

# Úvod

Analytická geometrie patří k tradičním kurzům matematiky na mnoha vysokých školách. Ne všechny tyto kurzy jsou stejné. V některém převládá geometrie, v jiném algebra, někde se důsledně buduje přísná deduktivní stavba disciplíny s přesnými definicemi, větami a důkazy, jinde jsou akcentovány pouze nosné myšlenky a více pozornosti se věnuje aplikacím analytické geometrie. Někde se výklad soustřeďuje na dvoj a trojdimenzionální prostor, jinde se ambiciózně pracuje pouze v $n$-rozměrném prostoru, ...

Pojetí analytické geometrie se tedy mění jak podle zaměření školy, tak podle matematického vkusu přednášejícího. Naše pojetí se vyvíjelo v průběhu posledních deseti let. První verze skript byla napsána na základě přednášek, které ve školních letech 1993–94 a 1994–95 vedl druhý z autorů za vydatné pomoci obou dalších. Později se na přednáškách a cvičeních z analytické geometrie podíleli všichni tři autoři, v posledních pěti letech zejména první z autorů. Nabyté zkušenosti s používáním skript obohacené o připomínky kolegů vedly k přepracování původního textu. Nová verze však nezměnila nic na původních cílech, které odráží specifika posluchače pedagogické fakulty, budoucího učitele matematiky na základní a střední škole. Zvolili jsme tři cíle.

## Tři cíle kurzu

**Látka:** Posluchač rozumí pojmům, větám, postupům, argumentacím a struktuře analytické geometrie v míře plně postačující pro nadhled nad analytickou geometrií střední školy.

**Metoda:** Posluchač je veden k tomu, aby při studiu postupoval co nejsamostatněji a aby myšlenky nepřejímal, ale objevoval, aby nenapodoboval, ale tvořil, aby vyslovená tvrzení prověřoval.

**Metodika:** Při studiu budeme uvažovat o tom, jak je možné tu nebo onu myšlenku analytické geometrie názorně zpřístupnit žákům střední nebo základní školy. Tento cíl zdánlivě náleží do předmětu, který se nazývá „Didaktika“, a nikoli do analytické geometrie. Na druhé straně podle našich zkušeností a podle našeho přesvědčení každé hluboké zamyšlení se nad tím, jak budeme tu nebo onu část matematiky vyučovat, nám přináší nové, hlubší a ucelenější poznání matematiky samotné. Tato myšlenka není nová. Již před třiceti lety ji opakovaně zdůrazňoval Hans Freudenthal (1973). V obecné formulaci ji nacházíme již u Seneky (1969, s. 17, list sedmý): Homines, dum docent, discunt (Lidé, učíce jiné, sami se učí). Známější je pozdější verze: Docendo discimus (učíce [sami se] učíme). Kromě toho představa, že jednou sám bude podobné věci učit, motivuje posluchače k větší intenzitě učení, prosvětluje jeho práci radostí z očekávaného, mění jeho postoj k předmětu. Nepříliš povzbudivé je učení se na jednorázovou zkoušku, radostná ale je příprava na práci se žáky. Proto i do tohoto textu, zejména v prvních kapitolách, vkládáme poznámky vztahující se k příštímu učitelskému působení našich posluchačů.

## Trochu historie

Od svých dávných pramenů tekla matematika ve dvou proudech – aritmetice a geometrii. V předřeckých civilizacích Babylonu a Egypta byla matematika převážně aritmetická. Geometrické znalosti byly izolované, výpočetní algoritmy byly naopak dobře strukturované. Jisté propojení geometrie a aritmetiky představovala astronomie, v níž byly trajektorie planet popsány posloupnostmi čísel. Pro ni ale byly obě discipliny pouze vědy pomocné.

Pythagoras (asi 580–500 před n.l.) pozvedl aritmetiku návodů a tabulek na spekulativní vědu s logickou argumentací. Zároveň do ní vnesl jazyk tvarů a tím dal geometrii impuls, který již kolem roku 300 před n.l. vedl k jednomu z největších intelektuálních výkonů lidského ducha – k slavným Euklidovým Základům (Stoicheia). Zde poprvé byla vědecká teorie vybudována axiomaticky. Toto dílo se na více než dvě tisíciletí stalo vzorem vědecké dokonalosti. Vládu geometrie začala oslabovat až arabská matematika a rozkvět aritmetiky pak přivodila renesanční italská škola rafinovanými postupy při řešení rovnic třetího stupně.

Až do této doby bylo na geometrii a aritmetiku nahlíženo jako na dva různé, neslučitelné světy, pro které platí to, co v Druhých analytikách napsal Aristoteles ze Stageiry (384–322 před n.l.): „Není tedy možné vést důkaz tak, že by se přecházelo z jednoho rodu do druhého, jako například geometrickou větu nelze dokázat aritmetickou."

K propojení geometrie a aritmetiky došlo až v první polovině 17. století, kdy nezávisle na sobě dva francouzští myslitelé, René Descartés (1596–1650) a Pierre de Fermat (1601–1665) našli metodu dovolující geometrické problémy řešit nástroji aritmetiky, především rovnicemi. Nová metoda znamenala zásadní změnu v nahlížení na stavbu matematiky a otevřela dveře novým myšlenkám, především matematické analýze. O historii objevu je možné číst například ve studii J. Bečváře (1999, s. 207–214) nebo v práci M. Lávičky (2001, s. 154–164) zaměřené na oblast Čech.

# Metoda studia

Matematické disciplíny se na vysoké škole tradičně podávají způsobem „definice, tvrzení, důkaz, příklad" a učitel často vyzývá studenty, aby zapomněli vše, co se učili na střední škole, protože to je „špatně". V posledních několika letech se však i na vysoké školy stále výrazněji prosazuje konstruktivisticky orientovaný přístup, který předpokládá, že se student k mnoha výsledkům dopracuje řešením vhodných úloh samostatně. I náš přístup je tímto trendem ovlivněn a snažíme se méně poučovat a více podněcovat čtenáře k práci. Proto je zde nejeden důležitý poznatek odsunut do úloh a cvičení a formulován v jejich řešení. Navíc nežádáme od čtenáře, aby zapomněl vše, co se již naučil. Naopak. Předpokládáme u něj tyto znalosti, i když víme, že mnohdy stojí na intuitivních základech a že je potřebné položit je na pevnější podklad. Proto s některými objekty (například s přímkou, vzdáleností, vektorem, . . . ) pracujeme dříve, než jsou tyto přesně zavedeny.

Jedním z těchto klíčových pojmů analytické geometrie je soustava souřadnic. O ní pojednáme zde.

Ze střední školy víme, že *kartézská soustava souřadnic v rovině* je dána dvojicí kolmých přímek označovaných $x$, $y$, zvaných souřadnicové osy a protínajících se v bodě $O$ zvaném počátek. Budeme ji značit $Oxy$. Předpokládáme, že číselnou osu jako vzájemné přiřazení bodů přímky a reálných čísel známe. Pak je popsáno, jak každému bodu $Z$ roviny lze přiřadit uspořádanou dvojici reálných čísel $[z_1; z_2]$, které nazýváme *souřadnice bodu* $Z$. Přiřazení $Z \leftrightarrow [z_1; z_2]$ je vzájemně jednoznačné zobrazení roviny $E^2$ a množiny $\mathbf{R}^2$. Tato skutečnost je tak jasná, že kdybychom ji chtěli dokázat, nevěděli bychom ani, co vlastně máme dělat. V tom právě tkví to, co jsme nazvali intuitivním poznáním analytické geometrie. Naše úsilí tedy bude směřovat k poznání hlubšímu, axiomatickému. Prvním krokem v tomto směru jsou následující dvě výzvy:

**Problém 1.** Upřesněte rozdíl mezi pojmy přímka a číselná osa. Popište, jak se z číselné osy může vytvořit přímka a jak se z přímky může sestrojit číselná osa. Řešení tohoto problému použijeme v druhém problému.

**Problém 2.** Zvažte, zda je možné soustavu souřadnic v rovině zavést i tímto novým způsobem:

V rovině zvolíme čtverec $OIDJ$ a jeho vrcholům přiřadíme souřadnice takto:

$$O \leftrightarrow [0; 0],\ I \leftrightarrow [1; 0],\ D \leftrightarrow [1; 1],\ J \leftrightarrow [0; 1].$$

Dále popíšeme, jak libovolnému bodu $Z$ roviny přiřadíme jeho souřadnice $[x; y]$. Z bodu $Z$ vedeme kolmice na přímky $OI$ a $OJ$ a jejich paty označíme po řadě $X$ a $Y$. Bodu $X$ na číselné ose $OI$ dané přiřazením $O \leftrightarrow 0$, $I \leftrightarrow 1$ přiřadíme souřadnici $x$ ($X \leftrightarrow x$) a podobně bodu $Y$ na číselné ose $OJ$ dané přiřazením $O \leftrightarrow 0$, $J \leftrightarrow 1$ přiřadíme souřadnici $y$.

Poznámka ke kapitole 1: Kapitola 1 obsahuje propedeutiku analytické geometrie a má-li čtenář dostatečné znalosti analytické geometrie ze střední školy, je možné ji vynechat (až na část věnovanou m-bázi, odstavce 1.9 a 1.10). V odstavci 1.12 je několik úloh, které by měly sloužit jako testové k tomu, zda může čtenář přikročit ke kapitole 2, nebo zda by si měl kapitolu 1 prostudovat. Učiteli tato kapitola přináší impulsy k otevírání myšlenek analytické geometrie žákům základní školy.

## Seznam literatury

Aristoteles: *Druhé analytiky*. Nakladatelství ČSAV, 1962, 40 s. (kniha první, kapitola sedmá).

Bečvář, J.: Algebra v 16. a 17. století. In Bečvář, J. & Fuchs, E. (Eds.), *Matematiky v 16. a 17. století, Sborník*, Edice Dějiny matematiky, sv. 12, Prometeus, Praha, 1999.

Freudenthal, H.: *Mathematics as an Educational Task.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht – Holland, 1973.

Lávička, M.: Josef Vojtěch Sedláček a analytická geometrie. In Bečvář, J. & Fuchs, E. (Eds.), *Matematika v proměnách věků II, Sborník*, Edice Dějiny matematiky, sv. 16, Prometeus, Praha, 2001.

Seneca, L. A.: *Výbor z listů Luciliovi,* Svoboda, 1969.

# Použité značky

| | |
|---|---|
| $\mathbf{N}$ | množina přirozených čísel |
| $\mathbf{N}_0$ | množina přirozených čísel s nulou |
| $\mathbf{Z}$ | množina celých čísel |
| $\mathbf{Q}$ | množina racionálních čísel |
| $\mathbf{Q}^+$ | množina kladných racionálních čísel |
| $\mathbf{R}$ | množina reálných čísel |
| $\mathbf{R}_0^+$ | množina kladných reálných čísel s nulou |
| $\mathbf{Z}^2$ | kartézský součin $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ |
| předpona m- | mřížový |
| m-vektor | mřížový vektor |
| $AB$ | úsečka $AB$ |
| $\|AB\|$ | délka úsečky $AB$ |
| $E^n$ | $n$-rozměrný euklidovský prostor |
| $\dim \mathcal{A}$ | dimenze prostoru $\mathcal{A}$ |
| $\vec{i} = (1; 0)$, $\vec{j} = (0; 1)$ | jednotkový vektor v $E^2$ |
| $(ABC)$ | dělicí poměr bodů $A$, $B$, $C$ |
| $\|\triangle OMN\|$ | obsah trojúhelníku $OMN$ |
| $\|\sphericalangle AOB\|$ | velikost úhlu $AOB$ |
| $\|Ap\|$ | vzdálenost bodu $A$ od přímky $p$ |
| $\|A\alpha\|$ | vzdálenost bodu $A$ od roviny $\alpha$ |
| $\|pq\|$ | vzdálenost dvou mimoběžek / rovnoběžek $p$, $q$ |
| $\rho = Rp$ | rovina $\rho$ daná bodem $R$ a přímkou $p$ |
| $\langle A, \vec{u}, \vec{v} \rangle$ | repér daný bodem $A$ a dvojicí lineárně nezávislých vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ |
| $\left\langle O, \vec{i}, \vec{j} \right\rangle$ | repér daný bodem $O$ a dvojicí vektorů $\vec{i}$ a $\vec{j}$ |
| $\mathbb{S} = A_0A_1A_2A_3A_4$ | simplex $A_0A_1A_2A_3A_4$ v $E^4$ |
| $\doteq$ | rovná se přibližně |
| $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ | vektorový součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ v $E^3$ |
| $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ | ortogonální doplněk vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ v $E^4$ |
| $\vec{u}^2$ | skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{u}$ |
| $A - \bullet - B$ | střed dvojice bodů $A$, $B$ |
| $\mathrm{D}(m, n)$ | největší společný dělitel čísel $m$, $n$ |
| $Oxy$ | kartézská soustava souřadnic s počátkem $O$, vodorovnou osou $x$ a svislou osou $y$ |

# Kapitola 1

# Propedeutika analytické geometrie

## 1.1 Terminologie – čtverečkovaný papír

Čtverečkovaný papír chápeme neohraničeně, tedy jako množinu všech bodů $[x; y]$, kde $x, y \in \mathbf{Z}$. Aritmetizací čtverečkovaného papíru je množina $\mathbf{Z}^2$. Protože o učivu budeme uvažovat často i z hlediska budoucích učitelů střední nebo základní školy, zkoumáme i „malou“ rovinu, tj. reálně existující čtverečkovaný papír.

V rámci řešení úloh připustíme i zobrazení $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a na čtverečkovaném papíru budeme rozlišovat dva druhy bodů: *mřížové*, to jsou ty, jejichž obě souřadnice jsou celá čísla, a *nemřížové*, to jsou ty, jejichž aspoň jedna souřadnice není číslo celé. Podobně budeme rozlišovat i dva druhy přímek: *mřížové*, to jsou ty, které obsahují aspoň dva (a tedy nekonečně mnoho) mřížové body, a *nemřížové*, to jsou ty, které obsahují nejvýše jeden mřížový bod. Adjektivum *mřížový* zkracujeme předponou „m“. Např. m-vektor je vektor, jehož obě souřadnice jsou celá čísla. Trojúhelník, čtyřúhelník,. . . , jehož všechny vrcholy jsou m-body, nazveme *mřížový trojúhelník*, *mřížový čtyřúhelník*,. . . nebo stručně *m-trojúhelník*, *m-čtyřúhelník*,. . .

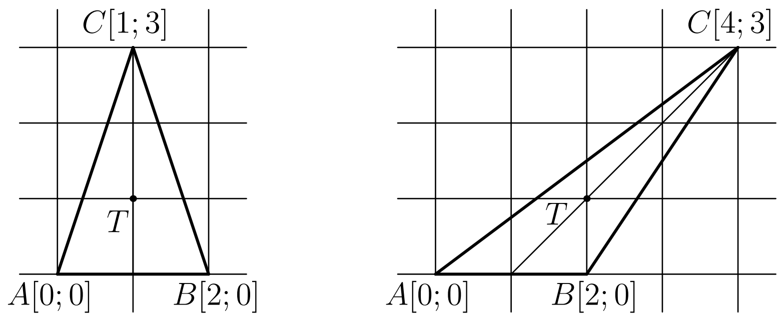
S celými čísly se pracuje lépe než s „necelými“ reálnými čísly. Proto budeme mnohé úvahy začínat úlohami, v nichž vystupují pouze m-body, m-přímky a m-útvary. Většinu těchto úvah pak zobecníme na situace bez celočíselného omezení. Často tuto práci přenecháme čtenáři do cvičení.

## 1.2 Úloha – těžiště trojúhelníku; metoda postupného uvolňování parametrů

Najděte zobrazení, které trojici vrcholů trojúhelníku $ABC$, kde $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $C[c_1; c_2]$, přiřadí jeho těžiště $T[t_1; t_2]$.

**Řešení:** Úlohu vyřešíme pomocí významné heuristické metody – metody postupného uvolňování parametrů.

Do situace získáme vhled nakreslením několika obrázků (obr. 1.1).




Obr. 1.1

Nyní je zřejmé, jak je nutné k dané volbě bodů $A$, $B$ zvolit bod $C$ tak, aby těžiště trojúhelníku bylo v m-bodě.

Zkoumejme nyní systematicky situaci naznačenou na obrázku 1.1. Fixujeme obě souřadnice bodu $A$ ($A[0;0]$) i bodu $B$ ($B[2;0]$) a bod $C$ necháme probíhat m-body přímky $y = 3$ ($C[c_1';3]$). Pro každý zvolený bod $C$ určíme souřadnice těžiště $T[t_1';t_2']$. Údaje zjištěné z obrázků evidujeme tabulkou 1.1a. Do posledního řádku tabulky zapíšeme vztah mezi údaji obecně.

| $c_1'$ | $t_1'$ | $t_2'$ |
|---|---|---|
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $-2$ | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 |
| 7 | 3 | 1 |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $c_1'$ | $\dfrac{c_1'+2}{3}$ | 1 |

(a)

| $c_1'$ | $t_1'$ | $t_2'$ |
|---|---|---|
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $-2$ | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 2 |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $c_1'$ | $\dfrac{c_1'+2}{3}$ | 2 |

(b)

Tab. 1.1

Stejný postup opakujeme pro $C[c_1';6]$ (tab. 1.1b), případně i pro další body $C[c_1';3k]$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$. Výsledky získané v posledních řádcích tabulek napíšeme do nové tabulky (tab. 1.2). Z ní můžeme vyčíst, jak souřadnice $c_2'$ ovlivňuje souřadnice $t_1'$ a $t_2'$. V tabulkách 1.1a a 1.1b jsme uvolňovali souřadnici $c_1'$, v tabulce 1.2 jsme uvolnili souřadnici $c_2'$.

| $a_1'$ | $a_2'$ | $b_1'$ | $b_2'$ | $c_1'$ | $c_2'$ | $t_1'$ | $t_2'$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 2 | 0 | $c_1'$ | 3 | $\frac{c_1'+2}{3}$ | 1 | tabulka 1.1a |
| 0 | 0 | 2 | 0 | $c_1'$ | 6 | $\frac{c_1'+2}{3}$ | 2 | tabulka 1.1b |
| 0 | 0 | 2 | 0 | $c_1'$ | 9 | $\frac{c_1'+2}{3}$ | 3 | |
| ... | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 2 | 0 | $c_1'$ | $c_2'$ | $\frac{c_1'+2}{3}$ | $\frac{c_2'}{3}$ | zobecnění |

Tab. 1.2

V dalším kroku uvolníme první souřadnici bodu $B$. Volíme postupně $B[1;0]$ (tab. 1.3), $B[3;0]$, ..., údaje zapíšeme do tabulky 1.4 a v jejím posledním řádku zobecníme.

| $a_1'$ | $a_2'$ | $b_1'$ | $b_2'$ | $c_1'$ | $c_2'$ | $t_1'$ | $t_2'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $c_1'$ | $c_2'$ | $\frac{c_1'+1}{3}$ | $\frac{c_2'}{3}$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $c_1'$ | $c_2'$ | $\frac{c_1'+1}{3}$ | $\frac{c_2'}{3}$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $c_1'$ | $c_2'$ | $\frac{c_1'+1}{3}$ | $\frac{c_2'}{3}$ |
| ... | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $c_1'$ | $c_2'$ | $\frac{c_1'+1}{3}$ | $\frac{c_2'}{3}$ |

Tab. 1.3

Celý postup zopakujeme pro $A[0;0]$ a $B[1;1]$, $B[2;1]$, $B[3;1]$ a tím uvolňujeme souřadnici $b_1'$. Z tabulek, které takto vzniknou, uvádíme pouze poslední (tab. 1.5). Zbylé necháme na čtenáři.

Nyní zbývá jen posunout bod $A[0;0]$ do bodu $[a_1;a_2]$ (pomocí posunutí o vektor $(a_1;a_2)$) a vyjádřit $t_1$, $t_2$. Výpočty provedeme pro první souřadnice, druhé souřadnice zjistíme analogicky:

$$t_1 = t_1' + a_1 = \frac{c_1' + b_1'}{3} + a_1 \wedge b_1 = b_1' + a_1 \wedge c_1 = c_1' + a_1.$$

Z posledních dvou rovnic vyjádříme $b_1'$ a $c_1'$ a dosadíme do první rovnice. Po úpravě dostáváme

$$t_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}.$$

| $a'_1$ | $a'_2$ | $b'_1$ | $b'_2$ | $c'_1$ | $c'_2$ | $t'_1$ | $t'_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $c'_1$ | $c'_2$ | $\frac{c'_1+1}{3}$ | $\frac{c'_2}{3}$ | tabulka 1.3 |
| 0 | 0 | 2 | 0 | $c'_1$ | $c'_2$ | $\frac{c'_1+2}{3}$ | $\frac{c'_2}{3}$ | tabulka 1.2 |
| 0 | 0 | 3 | 0 | $c'_1$ | $c'_2$ | $\frac{c'_1+3}{3}$ | $\frac{c'_2}{3}$ | |
| ... | | | | | | | | |
| 0 | 0 | $b'_1$ | 0 | $c'_1$ | $c'_2$ | $\frac{c'_1+b'_1}{3}$ | $\frac{c'_2}{3}$ | zobecnění |

Tab. 1.4

| $a'_1$ | $a'_2$ | $b'_1$ | $b'_2$ | $c'_1$ | $c'_2$ | $t'_1$ | $t'_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | | | | | | | |
| 0 | 0 | $b'_1$ | 0 | $c'_1$ | $c'_2$ | $\frac{c'_1+b'_1}{3}$ | $\frac{c'_2}{3}$ |
| 0 | 0 | $b'_1$ | 1 | $c'_1$ | $c'_2$ | $\frac{c'_1+b'_1}{3}$ | $\frac{c'_2+1}{3}$ |
| 0 | 0 | $b'_1$ | 2 | $c'_1$ | $c'_2$ | $\frac{c'_1+b'_1}{3}$ | $\frac{c'_2+2}{3}$ |
| ... | | | | | | | |
| 0 | 0 | $b'_1$ | $b'_2$ | $c'_1$ | $c'_2$ | $\frac{c'_1+b'_1}{3}$ | $\frac{c'_2+b'_2}{3}$ |

Tab. 1.5

**Výsledek:** $T[t_1; t_2]$, $t_1 = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$, $t_2 = \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$.

Poznámka: Uvedený postup ilustruje způsob odvození vyjádření souřadnic těžiště trojúhelníku. Jeho pravdivost je však nutné potvrdit důkazem.

## 1.3 Úloha – čtverec

V m-čtverci $ABCD$ znáte souřadnice vrcholů $A[a_1; a_2]$ a $B[b_1; b_2]$. Najděte souřadnice $c_1$, $c_2$, $d_1$, $d_2$ vrcholů $C$ a $D$. Hledejte pouze jedno ze dvou možných řešení. Uvažujte pouze m-čtverec $ABCD$, který je orientovaný proti směru pohybu hodinových ručiček.

**Řešení:** Nabízíme tři různé postupy.

Program A: Ve čtverci $ABCD$ platí $|AB| = |BC|$, $|AC| = \sqrt{2}|AB|$. Těmito vztahy jsou určeny dva body $C$. Nejprve je vypočteme, pak se pokusíme určit, který z nich je ten, co vyhovuje námi požadované orientaci. Bod $D$ určíme například ze vztahu $A - \bullet - C = B - \bullet - D$, tedy střed úsečky $AC$ je roven středu úsečky $BD$.

Realizace je technicky náročná – viz cvičení 1.5**B.**

Program B: Předpokládáme, že řešitel ví, jak se pomocí souřadnic otáčí vektor o 90°. Jestliže $\vec{u} = (u; v)$ je nenulový vektor, pak jeho otočením o 90° proti směru pohybu hodinových ručiček dostaneme vektor $\vec{u'} = (-v; u)$. Nechť tedy $\vec{u} = B - A$. Pak $C = B + \vec{u'}$ a $D = A + \vec{u'}$.

Realizace: $\vec{u} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$, tedy $\vec{u'} = (a_2 - b_2; b_1 - a_1)$.
$C = [b_1; b_2] + (a_2 - b_2; b_1 - a_1) = [a_2 + b_1 - b_2; -a_1 + b_1 + b_2]$,
$D = [a_1; a_2] + (a_2 - b_2; b_1 - a_1) = [a_2 + a_1 - b_2; a_2 - a_1 + b_1]$.

Výsledek: $c_1 = a_2 + b_1 - b_2$, $c_2 = -a_1 + b_1 + b_2$, $d_1 = a_2 + a_1 - b_2$, $d_2 = a_2 - a_1 + b_1$.

Program C: Budeme řešit sérii jednoduchých případů a výsledky evidované tabulkou postupně zobecňovat.

Realizaci, která ilustruje výše uvedenou metodu postupného uvolňování parametrů, je věnována úloha 1.5**A**.

## 1.4 Úloha – hraniční a vnitřní m-body m-trojúhelníku

Zjistěte, zda existuje závislost mezi počtem hraničních m-bodů a vnitřních m-bodů m-trojúhelníku.

**Řešení:** Na první pohled se zdá, že čím více má m-trojúhelník m-bodů na hranici, tím více má i vnitřních m-bodů a naopak. Toto zdání je ale klamné. Zavedeme následující označení: Je-li $T$ m-trojúhelník, pak $h(T)$ je počet m-bodů ležících na hranici trojúhelníku $T$ a $v(T)$ je počet m-bodů ležících uvnitř trojúhelníku $T$. Je zřejmé, že $h(T) \geqq 0$ a $v(T) \geqq 0$.

Lehce najdeme m-trojúhelník $T$, pro který $v(T) = 0$ a $h(T) = u$ je libovolné přirozené číslo $u \geqq 3$. Například $T = \triangle ABC$, kde $A[0; 0]$, $B[u - 2; 0]$, $C[0; 1]$.

Na druhé straně není těžké najít m-trojúhelník $T$, pro který je $h(T) = 3$ a $v(T) = u$ je libovolné přirozené číslo. Například $T = \triangle ABC$, kde $A[0; 0]$, $B[u; 1]$, $C[-1; 2]$.
Podrobnější řešení úlohy je podáno v úloze 1.5**D**.

## 1.5 Cvičení – m-útvary

**A.** Vyřešte úlohu **1.3** pomocí programu C.

**B.** Jsou dány vrcholy $A$, $B$ čtverce $ABCD$. Postupem, který je popsán v programu A v úloze **1.3**, najděte body $C$ a $D$. Řešte pro (a) $A[3; 1]$, $B[4; -1]$, (b) $A[0; 0]$, $B[a; b]$, (c) $A[a_1; a_1]$, $B[b_1; b_2]$.

**C.** Jsou dány souřadnice vrcholů $A$, $C$ čtverce $ABCD$. Najděte souřadnice vrcholů $B$ a $D$. Diskutujte řešitelnost úlohy v **Z** a v **R**.

**D.** Nakreslete co nejvíce m-trojúhelníků. Pro každý trojúhelník $T$ určete obsah ($S(T)$), počet hraničních m-bodů ($h(T)$) a počet vnitřních m-bodů ($v(T)$). Hledejte závislosti mezi těmito třemi parametry.

Rada: Sepište všechny výsledky do tabulky. Jaké závislosti lze z tabulky vyčíst?

Poznámka: V dalších řádcích a rovněž v příslušných výsledcích budeme pro jednoduchost místo $S(T)$, $h(T)$ a $v(T)$ psát pouze $S$, $h$ a $v$. Věříme, že toto zjednodušení nepovede k nedorozumění. Pomocné otázky:

(a) Jakou největší, resp. nejmenší hodnotu může nabývat číslo $S$, jestliže $h = 3$ a $v = 0$?

(b) Pro kolik navzájem neshodných trojúhelníků $T$ platí $h = 3$ a $v = 0$?

(c) Pro kolik navzájem neshodných trojúhelníků $T$ platí $h = 4$, $v = 0$?

(d) Jakých hodnot může nabývat číslo $S$ pro trojúhelníky, které jste našli při řešení předchozí otázky?

(e) Sepište do nové tabulky hodnoty $S$ a $h$ pro $v = 0$ a hodnoty uspořádejte. Najděte vztah mezi $S$ a $h$.

(f) Pro kolik navzájem neshodných trojúhelníků $T$ platí $h = 3$, $v = 1$ a jakých hodnot může nabývat číslo $S$ pro tyto trojúhelníky?

(g) Sepište do další tabulky hodnoty $S$ a $h$ pro $v = 1$ a hodnoty uspořádejte. Najděte vztah mezi $S$ a $h$.

(h) Jakých hodnot může nabývat číslo $v$, jestliže $h = 3$? Jakých hodnot pak nabývá číslo $S$?

(i) Sepište do další tabulky hodnoty $S$ a $h$ pro $v = 2$ a hodnoty uspořádejte. Najděte vztah mezi $S$ a $h$.

(j) Formulujte vztah mezi hodnotami $S$ a $h$ pro $v = 3$. Výsledek zkontrolujte obrázkem.

(k) Sepište do nové tabulky vztah mezi hodnotami $S$ a $h$ pro $v = 1, 2, 3, \dots$ (to jsou poslední řádky předchozích tabulek) a formulujte obecný vztah mezi $S$, $h$ a $v$ pro mřížové trojúhelníky. Tento vztah se nazývá *Pickova formule*.

**E.** Předpokládejme, že Pickova formule platí pro m-trojúhelníky. Dokažte, že pak Pickova formule platí i pro m-čtyřúhelníky.

**F.** Jsou dány m-body $A[0; 0]$, $B[b_1; b_2]$ tak, že čísla $b_1, b_2$ jsou nesoudělná. Najděte všechny m-body $C[c_1; c_2]$ tak, že trojúhelník $ABC$ nemá na hranici žádný m-bod kromě bodů $A$, $B$, $C$ a uvnitř má právě jeden m-bod.

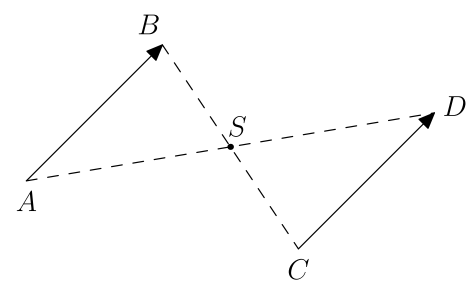
## 1.6 Vektor ve fyzice, geometrii a algebře

S pojmem vektor se žák střední školy setkává v hodinách fyziky i matematiky.

Ve fyzice se jedná o veličinu, která popisuje rychlost, zrychlení, sílu a mnohé další fyzikální jevy. Zde je vektor chápán jako veličina, která má velikost, směr a (v mnoha případech) umístění.

Pojetí vektoru v aritmetice jako uspořádané $n$-tice reálných (celých, racionálních, ...) čísel didaktické potíže nedělá.

V geometrii se vektor chápe jako nástroj, který určuje posunutí (na přímce, v rovině, v prostoru), a je chápán jako veličina, která má velikost, směr, nikoli ovšem umístění. Jestliže tedy v rovině nakreslíme úsečku $AB$ a k ní v bodě $B$ přikreslíme šipku, označujeme tímto znakem nikoli vázaný vektor umístěný v bodě $A$, ale celou třídu vázaných vektorů. Dva vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ pak označují stejný vektor, právě když platí $A - \bullet - D = B - \bullet - C$ (obr. 1.2). Tento způsob konstrukce pojmu vektor, který nazýváme faktorizací, je myšlenkově náročný, a proto bývá zdrojem mnoha nedorozumění.




Obr. 1.2

Připomeňme, že s operací faktorizace se žáci setkali již při zavádění pojmu zlomek. Tam poznali, že dva zlomky $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ představují totéž racionální číslo, právě když $ad = bc$. I tam představovala faktorizace pro mnoho žáků překážku až nepřekonatelnou.

Popsané didaktické potíže jsou výzvou pro učitele, aby hledal způsob, jak je překonat. Druhý z autorů tohoto textu ve svém experimentálním vyučování již od pátého ročníku hrával se žáky hru na cestování po čtverečkovaném (později i čistém) papíře. Děti se s náročným pojmem vektor seznamovaly hravou a činnostní formou a v dostatečném předstihu před jeho oficiálním zavedením. Díky tomu byly výsledky tohoto experimentu velice dobré. Drtivá většina těchto žáků již v osmém ročníku dobře rozuměla pojmům vektor, lineární závislost vektorů a báze.

Hru na cestování pomocí vektorů osvětlíme na několika úlohách a cvičeních.

Poznámka: V prvních třech kapitolách pracujeme pouze ve dvojrozměrném prostoru. Zde vektorem $\vec{p}$ rozumíme uspořádanou dvojici reálných čísel $(a; b)$. Zapisujeme $\vec{p} = (a; b)$. Vektor $\vec{p}$ nazveme m-vektorem, právě když $a, b \in \mathbf{Z}$.

## 1.7 Úloha – vektory jako posunutí

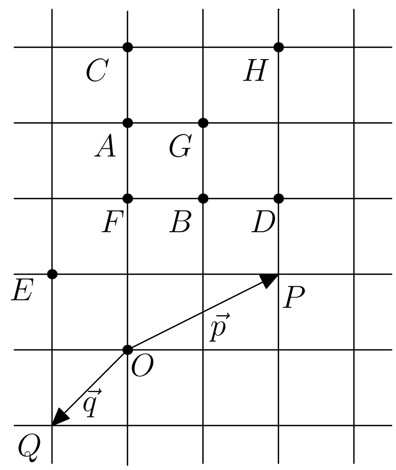
Vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ určují posunutí. Pomocí nich cestujeme z jednoho mřížového bodu do druhého. Najděte způsob, jak se dostat (a) z $A$ do $B$, (b) z $C$ do $D$, (c) z $B$ do $C$ (obr. 1.3).

**Řešení:**

(a) $A \xrightarrow{\vec{p}} H \xrightarrow{\vec{q}} G \xrightarrow{\vec{q}} F \xrightarrow{\vec{q}} E \xrightarrow{\vec{p}} B$, tedy $A \xrightarrow{2\vec{p}+3\vec{q}} B$,

(b) $C \xrightarrow{2\vec{p}+3\vec{q}} G \xrightarrow{2\vec{p}+3\vec{q}} D$, tedy $C \xrightarrow{4\vec{p}+6\vec{q}} D$,

(c) $B \xrightarrow{-\vec{p}} E \xrightarrow{-2\vec{q}} G \xrightarrow{-2\vec{p}-3\vec{q}} C$, tedy $B \xrightarrow{-3\vec{p}-5\vec{q}} C$.




Obr. 1.3

Zápis pomocí šipek je pro žáky základní školy názorný. Později, když žáci získají více zkušeností s vektory, přecházíme k tradiční notaci:

(a) $A+2\vec{p}+3\vec{q} = B$, (b) $C+4\vec{p}+6\vec{q} = D$, (c) $B-3\vec{p}-5\vec{q} = C$.

## 1.8 Úloha – cestování pomocí vektorů

Řešte modifikaci úlohy **1.7**. Dvojici vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$ nahraďte dvojicí vektorů $\vec{u} = (3; 1)$, $\vec{v} = (1; 1)$.

**Řešení:** Případy (a) a (b) jsou snadné: (a) $A - 2\vec{v} + \vec{u} = B$, (b) $C + 2\vec{u} - 4\vec{v} = D$.

Případ (c) má v sobě záludnost. Z bodu $B$ do $C$ se umíme dostat, pouze když budeme vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ půlit: $B - 1,5\vec{u} + 3,5\vec{v} = C$. Je takové cestování přípustné? Odpověď na tuto otázku je věcí domluvy. Může být ano i ne. V obou případech je nutné terminologické upřesnění.

## 1.9 Terminologie – lineární kombinace vektorů

*Lineární kombinací vektorů* $\vec{a}$, $\vec{b}$ nazýváme každý vektor $x\vec{a} + y\vec{b}$, kde $x, y \in \mathbf{R}$. V případě $x, y \in \mathbf{Z}$, (resp. $x, y \in \mathbf{Q}$) vektor $x\vec{a} + y\vec{b}$ nazýváme *celočíselnou* (resp. *racionální*) *kombinací vektorů* $\vec{a}$, $\vec{b}$. Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ nazýváme *lineárně závislé*, jestliže existuje číslo $z \in \mathbf{R}$ tak, že $\vec{a} = z\vec{b}$ nebo $\vec{b} = z\vec{a}$.

Řekneme, že m-bod $B$ je *celočíselně dosažitelný z bodu* $A$ *pomocí* $\vec{a}$, $\vec{b}$, když existují $x, y \in \mathbf{Z}$ tak, že $B = A + x\vec{a} + y\vec{b}$. V opačném případě je $B$ *celočíselně nedosažitelný z* $A$ *pomocí* $\vec{a}$, $\vec{b}$.

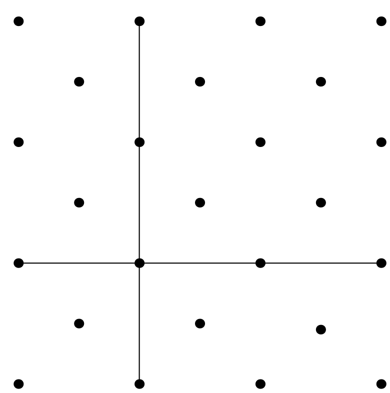
Dvojici m-vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ nazveme *m-bází*, jestliže každý m-vektor je jejich celočíselnou kombinací, tj. jestliže každý m-bod je celočíselně dosažitelný z počátku $O$ pomocí $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Zvláště významná je m-báze $(1;0)$, $(0;1)$, pro kterou budeme nadále používat písmena $\vec{i}$, $\vec{j}$ takto: $\vec{i}(1;0)$, $\vec{j}(0;1)$.

## 1.10 Úlohy – m-báze

**A.** Které mřížové body jsou celočíselně dosažitelné z $O[0;0]$ pomocí vektorů $\vec{u} = (3;1)$, $\vec{v} = (1;1)$?

**Řešení:** Nakreslíme „tapetu“ všech m-bodů celočíselně dosažitelných z bodu $O$ pomocí vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ (obr. 1.4). Vidíme, že celočíselně dosažitelný je právě ten m-bod $A[a_1;a_2]$, pro který je číslo $a_1 + a_2$ sudé.



Obr. 1.4

**Důkaz:** Bod $A[a_1;a_2]$ je celočíselně dosažitelný, právě když existují $x, y \in \mathbf{Z}$ tak, že $A = O + x\vec{u} + y\vec{v}$. V souřadnicích: $a_1 = 3x + y$, $a_2 = x + y$, odkud $x = \frac{a_1 - a_2}{2}$, $y = \frac{3a_2 - a_1}{2}$. Čísla $x, y$ jsou celá, právě když $a_1$, $a_2$ jsou současně obě sudá, nebo obě lichá. QED

**B.** Je libovolný m-bod celočíselně dosažitelný z libovolného m-bodu pomocí vektorů $\vec{p} = (2;1)$, $\vec{q} = (-1;-1)$?

**Řešení:** Odpověď zní ano.

<u>Důkaz:</u> Pomocí vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$ lze vyjádřit vektory $\vec{i} = (1;0)$, $\vec{j} = (0;1)$ a pomocí těchto pak libovolný m-vektor $\vec{z} = (x;y)$. Tedy dvojice $\vec{p}$, $\vec{q}$ je m-bází.

Skutečně $\vec{i} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{j} = -\vec{p} - 2\vec{q}$, odtud $\vec{z} = x\vec{i} + y\vec{j} = x(\vec{p} + \vec{q}) + y(-\vec{p} - 2\vec{q}) = (x - y)\vec{p} + (x - 2y)\vec{q}$. QED

Uvedený důkaz je víc než logická hra. Je to návod, jak můžeme libovolný m-vektor vyjádřit pomocí m-báze $\vec{p}$, $\vec{q}$. Tato konstrukce naznačuje i řešení poslední a nejtěžší z trojice úloh.

**C.** Najděte kritérium, podle kterého lze jednoduše rozhodnout, zda je dvojice m-vektorů $\vec{m} = (m_1; m_2)$, $\vec{n} = (n_1; n_2)$ m-bází.

**Řešení:** Z předchozí úlohy vidíme, že klíčem k řešení je m-báze $\vec{i}, \vec{j}$. Zřejmě platí tvrzení: $\vec{m}, \vec{n}$ je m-bází $\Leftrightarrow$ vektory $\vec{i}, \vec{j}$ jsou celočíselnou kombinací vektorů $\vec{m}$ a $\vec{n}$.

V dalším předpokládáme, že vektory $\vec{m}$ a $\vec{n}$ jsou lineárně nezávislé, tj. že tvoří bázi.

Zjistíme tedy, kdy jsou oba vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$ celočíselnou kombinací vektorů $\vec{m}$ a $\vec{n}$, tj. kdy existují $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$ tak, že

$$\vec{i} = x_1\vec{m} + y_1\vec{n},\ \vec{j} = x_2\vec{m} + y_2\vec{n}. \tag{1.1}$$

Vyjděme z toho, co známe:

$$\vec{m} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j},\ \vec{n} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j}. \tag{1.2}$$

Upravme tuto soustavu rovností na tvar (1.1). Dostaneme

$$\vec{i} = \frac{n_2}{D}\vec{m} - \frac{m_2}{D}\vec{n},\ \vec{j} = -\frac{n_1}{D}\vec{m} + \frac{m_1}{D}\vec{n},\ \text{kde } D = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} = m_1 n_2 - n_1 m_2$$

($D \neq 0$, protože $\vec{m}$, $\vec{n}$ jsou lineárně nezávislé).

Hledaná čísla $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ tedy jsou

$$x_1 = \frac{n_2}{D},\ y_1 = \frac{-m_2}{D},\ x_2 = \frac{-n_1}{D},\ y_2 = \frac{m_1}{D}. \tag{1.3}$$

Je zřejmé, že, je-li $|D| = 1$, pak $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$. Tedy podmínka $|D| = 1$ je postačující k tomu, aby čísla $x_1, x_2, y_1, y_2$ byla celá. Je tato podmínka i podmínkou nutnou?

Předpokládejme, že $|D|$ je různé od 1. Nechť například $D = 2$. Ze vztahů (1.3) plyne, že čísla $x_1, x_2, y_1, y_2$ jsou celá, právě když všechna čísla $m_1, m_2, n_1, n_2$ jsou sudá. Pak ale $D$ je číslo dělitelné čtyřmi, protože je rozdílem dvou čísel, z nichž každé je součinem dvou sudých čísel. Tedy všechna čísla $m_1, m_2, n_1, n_2$ jsou čtyřnásobky. Pak $D$ je šestnáctinásobek atd. To je zřejmě do nekonečna ubíhající úvaha.

Problém uchopíme za jiný konec. Ze vztahů (1.3) vyjádříme $m_1, m_2, n_1, n_2$ a dosadíme je do rovnosti $D = m_1n_2 - n_1m_2$. Získáme $D = D^2(x_1y_2 - x_2y_1)$, tedy $1 = D(x_1y_2 - x_2y_1)$. Součin dvou celých čísel je 1. To je možné, pouze když obě tato čísla jsou současně rovna 1, nebo $-1$.

Tím jsem odvodili tvrzení, které je řešením dané úlohy.

**Tvrzení 1.1:** Dvojice m-vektorů $\vec{m}(m_1; m_2)$, $\vec{n}(n_1; n_2)$ je m-bází, právě když

$$|m_1n_2 - m_2n_1| = 1, \text{ neboli } \left| \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} \right| = 1.$$

**Důkaz:** Implikace $\Rightarrow$ byla dokázána výše, důkaz implikace $\Leftarrow$ uděláme zde.

Nechť platí (1.2) a $|m_1n_2 - m_2n_1| = 1$. Definujme čísla $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ předpisem $x_1 = n_2$, $y_1 = -m_2$, $x_2 = -n_1$, $y_2 = m_1$. Pak $\vec{i} = n_2 \cdot \vec{m} - m_2 \cdot \vec{n}$, $\vec{j} = -n_1 \cdot \vec{m} + m_1 \cdot \vec{n}$, a tedy vektory $\vec{m}$, $\vec{n}$ tvoří m-bázi.

**D.** Dokažte tvrzení: Nechť jsou m-vektory $\vec{m}(m_1; m_2)$, $\vec{n}(n_1; n_2)$ lineárně nezávislé. Označme $D = m_1n_2 - m_2n_1$. Pak každý m-vektor $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$, kde $x, y \in \mathbf{Z}$, lze psát ve tvaru $\vec{w} = \frac{p}{D}\vec{m} + \frac{q}{D}\vec{n}$, kde $p, q \in \mathbf{Z}$.

**Řešení:** Využijeme řešení předchozí úlohy. Podle vztahů (1.1) a (1.3) je

$$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{xn_2 - yn_1}{D}\vec{m} + \frac{-xm_2 + ym_1}{D}\vec{n}.$$

Protože $p = xn_2 - yn_1$ i $q = -xm_2 + ym_1$ jsou celá čísla, je tvrzení dokázáno.

## 1.11 Cvičení – m-báze

**A.** Najděte m-vektor, který je celočíselnou kombinací dvou vektorů: (a) $\vec{a} = (1,5; -0,2)$, $\vec{b} = (\frac{1}{3}; 3)$, (b) $\vec{c} = (\sqrt{2}; \frac{1}{3})$, $\vec{d} = (\sqrt{8}; \frac{1}{5})$, (c) $\vec{e} = (\sqrt{2}; 1)$, $\vec{f} = (\sqrt{3}; 1)$.

**B.** Najděte vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, jejichž souřadnice jsou různá iracionální čísla, a $2\vec{u} - 3\vec{v}$ je m-vektor.

**C.** Najděte lineárně závislé m-vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a m-vektor $\vec{w}$ tak, že $\vec{w}$ je celočíselnou kombinací vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, ale není celočíselným násobkem vektoru $\vec{u}$, ani vektoru $\vec{v}$.

**D.** K danému m-vektoru $\vec{p}$ najděte m-vektor $\vec{q} = (q_1; q_2)$ tak, aby dvojice $\vec{p}$, $\vec{q}$ tvořila m-bázi: (a) $\vec{p} = (2; 3)$, (b) $\vec{p} = (2; 2)$, (c) $\vec{p} = (-26; 33)$, (d) $\vec{p} = (84; 105)$.

**E.** Dokažte tvrzení: Jsou-li souřadnice m-vektoru $\vec{p} = (p_1; p_2)$ soudělné (tj. D$(p_1, p_2) = n > 1$), pak $\vec{p}$ není prvkem m-báze, tj. neexistuje m-vektor $\vec{q} = (q_1; q_2)$ tak, že vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ tvoří m-bázi.

**F.** Najděte kritérium, kterým lze rozhodnout, zda daný m-vektor $\vec{p} = (p_1; p_2)$ lze doplnit m-vektorem $\vec{q} = (q_1; q_2)$ na m-bázi.

**G.** Jsou dány vektory (a) $\vec{u} = (4;1)$, $\vec{v} = (1;1)$, (b) $\vec{u} = (1;-2)$, $\vec{v} = (1;1)$. Jaké podmínky musí splňovat celá čísla $a_1$, $a_2$, aby bod $A[a_1;a_2]$ byl celočíselně dosažitelný z počátku $O[0;0]$ pomocí vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$?

**H.** Úlohu „najděte obecné celočíselné řešení rovnice $ax + by = 1$, kde $a, b \in \mathbf{Z}$ jsou nesoudělná" přeformulujte co nejvíce různými způsoby.

## 1.12 Shrnující úlohy

**A.** Na čtverečkovaném papíře je dán mřížový obdélník $ABCD$ o rozměrech $7 \times 4$. Sestrojte mřížovou přímku, která úsečku $AC$ protíná v bodě $X$, pro který platí $|AX| : |XC| = 3 : 5$.

**B.** Najděte nutnou a postačující podmínku pro souřadnice mřížových bodů $A[a_1;a_2]$, $B[b_1;b_2]$, $C[c_1;c_2]$, aby těžiště $T$ trojúhelníku $ABC$ byl mřížový bod.

**C.** Jsou dány souřadnice mřížových bodů $A[a_1;a_2]$, $B[b_1;b_2]$. Najděte souřadnice bodů $C$, $D$ tak, aby $ABCD$ byl kladně orientovaný čtverec.

**D.** Jsou dány vektory $\vec{u}(1;2)$, $\vec{v}(3;1)$.

(a) Jaký vzor vyplní v rovině všechny body typu $O + x\vec{u} + y\vec{v}$, kde $x, y \in \mathbf{Z}$?

(b) Najděte nejmenší nadmnožinu $\mathcal{M}$ množiny $\mathbf{Z}$, pro kterou platí, že množina $\{O + x\vec{u} + y\vec{v}; x, y \in \mathcal{M}\}$ obsahuje všechny mřížové body.

# Kapitola 2

# Míra v euklidovské rovině $E^2$

## 2.1 Výchozí poznatky

Předpokládáme, že je dána kartézská soustava souřadnic $Oxy$. Připomeneme několik pojmů a vztahů.
*Velikost vektoru* $\vec{u} = (u_1; u_2)$ je dána předpisem $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.
*Vzdálenost dvou bodů* $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$:

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$
$$|AB| = |\vec{b} - \vec{a}|, \text{ kde } \vec{a}(a_1; a_2),\ \vec{b}(b_1; b_2)$$

*Skalárním součinem* vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ nazýváme číslo $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$.
Pro nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí: vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou *kolmé*, právě když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
*Viètovy vzorce* pro kořeny $x_1$, $x_2$ kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

## 2.2 Problém – přesné měření délky úsečky

Pracujeme na čtverečkovaném papíře s jednotkovým čtvercem o obsahu 1 cm$^2$. Ukážeme, jak v průběhu experimentálního vyučování v 5.–7. ročníku žáci jedné třídy dospěli až k objevu Pythagorovy věty.

V pátém ročníku zjišťovali žáci délky mřížových úseček. K nejvíce diskutovaným patřily úsečky $AB$, $AC$ a $AD$, kde $A[0; 0]$, $B[3; 2]$, $C[3; 4]$, $D[1; 1]$, které byly vyznačeny na centimetrovém čtverečkovaném papíru. Mezi žáky vznikly spory, které se týkaly přesnosti měření. Většina žáků naměřila milimetrovým měřítkem vzdálenost bodů (i) $A$, $B$ přesně 36 mm, (ii) $A$, $C$ přesně 50 mm, (iii) $A$, $D$ přesně 14 mm. Avšak vždy několik žáků tvrdilo, že vzdálenost je o „kousek“

větší než uvedené číslo, a také vždy někdo naměřil vzdálenost bodů o „kousek“ menší než uvedené číslo. Spor byl dlouho otevřen.

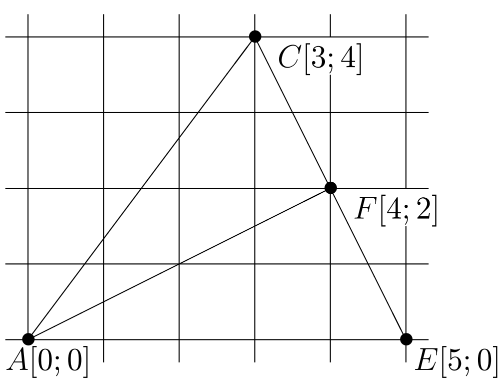
Ukážeme tři myšlenky, které žáci při řešení uvedeného sporu postupně objevili v 6. a 7. ročníku.

### 2.2.1 Myšlenka prodlužování

Každou z úseček $AB$, $AC$, $AD$ několikanásobně prodloužíme.

1. Úsečku $AB$ prodloužíme např. sedmkrát. Dostáváme bod $B' = [21; 14]$ a změříme vzdálenost bodů $A$, $B'$. Spory o to, zda vzdálenost bodů $A$, $B'$ je přesně 252 mm, nebo o kousek větší, přetrvávají.
2. Sedminásobné prodloužení úsečky $AC$ a změření vzdálenosti bodů $A$, $C' = [21; 28]$ spor také nevyřešilo.
3. Změřením vzdálenosti bodů $A$, $D'$, kde bod $D'[10; 10]$ dostaneme desetinásobným prodloužením úsečky $AD$, získáme číslo 141 a něco. Víme tedy, že vzdálenost bodů $A$, $D$ je určitě větší než 14 mm. Dokonce můžeme říci, že 14,1 mm $< |AD| <$ 14,2 mm. Spor týkající se úsečky $AD$ je tedy vyřešen.

### 2.2.2 Myšlenka rovnoramenného trojúhelníku



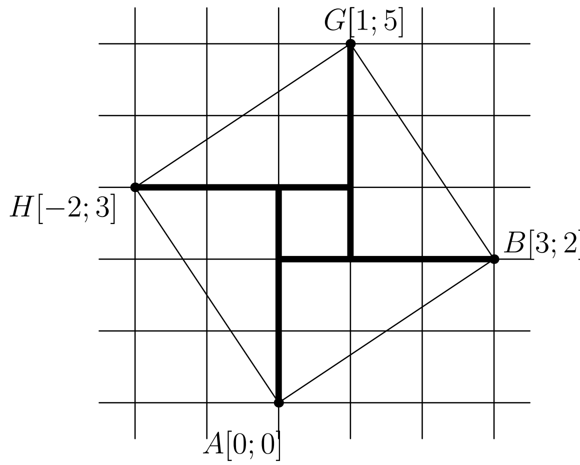

Obr. 2.1

Spor o vzdálenosti bodů $A$, $C$ lze řešit pomocí trojúhelníku $AEC$, kde $E[5; 0]$ (obr. 2.1). Je zřejmé, že bod $F[4; 2]$ je středem strany $EC$ a že úsečky $AF$ a $EC$ jsou na sebe kolmé, protože $AF$ má „stoupání“ $2 : 1$ a $CE$ má „klesání“ $1 : 2$. Tedy $AF$ je výškou daného trojúhelníku a dělí jej na dva shodné trojúhelníky ($\triangle AFC \cong \triangle AFD$ podle věty sus. Proto je $|AC| = |AE| = 5$ cm.

### 2.2.3 Myšlenka čtverce

Myšlenka čtverce umožní rozhodnout spor o přesnost měření vzdálenosti zbývající dvojice bodů $A$, $B$, ale i jakékoliv jiné. Její realizace vyžaduje, aby žáci uměli na čtverečkovaném papíře sestrojovat čtverce a hledat jejich obsahy.

Nad úsečkou $AB$ sestrojme čtverec $ABGH$ (obr. 2.2). Obsah čtverce $ABGH$ zjistíme například tak, že čtverec „rozkrájíme“ na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky a jeden čtverec. Hledaný obsah je $4 \cdot 3 + 1 = 13$ cm$^2$ $= 1\,300$ mm$^2$. Kdyby $|AB| = 36$ mm, byl by obsah čtverce $36 \cdot 36 = 1\,296$ mm$^2$. Obsah čtverce je však větší než 1 296, tedy $|AB| > 36$ mm. Tato myšlenka dává možnost numerického hledání čísla $|AB|$, kde $A$, $B$ jsou dva m-body, bez použití Pythagorovy věty.



Obr. 2.2

## 2.3 Cvičení – měření

Ve cvičeních **C, D, E, A** se vžijte do žáka sedmého/osmého ročníku základní školy, který je nápaditý, rozumí vzorci pro obsah trojúhelníku, umí hledat obsahy m-trojúhelníků, způsobem popsaným v odstavci 2.2.3 umí zjišťovat délky m-úseček, ví, jak na kalkulačce pomocí klíče $\boxed{\sqrt{\ }}$ najít stranu čtverce, zná-li jeho obsah. Vstupní údaje jsou v cm, výsledek hledejte s přesností na desetinu milimetru. Výpočet kontrolujte obrázkem a měřením.

**A.** „Myšlenkou čtverce“ zjistěte co nejpřesněji vzdálenost bodů $A$, $C$ z problému **2.2**.

**B.** „Myšlenkou rovnoramenného trojúhelníku“ dokažte, že vzdálenost bodů $A[0;0]$, $M[12;5]$ je celočíselná.

**C.** Najděte velikosti výšek trojúhelníku $ABC$, kde $A[0;0]$, $C[2;4]$, a (a) $B[2;0]$, (b) $B[2;1]$, (c) $B[1;1]$.

**D.** Zjistěte vzdálenost $d$ počátku $O$ od přímky $PR$, kde $P[5;0]$ a (a) $R[0;5]$, (b) $R[4;2]$, (c) $R[1;3]$, (d) $R[2;4]$.

**E.** Metodou postupného uvolňování parametrů najděte vzorec pro vzdálenost $d$ počátku $O$ od přímky $PR$, kde $P[p;0]$, $p \neq 0$, $R[r;s]$, když (a) $p, r, s \in \mathbf{Z}$, (b) $p, r, s \in \mathbf{R}$.

**F.** Zjistěte, v jakém poměru dělí bod $O$, kde $KL \cap MN = \{O\}$, úsečky $KL$ a $MN$, víte-li, že $K = [0;0]$, $L = [3;2]$ a (a) $M = [3;0]$, $N = [2;2]$, (b) $M = [2;3]$, $N = [3;1]$, (c) $M = [3;1]$, $N = [1;4]$.

**G.** Určete přesně souřadnice bodu $O$ z cvičení **F**.

**H.** Je dán trojúhelník $ABC$, kde $A = [0; 0]$, $B = [5; 2]$, $C = [3; 3]$.

(a) Určete přesně souřadnice bodu $V_c$, který je patou výšky z bodu $C$. Využijte metodu dělení úseček (viz řešení úlohy **F**).

(b) Vypočítejte velikost výšky $v_c$ s využitím metody dělení úsečky.

**I.** Kolik existuje navzájem neshodných rovnoramenných m-trojúhelníků s ramenem délky 5?

**J.** Jsou dány body $A[1; \sqrt{3}]$, $B[\sqrt{3}; -1]$, $C[0; -\sqrt{3}]$. Najděte bod $D$ tak, aby byl čtyřúhelník $ABCD$ lichoběžník, kde $AB \parallel CD$ a $|CD| = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

## 2.4 Cvičení – Pythagorejské trojice

**A.** Najděte rovnoramenný m-trojúhelník $ABC$, jestliže $A[0; 0]$, $B[b_1; 0]$, $C[c_1; c_2]$ a pro m-bod $S$, který je středem základny $BC$, je (a) $S = [3u; u]$, (b) $S = [4u; u]$, (c) $S = [5u; u]$, kde $u$ je vhodné přirozené číslo.

**B.** Zobecněte předchozí cvičení. Za střed základny $BC$ zvolte m-bod $S = [nt; t]$, kde $n$ je libovolné dané přirozené číslo a $t$ je vhodně k číslu $n$ volené přirozené číslo.

**C.** Najděte nejmenší možný rovnoramenný m-trojúhelník $ABC$ se základnou $BC$, kde $A[0; 0]$, $B[b; 0]$, $C[c_1; c_2]$, tak, aby výška na stranu $a$ procházela bodem $K$ o souřadnicích (a) $[3; 2]$, (b) $[5; 2]$, (c) $[7; 2]$, (d) $[n; 2]$, $n \in \mathbf{N}$, a $\mathrm{D}(n, 2) = 1$.

**D.** Najděte nejmenší možný rovnoramenný m-trojúhelník $ABC$ se základnou $BC$, kde $A[0; 0]$, $B[b; 0]$, $C[c_1; c_2]$, tak, aby výška na stranu $a$ procházela bodem $K$ o souřadnicích (a) $[4; 3]$, (b) $[5; 3]$, (c) $[7; 3]$, (d) $[8; 3]$, (e) $[n; 3]$, $n \in \mathbf{N}$ a $\mathrm{D}(n, 3) = 1$.

**E.** Zobecněte výsledky cvičení **C** a **D** a najděte nejmenší možný rovnoramenný m-trojúhelník $ABC$ se základnou $BC$, kde $A[0; 0]$, $B[b; 0]$, $C[c_1; c_2]$, tak, aby výška na stranu $a$ procházela bodem $K = [u; v]$, kde $u, v \in \mathbf{N}$ a jsou nesoudělná.

**F.** Využijte výsledků z cvičení **C**, **D** a **E** a formulujte návod na hledání Pythagorejských trojic. Návod formulujte ve formě tvrzení.

Trojici $(a, b, c) \in \mathbf{N}^3$ nazveme *Pythagorejskou*, právě když $a^2 + b^2 = c^2$.
Jsou-li délky všech stran pravoúhlého trojúhelníku celočíselné, pak tato tři čísla tvoří Pythagorejskou trojici.

### 2.4.1 Komentář

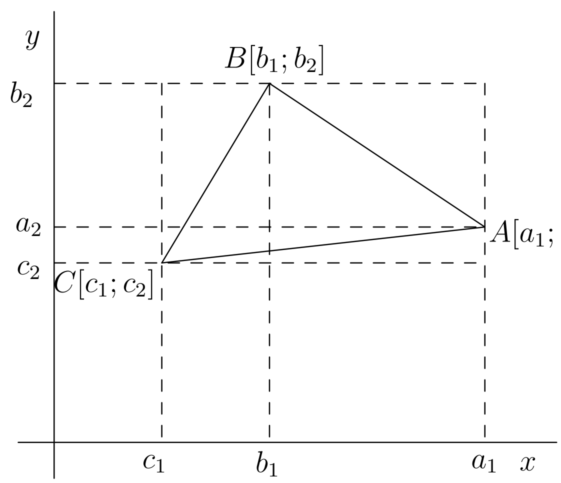
Do této chvíle jsme myšlenku vzdálenosti (délky) diskutovali z hlediska učitele. Ukázali jsme jeden z možných konstruktivistických přístupů, který jsme sami prověřili v praxi. Nejprve zde byl problém: Co nejpřesněji zjistit některé vzdálenosti dvou m-bodů. Žáci již v pátém ročníku řešili úlohu měřením, ale postupně přinášeli nové a nové spekulativní úvahy, až posléze v sedmém ročníku dospěli k silnému výsledku a odhalili způsob hledání Pythagorejských trojic. Žáci formulovali svoje řešení jako návod na hledání Pythagorejských trojic. Námi uvedené tvrzení 2.3 v řešení úlohy 2.4**F** je tradiční matematická formulace této myšlenky.

## 2.5 Úloha – obsah trojúhelníku

Najděte obsah trojúhelníku $ABC$, kde $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $C[c_1; c_2]$.

**Řešení:** Úlohu můžeme řešit přinejmenším čtyřmi způsoby: A – metodou „krájení“, „ořezávání“ nebo „doplňování“, B – metodou uvolňování parametrů, C – pomocí sinové věty, D – pomocí vztahu pro vzdálenost bodu od přímky.

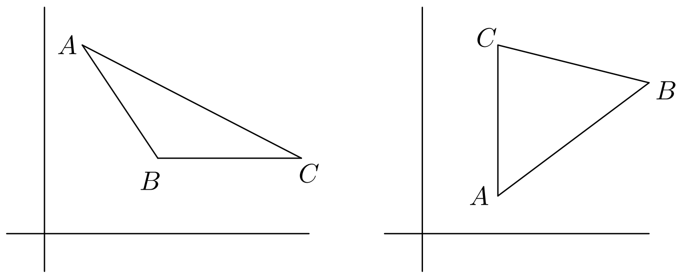
Zde ukážeme způsob A. Doplníme trojúhelník $ABC$ na obdélník se dvěma stranami rovnoběžnými s osou $x$, resp. $y$ (obr. 2.3). Pak stačí použít základní vzorečky pro obsah pravoúhlého trojúhelníku a obdélníku.




Obr. 2.3

$$
\begin{aligned}
|\triangle ABC| =& |(a_1-c_1)(b_2-c_2) - \frac{(a_1-c_1)(a_2-c_2)}{2} - \frac{(b_1-c_1)(b_2-c_2)}{2} - \frac{(a_1-b_1)(b_2-a_2)}{2}| = \\
=& \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_1c_2 - b_2c_1 + c_1a_2 + b_1c_2 - b_1a_2| = \\
=& \frac{1}{2}| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} |.
\end{aligned}
$$

Uvedený výpočet se vztahuje k trojúhelníku na obr. 2.3. Pro jiné rozmístění bodů $A$, $B$, $C$ vzhledem k soustavě souřadnic je nutno udělat jiný výpočet. Výsledek bude ve všech případech stejný. Přenecháme čtenáři, aby jej prověřil pro trojúhelníky na obr. 2.4.




Obr. 2.4

Poznámka: Metoda „krájení“ (viz např. myšlenka čtverce v odstavci 2.2.3) je přirozená metoda již pro žáky 3. ročníku základní školy, metoda „doplňování“ dělá potíže i některým starším žákům.

**Důkaz:** Nechť máme dán trojúhelník $ABC$, kde $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $C[c_1; c_2]$ a $v$ je výška na stranu $AB$. Směrový vektor přímky $AB$ má souřadnice $\vec{s}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ a normálový vektor je tedy $\vec{n}(a_2 - b_2; b_1 - a_1)$. Přímku $AB$ můžeme tedy vyjádřit rovnicí $(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y + c = 0$. Bod $A$ leží na přímce $AB$, platí tedy $(a_2 - b_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2 + c = 0$. Po úpravě dostáváme $c = b_2a_1 - b_1a_2$ a rovnice přímky $AB$ má tvar $(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y + b_2a_1 - b_1a_2 = 0$.

Pro nalezení výšky $v$ použijeme vzorec pro vzdálenost bodu od přímky (který bude odvozen ve cvičení 2.14**H**), v našem případě bodu $C$ od přímky $AB$:

$$v = \frac{|(a_2 - b_2)c_1 + (b_1 - a_1)c_2 + b_2a_1 - b_1a_2|}{\sqrt{(a_2 - b_2)^2 + (b_1 - a_1)^2}}$$

Obsah trojúhelníku $ABC$ pak vypočteme jako $S_{ABC} = \dfrac{v \cdot |AB|}{2}$ a po dosazení a úpravě máme

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}|a_2c_1 - b_2c_1 + b_1c_2 - a_1c_2 + b_2a_1 - b_1a_2| = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

**Tvrzení 2.1:** Obsah trojúhelníku $ABC$, kde $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $C[c_1; c_2]$, je dán vzorcem

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}|a_2c_1 - b_2c_1 + b_1c_2 - a_1c_2 + b_2a_1 - b_1a_2| = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Vzorec pro obsah trojúhelníku $OMN$, kde $O$ je počátek soustavy souřadnic, tedy je:

$$|\triangle OMN| = \frac{1}{2}|m_1n_2 - m_2n_1| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}|$$

Z Tvrzení 1.1 a 2.1 plyne vážný důsledek.

**Tvrzení 2.2:** Dvojice vektorů $\vec{m}, \vec{n}$ je m-bází, právě když $|\triangle OMN| = \frac{1}{2}$, kde $M = O + \vec{m}$ a $N = O + \vec{n}$.

## 2.6 Cvičení – obsah

**A.** S využitím výsledků úlohy 2.3**E** najděte vzorec pro vzdálenost $d$ počátku $O$ od přímky $PR$, kde $P[p; q], R[r; s]$ a $p, q, r, s \in \mathbf{R}$.

**B.** Najděte vzorec pro vzdálenost $d$ bodu $A[a_1; a_2]$ od přímky $PR$, je-li $P[p; q]$, $R[r; s]$ a současně $p, q, r, s \in \mathbf{R}$.

**C.** Nechť je dán trojúhelník $ABC$ s těžištěm $T$. Dokažte, že trojúhelníky $ABT$, $BCT$ a $ACT$ mají stejný obsah.

**D.** Nechť máme dánu m-úsečku $A[0; 0]$, $B[b - 1; b - 2]$. Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby existoval m-bod $C[c_1; c_2]$ tak, že obsah trojúhelníku $ABC$ je $\frac{1}{2}$. V případě, že takový bod existuje, najděte všechny takové body.

**E.** Interpretujte rovnici $ax + by = 1$ (viz úloha 1.11**H**) z hlediska obsahu.

**F.** Jsou dány body $A[1; \sqrt{3}]$, $B[\sqrt{3}; -1]$, $C[-\sqrt{3}; -\sqrt{3}]$. Najděte bod $D$ tak, aby byl čtyřúhelník $ABCD$ lichoběžník, kde $AB \parallel CD$ a obsah $ABCD$ je $5\sqrt{3}$.

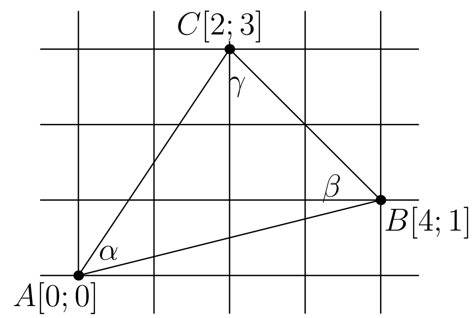
**G.** Jsou dány body $A[2; 1]$, $B[0; 0]$, $P[4; -1]$, $Q[2; 2]$. Označme $AQ \cap BP = \{C\}$. Najděte obvod a obsah trojúhelníku $ABC$.

**H.** Jsou dány body $A[0; 0]$, $U[3; 4]$, $V[0; 1]$, $P[-1; 2]$, $Q[2; 1]$. Najděte obvod a obsah trojúhelníku $ABC$, kde $AU \cap PQ = \{B\}$, $AV \cap PQ = \{C\}$.

**I.** Je dán šestiúhelník $EFGHIJ$ s vrcholy $E[0; 0]$, $F[3; -4]$, $G[6; -4]$, $H[9; 0]$, $I[7; 2]$, $J[2; 2]$. Úhlopříčky $EH$, $FI$, $GJ$ tohoto šestiúhelníku ohraničí trojúhelník $ABC$ ($FI \cap GJ = \{A\}$, $EH \cap FI = \{B\}$, $EH \cap GJ = \{C\}$). Víme, že obsah trojúhelníku $ABC$ je $\frac{49}{24}$. Najděte délky jeho stran.

## 2.7 Problém – velikosti úhlů

Je dán m-trojúhelník $ABC$ (obr. 2.5). Máme zjistit velikosti jeho tří vnitřních úhlů, a to různým způsobem. Způsob zjišťování závisí na vyspělosti řešitele.




Obr. 2.5

Žák pátého nebo šestého ročníku úhly změří úhloměrem. Žák osmého ročníku, který již umí užívat funkce „tangens“, zjistí pomocí tabulek nebo kalkulačky velikost úhlu $\alpha$ odečtením úhlu $14°$ (tedy $\operatorname{arctg} 0,25$) od úhlu $56,3°$ (tedy $\operatorname{arctg} 1,5$) a získá $\alpha = 42,3°$. Podobně zjistí, že $\beta$ je součet úhlů $14°$ (tedy $\operatorname{arctg} 0,25$) a $45°$ (tedy $\operatorname{arctg} 1$), tedy $\beta = 59°$. Konečně stejným způsobem nebo užitím věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku zjistí, že $\gamma = 33,7° + 45° = 78,7°$.

Gymnazista, který ovládá kosinovou větu, může užít této znalosti k nalezení kosinů úhlů $\alpha, \beta, \gamma$.

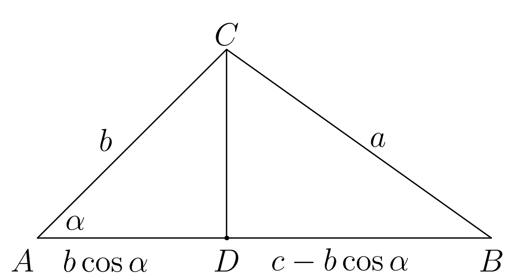
Nejtěžším nástrojem na zjišťování velikostí úhlů je pak vektorový kalkul, speciálně vzorec známý ze střední školy

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|},\ \alpha \in \langle 0°, 180° \rangle\,, \tag{2.1}$$

v němž $\alpha$ je úhel svíraný vektory $\vec{u}, \vec{v}$. V našem případě $\vec{u} = B - A = (4;1)$, $\vec{v} = C - A = (2;3)$, $|\vec{u}| = \sqrt{17}$, $|\vec{v}| = \sqrt{13}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 11$, tedy $\cos\alpha = \dfrac{11}{\sqrt{221}} \doteq 0,739\,94$, odkud $\alpha \doteq 42,273\,7°$.

## 2.8 Úlohy – věta kosinová

**A.** Znáte Pythagorovu větu a funkci $\cos x$ pro $x \in \langle 0°; 180° \rangle$. Odvoďte větu kosinovou.




Obr. 2.6

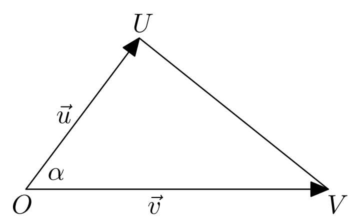
**Řešení:** Je dán trojúhelník $ABC$. Nechť $D$ je pata výšky z vrcholu $C$ na stranu $AB$ (obr. 2.6). Pak $|AD| = b\cdot\cos\alpha$, $|BD| = c-b\cdot\cos\alpha$, $|CD|^2 = b^2-(b\cdot\cos\alpha)^2$, $a^2 = |CD|^2+(c-b\cdot\cos\alpha)^2$, odkud $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$.

[!] Nedostatkem odvození je, že není dostatečně obecné. Nutno ještě uvážit tři další případy: (i) Bod $B$ leží mezi body $A, D$, (ii) bod $A$ leží mezi body $B, D$, (iii) $A = D$. To je již snadné.

**B.** Znáte větu kosinovou a vzorec $|AB| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$. Odvoďte vzorec (2.1) z odstavce 2.7.

**Řešení:** Nechť $\alpha$ je úhel, který svírají vektory $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$. Uvažujme trojúhelník $OUV$, kde $O[0;0]$, $U = O + \vec{u}$, $V = O + \vec{v}$. Z kosinové věty aplikované na tento trojúhelník plyne $|UV|^2 = |OU|^2 + |OV|^2 - 2\cdot|OU|\cdot|OV|\cdot\cos\alpha$, což v souřadnicích dá

$$(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2 = (u_1^2+u_2^2)+(v_1^2+v_2^2) - 2\cdot\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}\cdot\cos\alpha.$$




Obr. 2.7

Po úpravě dostaneme $u_1v_1+u_2v_2 = \sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}\cdot\cos\alpha$. Odtud po zavedení označení $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1+u_2v_2$, $|u| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$, $|v| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$ dostáváme požadovaný vzorec (2.1).

[!] Jemnosti: Vzorec (2.1) z odstavce 2.7 ztrácí smysl, když je $\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o}$. Vzorec platí i v případě, že $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou nenulové, lineárně závislé. Tento případ však dokázán nebyl a nutno jej dokázat zvlášť. Není to těžké.

## 2.9 Tři poznámky ke kosinové větě

Poznámka matematická: Kosinová věta patří k základům euklidovské planimetrie, protože vzájemně propojuje dva základní invarianty roviny – míru úhlu a vzdálenost: Jestliže v trojúhelníku známe délky jeho stran, můžeme zjistit i velikosti jeho úhlů. Obrácená věta však neplatí: Známe-li úhly trojúhelníku, délky jeho stran zjistit neumíme. Ve sférické geometrii je situace jiná, tam ze znalosti délek stran trojúhelníku umíme zjistit jeho úhly a ze znalosti úhlů trojúhelníku umíme zjistit délky jeho stran.

<u>Poznámka historická:</u> Kosinovou větu, i když v jiném tvaru, uvádí i Euklides ve svých Základech. Euklidovu formulaci uvedeme. (Euklides nerozlišuje mezi tvarem a obsahem tvaru; z kontextu je jasné, který význam má na mysli.) Při označení jako na obr. 2.6 platí: Čtverec nad stranou $BC$ je roven součtu čtverců nad stranami $AB$ a $AC$ bez dvou obdélníků o stranách $AD$ a $BD$.

Totéž v symbolickém zápisu: $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AD| \cdot |AB|$.

V případě, kdy $\alpha > 90°$, se bod $D$ dostane mimo úsečku $AB$ a vztah pak bude mít tvar $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 + 2|AD| \cdot |AB|$.

<u>Poznámka didaktická:</u> V tradičním přístupu k výuce kosinové věty nejprve učitel vyvodí vztah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \text{ resp. } \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

který platí (při standardním označení) pro každý trojúhelník $ABC$. Pak se vztah procvičuje na sérii konkrétních příkladů a úloh.

Ambicióznější konstruktivistický přístup (inspiraci najde čtenář ve cvičeních 2.10 **L** a **M**) výuky kosinové věty začíná sérií úloh, které žáci sami řeší. Jsou to speciální případy kosinové věty a žáci ani neví, že tyto úlohy spolu nějak souvisejí. V průběhu dvou tří měsíců žáci postupně najdou šest speciálních případů kosinové věty. Učitel je pak přehledně napíše na tabuli (nebo uveřejní na nástěnce) a přidá k nim i Pythagorovu větu:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{je-li} & \alpha = 60°, & \text{pak} & a^2 = b^2 + c^2 - bc; & \text{je-li} & \alpha = 120°, & \text{pak} & a^2 = b^2 + c^2 + bc; \\
\text{je-li} & \alpha = 30°, & \text{pak} & a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc; & \text{je-li} & \alpha = 150°, & \text{pak} & a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc; \\
\text{je-li} & \alpha = 45°, & \text{pak} & a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{2}bc; & \text{je-li} & \alpha = 135°, & \text{pak} & a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}bc; \\
\text{je-li} & \alpha = 90°, & \text{pak} & a^2 = b^2 + c^2. & & & &
\end{array}$$

Žáci sami vysloví hypotézu, že v každém trojúhelníku platí vztah $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{n}$ nebo $a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{n}$, kde $n$ je číslo, které závisí na velikosti úhlu $\alpha$. Tato hypotéza je pravdivá, ale její forma je trochu zavádějící. Bude trvat ješte nějakou dobu, než žáci zjistí, že číslo $n$ nemusí být nutně přirozené a znak $\sqrt{n}$ je třeba nahradit znakem $2\cos\alpha$.

## 2.10 Cvičení – velikosti úhlů

**A.** Najděte trik, kterým může sedmák zjistit přesnou hodnotu součtu $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle AOC|$, kde $O[0;0], A[1;0], B[2;1], C[3;1]$.

**B.** Najděte m-trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku $ABC$, kde $A[0;0]$, $B[2;0]$, $C[2;3]$, takový, že strana $A'B'$ leží ve směru daném vektorem $\vec{u}(2;1)$.

**C.** Najděte m-trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku $ABC$, kde $A[0;0]$, $B[3;-2]$, $C[2;-1]$, takový, že strana $A'C'$ leží ve směru daném vektorem $\vec{u}(3;2)$.

**D.** Je dán pravoúhlý m-trojúhelník $ABC$ s pravým úhlem u vrcholu $B$ a stranami $AB$ a $BC$ v linkách mříže a m-vektor $\vec{m}(m_1;m_2)$. Najděte m-trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku $ABC$ tak, že strana $A'C'$ leží ve směru vektoru $\vec{m}$. Najdete takový trojúhelník vždy?

**E.** Najděte m-trojúhelník $OCD$ podobný trojúhelníku $OAB$ s menším obsahem, pokud (a) $A[2;0]$, $B[1;3]$, (b) $A[5;0]$, $B[3;1]$.

**F.** Jsou dány body $A_1 = [1;0], A_2 = [3;1]$. Najděte m-body $A_3, A_4, A_5$ a $A_6$ tak, aby bylo $|\sphericalangle A_1OA_2| = |\sphericalangle A_2OA_3| = |\sphericalangle A_3OA_4| = |\sphericalangle A_4OA_5| = |\sphericalangle A_5OA_6| = \frac{1}{5} \cdot |\sphericalangle A_1OA_6|$.

**G.** Jsou dány m-body $A[1;0], B[b_1;b_2]$. Najděte m-bod $C[c_1;c_2]$ tak, aby polopřímka $OB$ byla osou úhlu $COA$.

**H.** Jsou dány m-body $A, B$. Zjistěte, zda vždy existuje m-bod $C$ tak, že $2 \cdot |\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle AOC|$.

Jinými slovy: Je dvojnásobek m-úhlu vždy nutně m-úhel?

**I.** (a) Je dán trojúhelník $AOB$, kde $A[a_1;a_2], B[b_1;b_2]$. Najděte bod $C[c_1;c_2]$ tak, že $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle AOC|$. (b) Jsou-li $A$, $B$ m-body, lze $C$ najít vždy jako m-bod?

**J.** Nechť $\alpha$ je úhel, který svírají vektory $\vec{u} = (u_1;u_2)$, $\vec{v} = (v_1;v_2)$. Vyjádřete číslo $\sin\alpha$ pomocí čísel $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$.

**K.** Nechť $A[a_1;a_2]$, $B[b_1;b_2]$ jsou body různé od počátku $O$. Označme $\varphi = |\sphericalangle AOB|$. Vyjádřete hodnotu $\operatorname{tg}\varphi$ pomocí čísel $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$.

**L.** (a) Připravte gradovanou sérii úloh, která dovede žáky znalých Pythagorovy věty k objevu tvrzení: V trojúhelníku $ABC$, v němž je $\alpha = 60°$, platí $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

(b) Úlohy z (a) vyřešte a vyjasněte, co při jejich řešení bude slabším žákům dělat největší potíže.

(c) Úlohy (a) a (b) řešte pro úhly $\alpha = 30°, 45°, 120°, 135°, 150°$.

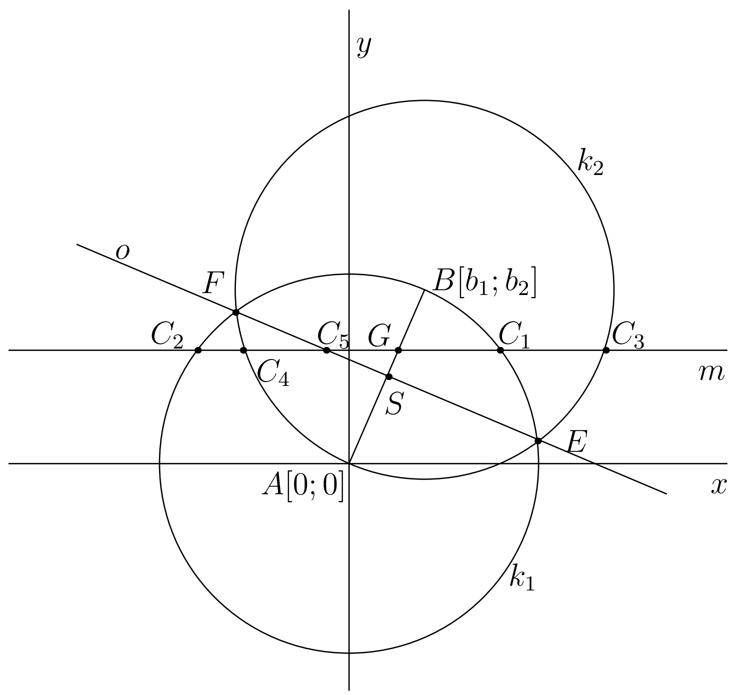
**M.** V předchozí úloze jsme využívali toho, že jisté, žákům známé útvary mají některé vnitřní úhly $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $120°$, $135°$, $150°$. Tento seznam nevyčerpává všechny úhly, které můžeme reprezentovat známým geometrickým útvarem. Najděte útvary, pomocí nichž je možné vyvodit kosinovou větu pro úhly $15°$, $18°$, $36°$, $54°$, $72°$ a $75°$. Pak kosinovou větu pro každý z těchto úhlů vyvoďte.

**N.** Napište tabulku hodnot $\cos\alpha$ a $\operatorname{tg}\alpha$ pro úhly $\alpha = 15°, 18°, 36°, 54°, 72°, 75°$.

## 2.11 Úloha – rovnoramenný trojúhelník

Je dána úsečka $AB$, kde $A[0;0]$, $B[\sqrt{3};1]$, a přímka $m$ je dána rovnicí $y = d$. Na přímce $m$ najděte bod $C[c_1;c_2]$ tak, aby trojúhelník $ABC$ byl rovnoramenný.

**Řešení:** Nejprve uděláme analýzu obecné situace bez konkretizace bodu $B$ (obr. 2.8).




Obr. 2.8

Pro trojúhelník $ABC$ platí:
$|AB| = |AC|$, právě když $C$ leží na kružnici $k_1(A, |AB|)$,
$|AB| = |BC|$, právě když $C$ leží na kružnici $k_2(B, |AB|)$,
$|AC| = |BC|$, právě když $C$ leží na ose $o$ úsečky $AB$.

Bod $C$ nesmí být průsečíkem přímky $AB$ s přímkou $m$, protože by body $A$, $B$, $C$ ležely v přímce. Na obrázku 2.8 je tento průsečík označen $G$.

Trojúhelník $ABC$ je rovnostranný, právě když je bod $C$ jedním z průsečíků $E$, $F$ kružnic $k_1$ a $k_2$. Tento případ musíme vyloučit, protože rovnoramenný trojúhelník je definován jako trojúhelník, který má právě dvě strany shodné.

Z uvedeného plyne, že body $A$, $B$, $C$ tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníku, právě když bod $C$ leží buď na kružnici $k_1$, nebo na kružnici $k_2$, nebo na přímce $o$, ale je různý od bodů $E$, $F$ a $G$.

Symbolicky: $C \in M = (k_1 \cup k_2 \cup o) - \{E, F, G\} \wedge C \in m$.

Teď přistoupíme k vlastnímu řešení.

Lehce zjistíme, že $k_1$: $x^2 + y^2 = 4$, $k_2$: $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 4$, $o$: $\sqrt{3}x + y = 2$, $E[\sqrt{3}; -1]$, $F[0; 2]$, $G[d\sqrt{3}; d]$.

Dále najdeme průsečíky přímky $m$ s množinou $k_1 \cup k_2 \cup o$: $C_1[\sqrt{4 - d^2}; d]$, $C_2[-\sqrt{4 - d^2}; d]$; $C_3[\sqrt{3} + \sqrt{3 + 2d - d^2}; d]$, $C_4[\sqrt{3} - \sqrt{3 + 2d - d^2}; d]$, $C_5[\frac{2-d}{\sqrt{3}}; d]$.

Nyní je třeba provést diskusi vzhledem k reálnému parametru $d$.

| **parametr** | **řešení** | **počet řeš.** | **parametr** | **řešení** | **počet řeš.** |
|---|---|---|---|---|---|
| $d \in (-\infty, -2)$ | $C_5$ | 1 | $d \in (\frac{1}{2}, 1)$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |
| $d = -2$ | $C_1 = C_2, C_5$ | 2 | $d = 1$ | $C_2, C_3, C_4, C_5$ | 4 |
| $d \in (-2, -1)$ | $C_1, C_2, C_5$ | 3 | $d \in (1, 2)$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |
| $d = -1$ | žádné | 0 | $d = 2$ | žádné | 0 |
| $d \in (-1, 0)$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 | $d \in (2, 3)$ | $C_3, C_4, C_5$ | 3 |
| $d = 0$ | $C_1, C_2, C_3, C_5$ | 4 | $d = 3$ | $C_3 = C_4, C_5$ | 2 |
| $d \in (0, \frac{1}{2})$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 | $d \in (3, \infty)$ | $C_5$ | 1 |
| $d = \frac{1}{2}$ | $C_1, C_2, C_3, C_4$ | 4 | | | |

## 2.12 Úloha – mocnost bodu ke kružnici

Analyticky dokažte větu o mocnosti bodu ke kružnici: Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod $M \notin k$. Bodem $M$ veďme přímku $p$ protínající kružnici $k$ ve dvou různých bodech $U$, $V$. Pak $|MU| \cdot |MV| = ||MS|^2 - r^2|$.

**Řešení:** Volme soustavu souřadnic tak, aby bylo $S[0; 0]$, $r = 1$, $M[m; 0]$, $m \geqq 0 \wedge m \neq 1$ (obr. 2.9). Přímka $p$: $a(x - m) + by = 0$ prochází bodem $M$ a protíná kružnici $k$: $x^2 + y^2 = 1$ v bodech $U[x_1; y_1]$, $V[x_2; y_2]$, které získáme jako průsečíky přímky $p$ s kružnicí $k$. Tedy

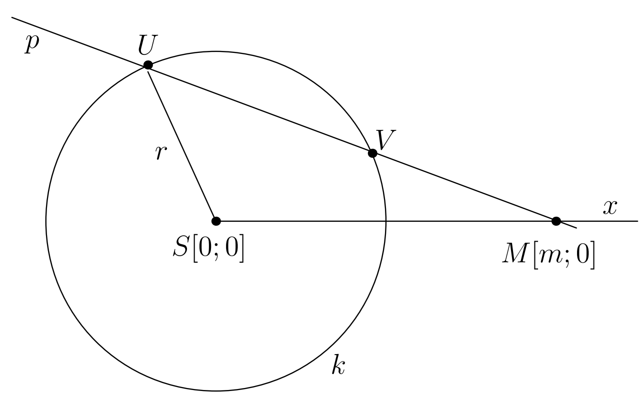
$$y_1 = \frac{a}{b}(m - x_1), \ y_2 = \frac{a}{b}(m - x_2), \ b \neq 0. \tag{2.2}$$

Z rovnice přímky vyjádříme neznámou $y$ pomocí neznámé $x$ a dosadíme do rovnice kružnice. Dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2(a^2 + b^2) - 2xa^2m + a^2m^2 - b^2 = 0 \tag{2.3}$$

s diskriminantem $D = 4b^2(a^2 + b^2 - a^2m^2)$. Protože je přímka $p$ sečna kružnice, je $D > 0$. Dále

platí
$$|MU| \cdot |MV| = \sqrt{(m - x_1)^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{(m - x_2)^2 + y_2^2}$$
a protože (viz (2.2))
$$y_1^2 = \frac{a^2}{b^2}(m - x_1)^2 \text{ a } y_2^2 = \frac{a^2}{b^2}(m - x_2)^2,$$
po dosazení dostaneme
$$|MU| \cdot |MV| = \sqrt{(m - x_1)^2 \cdot (1 + \frac{a^2}{b^2})} \cdot \sqrt{(m - x_2)^2 \cdot (1 + \frac{a^2}{b^2})} =$$
$$= |m - x_1| \cdot |m - x_2| \cdot |1 + \frac{a^2}{b^2}| = |m^2 - m(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2| \cdot |1 + \frac{a^2}{b^2}|.$$



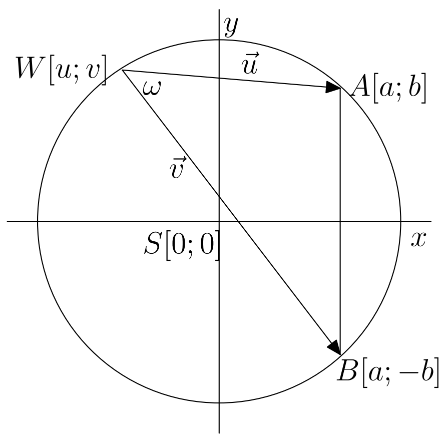

Obr. 2.9

Z Viètových vztahů pro rovnici (2.3) dostaneme
$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2m}{a^2 + b^2}, \ x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2m^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$
a pak máme
$$|MU| \cdot |MV| = |m^2 - \frac{2a^2m^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2m^2 - b^2}{a^2 + b^2}| \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2}.$$
Po úpravě dostaneme $|MU| \cdot |MV| = |m^2 - 1|$. QED.

Poznámka: Výše uvedený důkaz byl proveden pro $b \neq 0$. Případ, kdy $b = 0$, je snadný a přenecháme jej čtenáři.

## 2.13 Úloha – tětiva a obvodový úhel

Nechť $AB$ je tětiva délky $d$ kružnice $k(S,r)$ a nechť $W \in k$, $W \neq A$, $W \neq B$. Označme $\omega = |\sphericalangle AWB|$. Pak platí $2r \cdot \sin\omega = d$. Dokažte.




Obr. 2.10

**Řešení:** Zvolme soustavu souřadnic tak, aby bylo $S[0;0]$, $A[a;b]$, $B[a;-b]$, $b > 0$, tj. osa $x$ je osou úsečky $AB$ (obr. 2.10). Konečně označme $W[u;v]$. Ze zadání plyne $a^2+b^2 = r^2, u^2+v^2 = r^2, d = 2b$. Vektory $\vec{u} = A-W = (a-u; b-v)$, $\vec{v} = B - W = (a-u; -b-v)$ svírají úhel $\omega$ pro který, podle cvičení **J** z 2.10, platí

$$\sin\omega = \frac{|(a-u)(-b-v)-(a-u)(b-v)|}{\sqrt{(a-u)^2+(b-v)^2}\cdot\sqrt{(a-u)^2+(b+v)^2}} =$$

$$= \frac{2|b(a-u)|}{\sqrt{2r^2-2au-2bv}\cdot\sqrt{2r^2-2au+2bv}}.$$

Jmenovatel posledního zlomku upravíme:

$$\sqrt{2(r^2-au)-2bv}\cdot\sqrt{2(r^2-au)+2bv} = 2\sqrt{(r^2-au)^2-(bv)^2} =$$

$$= 2\sqrt{r^4-2r^2au+a^2u^2-(r^2-a^2)(r^2-u^2)} = 2r|a-u|.$$

Tedy $\sin\omega = \dfrac{2|b(a-u)|}{2r|a-u|} = \dfrac{d}{2r}$ a odtud $2r\cdot\sin\omega = d$. QED

## 2.14 Cvičení – úlohy s parametrem

**A.** Najděte $t \in \mathbf{R}$ tak, aby trojúhelník $ABC$, kde $C[5t;3t]$, byl rovnoramenný. Přitom (a) $A[0;0]$, $B[5;-3]$, (b) $A[5;3]$, $B[8;-2]$, (c) $A[0;-2]$, $B[7;-1]$.

**B.** Jsou dány dva různé body $A[0;0]$ a $B[b_1;b_2]$. Najděte bod $C$ tak, aby trojúhelník $ABC$ byl rovnostranný.

**C.** Je dána úsečka $AB$, kde $A[0;0]$, $B[b_1;b_2]$ a přímka $m$ o rovnici $y = d$. Na přímce $m$ najděte bod $C[c_1;c_2]$ tak, aby trojúhelník $ABC$ byl rovnoramenný. Řešte pro (a) $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $d = -3$, (b) $b_1 = 4$, $b_2 = 3$, $d$ záporné, jinak blíže neurčené, (c) $b_2 = 2$, parametry $b_1$ a $d$ splňují podmínky $b_1 \geqq 0$, $d > 0$, jinak jsou libovolné.

Rada: Vyšetřete nejprve speciální případy: $b_1 = 0$, $b_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $b_1 = 2\sqrt{3}$.

**D.** Je dána úsečka $AB$, kde $A[0;0]$, $B[b_1;b_2]$, a přímka $m$ o rovnici $y = d$. Nechť platí $b_2 > d > 0$. Na přímce $m$ najděte bod $C[c_1;c_2]$ tak, aby trojúhelník $ABC$ byl rovnoramenný.

**E.** Je dána úsečka $AB$ a přímka $m$. Na přímce $m$ najděte bod $C[c_1;c_2]$ tak, aby bylo $|AB| = |BC|$. Řešte pro (a) $A[a_1;a_2]$, $B[0;0]$, $m$: $3x - y = 10$, (b) $A[a_1;a_2]$, $B[b_1;b_2]$, $m$: $fx + gy = h$, kde aspoň jedno z čísel $f$, $g$ je nenulové.

**F.** Je dán bod $K$ a přímka $p$. Na přímce $p$ najděte bod $W[u;v]$, jehož vzdálenost od bodu $K$ je $d$. Řešte pro (a) $K[0;3]$, $p$: $x - 2y = 4$, $d = 5$, (b) $K[0;0]$, $p$: $ax + by = 1$, $d = 7$, (c) $K[m;n]$, $p$: $ax + by = 0$, kde $a^2 + b^2 = 1$ a $d$ dané kladné číslo.

**G.** Jsou dány přímky $p \parallel q$ a bod $A$. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby trojúhelník $ABC$ byl rovnostranný.

**H.** Odvoďte vzorec pro vzdálenost bodu $A[a_1;a_2]$ od přímky $p$: $ax + by + c = 0$.

**I.** Nechť $AB$ je tětiva délky $d$ kružnice $k(S,r)$ a nechť $W$ je bod, který neleží na přímce $AB$. Označme $\omega = |\sphericalangle AWB|$. Zjistěte, zda platí implikace: $2r \sin\omega = d \Rightarrow W \in k$.

**J.** S jakou přesností lze aproximovat úhel $30^\circ$ pomocí m-přímek?

**K.** Dokažte, že neexistuje rovnostranný m-trojúhelník.

## 2.15 Problém – aproximace rovnostranného mřížového trojúhelníku

Na omezeném čtverečkovaném papíře s rozměry $m \times n$ najděte m-trojúhelník nejlépe aproximující trojúhelník rovnostranný.

## 2.16 Problém – komplexní čísla

Když umocníme na druhou komplexní číslo $a + ib$, dostaneme číslo $(a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$. Tyto výrazy jsou identické s těmi, které jsme našli ve výsledku cvičení 2.10**G**, když jsme zdvojnásobovali velikost úhlu. To není náhoda. Při práci s velikostí úhlu lze skutečně efektivně užít aparát komplexních čísel. Zformulujte postupy a tvrzení, která to umožňují.

# Kapitola 3

# Útvary v euklidovské rovině $E^2$ studovány pomocí vektorů

## 3.1 Přímky

V analytické geometrii používáme různé způsoby zadání přímky v rovině:

1. rovnicí $ax + by + c = 0$, kde $(a, b) \neq (0, 0)$,
2. dvojicí různých bodů, například $b = UV$,
3. bodem a nenulovým vektorem, tj. parametrické vyjádření $p = \{P + t\vec{p}, t \in \mathbf{R}\}$.

Případ 1. má několik dílčích případů. Kromě obecného tvaru $ax + by + c = 0$ můžeme přímku zapsat ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$, kde $k = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$ a $b \neq 0$, nebo úsekovém tvaru $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, kde $p = -\frac{c}{a}$, $q = -\frac{c}{b}$ a $a, b, c \neq 0$, nebo polárním tvaru (viz úloha 3.5).

Terminologie: Přímky, které mají společný právě jeden bod, tvoří *svazek přímek*. Přímky, které jsou navzájem rovnoběžné různé, tvoří *osnovu přímek*.

Poznámka: Dále předpokládáme, že v rovnici přímky $ax + by + c = 0$ je $(a, b) \neq (0, 0)$.

## 3.2 Cvičení – různé způsoby analytického zápisu přímky

**A.** Vyjádřete přímku (a) $p = AB$, kde $A[-1; 3]$, $B[6; 2]$, (b) $q$: $3x - 5y + 2 = 0$, (c) $r = \{P + t\vec{p}, t \in \mathbf{R}\}$, $P[2; -3]$, $\vec{p}(4; 3)$, způsoby uvedenými v odstavci 3.1.

**B.** Postupy, které jste použili v předchozím cvičení na konkrétních příkladech, popište obecně.

**C.** Dají se všechny přímky roviny zapsat rovnicí ve tvaru (a) obecném, (b) směrnicovém, (c) úsekovém?

**D.** Popište obecnou rovnicí i parametricky přímky, které procházejí bodem $K[3; -1]$ a jsou (a) rovnoběžné s přímkami $p$, $q$, $r$ ze cvičení **A**, (b) kolmé k přímkám $p$, $q$, $r$ ze cvičení **A**.

**E.** Vyjádřete podmínku (a) rovnoběžnosti, (b) kolmosti dvou přímek pro každý ze způsobů zápisu přímky z odstavce 3.1.

## 3.3 Úloha – směrový a normálový vektor přímky

**Tvrzení 3.1:** Pro přímku $p$: $ax + by + c = 0$ platí: $\vec{u} = (-b; a)$ je její směrový vektor a $\vec{v} = (a; b)$ je její normálový vektor (tj. vektor kolmý na směrový vektor).

Dokažte.

**Řešení:** Nechť $M[m; n]$ je libovolný bod přímky $p$, tj. $am + bn + c = 0$. Ukážeme, že bod $N = M + \vec{u} = [m - b; n + a]$ leží na $p$. Po dosazení dostáváme:

$$a(m - b) + b(n + a) + c = am - ab + bn + ba + c = am + bn + c = 0$$

Z toho plyne, že $N \in p$ a že tedy $\vec{u}$ je směrový vektor přímky $p$. Vektor $\vec{v}$ je normálový vektor přímky $p$, protože platí $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

## 3.4 Úlohy – vzájemná poloha přímek

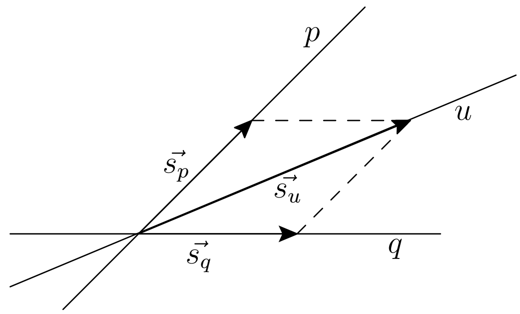
**A.** Odvoďte podmínku, aby se tři různé přímky, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, protínaly v jednom bodě.

**Řešení:** Nechť jsou dány tři různé přímky $p$: $ax+by+c = 0$, $q$: $dx+ey+f = 0$, $r$: $gx+hy+i = 0$, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné (tj. $ae \neq bd$, $ah \neq bg$, $dh \neq eg$, viz cvičení 3.2**E**). Víme, že tyto tři přímky procházejí jedním bodem $M[m_1; m_2]$, právě když soustava $am_1+bm_2+c = 0$, $dm_1 + em_2 + f = 0$, $gm_1 + hm_2 + i = 0$ má řešení, tj. právě tehdy, když $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$.

**Tvrzení 3.2:** Tři různé přímky o rovnicích $p$: $ax+by+c = 0$, $q$: $dx+ey+f = 0$, $r$: $gx+hy+i = 0$, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, se protínají v jednom bodě (tj. tvoří svazek), právě když

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0.$$

**B.** Nechť $p$: $ax+by+c=0$ a $q$: $dx+ey+f=0$ jsou různoběžky, pro které je $a^2+b^2=d^2+e^2$, tj. směrové vektory obou přímek mají stejnou velikost. Pak přímky $u$: $(a+d)x+(b+e)y+c+f=0$ a $v$: $(a-d)x+(b-e)y+c-f=0$ půlí úhel přímek $p$, $q$. Dokažte.




Obr. 3.1

**Řešení:** Využijeme symetrie kosočtverce z obrázku 3.1 podle jeho úhlopříčky. Přímka $u$ je osa dvojice přímek $p$, $q$, pro jejich směrové vektory platí $|\vec{s_p}|=|\vec{s_q}|$; pak pro směrový vektor $\vec{s_u}$ platí $\vec{s_u}=\vec{s_p}+\vec{s_q}$ a v souřadnicích $\vec{s_p}(-b;a)$, $\vec{s_q}(-e;d)$ a $\vec{s_u}(-(b+e);a+d)$. Rovnice přímky $u$ je tedy $(a+d)x+(b+e)y+m=0$.

Dále víme, že přímky $p$, $q$, $u$ tvoří svazek přímek, tj. platí $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & b+e & m \end{vmatrix}=0$. Tato rovnost je zachována, když $m=c+f$.

Podobné úvahy provedeme pro osu $v$.

Dokázali jsme tvrzení 3.3.

**Tvrzení 3.3:** Nechť $p$: $ax+by+c=0$ a $q$: $dx+ey+f=0$ jsou různoběžky, pro které je $a^2+b^2=$ $=d^2+e^2$. Pak přímka $u$: $(a+d)x+(b+e)y+c+f=0$ i přímka $v$: $(a-d)x+(b-e)y+c-f=0$ jsou osy dvojice přímek $p$, $q$.

**C.** Najděte obě osy $u$, $v$ dvojice přímek (a) $p$: $7x-y+2=0$, $q$: $x+y=0$, (b) $p$: $2x-y+5=0$, $q$: $y+8x=0$.

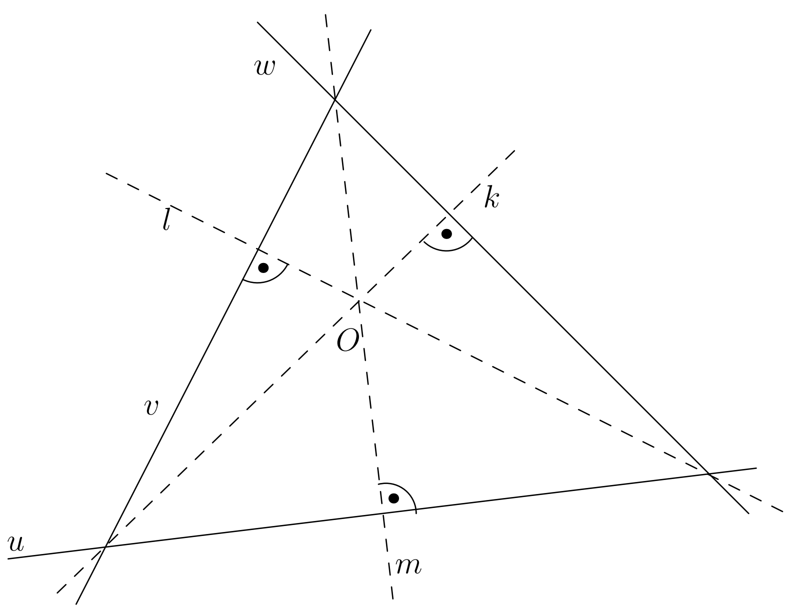
**Řešení:** (a) Abychom mohli použít vztah z tvrzení 3.3, musíme zajistit platnost vztahu $a^2+b^2=$ $=d^2+e^2$. K tomu stačí vynásobit rovnici přímky $q$ číslem 5. Dostaneme $q$: $5x+5y=0$ a $7^2+1^2=5^2+5^2$. Tedy $u$: $12x+4y+2=0$, tj. $u$: $6x+2y+1=0$, a $v$: $x-3y+1=0$.

(b) Podobně jako v (a) musíme obě rovnice nejprve upravit. Rovnici přímky $p$ vynásobíme číslem $\sqrt{65}$ a rovnici přímky $q$ vynásobíme číslem $\sqrt{5}$ (abychom vyhověli předpokladu tvrzení 3.3). Protože však čísla $\sqrt{65}$ a $\sqrt{5}$ jsou soudělná, stačí rovnici přímky $p$ vynásobit číslem $\sqrt{13}$

($\sqrt{65} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{13}$). Rovnice obou os jsou pak $u$: $(2\sqrt{13} + 8)x + (-\sqrt{13} + 1)y + 5\sqrt{13} = 0$ a $v$: $(2\sqrt{13} - 8)x + (-\sqrt{13} - 1)y + 5\sqrt{13} = 0$.

Poznámka: Z toho, že geometrická interpretace podmínky $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ v tvrzení 3.3 je taková, že směrové vektory obou přímek jsou stejně velké, plyne, že rovnici každé přímky umíme upravit tak, abychom mohli tvrzení 3.3 použít. Dá se ukázat obecně, že stačí vynásobit rovnici přímky $p$ číslem $\sqrt{d^2 + e^2}$ a rovnici přímky $q$ číslem $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dokažte, že pak jsou splněny předpoklady tvrzení 3.3.

**D.** Jsou dány přímky $u$: $ax+by = 1$, $v$: $cx+dy = 1$, $w$: $ex+fy = 1$. Jaké podmínky musí splňovat čísla $a, \ldots, f$, aby přímky $u$, $v$, $w$ ohraničovaly trojúhelník s ortocentrem (tj. průsečíkem výšek) v počátku $O$?




Obr. 3.2

**Řešení:** (Obr. 3.2) Nutná a postačující podmínka, aby přímky $u$, $v$, $w$ ohraničovaly trojúhelník zní: Žádné dvě z přímek $u$, $v$, $w$ nejsou rovnoběžné a všechny tři neprocházejí stejným bodem. Analytické vyjádření těchto podmínek je dáno čtyřmi vztahy:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \wedge \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} \neq 0 \wedge \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} \neq 0 \wedge \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.1)$$

Dále se zaměříme na analytické vyjádření podmínky, že počátek $O$ je ortocentrem daného trojúhelníku. Sestrojíme přímku $k$ tak, že $k \perp w$ a $O \in k$. Její rovnice je $k$: $-fx + ey = 0$.

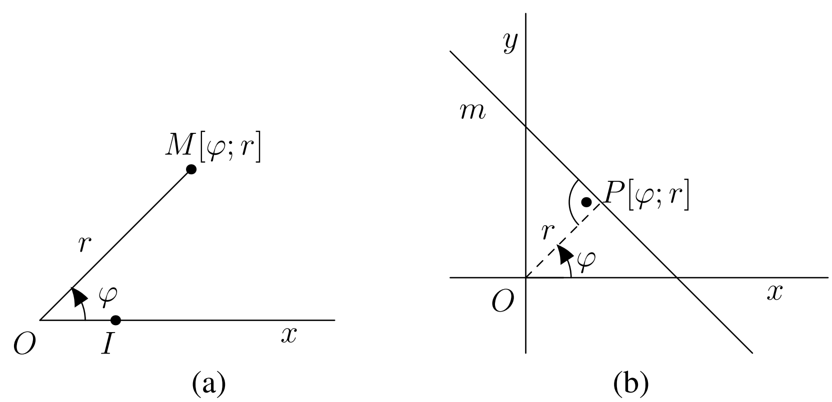
Trojice přímek $u$, $v$, $k$ musí tvořit svazek. Podobně trojice přímek $u$, $w$, $l$, kde $l \perp v$, $O \in l$ a $l$: $-dx + cy = 0$, musí tvořit svazek a trojice přímek $v$, $w$, $m$, kde $m \perp u$, $O \in m$ a $m$: $-bx + ay = 0$, musí tvořit svazek. Tedy musí platit:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ -f & e & 0 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ e & f & 1 \\ -d & c & 0 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} c & d & 1 \\ e & f & 1 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Soustava sedmi podmínek (3.1) a (3.2) je nutnou a postačující podmínkou, aby nastala požadovaná situace.

## 3.5 Úloha – polární souřadnice

*Polární souřadnice bodu:* (Obr. 3.3a.) Pro každý bod $M \neq O$ existuje jediné kladné číslo $r$ a jediný úhel $\varphi \in \langle 0°; 360°)$ tak, že $M[r\cos\varphi; r\sin\varphi]$. Zde $r = |OM|$ a otočením kladné poloosy $x$ o úhel $\varphi$ získáme polopřímku $OM$. Řekneme, že $[\varphi; r]$ jsou polární souřadnice bodu $M$.




Obr. 3.3

**Tvrzení 3.4:** Nechť $P$ je bod o polárních souřadnicích $[\varphi; r]$. Přímka $m$ neprocházející počátkem $O$ a procházející bodem $P$ je kolmá na přímku $OP$, právě když

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = r$$

je rovnice přímky $m$ (obr. 3.3b).

Dokažte.

**Řešení:** Směr $\Rightarrow$: Bod $P$, který má polární souřadnice $[\varphi; r]$ má souřadnice $P[r\cos\varphi; r\sin\varphi]$. Vektor $\overrightarrow{OP} = (r\cos\varphi; r\sin\varphi)$ je normálovým vektorem přímky $m$, tj. přímka $m$ má rovnici $xr\cos\varphi + yr\sin\varphi = d$. Po dosazení bodu $P$ do této rovnice dostaneme $d = r^2$, a tedy rovnicí přímky $m$ je $x\cos\varphi + y\sin\varphi = r$.

Směr $\Leftarrow$: Stačí ověřit, že bod $P$ leží na přímce $m$ a že vektor $\overrightarrow{OP} = (r\cos\varphi; r\sin\varphi)$ je normálový vektor přímky $m$.

Rovnici z tvrzení 3.4 nazýváme *polárním tvarem rovnice přímky* $m$.

## 3.6 Cvičení – přímky

**A.** Najděte obě osy $u$, $v$ dvojice přímek $p$: $3x + y - 2 = 0$, $q$: $x - 2y + 1 = 0$.

**B.** Dokažte, že přímky $u$, $v$ z tvrzení 3.3 jsou navzájem kolmé.

**C.** Základna rovnoramenného trojúhelníku, jehož ramena leží na přímkách $p$: $x + 8y = 0$, $q$: $7x - 4y = 0$, prochází bodem $M[7; 1]$. Najděte rovnici přímky, na které leží základna.

**D.** Navrhněte polární tvar rovnice přímky $m$ procházející počátkem. Hledejte jednoznačné vyjádření přímky rovnicí.

**E.** Každou z přímek $p$, $q$, $r$ z cvičení 3.2**A** napište v polárním tvaru.

**F.** Napište přímku $p$: $ax + by + c = 0$ v polárním tvaru.

**G.** Na základě výsledku cvičení **F** znovu odvoďte vzorec pro vzdálenost bodu $M[m_1; m_2]$ od přímky $p$: $ax + by + c = 0$.

**H.** Jsou dány tři různé přímky $p$: $ax + by + c = 0$, $q$: $dx + ey + f = 0$, $r$: $gx + hy + i = 0$ a nechť $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. Diskutujte všechny možné případy poloh těchto tří přímek pro (a) $D = 0$, (b) $D \neq 0$.

**I.** Je dána přímka $p$: $ax + by + c = 0$. Najděte nutné a postačující podmínky pro to, aby bod $M[m; n]$ byl jediným m-bodem ležícím na $p$.

**J.** Je dána přímka $p$: $ax + by + c = 0$, kde $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$. Najděte nutné a postačující podmínky pro $a$, $b$, $c$ tak, aby na $p$neležel ani jeden m-bod.

**K.** Najděte obsah trojúhelníku, který je ohraničen třemi přímkami $p$, $q$, $r$.

(a) $p$: $x - 3y = 0$, $q$: $3x + y = 0$, $r$: $2x - y - 5 = 0$,

(b) $p$: $y = 0$, $q$: $2x + y - 6 = 0$, $r$: $2x - 3y = 0$,

(c) $p$: $y = 0$, $q$: $2x + y - 11 = 0$, $r$: $2x - 3y = 0$,

(d) $p$: $x - 3y = 0$, $q$: $x - y = 0$, $r$: $3x + y - 6 = 0$.

## 3.7 Příklad – kolineárnost

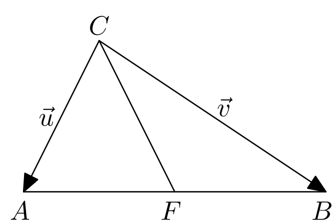
Je dán bod $A$ a nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$. Sestrojíme body $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$. Zjišťujeme, pro jakou trojici $(A, \vec{u}, \vec{v})$ leží body $A$, $B$, $C$ v přímce.

Odpověď závisí pouze na vektorech $\vec{u}$, $\vec{v}$ a nezávisí na poloze bodu $A$. Leží-li $A$, $B$, $C$ v přímce, pak kterýkoli z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nám umožní cestovat z kteréhokoli bodu této přímky do kteréhokoli bodu. Tedy každý z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je jistým násobkem druhého.

[!] Uvedené řešení je nepřesné. Zapomněli jsme uvažovat případy $B = A$ a $C = A$. Upřesněné řešení zní: Body $A$, $B$, $C$ leží v přímce, právě když jsou vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ lineárně závislé, tj. když existují čísla $x, y \in \mathbf{R}$ (aspoň jedno nenulové) tak, že $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{o}$.

## 3.8 Úlohy – popis útvarů pomocí vektorů

**A.** Je dán trojúhelník $ABC$. Označme vektory $\vec{u} = A - C$, $\vec{v} = B - C$. Pomocí bodu $C$ a vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ vyjádřete (a) bod $F = A - \bullet - B$, (b) těžnici $t_c$, tj. úsečku $CF$, (c) úhel $ACB$, tj. množinu všech bodů v rovině, které leží na polopřímkách $CX$, kde $X$ probíhá úsečku $AB$.




Obr. 3.4

**Řešení:**

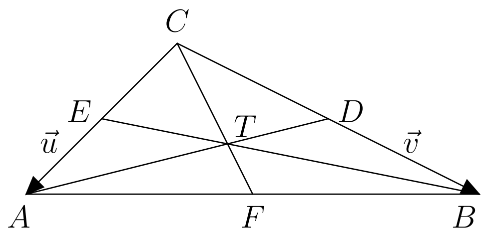
(a) Do bodu $F$ se lze dostat z bodu $A$ posunutím daným polovičním vektorem $B - A = \vec{v} - \vec{u}$. Tedy $F = A + \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = C + \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = C + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.

(b) $t_c = \{X = C + s(F - C); s \in \langle 0; 1\rangle\} = \{X = C + p(\vec{u} + \vec{v}); p \in \langle 0; \frac{1}{2}\rangle\}$.

(c) $\sphericalangle ACB = \{C + x\vec{u} + y\vec{v}; x, y \in \mathbf{R}_0^+\}$

Poznámka: Všimněte si alternativního zápisu množiny bodů. V případě (b) jsme onen „obecný bod“ probíhající popisovanou množinu pojmenovali $X$, v případě (c) zůstal tento bod anonymní. Používáme oba způsoby popisu bodových množin.

**B.** Dokažte, že (a) tři těžnice libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě $T$ (těžišti), (b) bod $T$ dělí každou těžnici v poměru 1 : 2.




Obr. 3.5

**Řešení:** Označení jako na obrázku 3.5. Řešení rozdělíme do šesti kroků.

1. Zvolíme jeden z bodů a dva lineárně nezávislé vektory jako referenční objekty. Například bod $C$ a vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$.

2. Všechny účastníky situace vyjádříme pomocí referenčních objektů:

$D = C + \frac{1}{2}\vec{v}, E = C + \frac{1}{2}\vec{u}, F = C + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}),$

$t_a = AD = \{X = C + \vec{u} + s(\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}); s \in \langle 0; 1\rangle\},$

$t_b = BE = \{X = C + \vec{v} + m(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}); m \in \langle 0; 1\rangle\},$

$t_c = CF = \{X = C + s(\vec{u} + \vec{v}); s \ \in \langle 0; \frac{1}{2}\rangle\}.$

3. Ve vektorovém jazyce vyjádříme geometrické podmínky: Hledané těžiště $T$ je společný bod těžnic $t_a$ a $t_b$.

$T = C + \vec{u} + s(\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}), T = C + \vec{v} + t(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v})$, odtud $\vec{u} + s(\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} + t(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v})$.

Poslední vztah upravíme na vektorovou rovnost:

$$(1 - s - \frac{1}{2}t)\vec{u} + (-1 + t + \frac{1}{2}s)\vec{v} = \vec{o}$$

4. Vektorový vztah transformujeme na vztah aritmetický. Protože jsou vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ lineárně nezávislé, plynou ze vztahu $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{o}$ rovnosti $x = y = 0$. Tedy ze vztahu uvedeného na konci bodu 3 plyne

$$1 - s - \frac{1}{2}t = 0, -1 + t + \frac{1}{2}s = 0.$$

5. Vyřešíme aritmetický problém, tedy soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé $s$ a $t$. Řešení je $s = t = \frac{2}{3}$.

6. Číselný výsledek vrátíme do původní geometrické situace a využijeme této znalosti pro konečné řešení geometrického problému.

Průsečík těžnic $t_a, t_b$ je bod $T = C + \frac{\vec{u}+\vec{v}}{3}$, který, jak vidíme přímo ze zápisu, leží i na těžnici $t_c$. Vektor $\overrightarrow{AD} = C + \frac{1}{2}\vec{v} - C - \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}$ a vektor $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u})$, tj. $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$, a tedy bod $T$ dělí těžnici v poměru 1 : 2.

### 3.8.1 Komentář k úloze 3.8B

Postup užití vektorového počtu při řešení známé úlohy o těžišti trojúhelníku (úloha 3.8**B**) je univerzální návod na použití vektorového počtu ve většině běžných případů. Náročnější kroky postupu jsou tři:

- První krok, vhodná volba referenčních objektů (repéru, viz odstavec 3.10), prozradí učiteli hloubku geometrického vhledu řešitele a jeho zkušenosti s vektorovým aparátem.
- Čtvrtý krok je přechodem od vektorové algebry k aritmetice. Studenti zde často bezradně stojí nad vektorovým vztahem a nevědí jak dál.
- Šestý krok ukazuje, jak řešitel rozumí tomu, co počítal.

Rozfázování postupu do šesti kroků usnadní řešiteli orientaci v práci, pomůže v případě zbloudění a učiteli usnadní analýzu žákova řešení. V žádném případě však návod není normou, kterou je nutno dodržovat. Lze dokonce říci, že právě narušení uvedeného návodu, které jde k cíli efektivnější cestou, svědčí o řešitelově erudici v analytické geometrii.

## 3.9 Cvičení – dělicí poměr

Nechť $P, Q, R \in E^2$ jsou libovolné kolineární body takové, že $Q \neq R$ a $P \neq Q$. Pak číslo $x \in \mathbf{R}$ jednoznačně určené vztahem $\overrightarrow{PR} = x\overrightarrow{QR}$ se nazývá *dělicí poměr* daných bodů a označuje se $(PQR) = x$.

Poznámka: O bodech množiny $\mathcal{M}$ řekneme, že jsou kolineární, právě když existuje přímka, která jimi prochází.

V následujících úlohách předpokládáme, že body $P$, $Q$, $R$ jsou kolineární, $Q \neq R$ a $P \neq Q$.

**A.** Jakých hodnot může nabývat číslo $(PQR)$, jestliže jeden z uvedených tří bodů je středem dvojice zbylých dvou?

**B.** Geometricky interpretujte vztah (a) $(PQR) < 0$, (b) $(PQR) = 0$, (c) $0 < (PQR) < 1$, (d) $1 < (PQR)$.

**C.** Víme, že $P$, $Q$, $R$ jsou různé, a známe $(PQR) = x$. Najděte dělicí poměry $(QPR)$, $(QRP)$, $(RQP)$, $(PRQ)$, $(RPQ)$.

**D.** Je dán čtverec $ABCD$ a reálné číslo $t$ různé od 0 a 1. Na přímkách, kde leží strany čtverce, definujeme body $E, F, G, H$ předpisem $(ABE) = (BCF) = (CDG) = (DAH) = t$. Zjistěte, zda i čtyřúhelník $EFGH$ je čtverec pro (a) $t = -1$, (b) $t = 2$, (c) pro libovolné $t$.

**E.** Je dán obecný trojúhelník $ABC$ a na jeho stranách body $D$, $E$, $F$ tak, že $(ABF) = (BCD) = (CAE) = t$, kde $t$ je reálné číslo. Zjistěte, zda platí:

(a) Je-li $t = -1$, pak je trojúhelník $ABC$ podobný trojúhelníku $DEF$.
(b) Je-li $t = -2$, pak je trojúhelník $ABC$ podobný trojúhelníku $DEF$.

## 3.10 Souřadnicová soustava v $E^2$

Dosud jsme se souřadnicovou soustavou v rovině pracovali intuitivně a předpokládali jsme, že souřadnicové osy jsou na sebe kolmé a měřítka na nich shodná. Tato podmínka pro zavedení soustavy souřadnic není nutná a existuje mnoho případů, kdy souřadnicová soustava se „šikmými osami“ vede na vhodnější popis geometrické situace. V tomto odstavci upřesníme a zobecníme dosud používaný termín souřadnicová soustava v rovině. Později uvidíme, že pojem dělicího poměru je důležitý nástroj pro práci v „šikmé“ souřadnicové soustavě.

Trojici objektů $\langle A, \vec{u}, \vec{v}\rangle$, kde $A$ je bod a $\vec{u}$, $\vec{v}$ je lineárně nezávislá dvojice vektorů roviny $E^2$, nazýváme *repér roviny* $E^2$. V případě, že jsou vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ lineárně závislé, ztrácí tento symbol smysl.
Každému repéru roviny $\langle A, \vec{u}, \vec{v}\rangle$ je přiřazeno bijektivní zobrazení

$$\sigma\colon \mathbf{R}^2 \to E^2, [x; y] \mapsto A + x\vec{u} + y\vec{v},$$

které nazýváme *souřadnicová soustava daná repérem* $\langle A, \vec{u}, \vec{v}\rangle$.

Čísla $x, y$ nazýváme *souřadnice bodu* $M = A + x\vec{u} + y\vec{v}$ *v repéru* $\langle A, \vec{u}, \vec{v}\rangle$ a vztah $\sigma(x; y) = M$ zapisujeme častěji $M = [x; y]$, nebo $M[x; y]$. Někdy mluvíme volně o *souřadnicové soustavě* $\langle A, \vec{u}, \vec{v}\rangle$, čímž podle kontextu myslíme buď repér $\langle A, \vec{u}, \vec{v}\rangle$, nebo zobrazení $\sigma$, nebo obojí.

Báze $\vec{u}$, $\vec{v}$ se nazývá *ortogonální*, jestliže platí $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Báze $\vec{u}$, $\vec{v}$ se nazývá *ortonormální*, když navíc platí $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$.

Není-li uvedeno, k jakému repéru se souřadnicová soustava vztahuje, předpokládáme, že se vztahuje k repéru $\left\langle O, \vec{i}, \vec{j} \right\rangle$, kde $O[0;0]$ je počátek souřadnicové soustavy a $\vec{i} = (1;0)$, $\vec{j} = (0;1)$ jsou *jednotkové vektory ortonormální báze.*

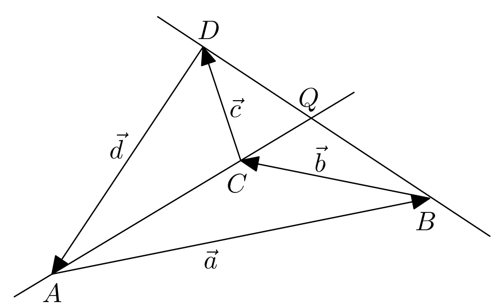
## 3.11 Úloha – konvexní a nekonvexní úhel

Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Označme vektory $\vec{a} = B - A$, $\vec{b} = C - B$, $\vec{c} = D - C$, $\vec{d} = A - D$. Víme, že $\vec{c} = p \cdot \vec{a} + q \cdot \vec{b}$ (čísla $p$, $q$ známe). Zjistěte, jak lze pomocí čísel $p$, $q$ rozhodnout, zda je vnitřní úhel $BCD$ nekonvexní.

**Řešení:** Úlohu můžeme řešit minimálně třemi způsoby.
I. V repéru $\left\langle A, \vec{a}, \vec{d} \right\rangle$ vyjádříme body trojúhelníku $ABD$ (viz úloha 3.8**A**) a bod $C$. Pak zjistíme, zda je bod $C$ vně nebo uvnitř trojúhelníku $ABD$. (Vyzkoušejte.)

II. Pomocí repéru zavedeme kartézskou soustavu souřadnic, v níž vyjádříme body $A$, $B$, $C$ a $D$, a dále podle vzorce z tvrzení 2.1 vypočítáme obsah trojúhelníku $ABC$, $ABD$ a $ACD$. Nakonec zjistíme, zda součet obsahů trojúhelníků $ABC$ a $ACD$ je větší nebo menší než obsah trojúhelníku $ABD$.

III. Využijeme toho, že vnitřní úhel $BCD$ je nekonvexní, právě když průsečík $Q$ přímek $AC$ a $BD$ leží na úsečce $BD$ a vně polopřímky $CA$ (obr. 3.6). Tento způsob rozpracujeme.




Obr. 3.6

Platí, že $Q = A + y(C - A), y > 1$, právě když $Q$ leží vně polopřímky $CA$, a dále $Q = B + x(D - B)$, $0 < x < 1$, právě když $Q$ leží mezi body $B$, $D$.

Porovnáním pravých stran dostáváme $y(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + x(\vec{b} + \vec{c})$. Po dosazení $\vec{c} = p \cdot \vec{a} + q \cdot \vec{b}$ a úpravě máme

$$(1 + xp - y)\vec{a} + (xq + x - y)\vec{b} = \vec{o}.$$

Protože vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ jsou lineárně nezávislé, musí platit $1 + xp - y = 0$, $xq + x - y = 0$, odkud

$$x = \frac{1}{1 + q - p}, y = \frac{1 + q}{1 + q - p}.$$

Z těchto vztahů získáváme hledané ekvivalence

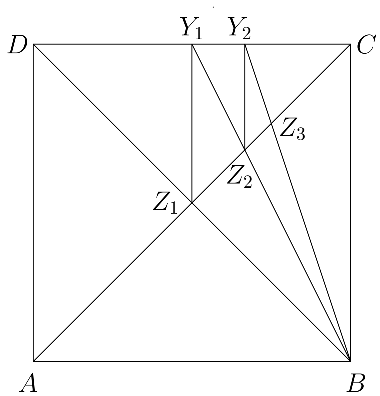
$$0 < x < 1 \Leftrightarrow 1 + q - p > 1 \Leftrightarrow q > p$$

a dále pak

$$y > 1 \Leftrightarrow \frac{p}{1 + q - p} > 0 \Leftrightarrow p > 0.$$

**Závěr:** Vnitřní úhel $BCD$ je nekonvexní, právě když platí $q > p > 0$.

## 3.12 Úloha – dělení úhlopříčky čtverce




Obr. 3.7

Nechť je dán čtverec $ABCD$. Na úhlopříčce $AC$ sestrojte posloupnost bodů $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$,... a na straně $CD$ posloupnost bodů $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$,... tak, že $AD \parallel Y_1Z_1 \parallel Y_2Z_2 \parallel Y_3Z_3 \parallel \dots$ a $Z_1 \in DB, Z_2 \in Y_1B, Z_3 \in Y_2B, \dots$ (obr. 3.7). Zjistěte, v jakém poměru dělí bod $Y_n$ stranu $CD$ a v jakém poměru dělí bod $Z_n$ úhlopříčku $CA$.

**Řešení:** Budeme pracovat v soustavě souřadnic dané repérem $\langle C, \vec{u} = D - C, \vec{v} = B - C \rangle$. Pak $B[0; 1]$, $Y_i[y_i; 0]$, $Z_i[z_i; z_i]$ pro $i = 1, 2, 3, \dots$. Z podmínky $Y_iZ_i \parallel AD$ plyne $y_i = z_i$ pro všechna $i = 1, 2, 3, \dots$.

Z podmínky $Z_{i+1} \in Y_iB$ dostaneme $z_{i+1} = \dfrac{y_i}{1 + y_i}$, neboť přímka $BY_i$ je dána rovnicí $x + y_i \cdot y = y_i$.

Tedy $y_1 = z_1 = \frac{1}{2}, y_2 = z_2 = \frac{1}{3}, y_3 = z_3 = \frac{1}{4}, \dots, y_n = z_n = \frac{1}{n+1}$, což lze dokázat matematickou indukcí.

Tedy $Y_1$ dělí $CD$ v poměru $1 : 1$; $Y_2$ dělí $CD$ v poměru $1 : 2$; $\dots$; $Y_n$ dělí $CD$ v poměru $1 : n$ a $Z_n$ dělí $CA$ také v poměru $1 : n$.

## 3.13 Cvičení – popis objektů v $E^2$

**A.** Označení jako v úloze 3.8**A**. Jazykem elementární geometrie popište objekt

(a) $\{X = C + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}\}$,

(b) $D = C + \frac{1}{2}\vec{v}$,

(c) $\{C + x\vec{u} + y\vec{v}; x, y \in \mathbf{R}_0^+, x + y \leqq 1\}$,

(d) $\{C + \frac{1}{2}\vec{u} + t\vec{v}; t \in \langle 0; \frac{1}{2} \rangle\}$.

**B.** Nechť $E$ je střed strany $AB$ rovnoběžníku $ABCD$ a $F$ průsečík úseček $AC$ a $ED$. Zjistěte, v jakém poměru dělí bod $F$ tyto úsečky.

**C.** Označení jako v úloze **3.11**. Interpretujte následující vztahy geometricky:

(a) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{o}$,
(b) $\vec{b} + \vec{d} = \vec{o}$,
(c) $B - A = C - D$,
(d) $A + C = B + D$,
(e) $\vec{a}$, $\vec{c}$ jsou lineárně závislé,
(f) $\vec{c}$, $\vec{d}$ jsou lineárně závislé,
(g) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$,
(h) $\vec{b} + \vec{d} = \vec{c}$.

**D.** Úlohu **3.12** řešte pro případ, že $ABCD$ je (a) obdélník, (b) rovnoběžník.

**E.** Uvnitř stran $AB$, resp. $AD$ rovnoběžníku $ABCD$ se pohybují body $X$, resp. $Y$. Nechť $Z$ je průsečík přímky $XY$ s přímkou $AC$. Označme dělicí poměry $(XBA) = x$, $(YDA) = y$, $(ZCA) = z$.

(a) Najděte závislost mezi čísly $x$, $y$, $z$.

(b) Zůstane tato závislost v platnosti, i když připustíme, aby bod $X$ probíhal celou přímku $AB$ a bod $Y$ celou přímku $AD$?

**F.** Označení jako v úloze **3.11**. Zjistěte, kdy je vnitřní úhel $CDA$ nekonvexní.

**G.** Budeme vyšetřovat zobrazení $\lambda$, které bodu $M[a; b]$ přiřadí přímku $\lambda(M)$: $ax + by = 1$. Definičním oborem zobrazení $\lambda$ je zjevně celá rovina $E^2$ s výjimkou bodu $O[0; 0]$. Bod $O$ v zobrazení $\lambda$ nemá obraz.

(a) Nakreslete body $A[2; 1]$, $B[-1; 3]$, $C[-3; 0]$ a přímky $\lambda(A)$, $\lambda(B)$, $\lambda(C)$. Zjistěte, jaká je vzájemná poloha přímek $OA$ a $\lambda(A)$, přímek $OB$ a $\lambda(B)$ a přímek $OC$ a $\lambda(C)$.

(b) Pro každý bod $M[a; b] \neq O[0; 0]$ platí $OM \perp \lambda(M)$. Dokažte.

(c) Najděte všechny body $M$, pro které je $M \in \lambda(M)$.

(d) Dokažte, že pro libovolné dva body $A$, $B$ různé od $O$ platí: $A \in \lambda(B) \Leftrightarrow B \in \lambda(A)$

(e) Ke každému bodu $M \neq O$ přiřaďme bod $\lambda(M) \cap OM = \{M'\}$. Jak se nazývá zobrazení $f : M \to M'$?

**H.** Dokažte, že v kruhové inverzi $\lambda$: $[u; v] \mapsto \left[\dfrac{u}{u^2 + v^2}; \dfrac{v}{u^2 + v^2}\right]$ vzhledem ke kružnici $K$: $x^2 + y^2 = 1$ je obrazem kružnice $k(S, r)$ buď kružnice $k' = \lambda(k)$, nebo přímka.

**I.** Zjistěte, kdy pro kružnici $k$ platí $\lambda(k) = k$ ($\lambda$ je kruhová inverze z úlohy **H**).

## 3.14 Trojice kolineárních bodů

Náročné výpočty lze (někdy podstatně) usnadnit použitím determinantů. Platí následující tvrzení:

**Tvrzení 3.5:** V souřadnicové soustavě dané libovolným repérem platí: Body $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $C[c_1; c_2]$ jsou kolineární, tj. leží v jedné přímce, právě když

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.3}$$

**Důkaz:** Body $A$, $B$, $C$ leží na přímce, právě když jsou vektory $B - A$ a $C - A$ lineárně závislé, tj. právě když

$$0 = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}.$$

Tento determinant upravíme ve dvou krocích.

(a) Původní determinant druhého stupně rozšíříme na determinant třetího stupně přidáním vektoru $(a_1, a_2, 1)$ do prvního řádku a doplněním posledního sloupce nulami. Tím jsme hodnotu determinantu nezměnili. To nahlédneme, když jej rozvineme podle třetího sloupce.

(b) První řádek přičteme k druhému i třetímu. Dostáváme vztah (3.3).

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & 0 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

**Důsledek 3.5:** Přímka procházející různými body $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$ je popsána rovnicí:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

## 3.15 Cvičení – konfigurace bodů na přímkách

Ve vývoji matematiky sehrály důležitou úlohu konfigurace bodů na přímkách. S každou takovou konfigurací je svázáno jisté tvrzení, které bylo objeveno a dokázáno syntetickou cestou. Jeho analytický důkaz je téměř vždy kalkulativně náročný. Je to tedy dobrý testovací nástroj, který prověří jak naši početní zručnost, tak vytrvalost a odolnost vůči neúspěchům.

Nedaří-li se vám úlohu vyřešit, pokuste se nejprve vyřešit nějaký její konkrétní případ. Všimněte si i limitních případů.

**A.** *Konfigurace Menelaova* má šest různých bodů $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ a čtyři přímky (obr. 3.8a). Definujeme reálná čísla $x$, $y$ vektorovými vztahy

$$\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BD} = y\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE} = z\overrightarrow{AE}. \tag{3.5}$$

Najděte závislost mezi čísly $x$, $y$, $z$.

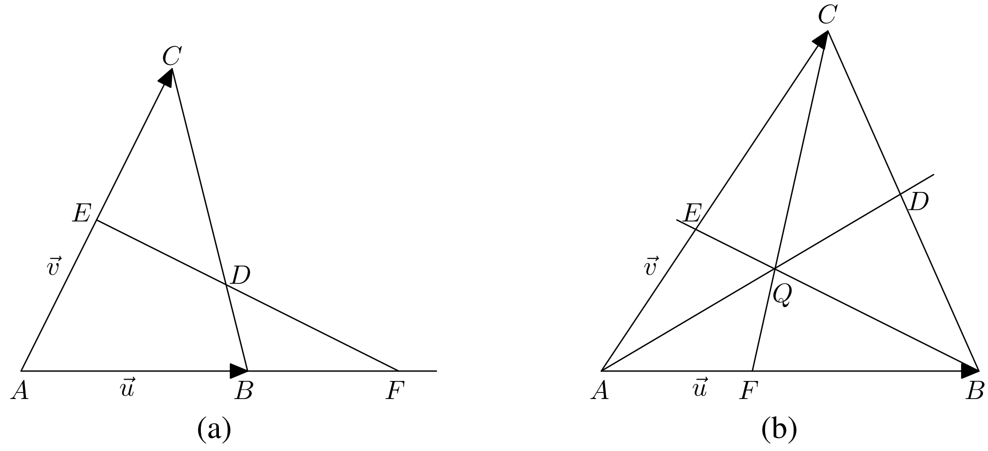
*Menelaos Alexandrijský (1.–2. století n.l.), matematik a astronom helénské epochy, spoluzakladatel sférické trigonometrie. Objevil a duchaplně užíval uvedenou konfiguraci i její sférickou variantu pro výpočty zahrnující sférické trojúhelníky.*

Zajímavý limitní případ: Bod $E$ je pevný a bod $F$ se pohybuje po přímce $AB$ do nekonečna, takže $ED$ a $AB$ se mění na rovnoběžky.

**B.** *Konfigurace Cevova* se skládá ze sedmi různých bodů $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $Q$ a šesti přímek (obr. 3.8b). Reálná čísla $x$, $y$, $z$ definujeme vztahy (3.5) z úlohy **A**. Najděte závislost mezi čísly $x$, $y$, $z$.

*Ital Giovanni Ceva (1648–1734, čti Čeva) hledal zobecňující pohled na konfiguraci těžnic, výšek a os úhlů obecného trojúhelníku. Výsledkem byla věta (1768), která nese Cevovo jméno a je předmětem našeho cvičení. Cevova věta je velice blízká k větě Menelaově. Jsou to věty v jistém smyslu duální. Je zajímavé, že objev druhé přišel až více než 1 500 let po objevu první.*

Zajímavé speciální případy: Bod $Q$ je těžiště trojúhelníku $ABC$, nebo jeho ortocentrum, nebo střed kružnice vepsané.



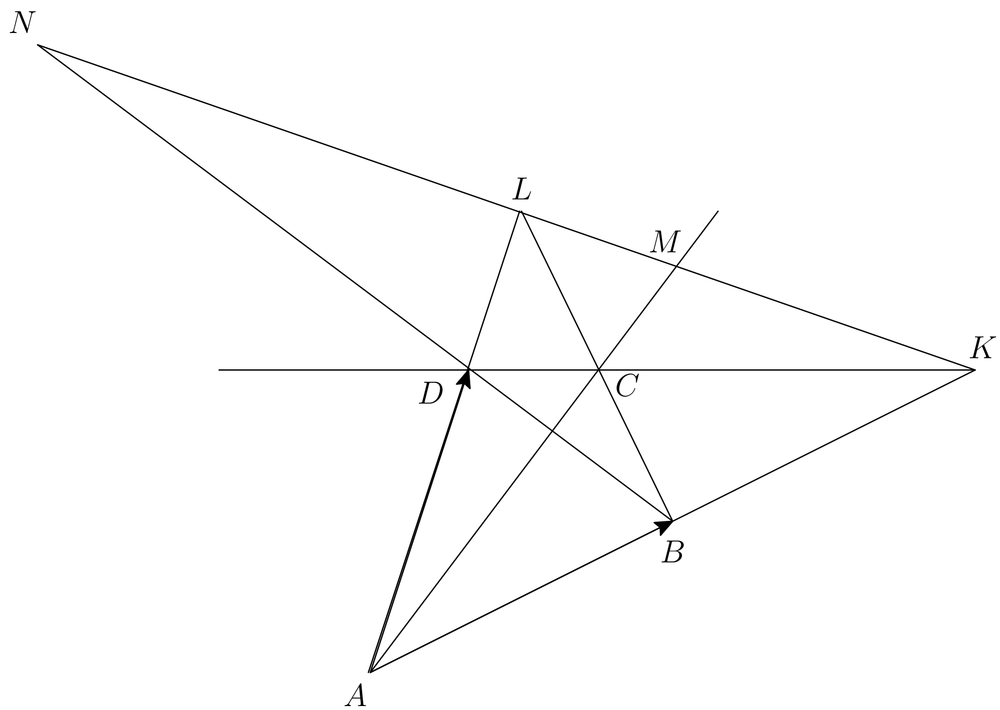

Obr. 3.8

**C.** *Úplný čtyřroh* se skládá z osmi různých bodů $A$, $B$, $C$, $D$, $K$, $L$, $M$, $N$ a sedmi přímek $ABK$, $ACM$, $ADL$, $BCL$, $CDK$, $BDN$ a $LMNK$ (obr. 3.9). Čísla $x$, $y$ jsou určena vztahy

$$L - M = x(K - M), L - N = y(K - N).$$

Dokažte, že mezi čísly $x$, $y$ je závislost, a najděte ji.

Zajímavý limitní případ: Bod $N$ se pohybuje po přímce $KL$ do nekonečna.

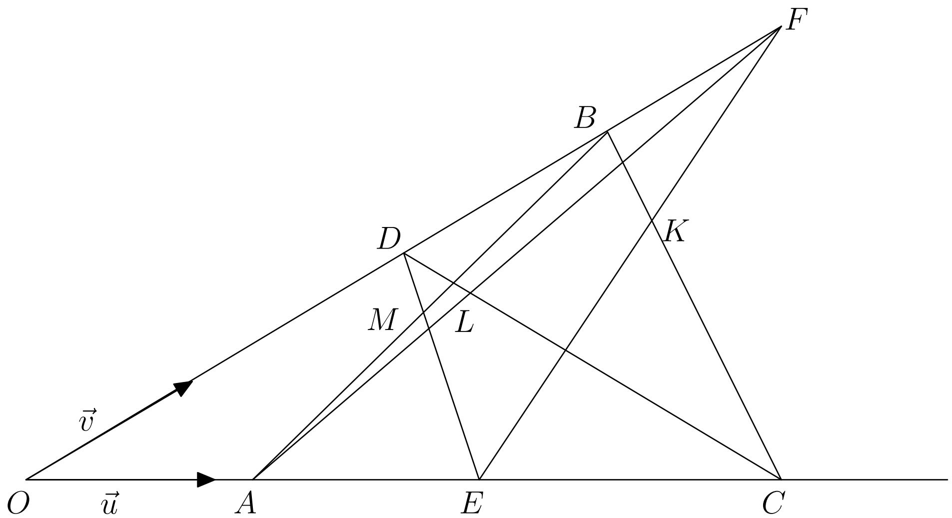



Obr. 3.9

**D.** *Konfigurace Pappova* má devět různých bodů $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $K$, $L$, $M$ a osm přímek: $ACE$, $BDF$, $ABM$, $DEM$, $BCK$, $EFK$, $CDL$, $AFL$ (obr. 3.10). Dokažte, že body $K$, $L$, $M$ leží v přímce.

*Pappus Alexandrijský (druhá polovina 3. století n.l.), astronom a geometr. Z jeho bohaté tvorby se dochovaly bohužel jen fragmenty.*

**E.** *Konfigurace Desarguova* se skládá z deseti různých bodů $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $K$, $L$, $M$ a $S$ a devíti přímek $ADS$, $BES$, $CFS$, $ABM$, $ACL$, $BCK$, $DEM$, $DFL$, $EFK$ (obr. 3.11, str. 58). Dokažte, že body $K$, $L$, $M$ leží v přímce.



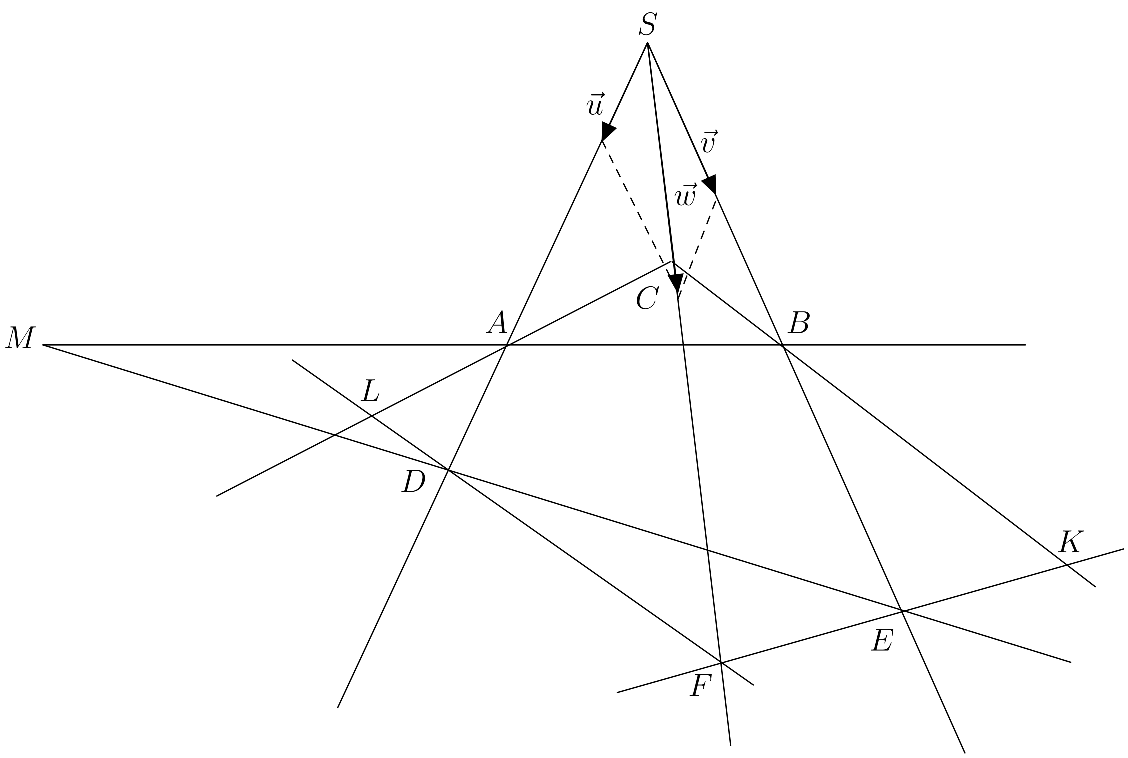

Obr. 3.10

Jiné vyjádření: Pokud dvojice odpovídajících si různých vrcholů trojúhelníku $ABC$ a $DEF$ leží na třech přímkách, které se protínají v jednom bodě, pak dvojice přímek obsahující odpovídající si strany se protínají ve třech kolineárních bodech.

*Girard Desargues (1593–1662), spoluzakladatel projektivní a deskriptivní geometrie a kinematiky. Zavedl pojem bodu nekonečně vzdáleného, pojem polarity i termín „involuce“.*

## 3.16 Věta Menelaova a Cevova

Je dán trojúhelník $ABC$ a body $D \in BC$, $D \neq C$, $E \in AC$, $E \neq A$, $F \in AB$, $F \neq B$. Čísla $x$, $y$, $z$ definujeme pomocí vztahů (3.5), str. 55. Pak body $D$, $E$, $F$ leží na přímce, právě když platí $xyz = 1$, a přímky $AD$, $BE$, $CF$ procházejí společným bodem, právě když platí $xyz = -1$.




Obr. 3.11

# Kapitola 4

# Útvary v euklidovském prostoru $E^3$ studovány pomocí vektorů

Postoupíme o dimenzi výše. Trojrozměrný prostor $E^3$ je náročnější na představivost. Doporučujeme čtenáři kreslit si obrázky nebo modelovat dané situace přímo v prostoru.

## 4.1 Repér v $E^3$

Čtveřici objektů $\langle A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$, kde $A$ je bod a $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je lineárně nezávislá trojice vektorů prostoru $E^3$, nazýváme *repér prostoru* $E^3$.
Každému repéru prostoru je přiřazeno bijektivní zobrazení

$$\sigma : \mathbf{R}^3 \longrightarrow E^3,\ (x; y; z) \mapsto M = A + x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w},$$

které nazýváme *souřadnicová soustava daná repérem* $\langle A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Čísla $x$, $y$, $z$ nazýváme *souřadnice bodu* $M$ *v repéru* $\langle A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ a vztah $\sigma(x; y; z) = M$ píšeme častěji $M = [x; y; z]$, nebo $M[x; y; z]$.

Repér $\langle A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ nazveme *ortonormální*, jestliže $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou jednotkové ($|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$) a po dvou navzájem kolmé ($\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$).
Není-li výslovně uvedeno vzhledem k jakému repéru se souřadnicová soustava vztahuje, předpokládáme, že se vztahuje k repéru $\left\langle O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\rangle$, kde $O[0; 0; 0]$ je počátek souřadnicové soustavy v $E^3$ a $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$, jsou *jednotkové vektory ortonormální báze prostoru* $E^3$.

Bod nazýváme 0-*dimenzionální prostor*, přímku nazýváme 1-*dimenzionální prostor* a rovinu nazýváme 2-*dimenzionální prostor*. Dimenzi prostoru $\mathcal{A}$ označujeme $\dim \mathcal{A}$.

## 4.2 Úlohy – vzájemné polohy útvarů

Přímku v $E^3$ lze popsat stejně jako v $E^2$ dvojicí bodů a nebo bodem a vektorem. Přímka $p$ je popsána bodem $P$ a vektorem $\vec{p}$ předpisem: $p = \{P + x\vec{p}, x \in \mathbf{R}\}$. Vektor $\vec{p}$ nazýváme *směrový vektor* přímky $p$. Tedy přímka $p$ je množina všech bodů, které lze popsat ve tvaru $P + x\vec{p}$, kde $x$ je reálné číslo. Dodejme, že zde nutně musí být $\vec{p} \neq \vec{o}$, jinak by daná množina degenerovala na bod. Proto, řekneme-li dále, že $\{P + x\vec{p}, x \in \mathbf{R}\}$ je přímka, automaticky předpokládáme $\vec{p} \neq \vec{o}$. Je-li přímka $p$ určena body $A$, $B$ $(A \neq B)$, pak $\vec{p} = B - A$ je směrový vektor přímky $p$. Dvojice $\langle A, \vec{p}\rangle$ je repér euklidovského prostoru $E^1$, jehož nosičem je přímka $p$.

**A.** Rovinu lze v analytické geometrii popsat dvěma různými způsoby – repérem a rovnicí. Teď ukážeme, že útvar v $E^3$ popsaný jednou lineární rovnicí je rovina.

V $E^3$ je dán repér $\langle A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle$ a čtveřice $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tak, že aspoň jedno z čísel $a$, $b$, $c$, je nenulové. Pak $\mathcal{A} = \{X[x_1; x_2; x_3]; ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}$ je rovina v $E^3$, tj. existuje bod $M$ a dvojice lineárně nezávislých vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$ tak, že množina $\mathcal{B} = \{M + x\vec{p} + y\vec{q}; (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$ je totožná s množinou $\mathcal{A}$.

**Řešení:** Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \neq 0$. Pak bod $M[m_1; m_2; m_3] = M[\frac{d}{a}; 0; 0]$ patří do $\mathcal{A}$.

Vektory $\vec{p}$ a $\vec{q}$ najdeme tak, že budeme hledat body $P = M + \vec{p}$ a $Q = M + \vec{q}$, které patří do množiny $\mathcal{A}$. Označme $\vec{p} = (p_1; p_2; p_3)$, $\vec{q} = (q_1; q_2; q_3)$. Pak $P \in \mathcal{A} \Leftrightarrow a(m_1 + p_1) + b(m_2 + p_2) + c(m_3 + p_3) = d \Leftrightarrow ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0$. Stejně pro vektor $\vec{q}$. Hledáme tedy lineárně nezávislé vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$, pro které $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0$ a $aq_1 + bq_2 + cq_3 = 0$. Stačí položit $\vec{p} = (-b; a; 0)$, $\vec{q} = (-c; 0; a)$.

Tedy bod $M$ a dvojici lineárně nezávislých vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$ jsme našli. Zbývá dokázat, že $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. To přenecháme čtenáři do cvičení 4.5**A**. Úloha je vyřešena. Dodejme, že $\langle M, \vec{p}, \vec{q}\rangle$ je repér roviny $\mathcal{B}$.

Poznámka: Zápis $\mathcal{A} = \{X[x_1; x_2; x_3]; ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}$ budeme stručně psát $\mathcal{A}$: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$.

**Definice:** Nechť je v $E^3$ dán bod $M$ a libovolná neprázdná konečná nebo nekonečná množina $\mathcal{V}$ vektorů. Množinu všech bodů $M + x_1\vec{p_1} + \cdots + x_n\vec{p_n}$, kde $\vec{p_1}, \ldots, \vec{p_n} \in \mathcal{V}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ nazveme *lineární prostor generovaný bodem $M$ a vektory $\mathcal{V}$*, nebo též *lineární obal bodu $M$ a vektorů $\mathcal{V}$* a označíme $\mathrm{Obal}(M, \mathcal{V})$. V případě, že $\mathcal{V} = \{\vec{p_1}, \ldots, \vec{p_n}\}$ je konečná, píšeme též $\mathrm{Obal}(M, \vec{p_1}, \ldots, \vec{p_n})$.

**B.** Jsou dány přímky $p = \{P + x\vec{p}; x \in \mathbf{R}\}$, $q = \{Q + y\vec{q}; y \in \mathbf{R}\}$ a rovina $\gamma = \{K + u\vec{u} + v\vec{v}; u, v \in \mathbf{R}\}$. Klasifikujte

(a) vzájemnou polohu přímek $p$, $q$,
(b) vzájemnou polohu přímky $p$ a roviny $\gamma$,

a vyslovte příslušná kritéria v jazyce analytické geometrie.

**Řešení:** (a) Vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ jsou směrové vektory přímek $p$ a $q$. Jsou-li $\vec{p}$, $\vec{q}$

(i) lineárně závislé, pak jsou přímky $p$, $q$ totožné, nebo rovnoběžné různé,

(ii) lineárně nezávislé, pak jsou přímky $p$, $q$ různoběžné, nebo mimoběžné.

Pro určení vzájemné polohy přímek je určující dimenze prostoru $\mathcal{A} = \{P + x\vec{p} + y\vec{q}; x, y \in \mathbf{R}\}$ (v dalším textu připustíme i zápis $\mathcal{A} = \langle P, \vec{p}, \vec{q}\rangle$). K rozlišení dvou případů v každém z uvedených bodů (i) a (ii) použijeme vektor $\overrightarrow{PQ}$. Je-li tento vektor lineární kombinací vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$, pak přímky $p$, $q$ leží v jedné rovině. Do hry tedy vstupuje prostor $\mathcal{B} = \{P + x\vec{p} + y\vec{q} + z(Q - P); x, y, z \in \mathbf{R}\}$ (neboli $\mathcal{B} = \left\langle P, \vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}\right\rangle$).

Všechny možnosti pro dimenze prostorů $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a v důsledku toho vzájemné polohy přímek $p$, $q$ vyjádříme v tabulce 4.1.

| $\dim \mathcal{A}$ | $\dim \mathcal{B}$ | vzájemná poloha |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $p = q$ |
| | 2 | $p \parallel q \wedge p \neq q$ |
| 2 | 2 | $p$, $q$ jsou různoběžné |
| | 3 | $p$, $q$ jsou mimoběžné |

Tab. 4.1

(b) Připomeňme kritérium rovnoběžnosti přímky $p$ a roviny $\gamma$ a formulujme jej nástroji analytické geometrie:

$$p \parallel \gamma \Leftrightarrow \vec{p} \text{ je lineární kombinací vektorů } \vec{u}, \vec{v}.$$

K rozlišení případů $p \subset \gamma$ a $p \not\subset \gamma$ použijeme vektor $\overrightarrow{KP}$. Budeme tedy zkoumat dimenzi prostorů $\mathcal{C} = \{K + x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{p}; x, y, z \in \mathbf{R}\}$ (nebo též $\mathcal{C} = \langle K, \vec{u}, \vec{v}, \vec{p}\rangle$) a $\mathcal{D} = \{K + x\vec{u} + y\vec{v} + z(P - K); x, y, z \in \mathbf{R}\}$ (nebo-li $\mathcal{D} = \left\langle K, \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{KP}\right\rangle$).

Všechny možnosti opět vyjádříme tabulkou (tab. 4.2).

| $\dim \mathcal{C}$ | $\dim \mathcal{D}$ | vzájemná poloha |
|---|---|---|
| 2 | 2 | $p \subset \gamma$ |
| 2 | 3 | $p \parallel \gamma \wedge p \not\subset \gamma$ |
| 3 | 3 | $p$ a $\gamma$ jsou různoběžné |

Tab. 4.2

**C.** Jsou dány dvě přímky $p, q$ popsané pomocí repéru $\langle A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$: $p = \{A + a \cdot \vec{w}, a \in \mathbf{R}\}$, $q = PQ$, kde $P = A + \frac{3}{2}\vec{v}$, $Q = A + \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{w}$. Zjistěte vzájemnou polohu přímek $p$ a $q$. V případě, že jsou různoběžné nebo rovnoběžné, popište rovinu, v níž leží. V případě, že jsou mimoběžné, veďte jejich příčku $r$, která je rovnoběžná s přímkou $o = \{A + (1-t)\vec{u} + t\vec{v}, t \in \mathbf{R}\}$.

Terminologie: Každou přímku $XY$, která protíná každou z mimoběžek $p$, $q$, nazveme *příčka mimoběžek*. Tu, která je kolmá k oběma mimoběžkám, nazýváme *nejkratší příčka mimoběžek* (někdy též *osa mimoběžek*).

**Řešení:** Nejdříve zkoumejme, zda jsou směrové vektory $\vec{p}$ a $\vec{q}$ přímek $p$, $q$ lineárně závislé, nebo nezávislé. Ze vztahů $\vec{p} = \vec{w}$, $\vec{q} = Q - P = \frac{3}{4}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} + \frac{1}{4}\vec{w}$ je zřejmé, že $\vec{p}$, $\vec{q}$ jsou lineárně nezávislé, a tedy $\dim \langle A, \vec{p}, \vec{q} \rangle = 2$. Vezměme ještě v úvahu vektor $P - A = \frac{3}{2}\vec{v}$. Ten nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{p}$ a $\vec{q}$, a tedy $\dim \left\langle A, \vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{AP} \right\rangle = 3$. Tedy přímky $p$, $q$ jsou mimoběžné. Budeme tedy vést příčku $r$.

Přímka $r$ je rovnoběžná s přímkou $o$ a protíná přímku $p$. Proto $r = \{A + a_0 \cdot \vec{w} + t \cdot (\vec{v} - \vec{u}),$ $a_0, t \in \mathbf{R}\}$. Přímka $r$ také protíná přímku $q$, označme $q \cap r = \{Y\}$. Bod $Y$ lze pak popsat takto:

$$Y = A + a_0\vec{w} + t_0(\vec{v} - \vec{u}) = A + \frac{3}{4}q_0 \cdot \vec{u} + \frac{3}{2}(1 - q_0) \cdot \vec{v} + \frac{1}{4}q_0\vec{w}$$

Porovnáním koeficientů u příslušných vektorů dostáváme soustavu $-t_0 = \frac{3}{4}q_0$, $t_0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}q_0$, $a_0 = \frac{1}{4}q_0$. Soustavě vyhovují řešení $t_0 = -\frac{3}{2}$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $q_0 = 2$. Odtud máme $r = \{A + \frac{1}{2}\vec{w} + t(\vec{v} - \vec{u}), t \in \mathbf{R}\}$, $Y = A + \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$ a $X = A + \frac{1}{2}\vec{w}$, kde $p \cap r = \{X\}$.

## 4.3 Úlohy – komplanární body

**A.** Zobecněte tvrzení 3.5 pro $E^3$.

**Řešení:** Zobecněním tvrzení 3.5 dostaneme kritérium, pomocí kterého zjistíme, zda čtyři body leží v jedné rovině.

**Tvrzení 4.1:** V souřadnicové soustavě dané libovolným repérem platí: Body $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, $C[c_1; c_2; c_3]$, $D[d_1; d_2; d_3]$ jsou komplanární, tj. leží v jedné rovině, právě když

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.1}$$

**Důkaz:** Body $A$, $B$, $C$, $D$ leží v rovině, právě když jsou vektory $B - A$, $C - A$ a $D - A$ lineárně závislé, tj. když je první z determinantů (4.2) nulový. Tento determinant upravíme ve dvou krocích.

• Rozšíříme ho na determinant čtvrtého stupně přidáním vektoru $(a_1; a_2; a_3; 1)$ do prvního řádku a doplněním posledního sloupce nulami. Tím jsme hodnotu determinantu nezměnili. To nahlédneme, když tento determinant rozvineme podle čtvrtého sloupce.

$$0 = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 & 0 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 & 0 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

• První řádek přičteme ke zbylým třem. Získáme vztah (4.1). QED

**Důsledek 4.2:** Rovina procházející nekolineárními body $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, $C[c_1; c_2; c_3]$ je popsána rovnicí

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**B.** Najděte podmínku, aby tři body byly v $E^3$ kolineární.

**Řešení:** Tři body $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, $C[c_1; c_2; c_3]$ jsou kolineární, právě když vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ jsou lineárně závislé, tedy pokud hod $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} \leq 1$. Výsledek formulujeme jako tvrzení.

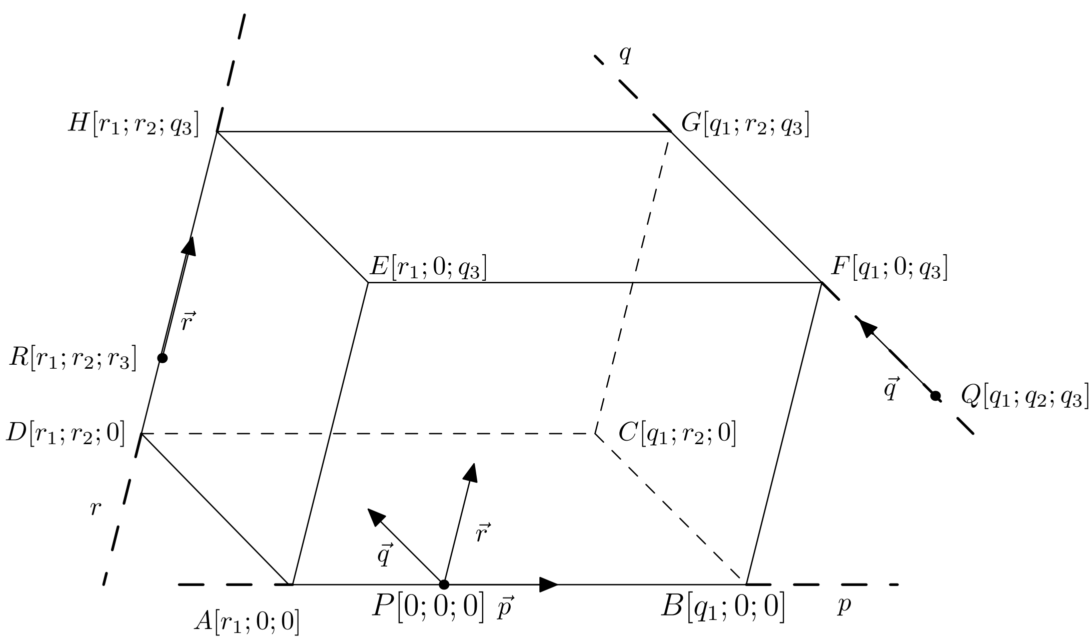
**Tvrzení 4.3:** Body $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, $C[c_1; c_2; c_3]$ jsou kolineární, právě když

$$\text{hod}\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} \leq 1.$$

## 4.4 Úloha – rovnoběžnostěn a tři mimoběžky

Je zřejmé, že, je-li dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$, pak jsou přímky $p = AB$, $q = FG$, $r = DH$ po dvou mimoběžné. Zjistěte, zda platí i obrácená implikace: Jsou-li dány navzájem mimoběžné přímky $p, q, r$, pak existuje rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ tak, že $p = AB$, $q = FG$, $r = DH$.

**Řešení:** Obrácená implikace platí. To dokážeme. Dané objekty musíme nejprve analyticky uchopit (obr. 4.1).




Obr. 4.1

Zvolme libovolně $P \in p$ a nechť $\vec{p}$ je směrový vektor přímky $p$. Pak $p = \{P + x\vec{p}; x \in \mathbf{R}\}$. Analogicky nechť $q = \{Q + y\vec{q}; y \in \mathbf{R}\}$, $r = \{R + z\vec{r}; z \in \mathbf{R}\}$, kde $Q$, $R$ a $\vec{q}$, $\vec{r}$ jsou vhodně zvolené body a vektory. Zvolme repér, např. $\langle P, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\rangle$. V souřadnicové soustavě dané tímto repérem vyjádřeme body $Q = [q_1; q_2; q_3]$, $R = [r_1; r_2; r_3]$. Nyní začneme na přímkách $p$, $q$, $r$ hledat vrcholy rovnoběžnostěnu a vyjadřovat je pomocí daných souřadnic $q_1$, $q_2$, $q_3$, $r_1$, $r_2$, $r_3$.

Hledáme např. body $B \in p$, $F \in q$ tak, aby $BF \parallel r$, tj. aby $\vec{r}$ byl směrový vektor přímky $BF$. Jinými slovy hledáme příčku mimoběžek $p$, $q$ rovnoběžnou s přímkou $r$. To znamená, že hledáme $b, f, t \in \mathbf{R}$ tak, aby bylo $B = P + b\vec{p}$, $F = Q + f\vec{q}$, $F - B = t\vec{r}$. V souřadnicích máme $B = [b; 0; 0]$, $F = [q_1; q_2 + f; q_3]$, $F - B = (q_1 - b; q_2 + f; q_3)$, $t\vec{r} = (0; 0; t)$. Odtud $b = q_1$, $f = -q_2$, $t = q_3$.

Obdobně hledáme body $H \in r$ a $G \in q$ tak, aby $GH \parallel p$, a body $A \in p$ a $D \in r$ tak, aby $AD \parallel q$. Dostáváme $G[q_1; r_2; q_3]$, $H[r_1; r_2; q_3]$, $A[r_1; 0; 0]$, $D[r_1; r_2; 0]$. Zbývá najít body $C$ a $E$.

Bod $C$ leží spolu s body $A$, $B$, $D$ v rovině $\langle P, \vec{p}, \vec{q}\rangle$, tedy jeho třetí souřadnice je 0. Dále platí, že $C - D = B - A$, odtud $C[q_1; r_2; 0]$. Obdobně pro bod $E$ platí, že jeho druhá souřadnice je 0, neboť leží v rovině $\langle P, \vec{p}, \vec{r}\rangle$ s body $A$, $B$, $F$. Zbylé souřadnice doplníme ze vztahu např. $A - E = B - F$ a dostáváme $E[r_1; 0; q_3]$.

**Výsledek:** $A[r_1; 0; 0]$, $B[q_1; 0; 0]$, $C[q_1; r_2; 0]$, $D[r_1; r_2; 0]$, $E[r_1; 0; q_3]$, $F[q_1; 0; q_3]$, $G[q_1; r_2; q_3]$ a $H[r_1; r_2; q_3]$.

Nutno ještě prověřit, zda body $A, \ldots, H$ neleží v rovině. Stačí, když ukážeme, že body $A$, $B$, $D$, $E$ určují čtyřstěn, tj. nejsou komplanární. Použijeme tvrzení 4.1. Příslušný determinant vytvořený ze souřadnic bodů $A$, $B$, $D$, $E$ a jedniček má hodnotu $(r_1 - q_1)r_2 \cdot q_3$, což je nenulové číslo. (Kdyby $r_2 = 0$, přímky $p$ a $r$ by byly různoběžné, kdyby $q_3 = 0$, přímky $p$ a $q$ by byly různoběžné a pokud $r_1 = q_1$, přímky $r$ a $q$ by byly různoběžné.)

[!] V řešení jsme se dopustili chyby. Volba repéru $\langle P, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\rangle$ byla neoprávněná, protože jsme předpokládali, že vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ jsou lineárně nezávislé. Tato podmínka splněná být nemusí. Vezměme například $P[0; 0; 0]$, $Q[0; 0; 1]$, $R[0; 0; 2]$, $\vec{p} = (1; 0; 0)$, $\vec{q} = (1; 1; 0)$, $\vec{r} = (0; 1; 0)$. Pak jsou přímky $p$, $q$, $r$ po dvou mimoběžné, ale vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ jsou lineárně závislé. V tomto případě též neexistuje hledaný rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$. Tvrzení vyslovené a „dokázané“ výše neplatí. Platí tvrzení se zesílenými předpoklady.

**Tvrzení 4.4:** Jsou-li dány po dvou mimoběžné přímky $p$, $q$, $r$ tak, že neexistuje rovina, se kterou jsou všechny rovnoběžné, pak existuje rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ tak, že $p = AB$, $q = FG$, $r = DH$.

Toto tvrzení bylo již dokázáno.

Poznámka: Podmínka neexistence roviny rovnoběžné s přímkami $p$, $q$, $r$ je ekvivalentní s podmínkou, že jejich směrové vektory jsou lineárně nezávislé.

## 4.5 Cvičení – vzájemné polohy útvarů v $E^3$

**A.** Dokažte tvrzení $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ z úlohy 4.2**A** na straně 60.

**B.** Je dán bod $A$ a vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Pro jakou čtveřici $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ leží body $A$, $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$, $D = A + \vec{w}$ (a) v rovině, (b) na přímce?

**C.** Nechť je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ a vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AH}$. Vyjádřete všechny (a) vrcholy rovnoběžnostěnu, (b) hrany, (c) stěny, (d) tělesové úhlopříčky, (e) úhlopříčky stěn rovnoběžnostěnu, dále (f) rovinu $ACG$, (g) rovinu $BDE$, (h) rovinu $CFH$, a to (i) v repéru $\langle A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle$, (ii) v souřadnicové soustavě dané uvedeným repérem.

**D.** Nechť jsou dány dvě mimoběžné přímky $p$: $x = 1, y = m, z = 0$ a $q$: $x = t, y = t, z = 1$. Sestrojte příčku $r$ mimoběžek $p$, $q$, která je rovnoběžná s přímkou $o$: $x = 0$, $y = r$, $z = r$.

**E.** Nechť jsou dány dvě mimoběžné přímky $p$: $x = 1, y = m, z = 0$ a $q$: $x = t, y = t, z = 1$. Sestrojte příčku $r$ mimoběžek $p$, $q$, která prochází bodem $S[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

**F.** Je dáno šest bodů $P[\frac{1}{2}; 0; 0]$, $Q[1; \frac{1}{3}; 0]$, $R[0; 1; 1]$, $S[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $M[0; 0; 1]$, $N[1; \frac{2}{3}; 1]$.

(1) Určete vzájemnou polohu (a) přímek $p = PM$, $q = QN$, (b) přímek $r = RS$, $n = PN$, (c) přímek $m = MN$, $k = PQ$, (d) roviny $\alpha = PQM$ a přímky $r = RS$.

(2) Popište obecnou rovnicí rovinu, která inciduje s přímkou $r = RS$ (tj. přímka $r$ v ní leží) a je rovnoběžná s přímkou $l = PQ$.

**G.** Klasifikujte vzájemnou polohu rovin $\alpha = \{A + x\vec{p} + y\vec{q}; x, y \in \mathbf{R}\}$ a $\beta = \{B + u\vec{u} + v\vec{v}; u, v \in \mathbf{R}\}$ a vyslovte příslušná kritéria v jazyce analytické geometrie.

## 4.6 Úlohy – rovnoběžnostěn a čtyřstěn

**A.** Je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ (standardní značení, viz obr. 4.2) a průsečík $P$ tělesové úhlopříčky $AG$ s rovinou $\gamma = BDE$. Najděte dělicí poměr $(PGA)$.

**Řešení:** Úlohu budeme řešit podobně jako úlohu 3.8**B** v šesti krocích.

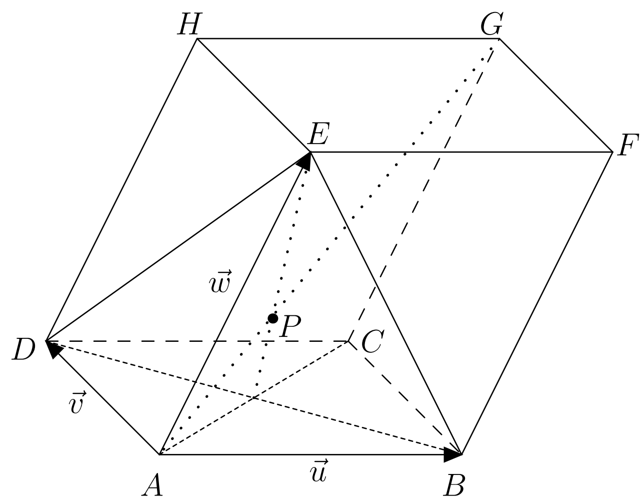
• Volíme repér $\langle A, \vec{u} = B - A, \vec{v} = D - A, \vec{w} = E - A\rangle$.

• Ve zvolené soustavě souřadnic vyjádříme aktéry:

$D - B = \vec{v} - \vec{u}$, $E - B = \vec{w} - \vec{u}$, $G - A = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$,

úsečka $AG = \{A + t(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}); t \in \langle 0; 1\rangle\}$,

$\gamma = \{A + \vec{u} + x(\vec{v} - \vec{u}) + y(\vec{w} - \vec{u}); x, y \in \mathbf{R}\}$.




Obr. 4.2

Potom $P = B + x(D - B) + y(E - B) = A + \vec{u} + x(\vec{v} - \vec{u}) + y(\vec{w} - \vec{u})$.

• Geometrické podmínky vyjádříme ve vektorovém jazyce.

$$P \in AG \Leftrightarrow \exists t \in \langle 0; 1\rangle, P = A + t(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

$$P \in \gamma \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbf{R}, P = A + \vec{u} + x(\vec{v} - \vec{u}) + y(\vec{w} - \vec{u})$$

Tedy $A + t(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = P = A + \vec{u} + x(\vec{v} - \vec{u}) + y(\vec{w} - \vec{u})$.

Vztah upravíme na rovnost:

$$(t - 1 + x + y)\vec{u} + (t - x)\vec{v} + (t - y)\vec{w} = \vec{o}$$

• Využijeme lineární nezávislost vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ a z vektorové rovnice dostaneme vztahy pro koeficienty:

$$x + y + t = 1,\ x = t,\ y = t$$

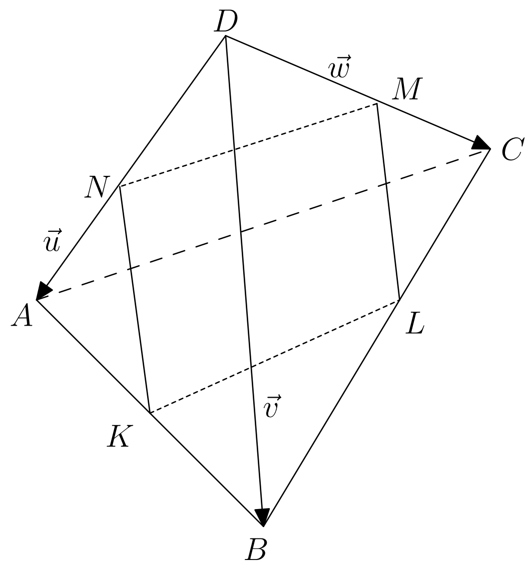
• Najdeme řešení soustavy. Řešení je $x = y = t = \frac{1}{3}$.

• Výsledek geometricky interpretujeme. Protože $P = A + \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$, je $A - G = 3(A - P)$, tj. $(PGA) = \frac{1}{3}$.

**B.** Je dán čtyřstěn $ABCD$, bod $M$ na hraně $CD$ a bod $K = A - \bullet - B$. Najděte rovinu $\gamma$ procházející přímkou $KM$ a protínající čtyřstěn $ABCD$ v lichoběžníku $KLMN$ ($L \in BC$, $N \in AD$). Najděte všechna řešení.

**Řešení:**

• Volíme repér $\langle D, \vec{u} = A - D, \vec{v} = B - D, \vec{w} = C - D \rangle$ (obr. 4.3).




Obr. 4.3

• Ve zvoleném repéru vyjádřeme objekty a některé vztahy:

$K = A - \bullet - B \Leftrightarrow K = D + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$

$L \in BC \Leftrightarrow L = B + l(C - B) = D + (1 - l)\vec{v} + l\vec{w}, l \in \langle 0; 1 \rangle$

$M \in CD \Leftrightarrow M = D + m\vec{w}, m \in \langle 0; 1 \rangle$

$N \in AD \Leftrightarrow N = D + n\vec{u}, n \in \langle 0; 1 \rangle$

$K - L = \frac{1}{2}\vec{u} + (l - \frac{1}{2})\vec{v} - l\vec{w}, N - M = n\vec{u} - m\vec{w},$

$K - N = (\frac{1}{2} - n)\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}, L - M = (1 - l)\vec{v} + (l - m)\vec{w}$

• Pomocí vektorů vyjádříme geometrické podmínky.

Podle zadání úlohy je bod $M$ pevně daný, tedy číslo $m$ známe. Body $L$ a $N$ hledáme. Tedy čísla $l$, $n$ jsou neznámá. Čtyřúhelník $KLMN$ může být lichoběžníkem dvěma způsoby:

(a) $KL \parallel MN \Leftrightarrow$ existuje $x \in \mathbf{R}^+$ tak, že $x(K - L) = N - M$, tj.

$$x(\frac{1}{2}\vec{u} + (l - \frac{1}{2})\vec{v} - l\vec{w}) = n\vec{u} - m\vec{w},$$

po úpravě

$$(\frac{1}{2}x - n)\vec{u} + x(l - \frac{1}{2})\vec{v} + (m - lx)\vec{w} = \vec{o}. \tag{4.3}$$

(b) $KN \parallel LM \Leftrightarrow$ existuje kladné $y$ tak, že $y(K-N) = L - M$, tj.

$$y((\frac{1}{2}-n)\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}) = (1-l)\vec{v}+(l-m)\vec{w},$$

po úpravě

$$y(\frac{1}{2}-n)\vec{u}+(\frac{1}{2}y+l-1)\vec{v}+(m-l)\vec{w} = \vec{o}. \tag{4.4}$$

• Z vektorových vztahů (4.3) a (4.4) získáme soustavy aritmetických rovnic.

$$\frac{1}{2}x - n = 0,\ x\big(l-\frac{1}{2}\big) = 0,\ m - lx = 0$$

$$y(\frac{1}{2}-n) = 0,\ \frac{1}{2}y + l - 1 = 0,\ m - l = 0 \tag{4.5}$$

• Soustavy vyřešíme a výsledky geometricky interpretujeme. Pak oba dílčí výsledky spojíme.

(a) Neznámá čísla $n, l$ jsou dána jednoznačně: $l = \frac{1}{2}$, $n = m$.

To značí, že $KL$ je střední příčka trojúhelníku $ABC$ a $MN \parallel AC$.

(b) Neznámá čísla $n, l$ jsou dána jednoznačně: $n = \frac{1}{2}$, $l = m$.

To značí, že $KN$ je střední příčka trojúhelníku $ABD$ a $LM \parallel BD$.

**Závěr:** Ke každému bodu $M$ ležícímu uvnitř hrany $CD$ existují dvě roviny $\gamma$, které procházejí přímkou $KM$ a protínají čtyřstěn $ABCD$ v lichoběžníku. Rovina $\gamma_1$ protíná čtyřstěn v lichoběžníku $KL_1MN_1$ kde $L_1 = B - \bullet - C$ a $N_1$ je bod, ve kterém rovnoběžka s přímkou $AC$ vedená bodem $M$ protne hranu $AD$. Rovina $\gamma_2$ protíná čtyřstěn v lichoběžníku $KL_2MN_2$, kde $N_2 = A - \bullet - D$ a $L_2$ je bod, ve kterém rovnoběžka s přímkou $BD$ vedená bodem $M$ protne hranu $BC$.

[!] <u>Poznámka:</u> Nedůvěřivý čtenář objevil naši lež nebo, řekněme shovívavěji, nedůslednost. Co když $M = C - \bullet - D$, tj. $m = \frac{1}{2}$? V takovém případě je $l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$, tedy $\gamma_1 = \gamma_2$ a hledaná řezová rovina existuje jediná. Navíc řezem je rovnoběžník a teď je věcí dohody, zda budeme rovnoběžník považovat za speciální případ lichoběžníku, nebo ne. V obou případech musíme závěr posledního řešení opravit.

## 4.7 Cvičení – popis objektů v $E^3$

**A.** Dokažte, že čtyři těžnice čtyřstěnu se protínají v jednom bodě, tj. těžišti, a zjistěte, v jakém poměru těžiště dělí těžnici.

Poznámka: Těžnicí čtyřstěnu zde rozumíme úsečku (nikoli přímku) $XT_X$, kde $X$ je jeden z vrcholů čtyřstěnu a $T_X$ je těžiště stěny protilehlé bodu $X$. Těžnici $XT_X$ budeme označovat $t_x$.

**B.** Situace jako v úloze 4.6**B.** Bod $M$ probíhá celý vnitřek úsečky $CD$. Zjistěte, jakou množinu vyplní pak body $\{Q_1\} = KM \cap L_1N_1$ a $\{Q_2\} = KM \cap L_2N_2$.

**C.** Uvnitř hran $AB$, $AD$ a $AE$ rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ jsou po řadě dány body $X$, $Y$, $Z$. Označme $x = (XBA)$, $y = (YDA)$, $z = (ZEA)$, $w = (WGA)$, kde $W$ je průsečík roviny $XYZ$ s přímkou $AG$. Najděte vztah mezi čísly $x$, $y$, $z$, $w$. Zobecněte pro případ, že body $X$, $Y$, $Z$ neleží uvnitř hran.

**D.** Čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož podstava je rovnoběžník, je proťat rovinou $\beta$ ve čtyřúhelníku $A'B'C'D'$. Definujme číslo $a$ vztahem $a(A-V) = A'-V$, podobně čísla $b$, $c$, $d$. Najděte vztah mezi čísly $a$, $b$, $c$, $d$.

## 4.8 Úlohy – skalární a vektorový součin a metrika v $E^3$

Skalární součin jsme poznali již v $E^2$. Teď jej přeneseme do prostoru $E^3$.

**A.** V $E^3$ je dán trojúhelník $ABC$ s úhlem $\alpha$ při vrcholu $A$. Označme $\vec{u} = B - A$, $\vec{v} = C - A$. Zjistěte číslo $\cos\alpha$, znáte-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ vzhledem k ortonormální bázi.

**Řešení:** Stejně jako v $E^2$ použijeme kosinovou větu:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha, \text{ tj.}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\alpha. \tag{4.6}$$

Klíčem k řešení je úprava výrazu na levé straně identity (4.6).

$$\begin{aligned}(\vec{u} - \vec{v})^2 =& (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 = \\ =& u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3).\end{aligned}$$

Výraz $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ nazveme skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

**Definice:** Nechť je dána ortonormální báze. *Skalární součin vektorů* $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je definován jako $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Jednoduchou úpravou teď vztah (4.6) upravíme na tvar

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}. \tag{4.7}$$

Získaný vzorec je stejný jako ten, který jsme odvodili v $E^2$. Tentokrát má ale každý z vektorů tři souřadnice.

Poznamenejme, že $|\vec{u}| \neq 0$ i $|\vec{v}| \neq 0$, neboť vektory $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$ nemohou být nulové.

**B.** Nechť je dána rovina $\alpha$: $ax + by + cz = d$. Dokažte, že vektor $\vec{u}(a; b; c)$ je kolmý k rovině $\alpha$.

**Řešení:** V úloze 4.2**A** jsme zjistili, že když $a \neq 0$ a položíme-li $M\left[\frac{d}{a}; 0; 0\right]$, $\vec{p}(-b; a; 0)$, $\vec{q}(-c; 0; a)$, tak $\langle M, \vec{p}, \vec{q}\rangle$ je repér roviny $\alpha$. Dokázat, že $\vec{u} \perp \alpha$, znamená ukázat, že vektor $\vec{u}$ je kolmý na každou přímku roviny $\alpha$, tedy na každý nenulový vektor $\vec{m} = x\vec{p} + y\vec{q}$, kde $x, y \in \mathbf{R}$. Počítejme:

$$\vec{u} \perp \vec{m} \Leftrightarrow \vec{m} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x\vec{p} + y\vec{q})\vec{u} = x\vec{p} \cdot \vec{u} + y\vec{q} \cdot \vec{u} = 0$$

Poslední vztah je pravdivý pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$, neboť

$$\vec{p} \cdot \vec{u} = (-b; a; 0) \cdot (a; b; c) = 0, \vec{q} \cdot \vec{u} = (-c; 0; a) \cdot (a; b; c) = 0.$$

Terminologie: Vektor $(a; b; c)$ se nazývá *normálový vektor roviny* $\alpha$.

Poznámka: V důkazu jsme použili identitu $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$. Tato a některé další podobné identity budou předmětem cvičení 4.9**A**.

**C.** Je dána rovina $\alpha$ rovnicí $ax + by + cz + d = 0$ a bod $E[e; f; g]$. Najděte bod $P$, který je patou kolmice spuštěné z bodu $E$ na rovinu $\alpha$. Zjistěte $|PE|$. Dokažte, že pro všechna $X \in \alpha$ platí $|XE| \geqq |PE|$, přičemž rovnost nastává, právě když $X = P$.

**Řešení:** Nechť $k$ je kolmice vedená bodem $E$ k rovině $\alpha$. Za směrový vektor přímky $k$ můžeme vzít normálový vektor roviny $\alpha$, tj. vektor $\vec{n}(a; b; c)$. Tedy $k = \{X = E + t\vec{n}, t \in \mathbf{R}\}$. Pro bod $P = E + t_0\vec{n} = [e + t_0a; f + t_0b; g + t_0c]$ platí $P \in \alpha$, tj.

$$(e + t_0a)a + (f + t_0b)b + (g + t_0c)c + d = 0.$$

Odtud

$$t_0 = -\frac{ae + bf + cg + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Tedy $|E\alpha| = |EP| = |t_0| \cdot |\vec{n}|$. Odtud vyplývá následující vztah.

**Tvrzení 4.5:** Pro vzdálenost bodu $E[e; f; g]$ od roviny $\alpha$: $ax + by + cz + d = 0$ platí

$$|E\alpha| = \frac{|ae + bf + cg + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Konečně máme dokázat, že pro každý bod $X \in \alpha$, $X \neq P$, platí $|XE| > |PE|$. Zde je daleko jednodušší použít úvahu než výpočet. Je-li totiž $X \in \alpha$, $X \neq P$, pak $XP$ je kolmá na $PE$, a tedy $XPE$ je pravoúhlý trojúhelník s přeponou $XE$ a odvěsnou $PE$. Proto $|XE| > |PE|$.

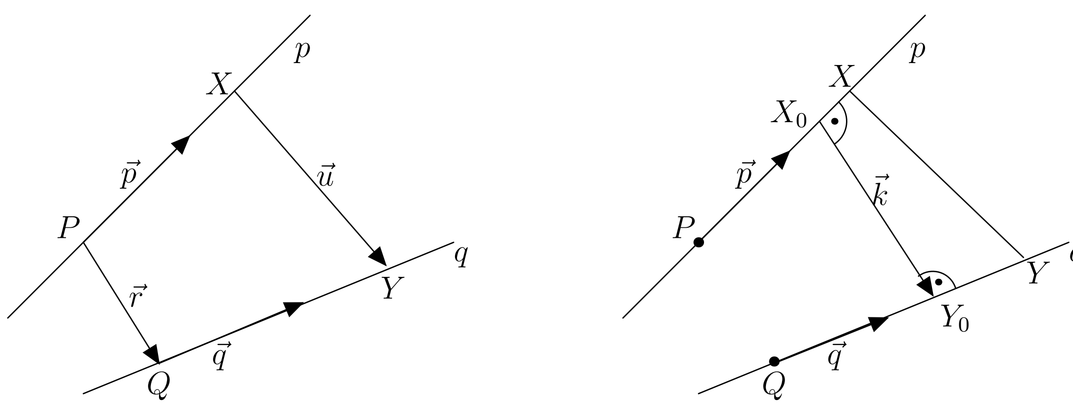
Terminologie: Bod $P$ nazýváme též *kolmý průmět* bodu $E$ do roviny $\alpha$ a velikost $|PE|$ *vzdálenost* bodu $E$ od roviny $\alpha$.

**Definice:** Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou dvě množiny z $E^2$, nebo $E^3$. Vzdáleností množin $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ nazýváme číslo $|\mathcal{U}\mathcal{V}| = \inf |X, Y|$, kde $X \in \mathcal{U}$, $Y \in \mathcal{V}$.

**D.** Jsou dány mimoběžky $p = \{X = P + x\vec{p}, x \in \mathbf{R}\}$, $q = \{Y = Q + y\vec{q}, y \in \mathbf{R}\}$.

(a) Dokažte, že existuje právě jeden bod $X_0 \in p$ a právě jeden bod $Y_0 \in q$ tak, že přímka $k = X_0Y_0$ je kolmá k přímce $p$ i k přímce $q$.

(b) Dokažte, že $|pq| = |X_0Y_0|$, tedy vzdálenost mimoběžek $p$, $q$ je $|X_0Y_0|$.




Obr. 4.4

**Řešení:** Označme $\vec{r} = Q - P$ a $\vec{u} = Y - X = \vec{r} + y\vec{q} - x\vec{p}$ (obr. 4.4a). Hledáme čísla $x, y \in \mathbf{R}$ tak, aby bylo $\vec{u} \perp \vec{p}$ i $\vec{u} \perp \vec{q}$. Platí

$$\vec{u} \perp \vec{p} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{p} = 0 \Leftrightarrow x\vec{p}^{\,2} - y\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{r} \cdot \vec{p},$$

$$\vec{u} \perp \vec{q} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{q} = 0 \Leftrightarrow x\vec{p} \cdot \vec{q} - y\vec{q}^{\,2} = \vec{r} \cdot \vec{q}.$$

K důkazu (a) stačí ukázat, že poslední soustava dvou lineárních rovnic pro neznámé $x$, $y$ má právě jedno řešení, tj. že determinant soustavy je nenulový. Předpokládejme opak, tedy ($\varphi$ je úhel vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$)

$$0 = \begin{vmatrix} \vec{p}^{\,2} & -\vec{p}\cdot\vec{q} \\ \vec{p}\cdot\vec{q} & -\vec{q}^{\,2} \end{vmatrix} = -[\vec{p}^{\,2}\cdot\vec{q}^{\,2} - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2] = -|\vec{p}|^2\cdot|\vec{q}|^2 + |\vec{p}|^2\cdot|\vec{q}|^2\cdot\cos^2\varphi.$$

Odtud $\cos^2\varphi = 1$, tj. $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \pi$. V obou případech to implikuje lineární závislost vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$, což odporuje zadání ($p$, $q$ jsou mimoběžné). Tvrzení (a) je tedy dokázáno.

Přistupme k důkazu tvrzení (b). Body $X_0 \in p$, $Y_0 \in q$, pro něž $X_0Y_0 \perp p$ a $X_0Y_0 \perp q$, máme již sestrojeny. Zvolme libovolně body $X \in p$, $Y \in q$ (obr. 4.4b) a dokažme, že $|XY| \geqq |X_0Y_0|$, přičemž rovnost nastává, právě když je $X = X_0$ a současně $Y = Y_0$. Označme $\vec{k} = Y_0 - X_0$, $X - X_0 = x\vec{p}$, $Y - Y_0 = y\vec{q}$. Pak

$$\begin{aligned} |XY|^2 =& |Y - X|^2 = |(Y - Y_0) + (Y_0 - X_0) + (X_0 - X)|^2 = |\vec{k} - x\vec{p} + y\vec{q}|^2 = \\ =& \vec{k}^{\,2} + 2\vec{k}(-x\vec{p} + y\vec{q}) + (-x\vec{p} + y\vec{q})^2 = \vec{k}^{\,2} + (-x\vec{p} + y\vec{q})^2, \end{aligned}$$

neboť $\vec{k}\cdot\vec{p} = \vec{k}\cdot\vec{q} = 0$. Číslo $(-x\vec{p}+y\vec{q})^2$ je nezáporné a nulové je, právě když je $-x\vec{p}+y\vec{q} = 0$, což nastává, právě když $x = y = 0$, neboť vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ jsou lineárně nezávislé (přímky $p$, $q$ jsou mimoběžné). Tedy $|XY| \geqq |X_0Y_0|$ a rovnost nastává, právě když $X = X_0$ a $Y = Y_0$.

**E.** Jsou dány lineárně nezávislé vektory $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Najděte vektor $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\vec{x} \neq \vec{o}$, kolmý k vektoru $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

**Řešení:** Z podmínek kolmosti máme:

$$\begin{aligned} \vec{x} \perp \vec{a} &\Rightarrow x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 0, \\ \vec{x} \perp \vec{b} &\Rightarrow x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 = 0. \end{aligned}$$

Získaná homogenní soustava má nekonečně mnoho řešení:

$$x_1 = t\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, x_2 = t\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, x_3 = t\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, t \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

Nejjednodušší z těchto řešení ($t = 1$) nazveme *vektorový součin* vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$:

$$\vec{x} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Situaci zobecníme a zápis upravíme pomocí báze $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. V celém dalším textu kapitoly vektory $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$, $\vec{k}(0;0;1)$ bereme v tomto pořadí. Determinant $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = 1$. Kdybychom např. přehodili vektory $\vec{i}$ a $\vec{j}$, pak by bylo $[\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}] = -1$ a většina výsledků následujících úloh by měnila znaménko.

**Definice:** Nechť jsou dány vektory $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

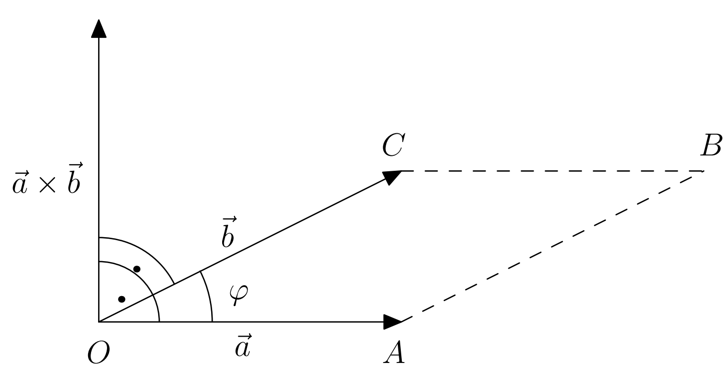
nazveme *vektorový součin* vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ (v uvedeném pořadí).

**F.** Dokažte následující tvrzení, která osvětlují geometrický význam vektorového součinu. Nechť jsou dány vektory $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Pak platí

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \Leftrightarrow$ vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ jsou lineárně závislé.

(b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \wedge (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, tj. je-li $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{o}$, pak je tento vektor kolmý na vektor $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

(c) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, kde $\varphi$ je úhel nenulových vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$. Pokud jsou $\vec{a}$ a $\vec{b}$ lineárně nezávislé, je velikost vektoru $|\vec{a} \times \vec{b}|$ rovna obsahu rovnoběžníku $OABC$ sestrojeného z vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (obr. 4.5).




Obr. 4.5

**Řešení:** Ekvivalence (a) vyplývá z definice součinu $\vec{a} \times \vec{b}$ a tvrzení, že

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} < 2 \Leftrightarrow \text{ vektory } \vec{a}, \vec{b} \text{ jsou lineárně závislé.}$$

Část (b) byla již dokázána v řešení předchozí úlohy.

Část (c) je výpočet

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})^2 = &\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \\
=&(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = \\
=&|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \overset{*}{=} |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(1-\cos^2\varphi) = |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2\varphi.
\end{aligned}
$$

Rovnost označená hvězdičkou v posledním řádku plyne ze vzorce (4.7).

Odtud $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\varphi|$, ale úhel vektorů leží v intervalu $\langle 0, 180°\rangle$, proto $|\sin\varphi| = \sin\varphi$, a tedy platí vztah uvedený v (c).

Obsah rovnoběžníku $OABC$ je roven dvojnásobku obsahu trojúhelníku $OAC$, tj.

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = |\vec{a}\times\vec{b}|.$$

**G.** Najděte vzdálenost dvou mimoběžných přímek $p$ a $q$, víte-li, že $p = \{[0;0;0]+t(1;\frac{1}{2};1), t\in\mathbf{R}\}$ a $q = \{[1;0;0]+s(0;1;1), s\in\mathbf{R}\}$.

**Řešení:** Vzdálenost mimoběžek najdeme jako vzdálenost bodů $P\in p$, $Q\in q$, kde body $P$, $Q$ leží na nejkratší příčce $r$ mimoběžek $p$, $q$. Platí $r\perp p$ a $r\perp q$, tedy směrový vektor $\vec{r}$ přímky $r$ je vektorovým součinem směrových vektorů $\vec{p}$ přímky $p$ a $\vec{q}$ přímky $q$. Tedy

$$\vec{r} = \vec{q}\times\vec{p} = \left(\frac{1}{2};1;-1\right).$$

Hledaný bod $P\in p$ vyjádříme jako $P[t_0;\frac{1}{2}t_0;t_0]$. Nejkratší příčku mimoběžek $r$ pak můžeme vyjádřit jako $r = \{P+k\cdot\vec{r}, k\in\mathbf{R}\}$.

Přímka $r$ protíná přímku $q$ v bodě $Q$, který popíšeme takto: $Q = P+k_0\cdot\vec{r} = [1;0;0]+s_0\cdot\vec{q}$. V souřadnicích dostaneme $[t_0;\frac{1}{2}t_0;t_0]+k_0(\frac{1}{2};1;-1) = [1;0;0]+s_0(0;1;1)$, odkud $t_0 = \frac{8}{9}$, $k_0 = \frac{2}{9}$, $s_0 = \frac{6}{9}$. Tedy $P\left[\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right]$ a $Q\left[1;\frac{6}{9};\frac{6}{9}\right]$.

Vzdálenost mimoběžek tedy je $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{1}{3}$.

## 4.9 Cvičení – metrika

**A.** Dokažte, že pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ a libovolná reálná čísla $x$, $y$, $z$ platí identity:

(a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (b) $(x\vec{a}\pm y\vec{b})\vec{c} = x\vec{a}\vec{c}\pm y\vec{b}\vec{c}$

(c) $(x\vec{a})\cdot\vec{b} = x(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (d) $(\vec{a}\pm\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\pm 2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$

(e) $(\vec{a}\pm\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c}\pm\vec{b}\vec{c}$ (f) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \det[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

**B.** Dokažte, že pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ platí: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{d} & \vec{b}\vec{d} \end{vmatrix}$.

**C.** Zobecněte tvrzení 2.1 pro $E^3$.

**D.** Je dán bod $A[0; 1; 0]$ a přímka $p$ jako průsečnice rovin $\beta$: $x-3y+z-3=0$, $\gamma$: $-4y+z+1=0$. Najděte body $B, C \in p$ tak, aby trojúhelník $ABC$ byl rovnostranný.

**E.** Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně $d$. Zjistěte vzdálenost mimoběžek (a) $AB$, $FG$, (b) $BG$, $ED$, (c) $BE$, $CF$, (d) $BH$, $CF$.

**F.** Je dán čtyřstěn $ABCD$. Určete vzdálenost každých jeho dvou mimoběžných hran.

(a) $A[0; 0; 0], B[1; 1; 0], C[1; 0; 2], D[0; 1; 2]$. (b) $A[-1; 1; -1], B[1; 1; -1], C[1; 1; 1], D[1; -1; 1]$.

**G.** Výšky v pravidelném čtyřstěnu (tetraedru) jsou totožné s těžnicemi, a tedy se protínají v jednom bodě – těžišti či ortocentru. Takový čtyřstěn se nazývá *ortocentrický*. Jsou dva čtyřstěny z předchozí úlohy rovněž ortocentrické? Jinými slovy určete vzájemnou polohu všech výšek daného čtyřstěnu.

**H.** Najděte střed kulové plochy opsané každého čtyřstěnu ze cvičení **F**.

**I.** Objem pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$ je 1 029. Známe polohu bodů $A[8; 10; 9]$, $C[10; 9; -8]$, $E[15; -4; 2]$. Najděte souřadnice dalších čtyř vrcholů.

**J.** Jsou dány dva vrcholy krychle $ABCDEFGH$, $A[-1; 0; 0]$ a $B[-5; 4; 7]$. Víme, že bod $M[3; 0; 1]$ leží v rovině stěny $ABCD$. Dále víme, že první souřadnice bodu $D$ i první souřadnice bodu $E$ je nezáporná. Najděte souřadnice zbylých vrcholů krychle.

**K.** Jsou dány roviny $\alpha$: $x-4y-z+1=0$, $\beta$: $3x+3y-2=0$ protínající se v přímce $p$ a body $R[2; 0; -1]$, $S[0; -2; 1]$. Najděte rovnice rovin $\rho = Rp$ a $\sigma = Sp$ a dokažte, že obrazem roviny $\alpha$ v rovinové souměrnosti $s_\rho$ i $s_\sigma$ je rovina $\beta$ (tedy $|\sphericalangle\alpha\rho| = |\sphericalangle\beta\rho|$ a $|\sphericalangle\alpha\sigma| = |\sphericalangle\beta\sigma|$).

**L.** Nechť body $E[0; 0; 0]$ a $F[-8; 8; 14]$ jsou dipodální vrcholy pravidelného osmistěnu (oktaedru) $ABCDEF$, jehož vrchol $A$ leží v rovině $\rho$: $x+y-z+2=0$ a má všechny souřadnice celočíselné. Najděte vrcholy $A$, $B$, $C$, $D$.

Poznámka: *Dipodální vrcholy* jsou ty vrcholy v pravidelném konvexním tělese, které spojují krajní body největší tělesové úhlopříčky.

**M.** Nechť pro pravidelný čtyřstěn (tetraedr) $ABCD$ platí: $A[-4; 4; 3]$, $BCD = \rho$, $B \in \sigma$, kde $\rho$: $-11x+y+5z+35=0$, $\sigma$: $9x-4y+z-49=0$. Najděte souřadnice bodů $B$, $C$, $D$.

# Kapitola 5

# Exkurze do čtvrtého rozměru

Do čtyřrozměrného prostoru $E^4$ nelze nahlédnout. Pronikáme do něj po „dimenzionálním žebříku“: bod $\rightarrow$ přímka $\rightarrow$ rovina $\rightarrow$ trojrozměrný prostor $\rightarrow$ čtyřrozměrný prostor. Později se můžeme odvážit vystoupit i výše, k prostorům pětirozměrnému, šestirozměrnému, ...

Při všech úvahách této kapitoly je výhodné převést situaci do prostorů nižší dimenze, tj. $E^3$, $E^2$, případně $E^1$.

## 5.1 Repér v $E^4$

Pětici objektů $\langle A, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4} \rangle$, kde $A$ je bod a $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$, $\vec{u_4}$ je lineárně nezávislá čtveřice vektorů prostoru $E^4$, nazýváme *repér prostoru* $E^4$.

Každému repéru prostoru $E^4$ je přiřazeno bijektivní zobrazení

$$\sigma : \mathbf{R}^4 \to E^4, [x_1; x_2; x_3; x_4] \mapsto M = A + x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2} + x_3\vec{u_3} + x_4\vec{u_4},$$

nazývané *souřadnicová soustava prostoru* $E^4$ *daná repérem* $\langle A, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4} \rangle$.

Číslo $x_i$ nazýváme *i-tá souřadnice bodu $X$ (v daném repéru)* a vztah $\sigma[x_1; x_2; x_3; x_4] = X$ píšeme $X = [x_1; x_2; x_3; x_4]$, nebo $X[x_1; x_2; x_3; x_4]$.

Není-li výslovně uvedeno, k jakému repéru se souřadnicová soustava vztahuje, předpokládáme, že se vztahuje k repéru $\left\langle O, \vec{i_1}, \vec{i_2}, \vec{i_3}, \vec{i_4} \right\rangle$, kde $O[0; 0; 0; 0]$ je počátek souřadnicové soustavy a $\vec{i_1} = (1; 0; 0; 0)$, $\vec{i_2} = (0; 1; 0; 0)$, $\vec{i_3} = (0; 0; 1; 0)$, $\vec{i_4} = (0; 0; 0; 1)$ jsou *jednotkové vektory ortonormální báze čtyřrozměrného prostoru* $E^4$.

## 5.2 Příklad – „dimenzionální žebřík“

Jaké vlastní podprostory (tedy nenulové podprostory, které se nerovnají prostoru) existují ve čtyřrozměrném euklidovském prostoru $E^4$? Otázku zodpovíme využitím již známých poznatků.

- 0-rozměrný euklidovský prostor $E^0$, tj. bod, nemá vlastní podprostory,
- 1-rozměrný prostor $E^1$, tj. přímka, má jeden druh vlastních podprostorů – body $E^0$,
- 2-rozměrný prostor $E^2$, tj. rovina, má dva druhy vlastních podprostorů – body $E^0$ a přímky $E^1$,
- 3-rozměrný prostor $E^3$, tj. „obyčejný prostor“, má tři druhy vlastních podprostorů – body $E^0$, přímky $E^1$ a roviny $E^2$,
- 4-rozměrný prostor $E^4$ má čtyři druhy vlastních podprostorů – body $E^0$, přímky $E^1$, roviny $E^2$ a *nadroviny* $E^3$.

**Definice:** Nadrovinou v prostoru $E^4$ je podprostor prostoru $E^4$ dimenze 3. Obecně nadrovinou prostoru $E^n$ je podprostor prostoru $E^n$ dimenze $n-1$.

Metodou „dimenzionálního žebříku“ přirozeným způsobem zavedeme nástroj měření, totiž pojem skalární součin dvou vektorů.

| **prostor** | **vektor** | **skalární součin** |
|---|---|---|
| $E^2$ | $\vec{u}=(u_1;u_2)$, $\vec{v}=(v_1;v_2)$ | $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2$ |
| $E^3$ | $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$, $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$ | $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$ |
| $E^4$ | $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3;u_4)$, $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3;v_4)$ | $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+u_4v_4$ |

Protože symbol $\vec{u}\cdot\vec{v}$ neobsahuje souřadnice, umožňuje zavést měření jednotně pro všechny tři prostory $E^2$, $E^3$, $E^4$.

Připomeňme tři tvrzení známá z $E^2$ a $E^3$, která platí i v $E^4$.

Velikost vektoru $\vec{u}$ v $E^2$, resp. $E^3$, resp. $E^4$, je číslo $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

Vzdálenost bodů $A$, $B$ tedy je $|AB|=\sqrt{(A-B)(A-B)}$.

Odchylka $\varphi\in\langle 0,180^\circ\rangle$ nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je dána vztahem $\cos\varphi=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

V následujícím příkladě popíšeme pojem nadroviny v $E^4$ prostředky analytické geometrie.

## 5.3 Příklad – nadrovina

Užíváme dva způsoby, jak v jazyce analytické geometrie popsat a definovat nadrovinu v $E^4$: (A) rovnicí nebo (B) repérem. Podobnou situaci v prostoru $E^3$ jsme diskutovali v úloze 4.2**A**.

**(A)** Pracujeme v souřadnicové soustavě dané repérem $\langle A, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4} \rangle$. Nechť je dána pětice $(a_1, a_2, a_3, a_4, d) \in \mathbf{R}^5$ tak, že aspoň jedno z čísel $a_1, \dots, a_4$ je nenulové. Pak množina $\mathcal{A} = \{X[x_1; x_2; x_3; x_4]; x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = d\}$ je nadrovinou v $E^4$.

**(B)** Nechť je v $E^4$ dán bod $M$ a tři lineárně nezávislé vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$. Pak množina $\mathcal{B} = \{M + x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r}; (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}$ je nadrovinou v $E^4$.

Dokažte, že pojem „nadrovina v $E^4$“ ve smyslu (A) je totožný s tímto pojmem ve smyslu (B).

Dokažme, že množinu $\mathcal{A}$ lze popsat repérem a množinu $\mathcal{B}$ lze popsat rovnicí.

Nechť je dána množina $\mathcal{A}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_1$ je nenulové. Hledané objekty $M, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$, které budou tvořit repér zkoumané nadroviny, můžeme pak definovat například takto: $M = [\frac{d}{a_1}; 0; 0; 0]$, vektor $(a_1; a_2; a_3; a_4)$ je kolmý na nadrovinu a hledáme tři lineárně nezávislé vektory kolmé na tento vektor, např. $\vec{p} = (-a_2; a_1; 0; 0)$, $\vec{q} = (-a_3; 0; a_1; 0)$, $\vec{r} = (-a_4; 0; 0; a_1)$.

Z těchto předpokladů pomocí inkluzí (i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, (ii) $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ dokážeme, že $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(i) Nechť $X[x_1; x_2; x_3; x_4] \in \mathcal{A}$, tj. $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = d$. Chceme ukázat, že existují čísla $x$, $y$, $z \in \mathbf{R}$ tak, že $X = M + x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r}$. Čísla $x$, $y$, $z$ definujeme vztahy

$$x = \frac{x_2}{a_1}, y = \frac{x_3}{a_1}, z = \frac{x_4}{a_1}.$$

Po dosazení dostaneme identitu $\sum x_ia_i = d$. Tím je dokázáno $X \in \mathcal{B}$, tj. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

(ii) Nechť $X = M + x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r} \in \mathcal{B}$. Chceme ukázat, že tento bod

$$\left[\frac{d}{a_1}; 0; 0; 0\right] + x(-a_2; a_1; 0; 0) + y(-a_3; 0; a_1; 0) + z(-a_4; 0; 0; a_1)$$

patří do $\mathcal{A}$, tj. že

$$a_1(\frac{d}{a_1} - xa_2 - ya_3 - za_4) + a_2xa_1 + a_3ya_1 + a_4za_1 = d$$

platí pro libovolná $x$, $y$, $z \in \mathbf{R}$. To lze lehce nahlédnout, tj. $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Dokázali jsme, že $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

## 5.4 Úloha – ortogonální doplněk vektorů v $E^4$

V $E^4$ je jsou dány tři lineárně nezávislé vektory $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3; a_4)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3; b_4)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3; c_4)$. Najděte vektor $\vec{n}$, který je kolmý na nadrovinu $\Gamma$ danou bodem $O[0; 0; 0; 0]$ a vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Poznámka: Termín „vektorový součin“ bývá běžně užíván pouze pro součin dvou vektorů ve $V^3$. V prostorech $V^n$ pro $n \geqq 4$ mluvíme o *ortogonálním doplňku vektorů*.

**Řešení:** Hledaný vektor $\vec{n}$ kolmý na nadrovinu $\Gamma$ je kolmý na vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Najdeme jej tedy jako nenulové řešení homogenní soustavy lineárních rovnic

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = 0, \vec{x} \cdot \vec{b} = 0, \vec{x} \cdot \vec{c} = 0. \tag{5.1}$$

Řešení analogické úlohy uvedené v 4.8**E** by zde bylo značně kalkulativně náročné. Pomůžeme si tedy následujícím determinantem:

$$\det[\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Když determinant rozvineme podle prvního řádku, dostaneme výraz

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + x_4 n_4,$$

kde

$$n_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, n_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, n_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}, n_4 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tvrdíme, že popsaný vektor $\vec{n}$ je kolmý k nadrovině $\Gamma$. Skutečně, $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, neboť $\vec{a} \cdot \vec{n} = \det[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ a poslední determinant má dva řádky stejné, a proto je nulový. Stejně dokážeme $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{c} \cdot \vec{n} = 0$.

Vektor $\vec{n}$ nazveme *ortogonálním doplňkem* vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ a označíme jej $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Podobně jako pro vektorový součin v $E^3$ v odstavci 4.8**E** vyslovíme definici pro ortogonální doplněk vektorů v $E^4$. Opět budeme brát vektory $\vec{i_1}(1;0;0;0)$, $\vec{i_2}(0;1;0;0)$, $\vec{i_3}(0;0;1;0)$, $\vec{i_4}(0;0;0;1)$ v tomto pořadí. Determinant $[\vec{i_1}, \vec{i_2}, \vec{i_3}, \vec{i_4}] = 1$.

**Definice:** Nechť jsou dány vektory $\vec{a}(a_1;a_2;a_3;a_4)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3;b_4)$, $\vec{c}(c_1;c_2;c_3;c_4)$. Vektor

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{i_2} & \vec{i_3} & \vec{i_4} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \text{ kde } \vec{i_1}(1;0;0;0), \vec{i_2}(0;1;0;0), \vec{i_3}(0;0;1;0), \vec{i_4}(0;0;0;1),$$

nazveme *ortogonální doplněk* vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (v uvedeném pořadí).

## 5.5 Cvičení – ortogonální doplněk vektorů v $E^4$

**A.** V $E^4$ jsou dány vektory $\vec{a} = (1; 2; -2; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2; -2)$, $\vec{c} = (3; 4; -1; -2)$. Dokažte, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Označme dále $V^3 = \mathsf{Obal}(\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\})$, $V^2 = \mathsf{Obal}(\{\vec{a}, \vec{b}\})$. Najděte vektor $\vec{n}$ kolmý na $V^2$ a ležící ve $V^3$.

**B.** Nechť jsou ve $V^4$ dány vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Označme $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$. Dokažte tvrzení:

(a) $\vec{n} = \vec{o} \Leftrightarrow$ vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně závislé.

(b) $\det[\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{n}^2$.

## 5.6 Úloha – vzájemné polohy útvarů v $E^4$

V $E^4$ jsou dány přímky $p = \{P + x\vec{p}; x \in \mathbf{R}\}$, $q = \{Q + y\vec{q}; y \in \mathbf{R}\}$ a rovina
$\alpha = \{K + u\vec{u} + v\vec{v}; u, v \in \mathbf{R}\}$. Klasifikujte
(a) vzájemnou polohu přímek $p$, $q$,
(b) vzájemnou polohu přímky $p$ a roviny $\alpha$.
Vyslovte příslušná kritéria v jazyce analytické geometrie.

**Řešení:** (a) Klasifikace je přesně stejná jako klasifikace v $E^3$ (viz úloha 4.2**B**). Obě přímky totiž leží v lineárním prostoru $\{P + x\vec{p} + y\vec{q} + z(Q - P); (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}$, jehož dimenze je nejvýše tři.
Podíváme-li se na tuto situaci pomocí „dimenzionálního žebříku", jedná se o podobný případ jako klasifikace vzájemné polohy bodu a přímky v $E^3$. V $E^2$ existují dvě možnosti: Buď bod na přímce leží, nebo neleží. V $E^3$ nepřibyde žádná další možnost, protože vždy existuje rovina, která bod a přímku obsahuje, a tedy vzájemná poloha bodu a přímky v $E^3$ není o nic bohatší než v $E^2$.

(b) Jako v úloze 4.2**B** budeme uvažovat prostory $\mathcal{C} = \{K + x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{p}; x, y, z \in \mathbf{R}\}$ a $\mathcal{D} = \{K + x\vec{u} + y\vec{v} + z(P - K); x, y, z \in \mathbf{R}\}$ .
Dále označme $\mathcal{F} = \{K + x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{p} + t(P - K); x, y, z, t \in \mathbf{R}\}$. Jestliže je $\dim \mathcal{F} = 4$, jsou $p$, $\alpha$ mimoběžné. Jestliže je $\dim \mathcal{F} < 4$, nastávají tři možnosti popsané v úloze 4.2**B.**

## 5.7 Úlohy – simplex a nadkrychle

**A.** Objekt v $E^4$, který je zobecněním pojmů úsečka (v $E^1$), trojúhelník (v $E^2$) a čtyřstěn (v $E^3$), se nazývá *simplex*. Definujte tento objekt prostředky analytické geometrie.

**Řešení:** Pojem úsečka, trojúhelník, čtyřstěn a simplex můžeme definovat několika způsoby. Jeden z nich uvedeme zde, další jsou diskutovány ve cvičení 5.8**A**.

<u>Definice A1:</u> Nechť je v $E^1$ dán repér $\langle A, \vec{u} \rangle$. Označme $B = A + \vec{u}$. Množinu $\{A + x\vec{u}, x \in \langle 0, 1 \rangle\}$ nazveme *úsečka* $AB$.

<u>Definice A2:</u> Nechť je v $E^2$ dán repér $\langle A, \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Označme $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$. Množinu $\{A + x\vec{u} + y\vec{v}; x, y \in \mathbf{R}_0^+, x + y \leqq 1\}$ nazveme *trojúhelník* $ABC$.

<u>Definice A3:</u> Nechť je v $E^3$ dán repér $\langle A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Označme $B = A+\vec{u}$, $C = A+\vec{v}$, $D = A+\vec{w}$. Množinu $\{A + x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}; x, y, z \in \mathbf{R}_0^+, x + y + z \leqq 1\}$ nazveme *čtyřstěn* $ABCD$.

**Definice A4:** Nechť je v $E^4$ dán repér $\langle A_0, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4} \rangle$. Označme $A_1 = A_0+\vec{u_1}$, $A_2 = A_0+\vec{u_2}$, $A_3 = A_0 + \vec{u_3}$, $A_4 = A_0 + \vec{u_4}$. Množinu

$$\{A_0 + x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2} + x_3\vec{u_3} + x_4\vec{u_4}; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}_0^+, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 1\}$$

nazveme *simplex* $A_0A_1A_2A_3A_4$ prostoru $E^4$, nebo stručně 4-simplex, a označíme $\mathbb{S}^4$.

Slovo „simplex“ je, jak již bylo řečeno, zobecněním slov „úsečka“, „trojúhelník“ a „čtyřstěn“. Někdy je rozumné místo „úsečka“ užít termín „jednodimenzionální simplex“, nebo 1-simplex, místo „trojúhelník“ užívat „dvojdimenzionální simplex“, nebo 2-simplex, místo „čtyřstěn“ užívat „trojdimenzionální simplex“, nebo 3-simplex. Zde však slovem simplex budeme rozumět pouze čtyřdimenzionální simplex. Dodejme, že v $n$-rozměrném prostoru mluvíme o $n$-simplexu.

*Nadstěnou* nebo *trojdimenzionální stěnou* simplexu $\mathbb{S}^4 = A_0A_1A_2A_3A_4$ nazýváme každý z pěti čtyřstěnů $\mathbb{S}_0^3 = A_1A_2A_3A_4$, $\mathbb{S}_1^3 = A_0A_2A_3A_4$, $\mathbb{S}_2^3 = A_0A_1A_3A_4$, $\mathbb{S}_3^3 = A_0A_1A_2A_4$ a $\mathbb{S}_4^4 = A_0A_1A_2A_3$.

Nadstěna (tj. čtyřstěn) $\mathbb{S}_i^3$ je průnikem simplexu $\mathbb{S}^4$ a nadroviny $\Gamma_i : x_i = 0$, pro $i = 1, 2, 3, 4$. Nadstěna $\mathbb{S}_{\nvdash}{}^3$ je průnikem simplexu $\mathbb{S}^4$ a nadroviny $\Gamma_0 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

**B.** Je dán simplex $\mathbb{S}^4$ v prostoru $E^4$. Zjistěte, kolik má vrcholů, hran, stěn a nadstěn a jak vypadají.

**Řešení:** Simplex má pět vrcholů $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, deset hran $A_0A_1$,. . . , $A_3A_4$, deset stěn $A_0A_1A_2, \dots, A_2A_3A_4$ a pět nadstěn $A_0A_1A_2A_3$,. . . , $A_1A_2A_3A_4$.

Stěnou je trojúhelník a nadstěnou čtyřstěn.

Uvedené počty jsou kombinační čísla $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$ a $\binom{5}{4}$.

Způsob řešení úlohy pomocí „dimenzionálního žebříku“ a jeho vztah k Pascalovu trojúhelníku je naznačen v tabulce 5.2a a b.

| dimenze | počet | | | |
|---|---|---|---|---|
| simplexu | vrcholů | hran | stěn | nadstěn |
| 1 | 2 | | | |
| 2 | 3 | 3 | | |
| 3 | 4 | 6 | 4 | |
| 4 | 5 | 10 | 10 | 5 |

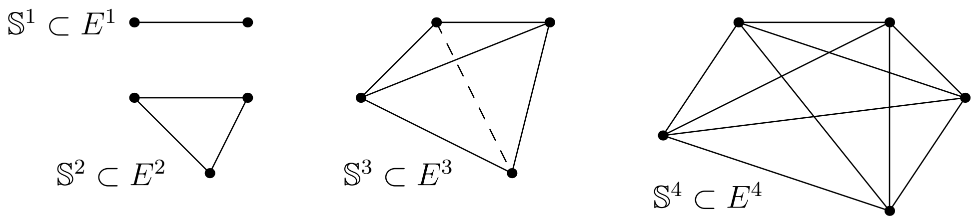
(a)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

(b)

Tab. 5.2

Objekty čtyřrozměrného prostoru lze jen obtížně graficky znázornit, názorné jsou snad jen trojrozměrné modely. Na obrázku 5.1 je náš pokus o znázornění $n$-simplexu pro $n = 1, 2, 3, 4$.




Obr. 5.1

**C.** Zobecněte větu o těžišti v trojúhelníku (viz úloha 3.8**B**) a těžišti ve čtyřstěnu (viz úloha 4.7**A**) na větu o těžišti simplexu v $E^4$. Těžnice simplexu jsou definovány jako spojnice těžiště nadstěny s protilehlým vrcholem (srovnej s definicí těžnice v čtyřstěnu).

**Řešení:** Označme simplex $A_0A_1A_2A_3A_4$ a $T_0$ těžiště nadstěny $A_1A_2A_3A_4$, $T_1$ těžiště nadstěny $A_0A_2A_3A_4$, atd. Zvolme repér $\langle A_0, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\rangle$, kde $\vec{u_i} = A_i - A_0$. Nejdříve vyjádříme body $T_i$ v souřadnicové soustavě dané zvoleným repérem. To lze udělat pomocí výsledku úlohy 4.7**A** pro těžiště čtyřstěnu v $E^3$. Tedy

$$T_0 = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], T_1 = \left[0; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], T_2 = \left[\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], T_3 = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}\right], T_4 = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right].$$

Těžnice $t_i$, kde $i = 0, 1, 2, 3, 4$, tj. úsečky $A_iT_i$, jsou popsány vztahy:

$t_0 = \{A_0 + r(T_0 - A_0); r \in \langle 0, 1\rangle\} = \{\left(\frac{r}{4}; \frac{r}{4}; \frac{r}{4}; \frac{r}{4}\right); r \in \langle 0, 1\rangle\}$,

$t_1 = \{A_1 + p(T_1 - A_1); p \in \langle 0, 1\rangle\} = \{\left(1 - p; \frac{p}{4}; \frac{p}{4}; \frac{p}{4}\right); p \in \langle 0, 1\rangle\}$,

...

$t_4 = \{A_4 + q(T_4 - A_4); q \in \langle 0, 1\rangle\} = \{\left(\frac{q}{4}; \frac{q}{4}; \frac{q}{4}; 1 - q\right); q \in \langle 0, 1\rangle\}$.

Najdeme průsečík $T$ např. těžnic $t_1$ a $t_4$. Dostaneme $1 - p = \frac{q}{4}$. Tedy $p = q = \frac{4}{5}$. Pak $T = \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right]$ je těžiště, které leží i na každé z těžnic $t_0$, $t_2$, $t_3$, jak lehce ověříme dosazením do jejich vyjádření. Těžiště tedy dělí těžnice simplexu v $E^4$ v poměru $1 : 4$.

**D.** (a) Pomocí „dimenzionálního žebříku“ zobecněte pojem čtverec v $E^2$, krychle v $E^3$ na nadkrychli v $E^4$. Uvažujte čtverec s vrcholy $[1; 1]$, $[1; -1]$, $[-1; -1]$, $[-1; 1]$ v $E^2$ a krychli s vrcholy $[1; 1; 1]$, $[1; 1; -1]$, $[1; -1; 1]$, $[-1; 1; 1]$, $[-1; -1; 1]$, $[-1; 1; -1]$, $[1; -1; -1]$, $[-1; -1; -1]$. Zjistěte, kolik má nadkrychle vrcholů a najděte jejich souřadnice.

(b) Zjistěte, jakých hodnot může nabývat vzdálenost dvou vrcholů nadkrychle.

(c) Zjistěte, jakou rovnicí je popsána nadrovina, jejíž průnik s nadkrychlí je nadstěna (tedy krychle).

**Řešení:** (a) Podívejme se na souřadnice vrcholů čtverce a krychle z hlediska kombinatoriky. Vidíme, že vrcholy čtverce jsou všechny dvojice $[a; b]$, kde $a, b \in \{-1, 1\}$. Těch je $2^2$, tedy 4. Podobně vrcholy krychle jsou všechny trojice $[a; b; c]$, kde $a, b, c \in \{-1, 1\}$. Těch je $2^3 = 8$. Metoda „dimenzionálního žebříku“ nás tedy vede k poznání, že vrcholy nadkrychle jsou všechny čtveřice $[a; b; c; d]$, kde $a, b, c, d \in \{-1, 1\}$. Těch je $2^4 = 16$.

(b) Nechť $U[a; b; c; d]$ a $V[e; f; g; h]$ jsou dva různé vrcholy popsané nadkrychle, tedy $a, \dots, h \in \{-1, 1\}$. Pak souřadnice vektoru $U - V = (a - e; b - f; c - g; d - h)$ jsou čísla 0, nebo 2, nebo $-2$. Jestliže tři z těchto čísel jsou nuly a jedno je 2 nebo $-2$, je $|U - V| = 2$. Tedy $|UV| = 2$. Když právě dvě ze souřadnic vektoru $U - V$ jsou nuly, je $|U - V| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$. Tedy $|UV| = 2\sqrt{2}$. Když právě jedna ze souřadnic vektoru $U - V$ je nula, je $|UV| = 2\sqrt{3}$ a konečně, když žádná souřadnice vektoru $U - V$ není nula, je $|UV| = 4$.

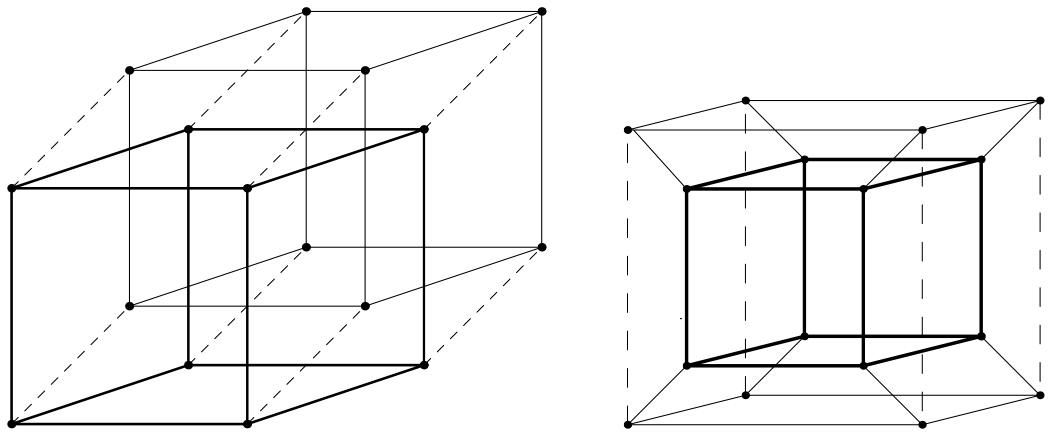
**Závěr:** Dva vrcholy popsané nadkrychle mají vzdálenost 2 (tvoří hranu), nebo $2\sqrt{2}$ (tvoří úhlopříčku stěny), nebo $2\sqrt{3}$ (tvoří úhlopříčku nadstěny), nebo 4 (tvoří nadtělesovou úhlopříčku).

(c) Rovnice přímky, která protíná čtverec popsaný v (a) ve straně, má tvar $x_i = \pm 1, i = 1, 2$; jedná se o čtyři rovnice $x_1 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_2 = -1$.

Rovnice roviny, která protíná krychli popsanou v (a) ve stěně (čtverci), má tvar $x_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$; jedná se o šest rovnic $x_1 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_3 = -1$.

Rovnice nadroviny, která protíná nadkrychli popsanou v řešení (a) v nadstěně (krychli), má tvar $x_i = \pm 1, i = 1, 2, 3, 4$; jedná se o osm rovnic $x_1 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_4 = -1$.

Podobně jako v případě simplexu se i u nadkrychle můžeme pokusit o její zobrazení (obr. 5.2).



Obr. 5.2

**E.** Zjistěte, kolik má nadkrychle v $E^4$ úhlopříček délky (a) $2\sqrt{2}$, (b) $2\sqrt{3}$, (c) $4$.

**Řešení:** Vrcholy $A[1;1;1;1]$ a $X[e_1;e_2;e_3;e_4]$ nadkrychle určují úhlopříčku délky $2\sqrt{2}$, právě když dvě z čísel $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ jsou rovny $1$ a dvě $-1$. Takových bodů $X$ je $\binom{4}{2} = 6$. Tedy úhlopříček $AX$ délky $2\sqrt{2}$ je 6 a všech úhlopříček $XY$ délky $2\sqrt{2}$ je $(6 \cdot 16) : 2 = 48$ (dělíme dvěma, neboť každá úsečka $XY$ byla počítána dvakrát).

Podobně úhlopříčka $AX$ má délku $2\sqrt{3}$, právě když tři z čísel $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ jsou rovny $-1$ a jedno je rovno $1$. Tyto případy jsou čtyři. Proto úhlopříček nadkrychle s délkou $2\sqrt{3}$ je $(4 \cdot 16) : 2 = 32$.

Konečně úhlopříčka $AX$ má délku $4$, právě když $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = -1$. Proto úhlopříček nadkrychle s délkou $4$ je $16 : 2 = 8$.

**F.** Dokažte, že pro libovolný bod $M$ a libovolnou skupinu $\mathcal{V}$ vektorů z $E^4$ platí: Obal$(M, \mathcal{V})$ je prostor $E^i$, kde $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

**Řešení:** Z množiny $\mathcal{V}$ vybíráme maximální skupinu lineárně nezávislých vektorů. Jestliže $\mathcal{V}$ obsahuje pouze nulový vektor, pak Obal$(M, \mathcal{V}) = M$ je prostor $E^0$. V opačném případě $\mathcal{V}$ obsahuje aspoň jeden nenulový vektor $\vec{a}$.

Jestliže mezi vektory $\mathcal{V}$ neexistuje vektor lineárně nezávislý na $\vec{a}$, tj. jestliže všechny vektory z $\mathcal{V}$ jsou násobkem vektoru $\vec{a}$, pak Obal$(M, \mathcal{V}) =$ Obal$(M, \vec{a})$ je přímka $E^1$. V opačném případě $\mathcal{V}$ obsahuje aspoň vektor $\vec{b}$ tak, že dvojice vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ je lineárně nezávislá.

Jestliže teď každý z vektorů $\mathcal{V}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, pak Obal$(M, \mathcal{V}) =$ $=$ Obal$(M, \vec{a}, \vec{b})$ je rovina $E^2$. V opačném případě $\mathcal{V}$ obsahuje aspoň vektor $\vec{c}$ tak, že trojice vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je lineárně nezávislá.

Jestliže teď každý z vektorů $\mathcal{V}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, pak Obal$(M, \mathcal{V}) =$ $=$ Obal$(M, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je nadrovina $E^3$. V opačném případě $\mathcal{V}$ obsahuje aspoň vektor $\vec{d}$ tak, že čtveřice vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ je lineárně nezávislá, a tudíž tvoří bázi. Tedy $\left\langle M, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \right\rangle$ je repér prostoru $E^4$ a obalem repéru je celý prostor $E^4$.

## 5.8 Cvičení – popis objektů v $E^4$

**A.** V duchu úlohy 5.7**A** vyslovíme následující definice:

B1: Nechť jsou dány v $E^1$ dva různé body $A$, $B$. Průnik polopřímek $AB$ a $BA$ nazveme *úsečka* $AB$.

C2: Nechť jsou dány v $E^2$ tři nekolineární body $A$, $B$, $C$. Konvexní obal množiny $\{A, B, C\}$, tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje všechny tři body $A$, $B$, $C$, nazveme *trojúhelník* $ABC$.

Vyslovte definici B2–B4, C1, C3, C4.

**B.** V prostoru $E^4$ klasifikujte vzájemnou polohu dvou rovin $\alpha = \{A + x\vec{p} + y\vec{q}; x, y \in \mathbf{R}\}$ a $\beta = \{B + u\vec{u} + v\vec{v}; u, v \in \mathbf{R}\}$.

**C.** V $E^4$ je dána přímka $m = \{M + t\vec{m}; t \in \mathbf{R}\}$, rovina $\alpha = \{K + x\vec{p} + y\vec{q}; x, y \in \mathbf{R}\}$ a nadrovina $\Gamma = \{G + u\vec{u} + v\vec{v} + w\vec{w}; u, v, w \in \mathbf{R}\}$. Klasifikujte

(a) vzájemnou polohu přímky $m$ a nadroviny $\Gamma$,
(b) vzájemnou polohu roviny $\alpha$ a nadroviny $\Gamma$.

**D.** Nechť je dán simplex $ABCDE$ v $E^4$. Volte vhodný repér a souřadnicovou soustavu a vyjádřete analyticky (a) hranu $CD$, (b) stěnu $ACD$, (c) nadstěnu $ABCD$.

**E.** Je dán simplex $\mathbb{S} = A_0A_1A_2A_3A_4$ v $E^4$ v souřadnicové soustavě dané v prostoru $E^4$ repérem $\langle A_0, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4} \rangle$, kde $\vec{u_i} = A_i - A_0$. Vyjádřete simplex $\mathbb{S}$ jako průnik pěti nadpoloprostorů.

**F.** Při označení předchozího cvičení najděte průnik simplexu $\mathbb{S}$ a přímek (a) $p = \{M + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}\}$, kde $M[3; 2; 1; 2]$, $\vec{u} = (5; 3; 1; 3)$, (b) $q =$ Obal$(N, \vec{v})$, kde $N[4; 1; 3; 4]$, $\vec{v} = (7; 2; 5; 7)$.

**G.** Nechť je dána nadkrychle z úlohy 5.7**D**. Zjistěte počet jejích hran, stěnových úhlopříček, tělesových úhlopříček, nadtělesových úhlopříček, stěn a nadstěn.

**H.** Je dána nadkrychle se středem v bodě $O[0; 0; 0; 0]$. Najděte její vrchol $M$, když víte, že vrcholy $A[2; 0; 0; 0]$, $B[0; 2; 0; 0]$, $C[0; 0; 2; 0]$, $D[0; 0; 0; 2]$ jsou jeho sousední vrcholy a hrana nadkrychle je délky 2.

**I.** Najděte další vrcholy nadkrychle z předchozí úlohy.

**J.** V $E^4$ najděte nadmnohostěn $\mathbb{T}$, který je zobecněním čtverce v $E^2$ s vrcholy $[\pm 1; 0]$, $[0; \pm 1]$ a osmistěnu v $E^3$ s vrcholy $[\pm 1; 0; 0]$, $[0; \pm 1; 0]$, $[0; 0; \pm 1]$. Zjistěte, kolik má tento nadmnohostěn vrcholů, úhlopříček a hran.

## 5.9 Úlohy – konvexní nadmnohostěn

**A.** Zjistěte, kolik stěn a kolik nadstěn má nadmnohostěn $\mathbb{T}$ ze cvičení 5.8**J**.

**Řešení:** Nejprve si musíme vyjasnit pojmy stěna a nadstěna. V $E^3$ pochopíme pojem „stěna“ vhledem. V $E^4$ však musíme tento pojem definovat. Úlohu si výrazně zjednodušíme, když se omezíme pouze na konvexní nadmnohostěny. Pomocí „dimenzionálního žebříku“ najdeme tuto definici.

**Definice:** *Konvexním nadmnohostěnem* v $E^4$ nazýváme každý konvexní obal konečné neprázdné množiny bodů $\mathcal{V}$ z $E^4$, tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje všechny body množiny $\mathcal{V}$.

Nadrovina $\Gamma$ se nazývá *opěrnou nadrovinou* nadmnohostěnu $\mathbb{T}$, když průnik $\Gamma$ s $\mathbb{T}$ je neprázdný a celý nadmnohostěn $\mathbb{T}$ leží v jednom z nadpoloprostorů určených nadrovinou $\Gamma$. Tento průnik se nazývá

- *vrchol nadmnohostěnu* $\mathbb{T}$, když je to bod,
- *hrana nadmnohostěnu* $\mathbb{T}$, když je to úsečka,
- *stěna nadmnohostěnu* $\mathbb{T}$, když je to mnohoúhelník,
- *nadstěna nadmnohostěnu* $\mathbb{T}$, když je to mnohostěn.

Abychom zamezili tomu, že za nadmnohostěn bude považován i bod nebo úsečka nebo dokonce prázdná množina, musíme zajistit, aby nadmnohostěn byl skutečně čtyřrozměrné těleso. Toho docílíme např. následující podmínkou: Existuje bod $M \in \mathbb{T}$ tak, že žádná nadrovina procházející bodem $M$ není opěrná.

Není těžké prověřit, že stěnou našeho nadmnohostěnu $\mathbb{T}$ je libovolný trojúhelník určený třemi vrcholy, mezi nimiž nejsou dva dipodální. Například hranu $A_1A_2$ lze kterýmkoli z vrcholů $A_3$, $B_3$, $A_4$, $B_4$ doplnit na trojúhelník, který je stěnou nadmnohostěnu $\mathbb{T}$. Tedy stěn je $\frac{24 \cdot 4}{3} = 32$, tj. počet hran (24) krát počet vrcholů, které nejsou dipodální s vrcholy příslušné hrany, (4) děleno počtem hran jedné stěny (3).

Dále uvažujme o nadstěnách. Podívejme se, jak nadstěna vznikla. Stěna vznikla z hrany čtverce spojením této hrany a nového vrcholu – vznikl trojúhelník. Nadstěna vznikla obdobně jako spojení stěny, tj. trojúhelníku, s novým vrcholem. Nadstěnou je tedy čtyřstěn. Čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$ leží v nadrovině $\Gamma_1$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ a všechny vrcholy $B_i$ leží v nadpoloprostoru, který je popsán nerovností $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 1$. Tedy čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$ je nadstěnou nadmnohostěnu $\mathbb{T}$. Další nadroviny $\Gamma$ a jim odpovídající nadstěny (tj. čtyřstěny) jsou:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1$ | a | $A_1A_2A_3B_4$, | $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$ | a | $A_1A_2B_3A_4$, |
| $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$ | a | $A_1B_2A_3A_4$, | $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ | a | $B_1A_2A_3A_4$, |
| $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1$ | a | $A_1A_2B_3B_4$, | $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$ | a | $A_1B_2A_3B_4$, |
| $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1$ | a | $A_1B_2B_3B_4$, | $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1$ | a | $B_1B_2B_3B_4$ atd. |

Každá nadstěna je čtyřstěn $X_1Y_2Z_3W_4$, kde každé z písmen $X$, $Y$, $Z$, $W$ je buď $A$, nebo $B$. To, že každý z uvedených čtyřstěnů je nadstěnou, jsme ukázali přímo, protože jsme našli jemu odpovídající nadrovinu $\Gamma$. To, že další stěny neexistují, plyne i z toho, že jakmile nadrovina obsahuje dva dipodální vrcholy nadmnohostěnu $\mathbb{T}$, obsahuje i jeho vnitřní bod, střed $O[0; 0; 0; 0]$, a není nadrovinou opěrnou.

Zbývá zjistit, kolik nadstěn (tj. čtyřstěnů) typu $X_1Y_2Z_3W_4$ existuje. To je lehká kombinatorická úvaha: $2^4 = 16$. Nebo si můžeme uvědomit, jak nadmnohostěn $\mathbb{T}$ vznikl. Měli jsme osmistěn a přidali k němu dva vrcholy, které jsme spojili se všemi šesti původními vrcholy. Podobně jako při přechodu z dvoj- do trojrozměrného prostoru jsme oba nové vrcholy spojili se všemi čtyřmi vrcholy původního čtverce. Tedy nadstěny vznikly tak, že jsme spojili dva vrcholy s každou z osmi stěn, tj. máme $2 \cdot 8 = 16$ nadstěn.

**B.** Nadkrychle $\mathbb{K}$ v $E^4$ je dána vrcholy $A, \ldots, H'$ jako v řešení úlohy 5.7**D.** Dále je dána nadrovina $\Gamma(t)$: $3tx_1 + (t + 1)x_2 + x_4 = 2$.

(a) Najděte $t \in \mathbf{R}$ tak, aby $A[1; 1; 1; 1] \in \Gamma(t)$, a zjistěte, zda tato nadrovina je opěrná. Jestliže ano, najděte její průnik s nadkrychlí $\mathbb{K}$.

(b) Dokažte, že pro $t > 0$ nadrovina $\Gamma(t)$ není opěrná.

**Řešení:** (a) $A \in \Gamma(t)$ právě tehdy, když $3t + (t + 1) + 1 = 2$, tj. $t = 0$, tedy $\Gamma(0)$: $x_2 + x_4 = 2$. Nadrovina je opěrná, protože pro všechny vrcholy $A, \ldots, H'$ platí $x_2 + x_4 \leqq 2$. Speciálně rovnost nastává pro vrcholy $A$, $D[-1; 1; 1; 1]$, $A'[1; 1; -1; 1]$, $D'[-1; 1; -1; 1]$. Tedy $\Gamma(0) \cap \mathbb{K}$ je čtyřúhelník $ADD'A'$. Lehce nahlédneme, že je to čtverec, neboť $|AD| = |DD'| = |D'A'| = |A'A| = 2$, $|AD'| = |DA'| = 2\sqrt{2}$.

(b) Nechť $t > 0$, pak nadrovina $\Gamma(t)$ odděluje vrcholy $A$ a $G'[-1; -1; -1; -1]$, neboť $A \in \Gamma^+(t)$ a $G' \in \Gamma^-(t)$, kde $\Gamma^+(t)$: $3tx_1 + (t + 1)x_2 + x_4 > 2$ a $\Gamma^-(t)$: $3tx_1 + (t + 1)x_2 + x_4 < 2$. Tedy pro žádné $t > 0$ není nadrovina $\Gamma(t)$ opěrná.

**C.** Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ ležící v nadrovině s rovnicí $x_4 = 0$, v němž $A[0;0;0;0]$, $B[2;2;0;0]$, $C[2;0;2;0]$, $D[0;2;2;0]$.

(a) Najděte bod $E[u;v;w;z]$ tak, aby nadmnohostěn $ABCDE$ byl pravidelný, tj. aby všechny jeho hrany byly stejně dlouhé.

(b) Zjistěte střed $S$ kulové nadplochy opsané tomuto nadmnohostěnu.

(c) Zjistěte poloměr $r$ kulové nadplochy opsané nadmnohostěnu $ABCDE$.

(d) Zjistěte poloměr $\rho$ kulové nadplochy vepsané nadmnohostěnu $ABCDE$.

**Řešení 1:** (a) Protože $|AB| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, platí $|AE| = |BE| = |CE| = |DE| = 2\sqrt{2}$, tedy

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 + z^2 &= 8 \\ (u-2)^2 + (v-2)^2 + w^2 + z^2 &= 8 \\ (u-2)^2 + v^2 + (w-2)^2 + z^2 &= 8 \\ u^2 + (v-2)^2 + (w-2)^2 + z^2 &= 8. \end{aligned}$$

Když od první rovnice postupně odečteme další tři, dostaneme soustavu rovnic

$$u + v = 2, u + w = 2, v + w = 2.$$

Soustava má řešení $u = v = w = 1$. Lehce najdeme i $z = \sqrt{5}$, a tedy $E[1;1;1;\sqrt{5}]$.

(b) Nechť dále $S[u';v';w';z']$ je střed kulové nadplochy opsané nadmnohostěnu. Pak $|AS| = |BS| = |CS| = |DS| = |ES| = r$, kde $r$ je poloměr této kulové nadplochy. Postupem stejným jako v části (a) najdeme $u' = v' = w' = 1$ a z rovnosti $|AS| = |ES|$ pak máme $z' = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tedy $S\left[1;1;1;\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$.

(c) $r = |AS| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + \frac{1}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

(d) Ze souměrnosti je zřejmé, že bod $S$ je i středem kulové nadplochy nadmnohostěnu vepsané. Kolmice vedená z bodu $S$ na nadstěnu $ABCD$ protne tuto nadstěnu v bodě $T$, v němž se kulová nadplocha vepsaná do nadmnohostěnu dotýká této jeho nadstěny, proto je $\rho = |ST|$. Protože rovnice nadstěny $ABCD$ je $x_4 = 0$, je $T[1;1;1;0]$, a tedy $\rho = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

**Řešení 2:** Víme, že v rovnostranném trojúhelníku jsou výšky i těžnice totožné a ortocentrum, těžiště, střed kružnice opsané i vepsané splývají. Analogická situace nastává i pro pravidelný čtyřstěn; ortocentrum, těžiště, střed kulové plochy tělesu opsané i vepsané splývají. Z toho plyne, že stejná situace platí i pro pravidelný nadmnohostěn $ABCDE$.

Označme $T$ těžiště čtyřstěnu $ABCD$. Jeho souřadnice zjistíme tak, že sečteme příslušné souřadnice bodů $A$, $B$, $C$, $D$ a součet vydělíme čtyřmi. Tedy $T[1;1;1;0]$.

Kolmice vedená bodem $T$ na nadrovinu $x_4 = 0$ (tj. nadrovinu nadstěny $ABCD$) je výškou nadtělesa spuštěnou z vrcholu $E$. Bod $S$ na ní nutně leží.

Po této úvodní úvaze lehce vypočteme potřebné souřadnice a poloměry.

## 5.10 Cvičení – nadmnohostěny

**A.** (a) Najděte body, v nichž se kulová nadplocha vepsaná nadmnohostěnu z úlohy 5.9**C** dotýká nadstěn $ABCE$, $ABDE$, $ACDE$ a $BCDE$. (b) Prověřte, že tyto body tvoří pravidelný čtyřstěn.

**B.** Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ ležící v nadrovině $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, kde $A[4; 0; 0; 0]$, $B[0; 4; 0; 0]$, $C[0; 0; 4; 0]$, $D[0; 0; 0; 4]$.

(a) Najděte bod $E[u; v; w; z]$ tak, aby nadmnohostěn $ABCDE$ byl pravidelný. Volte $E$ tak, aby bylo $u > 0$.
(b) Najděte střed $S[u'; v'; w'; z']$ kulové nadplochy tomuto nadmnohostěnu opsané.
(c) Najděte poloměry $r$, resp. $\rho$ kulové nadplochy danému nadtělesu opsané, resp. vepsané.

## 5.11 Úlohy – náhled do $n$-rozměrného prostoru

**A.** Zobecněte úvahy, kterými jste vstupovali do $E^4$ pomocí „dimenzionálního žebříku“ a které se odehrály v této kapitole.

Poznámka: Repér v $E^n$ definujeme analogicky k definici v odstavci 5.1.

**Rozšíření úvah z odstavce 5.2 – podprostory $E^n$ a jejich analytické vyjádření**

$N$-rozměrný prostor $E^n$ má $n$ druhů vlastních podprostorů – body $E^0$, přímky $E^1$, roviny $E^2$, trojdimenzionální prostory $E^3$, …, $k$-dimenzionální podprostory $E^k$, … a $(n-1)$-dimenzionální podprostory $E^{n-1}$ zvané nadroviny.

Je-li $E^k$ podprostor prostoru $E^n$, $0 \leqq k \leqq n$, pak může být analyticky posán dvěma různými způsoby, a to repérem $\langle M, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$ nebo soustavou rovnic $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2, \dots, a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = d_n$, kde platí

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} = s = n - k.$$

Dodejme, že v $E^n$ pro dva vektory $\vec{u} = (u_1; u_2; \dots ; u_n)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; \dots ; v_n)$ platí:

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$ je skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

(b) Velikost vektoru $\vec{u}$ je číslo $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

(c) Vzdálenost bodů $A$, $B$ je číslo $|AB| = \sqrt{(A-B)(A-B)}$.

(d) Odchylka $\varphi \in \langle 0, 180^\circ \rangle$ nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je dána vztahem

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

**Rozšíření úvah z odstavce 5.4 – ortogonální doplněk**

Nechť $E^{n-1}$ je nadrovina v $E^n$ dána repérem $\langle M, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1} \rangle$, kde $\vec{u}_i = (u_{i1}; u_{i2}; \dots ; u_{in})$. Uvažujeme determinant

$$\det[\vec{x}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \dots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix}. \qquad (5.2)$$

Když determinant rozvineme podle prvního řádku, dostaneme výraz

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = x_1n_1 + x_2n_2 + \cdots + x_nn_n, \text{ kde}$$

$n_i$ je subdeterminant determinantu (5.2) příslušný prvku $x_i$ násobený číslem $(-1)^{i+1}$. (5.3)

Vektor $\vec{n}$ je kolmý na nadrovinu $E^{n-1}$, neboť pro každý vektor $\vec{u}_i$, kde $i = 1, 2, \dots, n-1$, daného repéru je

$$\vec{u}_i \cdot \vec{n} = \det[\vec{u}_i, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-1}] = 0$$

(dva řádky posledního determinantu jsou stejné).

Vektor $\vec{n}$ konstruovaný uvedeným způsobem, tj. vztahy (5.3), nazveme *ortogonálním doplňkem* vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}$ a označíme $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-1}]$. Tedy

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-1}] = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \dots & \vec{i}_n \\ u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \dots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix},$$

kde $\vec{i_1}(1; 0; 0; \dots ; 0), \vec{i_2}(0; 1; 0; \dots ; 0), \dots, \vec{i_n}(0; 0; 0; \dots ; 1)$.

**Rozšíření úvah z úlohy 5.7A**

Definice An: Nechť je v $E^n$ dán repér $\langle A, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n} \rangle$. Množinu $\{A + x_1\vec{u_1} + \dots + x_n\vec{u_n};$ $x_i \in \mathbf{R}_0^+$, pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_1 + \dots + x_n \leqq 1\}$ nazveme *$n$-simplex*.

**Rozšíření úvah z úlohy 5.7B**

$N$-simplex má $\binom{n+1}{1}$ vrcholů, $\binom{n+1}{2}$ hran, $\binom{n+1}{3}$ stěn, $\binom{n+1}{4}$ trojdimenzionálních stěn, $\binom{n+1}{k+1}$ $k$-dimenzionálních stěn, $\binom{n+1}{n}$ $(n-1)$-dimenzionálních stěn.

**Rozšíření úvah z úlohy 5.7C**

Poznámka: Pro přehlednost budeme užívat stručného zápisu: např. $X = A + B$ znamená, že první souřadnici bodu $X$ získáme sečtením prvních souřadnic bodů $A$ a $B$, druhou souřadnici sečtením druhých souřadnic obou bodů atd.

V $E^n$ je dán $n$-simplex $\mathbb{S}^n = A_0A_1 \dots A_n$. Označme $\vec{u}_i = A_i - A_0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Bod $T = A_0 + \frac{1}{n+1}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n) = \frac{1}{n+1}(A_0 + A_1 + \dots + A_n)$ nazveme ***těžiště** $n$-**simplexu** $\mathbb{S}^n$*.

Nechť $A_i$ je vrchol $n$-simplexu $\mathbb{S}^n$ a nechť $\mathbb{S}_i^{n-1}$ je $(n-1)$-simplex $A_0A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ (je to simplex tvořený všemi vrcholy simplexu $\mathbb{S}^n$ kromě vrcholu $A_i$). Nechť $T_i = \frac{1}{n}(A_0 + \dots +$ $+ A_{i-1} + A_{i+1} + \dots + A_n)$ je těžiště $(n-1)$-simplexu $\mathbb{S}_i^{n-1}$.

**Tvrzení:** Za uvedených podmínek platí

$$T = A_i + \frac{n}{n+1}(T_i - A_i) = \frac{1}{n+1}(A_i + nT_i).$$

**Důkaz:** $T = \frac{1}{n+1}(A_0 + \dots + A_n) = \frac{1}{n+1}A_i + \frac{1}{n+1}(A_0 + \dots + A_{i-1} + A_{i+1} + \dots + A_n) =$ $= \frac{1}{n+1}A_i + \frac{n}{n+1}T_i = \frac{1}{n+1}(A_i + nT_i) = A_i(1 - \frac{n}{n+1}) + \frac{n}{n+1}T_i = A_i + \frac{n}{n+1}(T_i - A_i)$.

Dodejme, že úsečka $A_iT_i$ se nazývá těžnice a posledně uvedené tvrzení lze formulovat i takto: Těžiště $n$-simplexu dělí každou jeho těžnici v poměru $1 : n$ a leží blíže ke stěně $\mathbb{S}_i^{n-1}$ než k protějšímu vrcholu $A_i$.

**Rozšíření úvah z úlohy 5.7D**

(a) Nadkrychle $\mathbb{K}^n$ v prostoru $E^n$ je určena vrcholy $[e_1; e_2; \dots; e_n]$, kde $e_i \in \{-1, 1\}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Těchto vrcholů je $2^n$.

(b) Jsou-li $E[e_1; e_2; \dots; e_n]$ a $F[f_1; f_2; \dots; f_n]$ dva různé vrcholy nakdrychle $\mathbb{K}^n$, je $|EF|^2 = (e_1 - f_1)^2 + \dots + (e_n - f_n)^2$. Každé z čísel $(e_i - f_i)^2$ nabývá právě jedné z hodnot 0, 4 podle toho, zda $e_i = f_i$, nebo $e_i \neq f_i$. Tedy

$$|EF| = 2\sqrt{k}, \text{ kde } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Je-li $k = 1$, tedy $|EF| = 2$, je úsečka $EF$ hrana nadkrychle $\mathbb{K}^n$.

Je-li $k > 1$, je úsečka $EF$ úhlopříčkou nadkrychle $\mathbb{K}^n$.

(c) Rovnice nadroviny, která protíná nadkrychli $\mathbb{K}^n$ v nadstěně (nakrychli $\mathbb{K}^{n-1}$), má tvar $x_i = 1$, nebo $x_i = -1$, kde $i = 1, 2, \dots, n$.

**Rozšíření úvah z úlohy 5.7E**

Nechť $A[1; 1; \dots; 1]$, $X[e_1; e_2; \dots; e_n]$ jsou dva vrcholy nadkrychle $\mathbb{K}^n$. Pak $|AX| = 2\sqrt{k}$, právě když $k$ čísel z $e_1$, $e_2$, ..., $e_n$ je rovno $-1$ a ostatní jsou rovny 1. Těchto případů je $\binom{n}{k}$. Stejnou úvahou, jakou jsme udělali pro vrchol $A$, uděláme pro všech $2^n$ vrcholů nadkrychle $\mathbb{K}^n$. Dostaneme číslo $2^n\binom{n}{k}$. Jenže každou úsečku $AX$ počítáme dvakrát. Proto dostáváme pro počet úhlopříček nakrychle $\mathbb{K}^n$, jejichž délka je $2\sqrt{k}$, vztah $2^{n-1}\binom{n}{k}$.

**B.** V $E^n$, kde $n > 2$, je dán *pravidelný simplex* $\mathbb{S}^n = A_0A_1 \dots A_n$, tj. konvexní obal takové $(n+1)$-tice bodů $A_0, A_1, \dots, A_n$, pro kterou platí $|A_iA_j| = 0$, když $i = j$, a $|A_iA_j| = 1$, když $i \neq j$, pro všechna $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Zjistěte:

(a) velikost úhlu, který svírají sousední hrany simplexu,
(b) odchylku mimoběžných hran simplexu,
(c) výšku simplexu, tj. vzdálenost vrcholu od protilehlé $(n-1)$-dimenzionální stěny; zjistěte též, zda tato vzdálenost může být číslo racionální,
(d) odchylku přímky $A_0A_1$ od nadroviny $\Gamma = A_1A_2 \dots A_n$,
(e) vzdálenost dvou mimoběžných hran,
(f) vzdálenost stěny $A_0A_1A_2$ a hrany $A_3A_4$.

**Řešení:** Zaveďme označení $\vec{a_i} = A_i - A_0$, $i = 1, \dots, n$. Z pravidelnosti simplexu plyne $|A_0A_i| = 1$ pro $i \neq 0$ a $|A_iA_j| = 1$ pro $i \neq j$, odkud $\vec{a_i}^{\,2} = 1$ a též $(\vec{a_i} - \vec{a_j})^2 = \vec{a_i}^{\,2} + \vec{a_j}^{\,2} - -2\vec{a_i} \cdot \vec{a_j} = 1$, tedy $\vec{a_i} \cdot \vec{a_j} = \frac{1}{2}$.

Vztahy

$$\vec{a_i}^2 = 1,\ \vec{a_i} \cdot \vec{a_j} = \frac{1}{2} \text{ pro } i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \tag{5.4}$$

spolu se symetrií $n$-rozměrného pravidelného simplexu jsou hlavním nástrojem jeho studia.

(a) Syntetické řešení: Každá dvojrozměrná stěna simplexu $\mathbb{S}^n$ je rovnostranný trojúhelník $\mathbb{S}^2$. Proto je velikost úhlu sousedních hran $60°$.

Analytické řešení: Z pravidelnosti simplexu $\mathbb{S}^n$ je zřejmé, že všechny úhly $A_iA_jA_k$ pro různá $i$, $j$, $k$ jsou navzájem shodné. Podle vztahů (5.4) je $\cos|\sphericalangle A_1A_0A_2| = \vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = \frac{1}{2}$, odkud $|\sphericalangle A_1A_0A_2| = 60°$.

(b) Syntetické řešení: Nechť $B$, $C$, $D$, $E$ jsou čtyři různé vrcholy simplexu $\mathbb{S}^n$. Trojdimenzionální stěna $BCDE$ simplexu $\mathbb{S}^n$ je sama pravidelným simplexem $\mathbb{S}^3$, o němž víme, že každé dvě jeho protější hrany jsou navzájem kolmé.

Analytické řešení: Bez újmy na obecnosti lze za zkoumané mimoběžné hrany vzít hrany $A_0A_1$ a $A_2A_3$. Ze vztahů (5.4) plyne $\vec{a_1} \cdot (\vec{a_2} - \vec{a_3}) = \vec{a_1} \cdot \vec{a_2} - \vec{a_1} \cdot \vec{a_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, tedy $A_0A_1 \perp A_2A_3$.

(c) Úlohu budeme řešit analyticky. Nechť $\vec{v}$ je takový vektor kolmý na nadstěnu $\Gamma = A_1 \dots A_n$, pro který $B = A_0 + \vec{v} \in \Gamma$. Tedy úsečka $A_0B$ je výškou simplexu $\mathbb{S}^n$ vedenou z vrcholu $A_0$ na protilehlou nadstěnu $\Gamma$.

Ze souměrnosti simplexu plyne, že $\vec{v} = t(\vec{a_1} + \cdots + \vec{a_n})$, kde $t$ je zatím neznámé číslo. Zjistíme ho ze vztahu $A_0B \perp A_1B$, tj. $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{a_1}) = 0$, neboli $\vec{v} \cdot \vec{a_1} = \vec{v}^{\,2}$.

Protože $\vec{v} \cdot \vec{a_1} = t(1 + \frac{1}{2}(n-1))$, je $t = \frac{1}{n}$. Pak $|A_0B| = |\vec{v}| = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$. Pro $n = 2, 3, 4, \dots$ dostáváme postupně tyto výšky: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{5}{8}}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\sqrt{\frac{7}{12}}$, $\frac{4}{\sqrt{7}}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sqrt{\frac{11}{20}}$,

Ptáme se, kdy je číslo $\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$ racionální. Uvažujme nejprve případ $n$ sudé. Pak jsou čísla $n+1$ a $2n$ nesoudělná a daný výraz je racionální, právě když existují celá čísla $x$, $z$ tak, že $n+1 = x^2$ a $2n = z^2$. Protože $z$ je sudé, položme $z = 2y$. Pak $n = 2y^2 = x^2 - 1$. Diofantovská rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$, ke které jsme dospěli, se jmenuje *Pellova*. S jedním jejím typem jsme se setkali v úloze 2.10**J**. Je-li $(x, y)$ řešení uvedené rovnice, pak $\sqrt{\frac{n+1}{2n}} = \frac{x}{2y}$.

Jedno řešení rovnice již známe: $x = 3$, $y = 2$. Další řešení najdeme pomocí rekurentní formule $x' = 3x + 4y$, $y' = 2x + 3y$. Tedy $(x, y) = (3, 2)$, $(17, 12)$, $(99, 70)$, $(577, 408)$,… Příslušné hodnoty čísla $n = 2y^2$ jsou 8, 288, 9 800, 332 928, …

Případ $n$ liché se pokuste řešit samostatně.

(d) Nejprve je nutno definovat pojem *odchylka přímky $p$ od nadroviny* $\Gamma$. Zobecněním situace z trojdimenzionálního prostoru dostáváme dvě možné definice:

(i) $90° - \alpha$, kde $\alpha$ je odchylka přímky $p$ od kolmice $n$ na $\Gamma$,

(ii) velikost úhlu, který svírá přímka $p$ se svým kolmým průmětem $p'$ do $\Gamma$.

Obě definice jsou i v obecném případě totožné. Skutečně, při označení předchozího řešení je $A_0B$ kolmice na $\Gamma$ a $A_1B$ je kolmý průmět přímky $A_0A_1$ do nadroviny $\Gamma$. Hledaná odchylka $\beta$

je vidět z trojúhelníku $A_0A_1B$: $\beta = |\sphericalangle A_0A_1B|$ a $\sin\beta = |\vec{v}| = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$.

(e) Protože úlohu lze řešit v trojdimenzionálním prostoru určeném inkriminovanými hranami, jedná se o snadný úkol. Nejhezčí se nám jeví následující syntetické řešení. Do trojrozměrné krychle $ABCDEFGH$ vepišme čtyřstěn $\mathbb{S}^3 = ACFH$. Nejkratší vzdálenost jeho mimoběžných hran $AC$ a $FH$ je vzdálenost jejich středů $U = A - \bullet - C$ a $V = F - \bullet - H$. V krychli jsou to středy stěn $ABCD$ a $EFGH$. Jejich vzdálenost je evidentně rovna délce hrany $AB$. Jestliže teď $|AC| = 1$, pak hledaná vzdálenost $|UV| = |AB| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(f) Opět nutno nejprve definovat pojem *vzdálenost dvou množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ v $E^n$*. Tento pojem je přirozeným způsobem definován v každém *metrickém prostoru*, tj. v prostoru, v němž umíme smysluplně měřit vzdálenosti bodů. *Smysluplně* znamená, že pro všechny body $A$, $B$, $C$ daného prostoru platí

(i) $|AB| \geqq 0$, (ii) $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$, (iii) $|AB| = |BA|$, (iv) $|AB| + |BC| \geqq |AC|$.

**Definice:** Nechť jsou v metrickém prostoru dány dvě neprázdné množiny $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Jejich vzdálenost definujeme předpisem

$$|\mathcal{A}\mathcal{B}| = \inf|XY|, \text{ kde } X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}.$$

Poznamenejme, že nepříjemné infimum lze skoro ve všech případech, které v geometrii studujeme, nahradit průhlednějším minimem.

Teď se vraťme k původní úloze. Nechť $X = A_0 + (1-t)\vec{a_3} + t\vec{a_4}$ je libovolný bod přímky $A_3A_4$ a $Y = A_0 + u\vec{a_1} + v\vec{a_2}$ libovolný bod roviny $A_0A_1A_2$. Jejich vzdálenost $|XY|$ je dána vztahem $|XY|^2 = (u\vec{a_1} + v\vec{a_2} + (t-1)\vec{a_3} - t\vec{a_4})^2 = u^2 + v^2 + (t-1)^2 + t^2uv + u(t-1) - -ut + v(t-1) - vt - t(t-1) = u^2 + v^2 + uv - u - v + t^2 - t + 1$. Ptáme se, jak volit čísla $u$, $v$, $t$, aby daná vzdálenost byla minimální. Jinak řečeno hledáme minimum funkce

$$f(u,v,t) = u^2 + v^2 + uv - u - v + t^2 - t + 1.$$

Matematická analýza dává rychlou odpověď. Stačí vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} f_u &= 2u + v - 1 = 0,\\ f_v &= 2v + u - 1 = 0,\\ f_t &= 2t - 1 = 0 \end{aligned}$$

($f_u$ je parciální derivace funkce $f$ podle $u$ atd.).

**Výsledek:** $u = v = \frac{1}{3}$, $t = \frac{1}{2}$. Tedy bod $X$ je středem úsečky $A_3A_4$ a bod $Y$ je těžištěm stěny $A_0A_1A_2$. Jejich vzdálenost, a tedy i hledaná vzdálenost hrany a stěny, je $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}$.

Snadno se zjistí, že úsečka $XY$ je kolmá jak k přímce $A_3A_4$, tak i k rovině $A_0A_1A_2$. Tato skutečnost není náhodná. Nejkratší vzdálenost je vždy na kolmici. Tuto skutečnost jsme mohli využít k hledání bodů $X$, $Y$ a nemuseli jsme nasazovat složitý aparát parciálních derivací.

Čtenář se může pokusit úvahu zobecnit a najít vzdálenost $k$-rozměrné stěny $A_0 \dots A_k$ a $m$-rozměrné stěny $A_{n-m-1}A_{n-m} \dots A_n$.

## 5.12 Problém – nekonvexní nadmnohostěn

Definujte pojmy *nadmnohostěn*, jeho *hrana*, jeho *stěna* a jeho *nadstěna* pro nekonvexní nadmnohostěn.

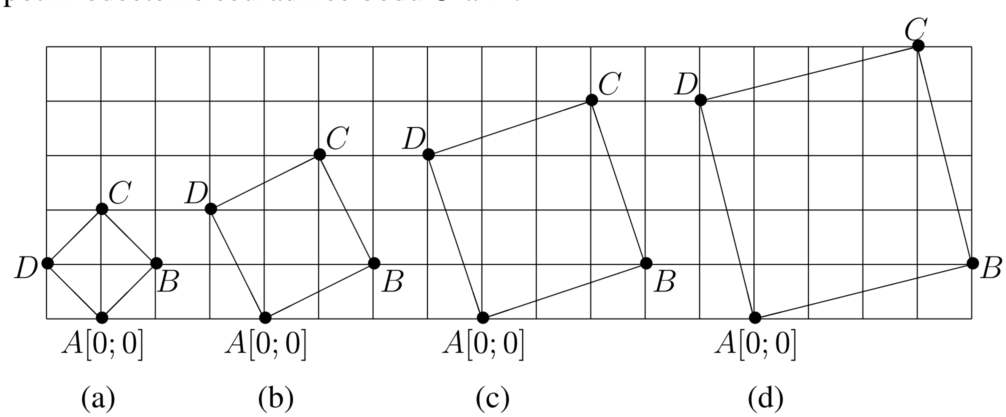
# Výsledky a řešení cvičení

## Kapitola 1

### Cvičení 1.5

$\boxed{\mathbf{A}}$ Hledáme, jak ze čtyř čísel $a_1, a_2, b_1, b_2$ najít čísla $c_1, c_2, d_1, d_2$. Budeme postupovat tak, že tři ze čtyř nezávisle proměnných $a_1, a_2, b_1, b_2$ fixujeme a čtvrtou necháme probíhat hodnoty $1, 2, 3, \ldots$ případně hodnoty $0, -1, -2, -3, \ldots$. Chování závisle proměnných sledujeme tabulkou.

Fixujeme $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$ a proměnnou $b_1$ necháme probíhat hodnoty $1, 2, 3 \ldots$ (obr. 1). Jinými slovy: bod $A[0; 0]$ je umístěn v počátku a bod $B$ se pohybuje po přímce $y = 1$. Z obrázků bez potíží odečteme souřadnice bodů $C$ a $D$.



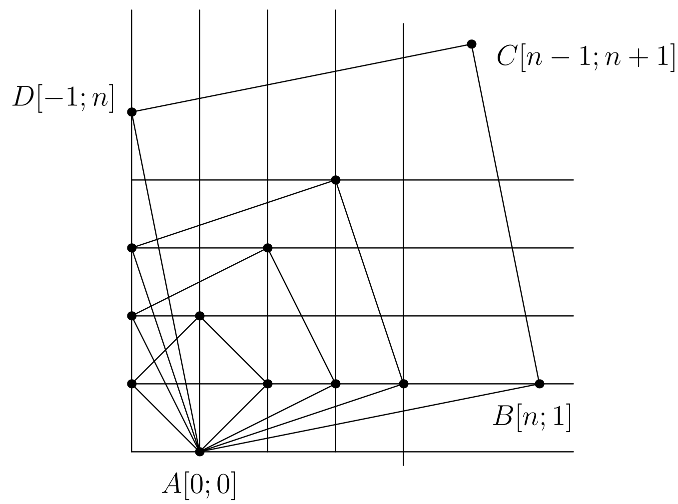

Obr. 1

Vyšetřili jsme čtyři případy, které jsou zachyceny v tabulce 1. Tabulka je tak sugestivní, že žák šestého ročníku bez těžkostí určí souřadnice bodů $C$, $D$, když mu dáme souřadnici $b_1$. Těžkosti mu bude dělat poslední řádek, tj. algebraický zápis, ne však zkoumaná zákonitost.

| | $b_1$ | $b_2$ | $c_1$ | $c_2$ | $d_1$ | $d_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| obr. 1a | 1 | 1 | 0 | 2 | $-1$ | 1 |
| obr. 1b | 2 | 1 | 1 | 3 | $-1$ | 2 |
| obr. 1c | 3 | 1 | 2 | 4 | $-1$ | 3 |
| obr. 1d | 4 | 1 | 3 | 5 | $-1$ | 4 |
| .<br>. | | | | | | |
| Obecně | $n$ | 1 | $n-1$ | $n+1$ | -1 | $n$ |

Tab. 1

Když obrázky 1 uspořádáme do jednoho obrázku a ten obohatíme o čtverec $ABCD$ odpovídající $n$-tému řádku tabulky 1, dostaneme názornou grafickou informaci o tabulce 1. Žáci s algebraickým nazíráním na matematiku upřednostní tabulku, žáci s geometrickým vhledem obrázek (obr. 2).




Obr. 2

Tabulku 1 jsme vytvořili pro parametr $b_2 = 1$. Vytvořte další tři tabulky pro parametr $b_2 = 2, 3, 4$. Rozsah každé z tabulek (počet řádků) volte tak, abyste byli schopni s jistotou napsat její poslední řádek. Z těchto řádků pak vytvoříme další tabulku (tab. 2).

Poslední řádek tabulky 2 je již druhostupňovým zobecněním a obsahuje dva parametry. Pro žáka základní školy je to hluboký výsledek. Opakujeme, že největší potíže nemají žáci s pochopením zákonitosti, kterou jsou vázány body $B$, $C$ a $D$, ale s jazykem písmen. Na úrovni šestého ročníku je tento výsledek závěrečný. Vrátíme se k němu později při geometrických transformacích. Tam, pomocí posunutí a výsledku tabulky 2, vyvodíme odpověď pro obecnou situaci.

| $b_1$ | $b_2$ | $c_1$ | $c_2$ | $d_1$ | $d_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 1 | $n-1$ | $n+1$ | $-1$ | $n$ |
| $n$ | 2 | $n-2$ | $n+2$ | $-2$ | $n$ |
| $n$ | 3 | $n-3$ | $n+3$ | $-3$ | $n$ |
| $n$ | 4 | $n-4$ | $n+4$ | $-4$ | $n$ |
| . . | | | | | |
| $n$ | $p$ | $n-p$ | $n+p$ | $-p$ | $n$ |

Tab. 2

Čtverec $ABCD$ posuneme do čtverce $A'B'C'D'$ tak, aby bod $A[0;0]$ přešel do bodu $A'[a_1;a_2]$, bod $B[n;p]$ do bodu $B'[b_1;b_2]$, bod $C$ do bodu $C'[c_1;c_2]$ a bod $D$ do bodu $D'[d_1;d_2]$. Uvažované posunutí je dáno vektorem $\vec{u} = (a_1;a_2)$. Zřejmě je $A' = A + \vec{u}$, $B' = B + \vec{u}$, $C' = C + \vec{u}$, $D' = D + \vec{u}$. Odtud $b_1 = n + a_1$, $b_2 = p + a_2$, $c_1 = n - p + a_1$, $c_2 = n + p + a_2$, $d_1 = -p + a_1$, $d_2 = n + a_2$. Vyloučením parametrů $n, p$ dostaneme hledané vztahy:

$$c_1 = a_2 + b_1 - b_2, c_2 = -a_1 + b_1 + b_2, d_1 = a_2 + a_1 - b_2, d_2 = a_2 - a_1 + b_1.$$

Poznámka: Protože $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$ jsou navzájem kolmé vektory, tabulka 2 nabízí jiný pohled na kolmost vektorů: k vektoru $(n;p)$ je kolmý vektor $(-p;n)$, resp. $(p;-n)$.

**B** (a) Pro hledaný vrchol $C[x;y]$ určitě platí $|AB| = |BC|$, $|AC| = \sqrt{2}|AB|$, tj. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$, $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$. Odtud máme $C_1[6;0]$, $C_2[2;-2]$. Požadované orientaci vyhovuje bod $C = C_1$. Dále střed úsečky $AC$ je bod $S[4,5;0,5]$, který je i středem úsečky $BD$. Odtud máme $D[5;2]$.

(b) Pro hledaný vrchol $C[x;y]$ platí $|BC|^2 = |AB|^2$, tj. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$, $|AC|^2 = = 2|AB|^2$, tj. $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2)$.

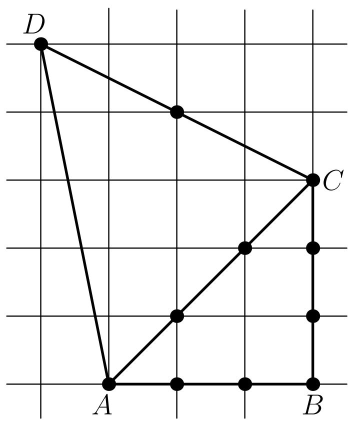
Po odečtení první rovnice od druhé a úpravě máme $ax + by = a^2 + b^2$, odkud $by = a^2 + b^2 - xa$. Tento vztah použijeme na vyloučení neznámé $y$ z druhé z kvadratických rovnic a po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 2xa + a^2 - b^2 = 0$, ze které $x_1 = a + b$, $x_2 = a - b$. Potom $y_1 = b - a$, $y_2 = a + b$. K nalezeným vrcholům $C_1[a+b;b-a]$, $C_2[a-b;a+b]$ lehce najdeme vrcholy $D_1[b;-a]$, $D_2[-b;a]$. Požadované orientaci vyhovuje čtverec $ABC_2D_2$.

(c) Stejný postup jako v předcházející úloze vede k řešení $C[a_2 + b_1 - b_2; -a_1 + b_1 + b_2]$, $D[a_1 + a_2 - b_2; -a_1 + a_2 + b_1]$. Tentokrát jsou ale výpočty, zejména úpravy výrazů, velice náročné a vyžadují nejen zkušenost v úpravách, ale i trpělivost a precizní zápis.

**C** Řešení v $\mathbf{R}$: $b_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + c_1 + c_2)$, $b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - c_1 + c_2)$, $d_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + c_1 - c_2)$, $d_2 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + c_1 + c_2)$.

Řešení v $\mathbf{Z}$: Nutno dodat následující podmínku. Bod $B$ je mřížový, právě když i bod $D$ je mřížový, a to nastává, právě když součet $a_1 + a_2 + c_1 + c_2$ je číslo sudé.

**D** (a) $S = \frac{1}{2}$. (b) Nekonečně mnoho. (c) Nekonečně mnoho. (d) Všechny mají stejný obsah $S = 1$. (e) $S = \frac{h}{2} - 1$. (f) Nekonečně mnoho. $S = 1\frac{1}{2}$. (g) $S = \frac{h}{2}$. (h) Nekonečně mnoho; $v \in \mathbf{N}_0$; $S = v + \frac{1}{2}$. (i) $S = \frac{h}{2} + 1$. (j) $S = \frac{h}{2} + 2$. (k) $S = \frac{h}{2} + v - 1$.




Obr. 3

**E** Uvažujme, že každý čtyřúhelník $\mathcal{C}$ vznikl „slepením“ dvou trojúhelníků $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$. Označme $S_1$, $S_2$ a $S_\mathcal{C}$ obsahy uvažovaných trojúhelníků a čtyřúhelníku, $v_1$, $v_2$ a $v_\mathcal{C}$ počty jejich vnitřních m-bodů a $h_1$, $h_2$, $h_\mathcal{C}$ počty hraničních m-bodů.

Dále označíme $h_x$, resp. $h_y$ počet hraničních m-bodů trojúhelníku $\mathcal{T}_1$, resp. $\mathcal{T}_2$, které neleží na společné straně obou trojúhelníků. Z těchto m-bodů se stanou též hraniční m-body čtyřúhelníku $\mathcal{C}$.

Písmenem $h_v$ označíme počet m-bodů společné strany obou trojúhelníků různých od vrcholů. Z těchto se po „slepení“ $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$ stanou vnitřní m-body čtyřúhelníku $\mathcal{C}$. Na společné straně obou trojúhelníků leží tedy $(h_v + 2)$ m-bodů. Tedy platí $h_1 = h_x + h_v + 2$, $h_2 = h_y + h_v + 2$. Dva body jsou krajní m-body společné strany, tedy vrcholy trojúhelníků, a z nich budou po slepení obou trojúhelníků rovněž dva hraniční m-body, vrcholy čtyřúhelníku.

Potom můžeme podle Pickovy formule psát:

$$S_\mathcal{C} = S_1 + S_2 = \tfrac{1}{2}(h_x + h_v + 2) + v_1 - 1 + \tfrac{1}{2}(h_y + h_v + 2) + v_2 - 1 = \tfrac{1}{2}(h_x + h_y + 2h_v + 4) + v_1 + v_2 - 2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}(h_x + h_y + 2) + h_v + v_1 + v_2 - 1 = \tfrac{1}{2}h_\mathcal{C} + v_\mathcal{C} - 1.$$

Popsanou situaci ilustrujeme obrázkem 3. Nechť $\mathcal{C} = ABCD$, $\mathcal{T}_1 = \triangle ABC$, $\mathcal{T}_2 = \triangle ACD$. Pak $S_1 = |\triangle ABC| = 4{,}5$, $S_2 = |\triangle ACD| = 9$, $S_\mathcal{C} = |ABCD| = 13{,}5$, $v_1 = 1$, $v_2 = 7$, $h_v = 2$, $v_\mathcal{C} = v_1 + v_2 + h_v = 10$, $h_x = 5$, $h_y = 2$, $h_1 = 5+2+2$, $h_2 = 2+2+2$, $h_\mathcal{C} = h_x + h_y + 2 = 5+2+2$.

**F** Odpověď můžeme najít pomoci Pickovy formule. Nechť $M[p; q]$ je onen jeden vnitřní m-bod. Aplikujeme-li Pickovu formuli postupně na trojúhelník $ABM$, $BCM$ a $CAM$, dostaneme $|\triangle ABM| = |\triangle BCM| = |\triangle CAM| = \frac{1}{2}$. Tedy $M$ musí být těžiště trojúhelníku $ABC$ (dokažte). Pro souřadnice bodů $B$, $C$, $M$ platí (1) $3p = b_1 + c_1$, $3q = b_2 + c_2$ (viz úloha **1.2**).

Nechť $M_0[p_0; q_0]$ je jeden takový bod. Nechť $m_0$ je přímka rovnoběžná s $AB$ procházející bodem $M_0$, tedy její směrový vektor je $(b_1; b_2)$. Pro všechny body přímky $m_0$ (2) $M = M_0 + k(b_1; b_2)$, $k \in \mathbf{Z}$, platí, že že $|\triangle ABM| = \frac{1}{2}$. Stejnou vlastnost mají i body středově souměrné podle bodu $A$, tj. $M = M_0' + k(b_1; b_2)$, kde $k \in \mathbf{Z}$ a $M_0'[-p_0; -q_0]$.

Ze vztahů (1) a (2) dostáváme $c_1 = 3p_0 + b_1(3k-1)$, $c_2 = 3q_0 + b_2(3k-1)$, kde $k \in \mathbf{Z}$. Další série řešení je „pod přímkou $AB$“, tedy místo $p_0$, $q_0$, vezmeme $-p_0$, $-q_0$.

Důkaz, že trojúhelník $ABC$ skutečně neobsahuje žádný jiný m-bod kromě $A$, $B$, $C$, $M$, přenecháme čtenáři.

## Cvičení 1.11

**A** (a) Každý vektor $10n\vec{a} + 3m\vec{b} = (15n+m; -2n+9m)$, kde $m, n \in \mathbf{Z}$, je m-vektor (b) Vektor $30\vec{c} - 15\vec{d} = (0; 7)$ a každý jeho celočíselný násobek, (c) Pouze nulový vektor $0\vec{e} + 0\vec{f} = \vec{o}$.

**B** Např. $\vec{u} = (3\sqrt{2} + 1; 3\sqrt{5} - 2)$, $\vec{v} = (\sqrt{8}; \sqrt{20} + 7)$.

**C** Např. $\vec{u} = (3; 0)$, $\vec{v} = (11; 0)$, $\vec{w} = (1; 0)$; $\vec{w} = 2\vec{v} - 7\vec{u}$.

**D** Např. (a) $\vec{q} = (1; 1)$, (c) $\vec{q} = (11; -14)$, (b), (d) nemá řešení.

**E** Nechť $\vec{q} = (q_1; q_2)$ je libovolný m-vektor. Podle tvrzení 1.1 platí, $\vec{p}, \vec{q}$ je m-bází, právě když $|p_1q_2 - p_2q_1| = 1$. Protože celá čísla $p_1, p_2$ jsou dělitelná číslem $n > 1$, je i výraz $|p_1q_2 - p_2q_1|$ dělitelný číslem $n$, a proto není roven 1.

**F** Řešením cvičení je důležité tvrzení z teorie čísel:

**Tvrzení 1.2:** Jsou dána celá čísla $m$, $n$. Rovnice $mx + ny = 1$ je řešitelná v oboru celých čísel, právě když jsou $m, n$ nesoudělná.

**Důkaz:** Uvažujeme dva případy.
(I) Nechť jsou $m, n$ soudělná. Řešení neexistuje, neboť výraz $mx+ny$ je vždy dělitelný společným dělitelem čísel $m, n$ různým od 1 a nemůže být proto roven 1.
(II) Nechť jsou $m, n$ nesoudělná. Chceme najít celé číslo $y$ tak, aby číslo $(ny-1) : m$ bylo celé. Zbytek při dělení $(ny-1) : m$ označme $f(y)$ a všimněme si souboru čísel

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(m) = f(0).\} \tag{.1}$$

Ukážeme, že tato čísla jsou navzájem různá. Dokazujeme sporem.

Předpokládejme, že mezi čísly (.1) existují dvě stejná. Nechť například $f(p) = f(q)$, kde $0 \leqq p < < q < m$. Pak jsou zbytky při dělení $(qn-1) : m$ a $(pn-1) : m$ stejné. Tedy rozdíl těchto dvou čísel, tedy číslo $(q-p)n : m$ je celé. Protože jsou $n, m$ nesoudělná, nastávají dva případy:

– buď je $n = 0$, pak $m \in \{+1, -1\}$ a množina (.1) je jednoprvková, tj. $p = q = 1$. Spor.
– nebo je $n \neq 0$, pak $(q-p) : m$ je celé, tj. $p = q$. Spor.

Tedy předpoklad, že některá dvě z $m$ čísel (.1) jsou stejná, vede ke sporu. Proto jsou tato čísla různá.

Na druhé straně čísla (.1) jsou zbytky při dělení číslem $m$, tedy všechna tato čísla jsou z množiny $\mathcal{M} = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Soubor (.1) i množina $\mathcal{M}$ mají stejný počet prvků a každý prvek souboru (.1) patří do $\mathcal{M}$. To je možné pouze tak, že soubor (.1) a množina $\mathcal{M}$ jsou totožné. Proto jedno z čísel (.1) je rovno číslu $0 \in \mathcal{M}$. Nechť $f(y_o) = 0$. Pak $x_o = (ny_o - 1) : m$ je celé a dvojice $x_o$, $y_o$ je hledaným řešením rovnice $mx + ny = 1$.

$\boxed{\mathbf{G}}$ Případ (a) i (b) představuje stejnou „tapetu“. Získané kritérium zní: Číslo $\frac{a_1-a_2}{3}$ musí být celé, tedy i $\frac{2a_1+a_2}{3} = a_1 - \frac{a_1-a_2}{3}$ musí být celé.

$\boxed{\mathbf{H}}$ Uvedeme pět různých formulací.
1. Najděte všechny dvojice $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, pro něž platí

$$\begin{vmatrix} b & -a \\ x & y \end{vmatrix} = 1.$$

2. Je dán vektor $\vec{v} = (b; -a)$. Najděte všechny m-vektory $\vec{u} = (x; y)$ tak, aby dvojice $\vec{u}$, $\vec{v}$ byla m-bází.

3. Je dán vektor $\vec{v} = (b; -a)$. Najděte všechny m-vektory $\vec{u} = (x; y)$ tak, aby každý m-bod byl celočíselně dosažitelný z bodu $O = [0; 0]$ pomocí $\vec{u}$, $\vec{v}$.
4. Na přímce dané rovnicí $ax + by = 1$ určete všechny m-body.
5. Pátou formulaci doplňte po probrání tématu Míra (viz cvičení 2.6**E**).

<u>Poznámka:</u> Velký počet různých interpretací rovnice $ax + by = 1$ poukazuje na její značný význam v několika oblastech matematiky.

## Cvičení 1.12 – shrnující úlohy

$\boxed{\mathbf{A}}$ Označme mřížové body úsečky $AB$ po řadě $A_0$, $A_1$, …, $A_6$, $A_7$ tak, že $A = A_0$, $B = A_7$. Bodem $A_3$ vedeme m-přímku rovnoběžně s m-přímkou $A_1D$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ Obě čísla $a_1 + b_1 + c_1$ i $a_2 + b_2 + c_2$ jsou dělitelná třemi (viz odstavec 1.2).

$\boxed{\mathbf{C}}$ Viz úloha **1.3**.

$\boxed{\mathbf{D}}$ (a) Je to „šikmá“ čtvercová síť, tedy množina $\{[2u + v; -u + 2v], u, v \in \mathbf{Z}\}$.
(b) $\mathcal{M} = \{\frac{p}{5}, p \in \mathbf{Z}\}$.

# Kapitola 2

## Cvičení 2.3

$\boxed{\mathbf{A}}$ Dokreslíme čtverec $ACPQ$, kde $P[-1; 7], Q[-4; 3]$. Zjistíme jeho obsah $7 \cdot 7 - 4 \cdot 6 = 25$. Odtud $|AC| = 5$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ Nechť $N[0; 13]$, $P[6; 9]$. Trojúhelník $AMN$ je výškou $AP$ rozdělen na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, proto $|AM| = |AN| = 13$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ Zjistíme obsah $S$ a výšku najdeme z upraveného vzorce: $v_a = \frac{2S}{a}$, atd.
(a) Načrtneme-li si obrázek, ihned vidíme, že $v_a = 2$, $v_c = 4$. Dále $S = 4$, $b = \sqrt{20}$, tedy $v_b = \frac{8}{\sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \doteq 1,79$,
(b) $v_a = 2$ ; dále $S = 3$, tedy $v_b = \frac{6}{\sqrt{20}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \doteq 1,34$, $v_c = \frac{6}{\sqrt{5}} \doteq 2,68$;
(c) $S = 1$, $v_a = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{0.4} \doteq 0,63$, $v_b = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \doteq 0,45$, $v_c = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \doteq 1,41$.

Alternativní tradiční postup: Najdeme patu $K$ kolmice spuštěné z $A$ na $BC$ a zjistíme $|AK|$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ První dva případy vyřešíme pomocí obrázku, protože najdeme patu $K$ kolmice vedené z $O$ na $p$: (a) bod $K[2,5; 2,5]$ leží ve středu jednoho čtverečku a $|OK| = 2,5 \cdot u$, kde $u = \sqrt{2}$ je délka úhlopříčky základního čtverečku sítě. Tedy $d = 2,5 \cdot \sqrt{2} \doteq 3,54$, (b) $K = R$, tedy $d = |OR| = \sqrt{20} \doteq 4,47$. Další dva případy vyžadují trik. Uvažujeme trojúhelník $OPR$ a $d$ hledáme jako velikost jeho výšky $v_o$ spuštěné z vrcholu O. Zjistíme, že (c) $d = 3$, (d) $d = 4$ a v obou těchto případech má trojúhelník $OPK$ délky stran 3, 4, 5.

$\boxed{\mathbf{E}}$ Zvolme např. toto pořadí uvolňování souřadnic: Nejprve $s$, pak $p$ a posléze $r$. Celý třístupňový proces zobecňování je přehledně uveden v tabulce 3, str. 104.

Výsledek $d = \frac{|ps|}{\sqrt{s^2+(p-r)^2}}$ platí obecně pro všechna $p, r, s \in \mathbf{R}$. Samozřejmě přímka $PR$ musí být definována, tj. body $P$, $R$ musí být různé.

Geometrická interpretace vzorce je evidentní: $|ps| = 2 \cdot |\triangle OPR|$, $\sqrt{s^2 + (p-r)^2} = |PR|$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ (a) Jestliže si situaci nakreslíme (obr. 4a, str. 105), nabízejí se dvě jednoduchá řešení.

1. Využijeme podobnosti trojúhelníků $KMO$ a $LNO$. Vidíme, že $|KM| : |NL| = 3 : 1$, což je patrné z obrázku, je tedy $|KO| : |OL| = |MO| : |NO| = 3 : 1$.

2. Využijeme zkušenosti z úlohy 1.12**A** a začleníme jednu z přímek, např. $MN$, do osnovy navzájem rovnoběžných a stejně vzdálených přímek. Krajním bodem $L$ veďme rovnoběžku s $MN$ a dále pak každým m-bodem mezi body $K$ a $M$. Úsečka $KL$ je takto rozdělena na čtyři shodné úsečky třemi body, z nichž jeden je bod $O$. Je patrné, že $|KO| : |OL| = 3 : 1$. Obdobně vyřešíme poměr $|MO| : |ON| = 3 : 1$.

| Parametry | | | Stupeň zobecnění | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | $p$ | $s$ | první | druhý | třetí |
| | 1 | 1,2,3,... | $\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ | | |
| 0 | 2 | 1,2,3,... | $\frac{2s}{\sqrt{s^2+4}}$ | $\frac{ps}{\sqrt{s^2+p^2}}$ | |
| | 3 | 1,2,3,... | $\frac{3s}{\sqrt{s^2+9}}$ | | |
| | $\vdots$ | | | | |
| | 1 | 1,2,3,... | $\frac{s}{\sqrt{s^2}}$ | | |
| 1 | 2 | 1,2,3,... | $\frac{2s}{\sqrt{s^2+1}}$ | $\frac{ps}{\sqrt{s^2+(p-1)^2}}$ | $\frac{ps}{\sqrt{s^2+(p-r)^2}}$ |
| | 3 | 1,2,3,... | $\frac{3s}{\sqrt{s^2+4}}$ | | |
| | $\vdots$ | | | | |
| | 1 | 1,2,3,... | $\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ | | |
| 2 | 2 | 1,2,3,... | $\frac{2s}{\sqrt{s^2}}$ | $\frac{ps}{\sqrt{s^2+(p-2)^2}}$ | |
| | 3 | 1,2,3,... | $\frac{3s}{\sqrt{s^2+1}}$ | | |
| | $\vdots$ | | | | |

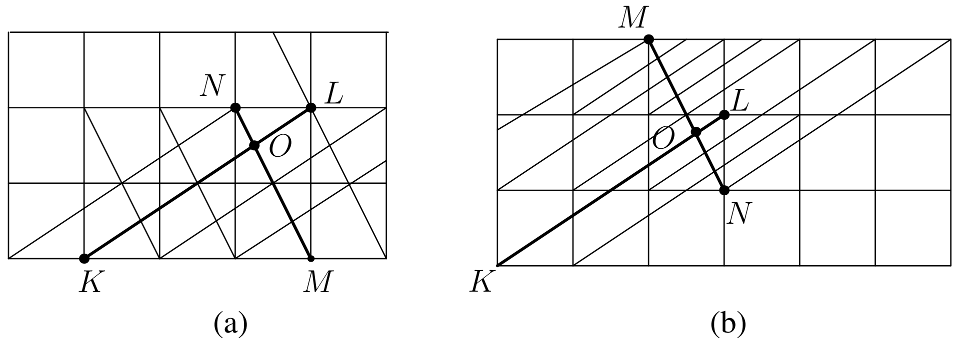
Tab. 3

(b) Myšlenku podobnosti trojúhelníku můžeme využít až po trojnásobném prodloužení úsečky $MN$ za bod $M$. Tím dostáváme bod $M'[0;7]$ a trojúhelníky $KOM'$ a $LON$ jsou podobné a $|KM'| : |LN| = |KO| : |OL| = 7 : 1$. Pro nalezení poměru $|MO| : |ON|$ je třeba vést osnovu navzájem rovnoběžných stejně vzdálených přímek tak, aby jedna z nich byla přímkou $KL$ a další dvě z nich procházely krajními body $M$, $N$. Z obrázku 4b, str. 105, je patrné, že $|MO| : |ON| = 5 : 3$.

(c) Tentokrát není snadné najít ani jeden z hledaných poměrů pomocí podobnosti, a je tedy nutné vést opět osnovu rovnoběžných stejně vzdálených přímek podobně jako v (b). Výsledek: $|MO| : |ON| = 3 : 10$, $|KO| : |OL| = 11 : 2$.

Poznámka: Uvedenou metodu řešení uvádíme jako alternativní ke standardní metodě s použitím rovnic přímek, výpočtu souřadnic jejich průsečíků a nalezení vzdálenosti dvou bodů.

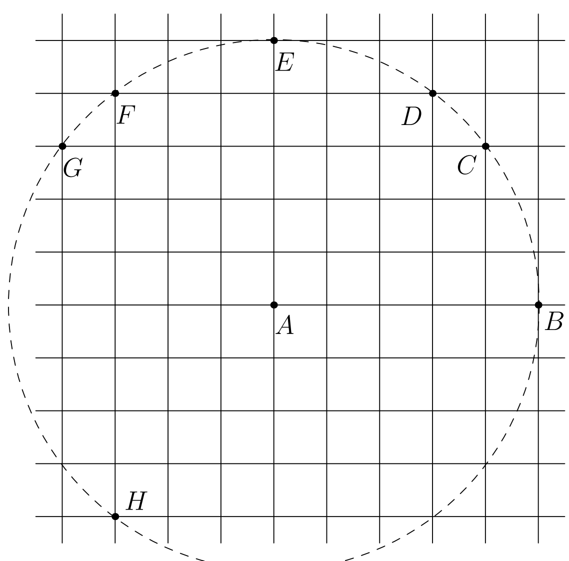
$\boxed{\mathbf{G}}$ (a) $O[2\frac{1}{4}; 1\frac{1}{2}]$, (b) $O[2\frac{5}{8}; 1\frac{3}{4}]$, $O[2\frac{7}{13}; 1\frac{9}{13}]$.




Obr. 4

$\boxed{\textbf{H}}$ (a) $V_c = [\frac{21\cdot5}{29}; \frac{21\cdot2}{29}]$, (b) $v_c = \frac{9}{29}\sqrt{29}$.

$\boxed{\textbf{I}}$ Označme $A[0;0]$, $B[5;0]$, $C[4;3]$, $D[3;4]$, $E[0;5]$, $F[-3;4]$, $G[-4;3]$, $H[-3;-4]$. Pak $ABC$, $ABD$, $ABE$, $ABF$, $ABG$, $ACD$, $ACG$, $ADF$ a $ACH$ jsou neshodné, protože jejich základny jsou vesměs různé: $\sqrt{10}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{80}$, $\sqrt{90}$, $\sqrt{98}$, $\sqrt{2}, 8$ a $6$. Není těžké zjistit, že výčet je úplný. Trojúhelníků je devět (obr. 5).




Obr. 5

$\boxed{\textbf{J}}$ $D[-1;2]$.

## Cvičení 2.4

$\boxed{\mathbf{A}}$ (a) $u = 3k, c_1 = 8k, c_2 = 6k, b_1 = 10k$, kde $k \in \mathbf{N}$, (b) $v = 4k, c_1 = 15k, c_2 = 8k, b_1 = 17k$, $k \in \mathbf{N}$, (c) $w = 5k, c_1 = 24k, c_2 = 10k, b_1 = 26k$, $k \in \mathbf{N}$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ Bod $S$ se je střed bodů $B$ a $C$, tj. $S = \left[\frac{b_1+c_1}{2}; \frac{c_2}{2}\right] = [nt; t]$. Dále z toho, že vektor $\overrightarrow{SC}$ je kolmý na vektor $\overrightarrow{SA}$ plyne, že $(c_1 - nt; c_2 - t) \cdot (-nt; -t) = 0$. Z výše uvedeného získáme soustavu rovnic $c_2 = 2t$, $c_1 + b_1 = 2nt$, $c_2 = t(n^2 + 1) - c_1 n$. Jejím vyřešením dostaneme $B\left[\frac{t(n^2+1)}{n}; 0\right]$, $C\left[\frac{t(n^2-1)}{n}; 2t\right]$.

Body $B$, $C$ musejí být mřížové, to nastane, pokud $n \mid t$ nebo $n \mid n^2 - 1$. Druhá možnost nikdy nenastane, protože $n \not| (n-1)(n+1)$. Platí tedy, že $t = n$, nebo $t = 2n$, nebo $t = 3n$, atd. Např. pro $t = n$ máme $B[n^2 + 1; 0]$, $C[n^2 - 1; 2n]$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ (a) $c_1 = 5$, $c_2 = 12$, $b = 13$, (b) $c_1 = 21$, $c_2 = 20$, $b = 29$, (c) $c_1 = 45$, $c_2 = 28$, $b = 53$, (d) $c_1 = n^2 - 4$, $c_2 = 4n$, $b = n^2 + 4$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ (a) $c_1 = 7$, $c_2 = 24$, $b = 25$, (b) $c_1 = 16$, $c_2 = 30$, $b = 34$, (c) $c_1 = 40$, $c_2 = 42$, $b = 58$, (d) $c_1 = 55$, $c_2 = 48$, $b = 73$, (e) $c_1 = n^2 - 9$, $c_2 = 6n$, $b = n^2 + 9$.

$\boxed{\mathbf{E}}$ $c_1 = u^2 - v^2$, $c_2 = 2uv$, $b = u^2 + v^2$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ V rovnoramenném trojúhelníku $ABC$ z předchozího cvičení, kde $A[0; 0]$, $B[b; 0]$, $C[c_1; c_2]$, platí $|AB| = |AC|$ a odtud $b^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2$. Souřadnice $b$, $c_1$, $c_2$ bodů $B$ a $C$ jsou tedy Pythagorejskou trojicí.

Následující tvrzení jsme odvodili za předpokladu, že $\mathrm{D}(u, v) = 1$. Čtenář si lehce dokáže, že tato podmínka není nutná.

**Tvrzení 2.3:** K libovolným $u, v \in \mathbf{N}$ a $u > v$ najdeme Pythagorejskou trojici $a$, $b$, $c$ takto: $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$.

Je-li navíc $\mathrm{D}(u, v) = 1$, popisuje tvrzení 2.3 všechny primitivní Pythagorejské trojice, tedy takové, že $a$, $b$, $c$ jsou nesoudělná (viz např. Davydov, U. S., Znám, Š.: *Teória čísel*. SPN, Bratislava 1966).

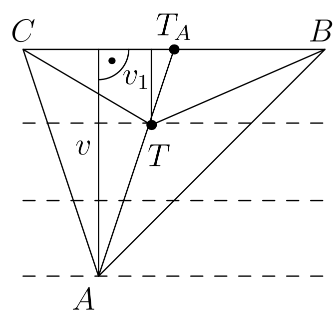
## Cvičení 2.6

$\boxed{\mathbf{A}}$ Obsah trojúhelníku $OPR$ je podle tvrzení 2.1 dán vztahem $|\triangle OPR| = \frac{1}{2}|ps - rq|$. Tedy podle geometrické interpretace ze cvičení 2.3**E** dostáváme $d = \frac{|ps-rq|}{\sqrt{(p-r)^2+(q-s)^2}}$, kde $p, q, r, s \in \mathbf{R}$, $P \neq R$.

**B** Úlohu řešíme stejně jako úlohu **A**. $|\triangle APR| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ p & q & 1 \\ r & s & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|a_1q + ps + a_2r - qr -$ $-a_2p - sa_1|$. Tedy $d = \frac{|a_1(q-s)+a_2(r-p)+ps-qr|}{\sqrt{(p-r)^2+(q-s)^2}}$.

**C** (Obr. 6.) Obsah trojúhelníku $BCT$ vyjádříme jako $\frac{|BC|\cdot v_1}{2}$. Obsah trojúhelníku $ABC$ je $\frac{|BC|\cdot v}{2}$.

Úsečka $T_AA$ je těžnice, tedy $|TT_A| : |T_AA| = 1 : 3$, a tedy i $v_1 : v = 1 : 3$. Z toho plyne, že $|\triangle ABC| = = 3|\triangle BCT|$. Podobně pro $|\triangle ABT|$ a $|\triangle ACT|$. Tedy $|\triangle ABC| = 3|\triangle ABT| = 3|\triangle ACT| = 3|\triangle BCT|$.




Obr. 6

**D** Nutná a postačující podmínka pro to, aby pro dané dva body $A$, $B$ existoval bod $C$ tak, aby $|\triangle ABC| = \frac{1}{2}$, je $\mathrm{D}(b-1, b-2) = 1$. To platí pro každé $b \in \mathbf{Z}$. Pro nalezení všech bodů $C$ využijeme vzorec pro obsah trojúhelníku. Tedy platí $|\begin{vmatrix} b-1 & b-2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}| = 1$. Body $C$ leží na dvou rovnoběžkách s přímkou $AB$ a lze je popsat takto:
$C_1[1 + t(b-1); 1 + t(b-2)]$, $C_2[-1 + t(b-1); -1 + t(b-2)]$, $t \in \mathbf{Z}$.

**E** Jsou dány body $O = [0; 0]$, $A = [-b; a]$. Najděte všechny body $B = [x; y]$ tak, aby $|\triangle ABO| = \frac{1}{2}$.

**F** $D[\sqrt{3} - 4; -\sqrt{3} + 2]$

**G** <u>Řešení 1:</u> Bod $C[2; c]$ je střed úsečky $BP$, proto $c = -\frac{1}{2}$. Přímým výpočtem dostaneme $|AB| = \sqrt{5}$, $|BC| = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $|CA| = \frac{3}{2}$, $v_b = 2$. Odtud plyne, že obvod trojúhelníku $ABC$ je $\sqrt{5} + \frac{\sqrt{17}+3}{2}$ a jeho obsah je $\frac{3}{2}$.

<u>Řešení 2:</u> Sestrojíme body $B'[-2; -1]$, $C'[2; -2]$. Pak je trojúhelník $ABC$ obrazem trojúhelníku $AB'C'$ ve stejnolehlosti se středem $A$ a koeficientem $k = \frac{1}{2}$. Obvod trojúhelníku $AB'C'$ je roven $\sqrt{20} + \sqrt{17} + 3$ a jeho obsah je 6. Tedy obvod trojúhelníku $ABC$ je roven $\frac{1}{2}$ obvodu trojúhelníku $AB'C'$, tedy $\sqrt{5} + \frac{\sqrt{17}+3}{2}$, a obsah trojúhelníku $ABC$ je roven $\frac{1}{4}$ obsahu trojúhelníku $AB'C'$, tedy $\frac{3}{2}$.

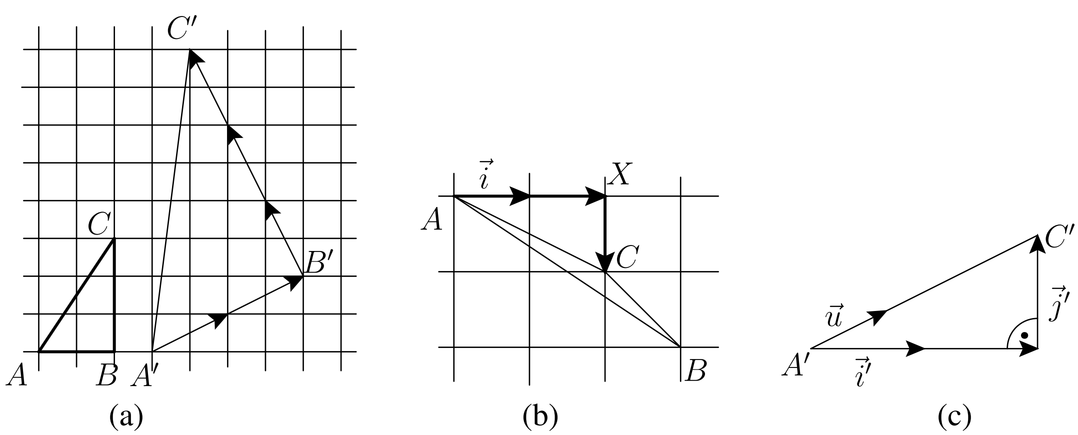
**H** K trojúhelníku $ABC$ sestrojíme trojúhelník $AUW$ s ním stejnolehlý podle středu $A$ tak, že bodem $U$ vedeme rovnoběžku s $PQ$ a její průsečík s přímkou $AV$ je hledaný vrchol $W$. Lehce zjistíme, že $W[0; 5]$. Teď zjistíme koeficient stejnolehlosti. Polopřímka $AQ$ protne přímku $UW$ v bodě $Q'[6; 3]$. Protože $|AQ'| = 3|AQ|$, je koeficient stejnolehlosti $k = 3$. Tedy obvod trojúhelníku $AUW$ je $10 + \sqrt{10}$ a je roven trojnásobku obvodu trojúhelníku $ABC$. Obsah trojúhelníku $AUW$ je $\frac{15}{2}$ a je roven devítinásobku obsahu trojúhelníku $ABC$. Odtud $o(\triangle ABC) = \frac{10+\sqrt{10}}{3}$ a $|\triangle ABC| = \frac{5}{6}$.

**I** Sestrojíme mřížový trojúhelník podobný s trojúhelníkem $ABC$. Například trojúhelník $PQJ$, kde $P[4; -1]$, $Q[6; 2]$. Podobnost trojúhelníků $ABC$ a $PQJ$ vyplývá z rovnoběžností $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QJ$ a $AC \parallel PJ$. Je tedy $|\triangle PQJ| = 6$. Tedy koeficient $k$ podobnosti je dán vztahem $\frac{49}{24} \cdot k^2 = 6$. Odtud $k = \frac{12}{7}$. Délky stran trojúhelníku $PQJ$ jsou $|PQ| = |PJ| = \sqrt{13}$, proto $|AB| = |AC| = \frac{7\sqrt{13}}{12}$, a $|QJ| = 4$, proto $|BC| = \frac{7}{3}$.

## Cvičení 2.10

**A** Dokresleme bod $D[2; -1]$, souměrný s $B$ podle osy $x$. Trojúhelník $COD$ je zřejmě pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem u vrcholu $D$. Tedy $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle AOD|$ a $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle AOC| = = |\sphericalangle AOD| + |\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle DOC| = 45°$.

**B** Do čtvercové sítě zakreslíme novou síť, jejíž linky budou dány vektorem $\vec{u}$ a vektorem na něj kolmým. Velikost strany čtverečku nové sítě bude rovna $|\vec{u}|$. V této nové síti vyznačíme nové mřížové body a pak již lehce zakreslíme trojúhleník $A'B'C'$ (obr. 7a). Řešením je např. $A'[3; 0]$, $B'[7; 2]$, $C'[4; 8]$.




Obr. 7

**C** Úlohu budeme řešit podobně jako předchozí úlohu, tentokrát však strana $AC$ neleží v lince původní sítě. Zaměříme se tedy na trojúhelník $ACX$ (obr. 7b) a najdeme trojúhelník jemu podobný. Tím najdeme novou mřížovou síť.

Hledáme tedy vektor $\vec{i}'$ (obr. 7c) a vektor $\vec{j}'$ na něj kolmý a se stejnou délkou. Úlohu můžeme řešit experimentálně, tj. tak, že vezmeme nějaký vektor, např. $\vec{i}'(3;1)$, naneseme jej dvakrát od bodu $A'$, čímž dostaneme bod $X'$, a dále pak jedenkrát vektor $\vec{j}'$ a zjišťujeme, zda se do stejného koncového bodu dostaneme i pomocí celočíselného násobku vektoru $\vec{u}$. Tento způsob však může být dost pracný. Můžeme postupovat i výpočtem.

Označíme-li souřadnice hledaného vektoru $\vec{i}'(x;y)$, pak pro bod $C'$ platí $C' = A' + t\vec{u}$. Současně platí $C' = A' + 2\vec{i}' + \vec{j}'$. Tedy $t\vec{u} = 2\vec{i}' + \vec{j}'$ a v souřadnicích $t(3;2) = 2(x;y) + (-y;x)$. Dostaneme soustavu rovnic $3t = 2x - y$, $2t = 2y + x$. Jejím vyřešením dostaneme $x = 2t - \frac{2t}{5}$, $y = \frac{t}{5}$. Stačí vzít $t = 5$ a máme $\vec{i}'(8;1)$. Pro další $t = 5k$ bychom dostali další vektory $\vec{i}'$. Řešením je např. $A' = A$, $B'[22;19]$, $C'[15;10]$.

$\boxed{\textbf{D}}$ Nechť je dán mřížový pravoúhlý trojúhelník $ABC$ (obr. 8a) a m-vektor $\vec{m}(m_1;m_2)$, který udává směr, v němž má ležet strana $A'C'$ trojúhelníku $A'B'C'$ podobného s trojúhelníkem $ABC$ (obr. 8b). Jednotkový vektor nové mřížové sítě označíme $\vec{u}(u;v)$, vektor na něj kolmý je $\vec{u}'(-v;u)$, $u, v \in \mathbf{Z}$. Bod $C'$ vyjádříme jako $C' = A' + s\vec{m}$, $s \in \mathbf{Z}$ a současně jako $C' = A' + k\vec{u} + l\vec{u}'$. Přepíšeme-li tyto vztahy do souřadnic, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $u$, $v$, s parametrem $s$ (čísla $k$, $l$, $m_1$, $m_2$ známe): $sm_1 = ku - lv$, $sm_2 = kv + lu$. Jejím řešením jsou čísla $u = \frac{s(m_1k+m_2l)}{k^2+l^2}$, $v = \frac{s(m_2k-lm_1)}{k^2+l^2}$. Zvolíme-li $s = k^2 + l^2$, budou čísla $u$, $v$ celá. Tato volba existuje vždy.


Obr. 8

$\boxed{\textbf{E}}$ Je to trojúhelník $OCD$, kde (a) $C[1;-1], D[2;1]$ – až na shodnosti je to jediné řešení, (b) $C[2;1], D[1;1]$ nebo $C[3;1], D[2;0]$ nebo $C[4;2], D[2;2]$ – jiná řešení až na shodnosti neexistují. Žák objevuje tato řešení metodou pokus-omyl, my známe větu o poměrech stran podobných trojúhelníků.

$\boxed{\textbf{F}}$ Využijte způsobu řešení úloh **B–D**. Výsledek: $A_3[4;3], A_4[9;13], A_5[7;24], A_6[-3;79]$.

$\boxed{\textbf{G}}$ Bod $C$ najdeme jako vrchol trojúhelníku $ODC$, pro který platí: Bod $D$ leží na polopřímce $OB$ a $\triangle OXB$ je podobný $\triangle ODC$ (obr. 9). Z daných podmínek vyplývá $B = O + b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, $D = O + b_1(b_1;b_2)$ a $C = O + b_1(b_1;b_2) + b_2(-b_2;b_1)$. Po úpravě máme $C[b_1^2 - b_2^2; 2b_1b_2]$.

$\boxed{\textbf{H}}$ Je. Opět užijeme myšlenku rovnoramenného trojúhelníku. Označíme $\vec{a} = A - O$,

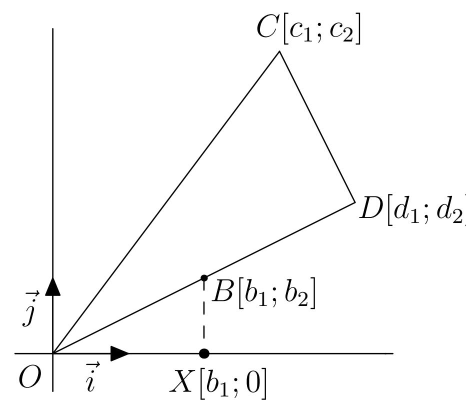
$\vec{b} = B - O$ a najdeme m-body $A' = O + n\vec{a}$, $B' = O + m\vec{b}$ tak, že $A'B'$ je kolmá na $OB$. Pak najdeme bod $C = B' + (B' - A')$. Protože $A'$, $B'$ jsou m-body, je i $C$ m-bodem. V rovnoramenném trojúhelníku $A'OC$ je $OB'$ výškou na základnu $A'C$. Odtud plyne, že polopřímka $OB$ je osou úhlu $COA'$. Musíme ještě dokázat, že požadovaná čísla $m$, $n$ existují. To se lehce nahlédne: $(n\vec{a} - m\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, tedy $n = \vec{b} \cdot \vec{b}$, $m = \vec{a} \cdot \vec{b}$. Zbývá ukázat, že je řešení správné i v případě, že úhel vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ je pravý nebo tupý, což přenecháme čtenáři.

$\boxed{\textbf{I}}$ (a) Na polopřímce $OA$ sestrojme bod $A'$ a na polopřímce $OB$ bod $B'$ tak, aby $|OA'| = |OB'|$. Pak bod $C$ lze sestrojit jako střed $C = A' - \bullet - B'$, nebo jako čtvrtý vrchol kosočtverce $A'OB'C$. Body $A'$ a $B'$ najdeme např. tak, že $A' = O + |OB| \cdot \overrightarrow{OA}$ a $B' = O + |OA| \cdot \overrightarrow{OB}$. Dostáváme tedy

$A'[a_1\sqrt{b_1^2 + b_2^2}; a_2\sqrt{b_1^2 + b_2^2}]$,

$B'[b_1\sqrt{a_1^2 + a_2^2}; b_2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}]$,

$C\Big[\frac{a_1\sqrt{b_1^2+b_2^2}+b_1\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{2}; \frac{a_2\sqrt{b_1^2+b_2^2}+b_2\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{2}\Big]$.




Obr. 9

(b) Nelze. Zvolme například $a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = b_2 = 1$. Podle výsledku cvičení **G** m-bod $C[c_1; c_2]$ pak leží na ose úhlu $AOB$, právě když bod $[c_1^2 - c_2^2; 2c_1c_2]$ leží na polopřímce $OB$, tj. právě když $c_1^2 - c_2^2 = 2c_1c_2$, tedy $(c_1 - c_2)^2 = 2c_2^2$, tj. $|c_1 - c_2| = |c_2| \cdot \sqrt{2}$. Je zřejmé, že tato rovnice má v oboru **Z** pouze triviální řešení.

$\boxed{\textbf{J}}$ Protože $0° \leqq \alpha \leqq 180°$, je $\sin\alpha \geqq 0$. Proto je $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$. Použijeme vztah (2.1), str. 32: $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

Máme $1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2} = \frac{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2} = \frac{(u_1^2+u_2^2)\cdot(v_1^2+v_2^2)-(u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2)^2}{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2} = \frac{(u_1\cdot v_2-u_2\cdot v_1)^2}{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2}$.

Odtud

$$\sin\alpha = \frac{|u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

$\boxed{\textbf{K}}$ Pomocí vztahu (2.1) a výsledku úlohy **J** dostaneme $\operatorname{tg}\varphi = \frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{a_1b_1+a_2b_2}$, když $a_1b_1 + a_2b_2 \neq 0$. Pro $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ není hodnota $\operatorname{tg}\varphi$ definována ($\varphi = 90°$).

$\boxed{\textbf{L}}$ (a+b) Východiskem pro všechny úlohy hledané série bude následující úloha pro $\alpha = 60°$: Je dán rovnostranný trojúhelník $AMC$ a bod $B$, který leží na polopřímce $AM$. Znáte-li v trojúhelníku $ABC$ délky stran $b = |AC|$ a $c = |AB|$, zjistěte délku strany $a = |BC|$.

Konkretizací čísel $b$, $c$ dostaneme z dané obecné úlohy úlohy jednodušší. Například začneme čtveřicí numericky daných úloh $(b,c) = (6,3)$, $(6,5)$, $(6,12)$, $(6,1)$. Pvní a třetí zadání vede na pravoúhlý trojúhelník. Čtvrté zadání je nejnáročnější, protože úhel $\beta$ je tupý. Jistou pomocí je druhé zadání, které je k němu „symetrické“. Pro slabší žáky je vhodné k úlohám nakreslit i obrázek.

V sérii úloh pokračujeme pomocí myšlenky uvolňování parametru. Fixujeme jen jedno z čísel $b$, $c$. Například položíme $b = 6$ a $c$ necháme nekonkretizované. Řešení $a^2 = 36 + c^2 - 6c$ je zobecněním předchozích čtyř zadání. Pak položíme $b = 7$ a žáci najdou druhé částečně obecné řešení $a^2 = 49 + c^2 - 7$. Pak již můžeme dát žákům řešit původní obecnou úlohu.

(c) Postupujeme analogicky jako v případě $\alpha = 60°$. Zde pro každý z úhlů $\alpha = 30°, 45°, 120°, 135°$ a $150°$ uvedeme pouze východiskovou úlohu.

<u>Úloha:</u> ($\alpha = 30°$) Je dán rovnostranný trojúhelník $AMC$ a bod $B$, který leží na polopřímce $AN$, kde $N = M - \bullet - C$. Znáte-li v trojúhelníku $ABC$ délky stran $b = |AC|$ a $c = |AB|$, zjistěte délku strany $a = |BC|$.
[Řešení: $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{3}$]

<u>Úloha:</u> ($\alpha = 45°$) Je dán čtverec $AMCD$ a bod $B$, který leží na polopřímce $AM$. Znáte-li v trojúhelníku $ABC$ délky stran $b = |AC|$ a $c = |AB|$, zjistěte délku strany $a = |BC|$.
[Řešení: $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}$]

<u>Úloha:</u> ($\alpha = 120°$) Je dán rovnostranný trojúhelník $AMC$ a bod $B$, který leží na polopřímce opačné k polopřímce $AM$. Znáte-li v trojúhelníku $ABC$ délky stran $b = |AC|$ a $c = |AB|$, zjistěte délku strany $a = |BC|$.
[Řešení: $a^2 = b^2 + c^2 + bc$]

<u>Úloha:</u> ($\alpha = 150°$) Je dán rovnostranný trojúhelník $AMC$ a bod $B$, který leží na polopřímce opačné k polopřímce $AN$, kde $N = M - \bullet - C$. Znáte-li v trojúhelníku $ABC$ délky stran $b = |AC|$ a $c = |AB|$, zjistěte délku strany $a = |BC|$.
[Řešení: $a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{3}$]

<u>Úloha:</u> ($\alpha = 135°$) Je dán čtverec $AMCD$ a bod $B$, který leží na polopřímce opačné k polopřímce $AM$. Znáte-li v trojúhelníku $ABC$ délky stran $b = |AC|$ a $c = |AB|$, zjistěte délku strany $a = |BC|$.
[Řešení: $a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{2}$]

$\boxed{\mathbf{M}}$ Pro $\alpha = 15°$ je $a^2 = b^2 + c^2 - bc\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ a pro $\alpha = 75°$ je $a^2 = b^2 + c^2 - bc\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Příslušný útvar je konvexní pětiúhelník $ABCDE$, pro který $ABCE$ je čtverec a $CDE$ je rovnostranný trojúhelník. Zde $|\sphericalangle BAD| = 75°$ a $|\sphericalangle DAE| = 15°$.

Dále pro $\alpha = 18°$ je $a^2 = b^2 + c^2 - bc\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$, pro $\alpha = 72°$ je $a^2 = b^2 + c^2 - bc\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, pro $\alpha = 36°$

je $a^2 = b^2 + c^2 - bc\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ a pro $\alpha = 54°$ je $a^2 = b^2 + c^2 - bc\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$. Příslušný útvar je pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ doplněný o bod $F = A - \bullet - E$. Pro tento útvar platí $|\sphericalangle ACF| = 18°$, $|\sphericalangle BAC| = 36°$, $|\sphericalangle BCF| = 54°$, $|\sphericalangle EAC| = 72°$.

**N** Výsledky jsou v tabulce.

| $\alpha$ | $15° = \frac{\pi}{12}$ | $18° = \frac{\pi}{10}$ | $36° = \frac{\pi}{5}$ | $54° = \frac{3\pi}{10}$ | $72° = \frac{2\pi}{5}$ | $75° = \frac{5\pi}{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{8}}$ | $\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $2-\sqrt{3}$ | $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ | $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ | $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ | $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ | $2+\sqrt{3}$ |

## Cvičení 2.14

**A** (a) $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = \frac{17}{16}$, $t_4 = \frac{16}{17}$, (b) $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, (c) $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{23}{38}$, $t_3 = 1$, $t_4 = -\frac{23}{17}$, $t_4 = \frac{32}{17}$.

**B** $C_1\left[\frac{b_1}{2} - \frac{b_2\sqrt{3}}{2}; \frac{b_2}{2} + \frac{b_1\sqrt{3}}{2}\right]$, $C_2\left[\frac{b_1}{2} + \frac{b_2\sqrt{3}}{2}; \frac{b_2}{2} - \frac{b_1\sqrt{3}}{2}\right]$.

**C** (a) Existují právě tři řešení: $C_1[\sqrt{11}; -3]$, $C_2[-\sqrt{11}; -3]$, $C_3[4, -3]$.
(b) Při označení jako u řešení úlohy **B** máme: $C_1[\sqrt{25-d^2}; d]$, $C_2[-\sqrt{25-d^2}; d]$, $C_3[4 + \sqrt{(8-d)(2+d)}; d]$, $C_4[4 - \sqrt{(8-d)(2+d)}; d]$, $C_5[\frac{25-6d}{8}; d]$. Body $C_1$ a $C_2$ jsou průsečíky přímky $m$ s kružnicí $k_1$: $x^2 + y^2 = 25$; $C_3$ a $C_4$ jsou průsečíky přímky $m$ s kružnicí $k_2$: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ a $C_5$ je průsečík různoběžek $m$ a $o$: $8x + 6y = 25$.

Musíme vyloučit dva případy. Za prvé případ rovnostranného trojúhelníku. K tomu si nejdříve najdeme souřadnice průsečíku $\{D\} = k_1 \cap k_2$, toho, jehož druhá souřadnice je záporná. Výpočtem zjistíme $D[2 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}; \frac{3}{2} - \sqrt{12}]$. Ověříme, že z bodů $C_i$ se bodu $D$ mohour rovnat body $C_1$, $C_3$ a $C_5$. Za druhé musíme vyloučit případ, kdy bude výsledný bod ležet na přímce $AB$. To nastane pouze pro $d = -3$, kdy bude průsečíkem přímky $m$ a kružnice $k_1$ bod $E[-4; -3]$. Tento bod se může rovnat pouze bodu $C_2$. Nakonec vezmeme v úvahu, pro jaká čísla $d$ jsou výrazy v souřadnicích bodů $C_i$ definovány, a dostaneme diskusi v tabulce dole.

| **parametr** | **řešení** | **počet řešení** |
|---|---|---|
| $d \in (\frac{3}{2} - \sqrt{12}, 0)$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |
| $d = \frac{3}{2} - \sqrt{12}$ | $C_2, C_4$ | 2 |
| $d \in (-2, \frac{3}{2} - \sqrt{12})$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |
| $d = -2$ | $C_1, C_2, C_3 = C_4, C_5$ | 4 |
| $d \in (-3, -2)$ | $C_1, C_2, C_5$ | 3 |
| $d = -3$ | $C_1, C_5$ | 2 |
| $d \in (-5, -3)$ | $C_1, C_2, C_5$ | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| $d = -5$ | $C_1 = C_2, C_5$ | 2 |
| $d \in (-\infty, -5)$ | $C_5$ | 1 |

(c) Při označení jako u řešení úlohy **B** máme $k_1(A, |AB|)$: $x^2 + y^2 = b_1^2 + 4$, $k_2(B, |AB|)$: $(x - b_1)^2 + (y - 2)^2 = b_1^2 + 4$, $o$: $2b_1x + 4y = b_1^2 + 4$.

Průsečíky kružnice $k_1$ s přímkou $m$ jsou body $C_{1,2}[\pm\sqrt{b_1^2 + 4 - d^2}; d]$.
Průsečíky kružnice $k_2$ s přímkou $m$ jsou body $C_{3,4}[b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4d - d^2}; d]$.
Průsečík přímek $o$ a $m$ je bod $C_5[\frac{b_1^2+4-4d}{2b_1}; d]$.
Důležitou roli hraje též průsečík kružnic $k_1$ a $k_2$, ten, jehož druhá souřadnice je kladná. Je to bod $E[\frac{b_1}{2} - \sqrt{3}; 1 + \frac{b_1}{2} \cdot \sqrt{3}]$.
Počet řešení úlohy závisí na hodnotě parametrů $b_1$, $d$. Diskutujme nejprve parametr $b_1$.

1. $b_1 = 0$. Přímka $AB$ je kolmá na přímku $m$.

| **parametry** | **řešení** | **počet řešení** |
|---|---|---|
| $d \in (0; 1) \cup (1; 2)$ | $C_1, C_2, C_3, C_4$ | 4 |
| $d = 1$ | $C[u; 1]$, $u \in \mathbf{R} - \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ | nekonečně mnoho |
| $d \in \langle 2, 4)$ | $C_3, C_4$ | 2 |
| $d \in \langle 4, \infty)$ | | 0 |

2. $b_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Přímka $BE$ je rovnoběžná s přímkou $m$.

| **parametry** | **řešení** | **počet řešení** |
|---|---|---|
| $d \in \{(0,1) \cup (1,2) \cup (2, \frac{4}{\sqrt{3}})\}$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |
| $d = 1$ | $C_1, C_2, C_3, C_4$ | 4 |
| $d = 2$ | $C_3[2\sqrt{3}; 2]$ | 1 |
| $d = \frac{4}{\sqrt{3}}$ | $C_1 = C_2, C_3, C_4, C_5$ | 4 |
| $d \in (\frac{4}{\sqrt{3}}, 4)$ | $C_3, C_4, C_5$ | 3 |
| $d = 4$ | $C_4, C_5$ | 2 |
| $d \in (4, \frac{6+4\sqrt{3}}{3})$ | $C_3, C_4, C_5$ | 3 |
| $d = \frac{6+4\sqrt{3}}{3}$ | $C_3 = C_4, C_5$ | 2 |
| $d \in (\frac{6+4\sqrt{3}}{3}, \infty)$ | $C_5$ | 1 |

3. $b_1 = 2\sqrt{3}$. Bod $E[0;4]$ leží na ose $y$.

| **parametry** | **řešení** | **počet řešení** |
|---|---|---|
| $d \in \{(0,1) \cup (1,2) \cup (2,4)\}$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |
| $d = 1$ | $C_1, C_2, C_3, C_4$ | 4 |
| $d = 2$ | $C_2, C_3, C_4, C_5$ | 4 |
| $d = 4$ | | 0 |
| $d \in (4,6)$ | $C_3, C_4, C_5$ | 3 |
| $d = 6$ | $C_3 = C_4, C_5$ | 2 |
| $d \in (6,\infty)$ | $C_5$ | 1 |

4. $0 < b_1 < 2\sqrt{3}$.

| **parametry** | **řešení** | **počet řešení** |
|---|---|---|
| $d = 1$ | $C_1, C_2, C_3, C_4$ | 4 |
| $d = 1 + \frac{b_1\sqrt{3}}{2}$ | $C_1, C_3, C_5$ (neboť $E = C_2 = C_4$) | 3 |
| $d = 2$ | $C_2, C_3, C_4, C_5$ | 4 |
| $d \in (0, \sqrt{b_1^2+4})$ kromě tří výše uvedených hodnot parametru $d$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |
| $d = 4$ | $C_4, C_5$ (neboť $C_3 = G$) | 2 |
| $d = \sqrt{b_1^2+4}$ | $C_1 = C_2, C_3, C_4, C_5$ | 4 |
| $d \in (\sqrt{b_1^2+4}, 2 + \sqrt{b_1^2+4})$ | $C_3, C_4, C_5$ | 3 |
| $d = 2 + \sqrt{b_1^2+4}$ | $C_3 = C_4, C_5$ | 2 |
| $d \in (2 + \sqrt{b_1^2+4}, \infty)$ | $C_5$ | 1 |

5. $b_1 > 2\sqrt{3}$.

| **parametry** | **řešení** | **počet řešení** |
|---|---|---|
| $d = 1$ | $C_1, C_2, C_3, C_4$ | 4 |
| $d = 1 + \frac{b_1\sqrt{3}}{2}$ | $C_2, C_3, C_5$ (neboť $E = C_1 = C_4$) | 3 |
| $d = 2$ | $C_2, C_3, C_4, C_5$ | 4 |
| $d = 4$ | $C_1, C_2, C_4, C_5$ (neboť $C_3 = G$) | 4 |
| $d \in (0, \sqrt{b_1^2+4})$ kromě čtyř výše uvedených hodnot parametru $d$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |
| $d = \sqrt{b_1^2+4}$ | $C_1 = C_2, C_3, C_4, C_5$ | 4 |
| $d \in (\sqrt{b_1^2+4}, 2 + \sqrt{b_1^2+4})$ | $C_3, C_4, C_5$ | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| $d = 2 + \sqrt{b_1^2 + 4}$ | $C_3 = C_4, C_5$ | 2 |
| $d \in (2 + \sqrt{b_1^2 + 4}, \infty)$ | $C_5$ | 1 |

**D** Situace je načrtnuta na obr. 2.8, str. 36. Zřejmě je

$$k_1\colon x^2 + y^2 = b_1^2 + b_2^2;\ k_2\colon (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 = b_1^2 + b_2^2;\ m\colon y = d.$$

Není příliš těžké najít souřadnice všech bodů vyznačených na obr. 2.8.

$E[\frac{b_1+b_2\sqrt{3}}{2}; \frac{b_2-b_1\sqrt{3}}{2}]$, $F[\frac{b_1-b_2\sqrt{3}}{2}; \frac{b_2+b_1\sqrt{3}}{2}]$ jsou průsečíky kružnic $k_1$ a $k_2$.
Střed $S[\frac{b_1}{2}; \frac{b_2}{2}]$ je střed úsečky $AB$.
$C_{1,2}[\pm\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - d^2}; d]$ jsou průsečíky přímky $m$ s kružnicí $k_1$,
$C_{3,4}[b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - d^2 + 2db_2}; d]$ jsou průsečíky přímky $m$ s kružnicí $k_2$,
$C_5[\frac{b_1^2+b_2^2-2db_2}{2b_1}; d]$ je průsečík přímky $m$ s přímkou $EF$.

V obecném případě má úloha pět řešení $C_1, \ldots, C_5$. V pěti speciálních případech je počet řešení jiný. Celkový přehled dává tabulka. Případ 6 je obecný.

| | **Podmínka** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Geometricky** | **Analyticky** | **Řešení** | **Počet** |
| 1 | $AB \perp m \wedge S \in m$ | $b_1 = 0 \wedge b_2 = 2d$ | všechna $C \in m$ kromě $E$, $F$, $S$ | $\infty$ |
| 2 | $AB \perp m \wedge S \notin m$ | $b_1 = 0 \wedge b_2 \neq 2d$ | $C_1, C_2, C_3, C_4$ | 4 |
| 3 | $AB \not\perp m \wedge E \in m$ | $b_1 \neq 0 \wedge b_2 - b_1\sqrt{3} = 2d$ | $C_2, C_4, C_5$ | 3 |
| 4 | $AB \not\perp m \wedge F \in m$ | $b_1 \neq 0 \wedge b_2 + b_1\sqrt{3} = 2d$ | $C_1, C_3, C_5$ | 3 |
| 5 | $AB \not\perp m \wedge S \in m$ | $b_1 \neq 0 \wedge b_2 = 2d$ | $C_1, C_2, C_3, C_4$ | 4 |
| 6 | $AB \not\perp m \wedge E \notin m$ | $b_1 \neq 0 \wedge b_2 - b_1\sqrt{3} \neq 2d$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |
| | $F \notin m \wedge S \notin m$ | $b_2 + b_1\sqrt{3} \neq 2d \wedge b_2 \neq 2d$ | $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ | 5 |

**E** (a) Bod $C$ bude ležet na průsečíku kružnice $k(B, |AB|)$: $x^2 + y^2 = a_1^2 + a_2^2$ a přímky $m$. Dostáváme tedy soustavu rovnic. Dosadíme-li za $y = 3x - 10$ do rovnice kružnice, máme kvadratickou rovnici $x^2 - 6x + \frac{100-a_1^2-a_2^2}{10} = 0$. Její diskriminant je $D = \frac{2a_1^2+2a_2^2-20}{5}$.

Je-li $D < 0$, tj. když $a_1^2 + a_2^2 < 10$, rovnice nemá řešení, a tedy ani bod $C$ splňující podmínky úlohy neexistuje. Je-li $D > 0$, tj. když $a_1^2 + a_2^2 > 10$, má rovnice dvě různá řešení, a tedy existují dva body $C$:

$$C_{1,2}[3 \pm \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{10} - 1}; \pm 3 \cdot \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{10} - 1} - 1].$$

Je-li $D = 0$, tj. když $a_1^2 + a_2^2 = 10$, má rovnice jedno řešení, a tedy existuje jediný bod $C[3; -1]$.

(b) Z podmínky $|AB| = |BC|$ plyne $(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 = r^2$, kde $r = |AB|$. Z podmínky $C \in m$ plyne $fc_1 + gc_2 = h$, tj. $c_2 = \frac{h - fc_1}{g}$ (předpokládáme, že $g \neq 0$; případ $g = 0$, $f \neq 0$ je analogický). Po dosazení do horní kvadratické rovnice máme

$$(c_1 - b_1)^2 + \big(\frac{h - fc_1}{g} - b_2\big)^2 = r^2, \quad \text{tj.}$$

$$c_1^2\big(1 + (\frac{f}{g})^2\big) - 2c_1\big(b_1 + \frac{f(h - b_2 g)}{g}\big) + b_1^2 + \big(\frac{h - b_2 g}{g}\big)^2 - r^2 = 0.$$

Vyjádříme diskriminant kvadratické rovnice:

$$D = 4\big[\big(\frac{b_1 g + fh - fgb_2}{g}\big)^2 - \big(1 + (\frac{f}{g})^2\big)\big(b_1^2 + \big(\frac{h - b_2 g}{g}\big)^2 - r^2\big)\big].$$

Je-li $D > 0$, úloha má dvě různá řešení, je-li $D = 0$, úloha má jediné řešení (v tomto případě je přímka $BC$ kolmá na přímku $m$) a je-li $D < 0$, úloha nemá žádné řešení.

**F** (a) Pro bod $W$ platí $|KW| = 5$ a $W \in p$, tj. $u^2 + (v - 3)^2 = 25$ a $u - 2v = 4$. Soustava rovnic má dvě řešení $W_1[0; -2]$, $W_2[4; 0]$.

(b) Podobně jako v (a) dostaneme soustavu dvou rovnic $u^2 + v^2 = 49$ a $au + bv = 1$. Jejich řešením jsou dva body

$W_1\big[\frac{a - b\sqrt{49(a^2+b^2)-1}}{a^2+b^2}; \frac{b + a\sqrt{49(a^2+b^2)-1}}{a^2+b^2}\big]$, $W_2\big[\frac{a + b\sqrt{49(a^2+b^2)-1}}{a^2+b^2}; \frac{b - a\sqrt{49(a^2+b^2)-1}}{a^2+b^2}\big]$

a přitom v případě $49(a^2 + b^2) > 1$, body $W_1$, $W_2$ existují a jsou různé; pokud $49(a^2 + b^2) = 1$, body $W_1$, $W_2$ splývají do bodu $W[\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{b}{a^2+b^2}]$; pokud $49(a^2 + b^2) < 1$, body $W_1$, $W_2$ neexistují.

(c) Tentokrát dostaneme tuto soustavu řešení: $(u - m)^2 + (v - n)^2 = d^2$, $au + bv = 0$. Jejím řešením jsou body
$W_1[b(bm - an) + b\sqrt{d^2 - (am + bn)^2}; a(an - bm) - a\sqrt{d^2 - (am + bn)^2}]$,
$W_2[b(bm - an) - b\sqrt{d^2 - (am + bn)^2}; a(an - bm) + a\sqrt{d^2 - (am + bn)^2}]$,
přitom nastávají tři případy:

1. $|d| > |am + bn|$, body $W_1$, $W_2$ existují a jsou různé,
2. $|d| = |am + bn|$, body $W_1$, $W_2$ splývají, řešením je jediný bod $W[b(bm - an); a(na - mb)$,
3. $|d| < |am + bn|$, body $W_1$, $W_2$ neexistují.

**G** Nejdříve vhodným způsobem zvolíme soustavu souřadnic tak, aby $A[0; 0]$ a přímky $p$, $q$ byly rovnoběžné s osou $x$. Nechť $p$: $y = b$, $q$: $y = c$. Pak budou mít hledané body souřadnice $B[b_1; b]$, $C[c_1; c]$, přičemž čísla $b_1$ a $c_1$ hledáme a čísla $b$, $c$ známe. Můžeme využít výsledků cvičení **B**, kde jsme zjistili vrcholy rovnostranného trojúhelníku, pokud bod $A$ leží v počátku soustavy souřadnic. Jestliže $B[b_1; b]$ je bod na přímce $p$, pak podle tohoto cvičení je $C_1\big[\frac{b_1}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}; \frac{b}{2} + \frac{b_1\sqrt{3}}{2}\big]$ a $C_2\big[\frac{b_1}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}; \frac{b}{2} - \frac{b_1\sqrt{3}}{2}\big]$. Vezměme bod $C_1$. O něm víme, že $C_1 \in q$, tedy jeho druhá souřadnice je dané číslo $c$. Tedy $\frac{b}{2} + \frac{b_1\sqrt{3}}{2} = c$, tj. $b_1 = \frac{2c-b}{\sqrt{3}}$. Ostatní podobně.

Úloha nemá pro $b = c = 0$, tj. $A \in p = q$ žádné řešení, pro $b = c \neq 0$ má jedno řešení $B\left[\frac{b}{\sqrt{3}}; b\right]$, $C\left[-\frac{b}{\sqrt{3}}; b\right]$ a pro ostatní případy dvě řešení $B_1\left[\frac{2c-b}{\sqrt{3}}; b\right]$, $C_1\left[\frac{c-2b}{\sqrt{3}}; c\right]$, $B_2\left[\frac{b-2c}{\sqrt{3}}; b\right]$, $C_2\left[\frac{2b-c}{\sqrt{3}}; c\right]$.

**H** Nechť je bod $X[x_0; y_0]$ bodem přímky $p$ takový, že přímka $AX \perp p$. Vzdálenost bodů $A[a_1; a_2]$, $X$ je hledaná vzdálenost bodu $A$ od přímky $p$. Ze vztahu $AX \perp p$ plyne:

$$(a_1 - x_0; a_2 - y_0) = k(a; b).$$

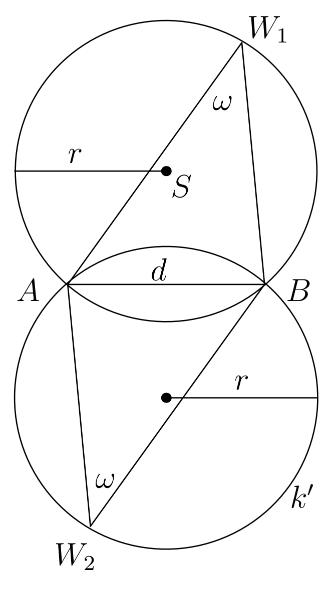
Ze vztahu $X \in p$ plyne $ax_0 + by_0 + c = 0$. Odtud

$$k = \frac{aa_1 + ba_2 + c}{a^2 + b^2}$$

a

$$|AX| = |k| \cdot |(a; b)| = \left|\frac{aa_1 + ba_2 + c}{a^2 + b^2}\right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**I** Uvedená implikace platí pouze v případě $d = 2r$, tj. $\omega = 90°$. Je-li $d \neq 2r$, pak pro bod $W_2$ ležící na kružnici $k'$ souměrné s kružnicí $k$ podle přímky $AB$ platí $2r \sin\omega = d$, ale $W_2 \notin k$ (obr. 10).




Obr. 10

**J** Úlohu upřesníme. Budeme hledat dva m-body $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$ různé od počátku $O$ tak, aby bylo $\varphi = |\sphericalangle AOB| = 30°$, nebo alespoň aby $\varphi$ se od $30°$ lišilo co nejméně. Každé dvojici m-bodů $A$, $B$ přiřadíme číslo $F(A, B) = |30° - \varphi|$ vyjadřující odchylku velikostí úhlů $30°$ a $\varphi$.

Protože hodnotu úhlu $\varphi$ potřebujeme vyjádřit pomocí souřadnic bodů $A$ a $B$, bude rozumné nejprve upravit funkci $F$. Při tom nám jde pouze o chování této funkce pro $\varphi$ blízká k $30°$, tj. o to, kdy $F(A, B)$ je číslo blízké k nule nebo přímo nula.

Ukážeme, že $F(A, B)$ nemůže být nulou, ale může nabývat hodnoty libovolně blízké k nule. Hodnota $|30° - \varphi|$ je blízká k nule, nebo nulová, právě když

$$\operatorname{tg}|30° - \varphi| = \left|\frac{\operatorname{tg} 30° - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg} 30° \operatorname{tg}\varphi}\right|$$

je blízký k nule, nebo nulový. To nastává, právě když hodnota $|\operatorname{tg} 30° - \operatorname{tg}\varphi|$ je blízká k nule, nebo nulová. Protože $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ je číslo iracionální a $\operatorname{tg}\varphi$ podle cvičení 2.10**K** je číslo racionální, nemůže být $\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg}\varphi = 0$. Ptáme se, jakou nejmenší hodnotu funkce $F$ nabývá, tj. hledáme $\min F(A,B)$. Ukážeme, že $F(A,B)$ může být libovolně blízké k nule.

Pro jednoduchost volíme $B = [1;0]$ a měníme pouze bod $A$, který označíme $A[x;y]$. Jak řečeno výše, funkci $F$ můžeme nahradit funkcí $f$ definovanou vztahem

$$f(x,y) = \left|\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{y}{x}\right| = \left|\frac{x - y\sqrt{3}}{x\sqrt{3}}\right|.$$

Výraz

$$f(x,y) = \left|\frac{x^2 - 3y^2}{x(x + y\sqrt{3})\sqrt{3}}\right|$$

bude malý, když čitatel bude malý a jmenovatel velký. Protože $x$, $y$ jsou celá čísla, je i $x^2 - 3y^2$ číslo celé. Tedy $|x^2 - 3y^2|$ je nejmenší, když je rovno číslu 1. Hledejme tedy $x$, $y$ tak, aby bylo $x^2 - 3y^2 = 1$.

Na řešení této rovnice použijeme počítač, nebo nalistujme v učebnici teorie čísel heslo Pellova rovnice. (*John Pell 1611–1685, angličan*). V prvním případě získáme sérii řešení:

$$(x,y) = (2,1), (7,4), (26,15), (97,56), (362,209), (1351,780), \dots$$

V druhém případě najdeme rekurentní formuli: Když $(x,y)$ je jedno řešení Pellovy rovnice, pak $(2x+3y, x+2y)$ je další její řešení. Lehce zkontrolujeme, že je to pravda.

Máme tedy nástroj na hledání stále lepší aproximace. Funkce $f$ nenabývá svého minima, ale může nabýt hodnoty menší než kterékoli kladné číslo. Jinak řečeno, 0 je infimum funkce $f$, a tedy i funkce $F$.

Posloupnost bodů $A_1[2;1]$, $A_2[7;4]$, $A_3[26;15]$, $A_4[97;56]$, $A_5[362;209]$, $A_6[1351;780], \dots$ určuje posloupnost úhlů $\sphericalangle A_1OB, \sphericalangle A_2OB, \dots$, které s rostoucí přesností aproximují úhel 30°. Výpočet dá tyto hodnoty stupňů (zaokrouhlené na miliontiny) pro $F(A_i,B)$: $3,434949$, $0,255119$, $0,018361$, $0,001318$, $0,000095$, $0,000007$,…

Poznámka: Posloupnost aproximací byla popsána rekurentně. Lze ji popsat předpisem? Vyřešení této otázky je dobrým vstupem do problému **2.15**.

$\boxed{\mathbf{K}}$ Předpokládejme sporem, že existuje rovnostranný mřížový trojúhelník $ABC$. Protože je to trojúhelník mřížový, je jeho obsah číslo tvaru $\frac{k}{2}$, kde $k \in \mathbf{N}$. Protože je to trojúhelník rovnostranný, je jeho obsah $\frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4}$. Tak docházíme ke sporu: $\frac{k}{2} = \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4}$ (vlevo je číslo racionální, vpravo číslo iracionální).

# Kapitola 3

## Cvičení 3.2

**A** Výsledky jsou v tabulce.

| | rovnicí | dvojicí bodů | bodem a vektorem |
|---|---|---|---|
| (a) | $x + 7y - 20 = 0$ | např. $A[-1; 3]$, $B[6; 2]$ | např. $A[-1; 3]$, $\vec{r} = (7; -1)$ |
| (b) | $3x - 5y + 2 = 0$ | např. $U[0; \frac{2}{5}], V[-\frac{2}{3}; 0]$ | např. $U[0; \frac{2}{5}]$, $\vec{q} = (5; 3)$ |
| (c) | $3x - 4y - 18 = 0$ | např. $P[2; -3]$, $Q[6; 0]$ | např. $P[2; -3]$, $\vec{p} = (4; 3)$ |

**B** Stačí popsat tři přeměny zadání přímky: rovnicí $\to$ dvěma body $\to$ bodem a vektorem $\to$ $\to$ rovnicí. Je-li dána rovnicí, najdeme dvě její různá řešení a máme dva body. Je-li dána dvěma body, najdeme směrový vektor přímky jako rozdíl bodů. Je-li dána bodem $Q$ a vektorem $\vec{p} = (u; v)$, pak rovnice této přímky má tvar $vx - uy + c = 0$, kde číslo $c$ najdeme dosazením bodu $Q$ do dané rovnice.

**C** (a) Dají. (b) Přímky rovnoběžné s osou $y$ se nedají, všechny ostatní se dají. (c) Přímky procházející počátkem nebo rovnoběžné s některou ze souřadnicových os se nedají, všechny ostatní se dají.

**D** (a) $p' \parallel p \wedge K \in p'$; $p' : x + 7y + 4 = 0$; $p' = \{[3; -1] + t(-7; 1); t \in \mathbf{R}\}$,
$q' \parallel q \wedge K \in q'$; $q' : 3x - 5y - 14 = 0$; $q' = \{[3; -1] + t(5; 3); t \in \mathbf{R}\}$,
$r' \parallel r \wedge K \in r'$; $r' : 3x - 4y - 13 = 0$; $r' = \{[3; -1] + t(4; 3); t \in \mathbf{R}\}$.

(b) $k_p \perp p \wedge K \in k_p$; $k_p$: $-7x + y + 22 = 0$; $k_p = \{[3; -1] + t(1; 7); t \in \mathbf{R}\}$,
$k_q \perp q \wedge K \in k_q$; $k_q$: $5x + 3y - 12 = 0$; $k_q = \{[3; -1] + t(3; -5); t \in \mathbf{R}\}$,
$k_r \perp r \wedge K \in k_r$; $k_r$: $4x + 3y - 9 = 0$; $k_r = \{[3; -1] + t(-3; 4); t \in \mathbf{R}\}$.

**E** 1. (i) Nechť $p$: $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $q$: $ex + fy + g = 0$, $(e, f) \neq (0, 0)$,

- $p \parallel q \Leftrightarrow (a; b) = k \cdot (e; f)$, $k \in \mathbf{R}$; nebo • $p \parallel q \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = 0$, tj. $af = eb$.
- $p \perp q \Leftrightarrow (a; b) = l \cdot (-f; e)$, $l \in \mathbf{R}$; • $p \perp q \Leftrightarrow (a; b) \cdot (e; f) = 0$, tj. $ae + bf = 0$.

1. (ii) Nechť $p$: $y = k_1 x + q_1$, $q$: $y = k_2 x + q_2$. Pak $p \parallel q \Leftrightarrow k_1 = k_2$ a $p \perp q \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

2. $p = KL$, $q = UV$, $K \neq L$, $U \neq V$,
- $p \parallel q \Leftrightarrow L - K = k \cdot (V - U)$, $k \in \mathbf{R}$.
- $a \perp b \Leftrightarrow \overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{UV} = 0$.

3. $p = \{P + t\vec{p}, t \in \mathbf{R}\}$, $q = \{Q + s\vec{q}, s \in \mathbf{R}\}$, $\vec{p}, \vec{q} \neq \vec{o}$.
• $p \parallel q \Leftrightarrow \vec{p} = k \cdot \vec{q}$, $k \in \mathbf{R}$.
• $p \perp q \Leftrightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$.

## Cvičení 3.6

**A** Rovnici přímky $q$ vynásobíme číslem $\sqrt{2}$. Dostaneme $q$: $\sqrt{2}x - \sqrt{8}y + \sqrt{2} = 0$ a platí $3^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2$. Tedy $u$: $(3 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{8})y - (2 - \sqrt{2}) = 0$, $v$: $(3 - \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{8})y - (2 + \sqrt{2}) = 0$.

**B** Stačí ukázat, že normálové vektory přímek $u$, $v$ jsou na sebe kolmé, tj. že jejich skalární součin je roven 0: $\vec{n}_u = (a + d; b + e)$, $\vec{n}_v = (a - d; b - e)$, $a^2 + b^2 = d^2 + e^2$, $\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v = (a + d)(a - d) + (b + e)(b - e) = 0$.

**C** Dvě řešení: $2x + y - 15 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$.

**D** Například $x \cos\varphi + y \sin\varphi = 0$, kde $\varphi \in \langle 0°; 180°)$.

**E** Chceme, aby pro koeficienty $a$ a $b$ v rovnici přímky $ax + by + c = 0$ platilo $a^2 + b^2 = 1$.

(a) Pro $p$: $x + 7y - 20 = 0$ platí $1^2 + 7^2 = 50$, tj. vydělíme obě strany rovnice číslem $\sqrt{50}$ a dostaneme $\frac{x}{\sqrt{50}} + \frac{7y}{\sqrt{50}} = \frac{20}{\sqrt{50}}$. Z toho $r = \frac{20}{\sqrt{50}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{50}}$ a $\sin\varphi = \frac{7}{\sqrt{50}}$, tedy $\operatorname{tg}\varphi = 7$ a $\varphi = \operatorname{arctg} 7$. Tedy $p$: $x \cos\varphi + y \sin\varphi = r$, kde $\varphi = \operatorname{arctg} 7$, $r = \sqrt{8}$. Ostatní podobně.

Výsledek: (b) $q$: $x \cos\varphi + y \sin\varphi = r$, kde $\varphi = 180° - \arcsin(\frac{5}{\sqrt{34}})$, $r = \frac{2}{\sqrt{34}}$,
(c) $r$: $x \cos\varphi + y \sin\varphi = r$, kde $\varphi = 360° - \arcsin(\frac{4}{5})$, $r = \frac{18}{5}$.

**F** Zobecním úvahy z předchozí úlohy. Rovnici přímky $p$ vydělíme číslem $\sqrt{a^2 + b^2}$ a dostaneme $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
(i) Pokud $c < 0$, pak $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $r = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
(ii) Pokud $c > 0$, pak $\cos\varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $r = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

**G** Číslo $r$, ke kterému jsme dospěli v řešení předchozího cvičení, je vlastně vyjádření vzdálenosti bodu $O$ od přímky $p$: $|Op| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Vezměme posunutí o vektor $(-m_1; -m_2)$, které posune bod $M$ do počátku $O$, libovolný bod $X[x; y]$ do bodu $X'[x - m_1; y - m_2]$ a přímku $p$ do přímky $p'$: $ax + by + am_1 + c + bm_2 = 0$ (ověřte). Podle předchozího cvičení pak $|Mp| = |Op'| = \frac{|am_1+bm_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Vzorec je odvozen.

**H** (a) $D = 0 \Leftrightarrow p, q, r$ tvoří svazek (viz tvrzení 3.2), nebo $p, q, r$ tvoří osnovu. (b) $D \neq 0 \Leftrightarrow$ dvě z přímek jsou rovnoběžné, třetí je s nimi různoběžná, nebo přímky $p$, $q$, $r$ ohraničují trojúhelník.

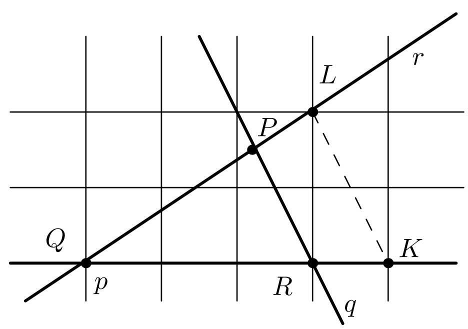
$\boxed{\mathbf{I}}$ Zjednodušme situace tak, že počátek souřadnicové soustavy umístíme do bodu $M$. Pak lze rovnici přímky $p$ psát ve tvaru $p$: $ax + by = 0$. Na této přímce již žádný další m-bod neleží, právě když $b \neq 0 \wedge \frac{a}{b} \notin \mathbf{Q}$.

$\boxed{\mathbf{J}}$ Rozlišíme dva případy. Jestliže $c \notin \mathbf{Z}$, je zřejmé, že takové $x, y \in \mathbf{Z}$ neexistují. Jestliže $c \in \mathbf{Z}$, pak na $p$ leží m-bod, právě když rovnice $ax+by+c = 0$ má celočíselné řešení. Jedná se o lineární Diofantovskou rovnici pro dvě neznámé a ta má řešení, pokud je číslo $c$ celočíselným násobkem čísla $\mathrm{D}(a, b)$.

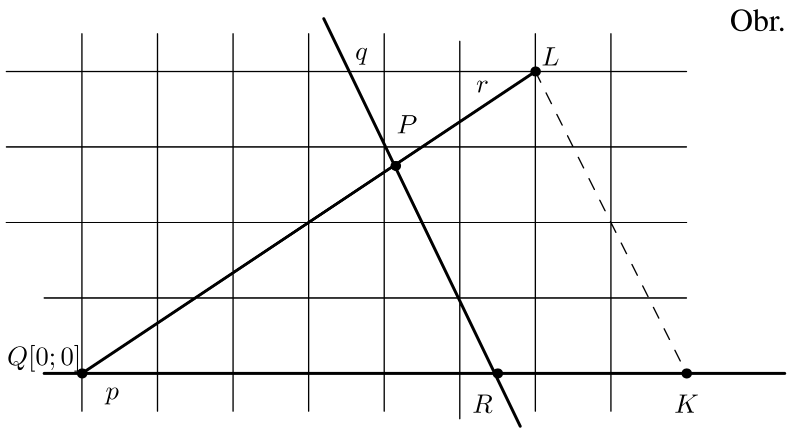
$\boxed{\mathbf{K}}$ Úlohu je možno řešit výpočtem průsečíků přímek, tj. bodů $P$, $Q$, $R$, které ohraničují zmíněný trojúhelník, zjistěním délek stran a použitím Heronova vzorce. My zde však podáme řešení, které ukazuje na další možnosti čtverečkovaného papíru.

(a) Snadno zjistíme, že průsečíky přímek $p \cap q$, $q \cap r$, $p \cap r$ jsou všechno m-body $[0; 0]$, $[1; -3]$, $[3; 1]$. Pro výpočet obsahu trojúhelníku můžeme tedy použít některé metody vyvozené pro m-trojúhelníky (Pickovu formuli, „orámování“, tvrzení 2.1). Obsah trojúhelníku je $5$.

(b) Situaci znázorníme na čtverečkovaný papír (obr. 11) a označíme $\{P\} = q \cap r$, $\{Q\} = p \cap r$, $\{R\} = p \cap q$, dále $L[3; 2]$ bod přímky $r$ a $K[4; 0]$ bod přímky $p$. Je zřejmé, že trojúhelníky $PQR$ a $LQK$ jsou podobné a $|KQ| : |RQ| = 4 : 3$. Protože obsah trojúhelníku $KQL$ je roven $4$, platí $|\triangle KQL| : |\triangle RQP| = 4^2 : 3^2$, a tedy $|\triangle RQP| = \frac{9}{16} \cdot 4 = \frac{9}{4}$.




Obr. 11

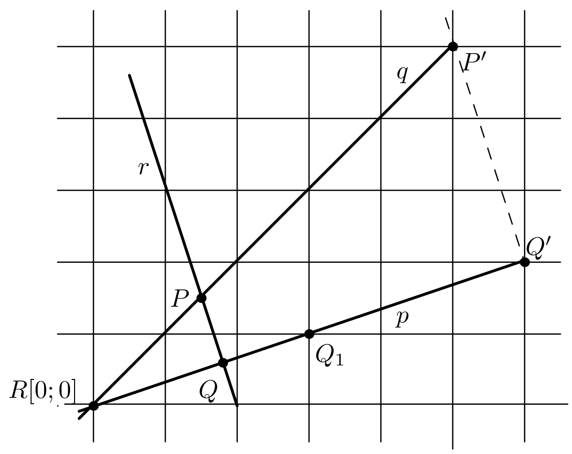



Obr. 12

(c) Po znázornění na čtverečkovaném papíru (obr. 12) lze opět využít vztahu trojúhelníků $PRQ$

a $LKQ$. Ty jsou podobné, poměr podobnosti je $16 : 11$, poměr jejich obsahů bude tedy roven $16^2 : 11^2$. Tedy $|\triangle PRQ| = \frac{121}{16^2}|\triangle LKQ| = \frac{121}{16^2} \cdot 16 = \frac{121}{16}$.

(d) Úlohu můžeme opět řešit s využitím čtverečkovaného papíru (obr. 13). Označme opět body $P$, $Q$, $R$ průsečíky příslušných přímek. Bod $R$ má souřadnice $[0;0]$. Souřadnice bodů $P$, $Q$ nejsou celočíselné. Využijeme metody „zvětšování trojúhelníku“ z úloh (b) a (c), čímž se vyhneme počítání souřadnic bodů $P$ a $Q$.




Obr. 13

Hledejme na přímce $p$ takový mřížový bod $Q'$ a na přímce $q$ takový mřížový bod $P'$, aby trojúhelníky $PRQ$ a $P'RQ'$ byly podobné. Nejbližšími takovými body jsou $P'[5;5]$, $Q'[6;2]$ a $|\triangle P'RQ'| = 10$. Délka úsečky $RQ$ je $\frac{3}{5}$ délky úsečky $RQ_1$ (lze zjistit např. metodou dělení úseček popsanou ve cvičení 2.3**F**), kde $Q_1[3;1]$ je první mřížový bod na polopřímce $RQ$ za bodem $Q$. Tedy $|RQ| : |RQ'| = \frac{3}{5} : 2$, a tedy $|\triangle PRQ| : |\triangle P'RQ'| = \frac{9}{25} : 4$. Odtud $|\triangle PRQ| = \frac{9}{10}$.

## Cvičení 3.9

**A** $R = P - \bullet - Q \Leftrightarrow (PQR) = -1$, $Q = P - \bullet - R \Leftrightarrow (PQR) = 2$, $P = R - \bullet - Q \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (PQR) = \frac{1}{2}$.

**B** (a) $R$ leží mezi $P$, $Q$, (b) $P = R$, (c) $P$ leží mezi $R$, $Q$, (d) $Q$ leží mezi $P$, $R$.

**C** $(QPR) = \frac{1}{x}$, $(QRP) = \frac{x-1}{x}$, $(RQP) = \frac{x}{x-1}$, $(PRQ) = 1 - x$, $(RPQ) = \frac{1}{1-x}$.

**D** Zavedeme souřadnicovou soustavu tak, aby bylo $A[0;0]$, $B[1;0]$, $C[1;1]$, $D[0;1]$. Pak $E[s;0]$, $F[1;s]$, $G[1-s;1]$, $H[0;1-s]$, kde $s = \frac{t}{t-1}$. Lehce prověříme, že $EFGH$ je čtverec pro všechna $s$.

**E** (a) Výrok je pravdivý, neboť $D = B - \bullet - C$, $E = A - \bullet - C$, $F = A - \bullet - B$.

(b) Výrok není pravdivý. Například pokud $A[0;0]$, $B[3;0]$, $C[0;3]$, pak $D[1;2]$, $E[0;1]$, $F[2;0]$. Trojúhelník $ABC$ je pravoúhlý, ale trojúhelník $DEF$ není.

## Cvičení 3.13

$\boxed{\mathbf{A}}$ (a) Přímka $AC$, (b) střed strany $BC$, (c) trojúhelník $ABC$ uvažovaný jako množina bodů, (d) střední příčka $EF$, kde $E = A - \bullet - C$ a $F = A - \bullet - B$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ Případy (a), (b), (c) $ABCD$ je rovnoběžník, (d) formálně vzato je to opět vyjádření rovnoběžníku, jenže operace „součet bodů“ nebyla definována, takže výraz nemá (aspoň prozatím) smysl, (e) $ABCD$ je lichoběžník, $AB \parallel CD$, (f) vektory $\vec{c}$, $\vec{d}$ jsou lineárně nezávislé, protože jinak by body $A$, $C$, $D$ ležely na přímce, a tudíž $ABCD$ by nebyl čtyřúhelník, (g) vztah je nepřípustný, protože z něj plyne, že $A = D$, $ABCD$ degeneruje na trojúhelník, (h) $ABCD$ je lichoběžník, $\vec{a} = -2\vec{c}$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ Důkaz pro případ, kdy je $ABCD$ čtverec, lze bez jakékoli změny přenést na případ obdélníku i rovnoběžníku. V důkazu jsme totiž nikde nepoužili ani pojem velikosti úsečky, délky, ani míru úhlu (např. kolmost). Hlavním pracovním nástrojem byl dělicí poměr. Podobné situace nazýváme *afinními* a podrobně je budeme studovat v souvislosti s transformačními grupami v analytické geometrii v dalším semestru.

$\boxed{\mathbf{E}}$ Výsledek: $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Závislost platí i v případě, že $X$ probíhá celou přímku $AB$ a $Y$ celou přímku $AD$ s výjimkou tří případů: $X = A$, tj. $x = 0$; $Y = A$, tj. $y = 0$; $XY \parallel AC$, tj. $x + y = 0$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ Právě když $0 > p > q > -1$.

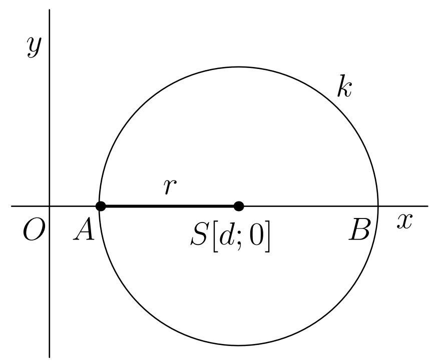
$\boxed{\mathbf{G}}$ (a) Dané dvě přímky jsou na sebe kolmé. (b) Přímka $OM$: $bx - ay = 0$, přímka $\lambda(M)$: $ax + by = 1$ a $(b; -a) \cdot (a; b) = 0$. (c) Jsou to všechny body kružnice $k$: $x^2 + y^2 = 1$. (d) $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $\lambda(B)$: $b_1x + b_2y = 1$, $A \in \lambda(B) \Leftrightarrow b_1a_1 + b_2a_2 = 1$ a $\lambda(A)$: $a_1x + a_2y = 1$, $B \in \lambda(A) \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 1$. QED.

(e) Zobrazení se nazývá kruhová inverze. Kruhová inverze, která má střed v počátku, a základní kružnice inverze má poloměr 1, je tedy zobrazení, které je definováno takto:

$$\forall X(x; y) \in \mathbf{R}, (x; y) \neq (0; 0); \exists X'\Big[\frac{x}{x^2 + y^2}; \frac{y}{x^2 + y^2}\Big].$$

$\boxed{\mathbf{H}}$ Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že střed $S$ leží na ose $x$, tj. $S[d; 0]$ (obr. 14). Pak pro bod $A \in k$ je $A[d - r; 0]$ a platí $A' = \lambda(A) = [\frac{1}{d-r}; 0]$, když $d \neq r$. Podobně pro bod $B \in k$ je $B[d + r; 0]$ a platí $B' = \lambda(B) = [\frac{1}{d+r}; 0]$, když $d \neq -r$.

Bod $S$ se zobrazí do bodu $S' = A' - \bullet - B' = [\frac{d}{d^2 - r^2}; 0]$, vzdálenost $|S'A'|$ je $\frac{1}{2}|\frac{1}{d-r} - \frac{1}{d+r}| = |\frac{r}{d^2 - r^2}|$.




Obr. 14

Hypotéza: Kružnice $k$ se zobrazí do $k'$ o rovnici
$(x - \frac{d}{d^2-r^2})^2 + y^2 = \frac{r^2}{(d^2-r^2)^2}$. Musíme dokázat:

$$X \in k \Leftrightarrow \lambda(X) \in k'.$$

Nechť tedy $X[u; v] \in k$, tj. $(u-d)^2 + v^2 = r^2$. Pak pro $\lambda(X) = X' = [\frac{u}{u^2+v^2}; \frac{v}{u^2+v^2}]$ platí (dosadíme souřadnice bodu $X'$ do levé strany rovnice $k'$ a budeme upravovat):

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2} - \frac{d}{d^2-r^2}\right)^2 + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{2ud}{(u^2+v^2)(d^2-r^2)} + \frac{d^2}{(d^2-r^2)^2} =$$
$$= \frac{d^2-r^2-2ud}{(u^2+v^2)(d^2-r^2)} + \frac{d^2}{(d^2-r^2)^2} \stackrel{*}{=} \frac{-(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)(d^2-r^2)} + \frac{d^2}{(d^2-r^2)^2} =$$
$$= \frac{d^2-(d^2-r^2)}{(d^2-r^2)^2} = \frac{r^2}{(d^2-r^2)^2} = r'^2$$

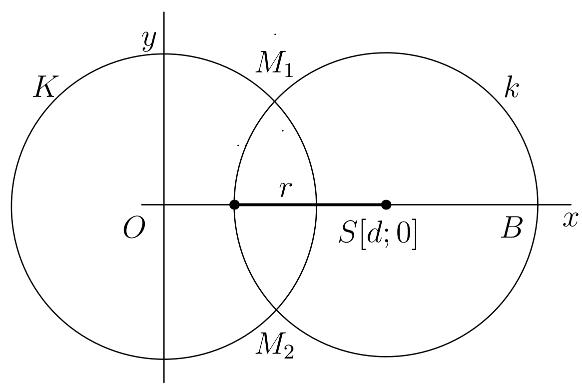
Rovnost označená $*$ plyne z faktu, že $X \in k$.

Zbývá vyšetřit případy $d = r$ a $d = -r$, tj. ty, kdy $O \in k$. Nechť $d = r$. Pak $k$: $(u-d)^2 + v^2 = d^2$ a tedy $k$: $u^2 + v^2 = 2ud$. V tomto případě pro $X[u; v] \in k$ je $X'[\frac{u}{u^2+v^2}; \frac{v}{u^2+v^2}]$ (kromě případu $u = v = 0$, tj. $X = O$). Pak $X'[\frac{1}{2d}; \frac{v}{2ud}]$, tedy $X'$ leží na přímce o rovnici $x = \frac{1}{2d}$. Pro $d = -r$ postupujeme analogicky. Bod $X'$ pak leží na přímce o rovnici $x = -\frac{1}{2d}$.

$\boxed{\mathbf{I}}$ Budeme vycházet z předchozí úlohy. $\lambda(k) = k \Rightarrow S = S' \Rightarrow d = \frac{d}{d^2-r^2} \Rightarrow d = 0 \vee$ $\vee\, d^2 - r^2 = 1$.

I. $d = 0$, pak $S = S' = O$ a kružnice jsou soustředné a $r = r'$, právě když $r = 1$. Jedná se tedy o základní kružnici kruhové inverze $K$: $x^2 + y^2 = 1$.

II. $d \neq 0$ a $d^2 - r^2 = 1$, tj. $d^2 = 1 + r^2$. Označme $\{M\} = k \cap K$ (obr. 15). Bod $M$ má souřadnice $[\frac{1}{d}; \frac{r}{d}]$. Vektory $\overrightarrow{MO}$ a $\overrightarrow{MS}$ jsou na sebe kolmé, tedy $\overrightarrow{MO}(-\frac{1}{d}; -\frac{r}{d})$, $\overrightarrow{MS}(-\frac{d^2-1}{d}; -\frac{r}{d})$ a $(-\frac{1}{d}; -\frac{r}{d}) \cdot (\frac{d^2-1}{d}; -\frac{r}{d}) = \frac{1-d^2}{d^2} + \frac{r^2}{d^2} = 0$. Kružnice $k$ a $K$ jsou na sebe kolmé (tečny v průsečíku $M$ kružnic $k$ a $K$ jsou na sebe kolmé). Říkáme také, že kružnice $K$ *ortogonálně protíná* kružnici $k$.




Obr. 15

## Cvičení 3.15

$\boxed{\textbf{A}}$ Zvolme repér $\langle A, \vec{u} = B - A, \vec{v} = C - A \rangle$ a počítejme v jeho souřadnicové soustavě. Označme $F = [p; 0]$, $E = [0; q]$, $p' = p - 1$, $q' = q - 1$. Bod $D$ je průsečík přímek $BC$: $x + y = 1$ a $EF$: $xq + yp = pq$ a má tedy souřadnice $D = [\frac{pq'}{q-p}; \frac{p'q}{p-q}]$.

Dále pak

$A - F = (-p; 0)$, $B - F = (-p'; 0) \Rightarrow x = \frac{p}{p'}$,
$A - E = (0; -q)$, $C - E = (0; -q') \Rightarrow z = \frac{q'}{q}$,
$B - D = mp'q(1; -1)$, $C - D = mpq'(1; -1) \Rightarrow y = \frac{p'q}{pq'}$, kde $m = (p - q)^{-1}$.

Odtud lehce najdeme hledanou závislost $x \cdot y \cdot z = 1$.

$\boxed{\textbf{B}}$ Repér i význam písmen $p, q, p', q'$ je stejný jako v předchozím cvičení. Přímky $CF$: $x + py = p$, $BE$: $qx + y = q$ se protnou v bodě $Q = [\frac{pq'}{pq-1}; \frac{p'q}{pq-1}]$ a přímky $BC$: $x + y = 1$ a $AQ$: $p'qx - pq'y = 0$ v bodě $D = [npq'; np'q]$, kde $n = (p'q + pq')^{-1}$.

Dále $B - D = np'q \cdot (1; -1)$, $C - D = -npq' \cdot (1; -1)$. Odtud $y = \frac{-p'q}{pq'}$.
Podobně $A - E = q(0; -1)$, $C - E = q'(0; -1)$, tedy $z = \frac{q'}{q}$.
A konečně $B - F = p'(-1; 0)$, $A - F = p(-1; 0)$, což znamená $x = \frac{p}{p'}$.
Pomocí vyjádření čísel $x$, $y$, $z$ najdeme hledanou závislost: $x \cdot y \cdot z = -1$.

$\boxed{\textbf{C}}$ Zvolme repér $\langle A, \vec{u} = B - A, \vec{v} = D - A \rangle$. V jeho souřadnicové soustavě označme $K = [p; 0]$, $L = [0; q]$, $p' = p - 1$, $q' = q - 1$, $r = (p' + q')^{-1}$, $s = (p' - q')^{-1} = (p - q)^{-1}$, $t = (pq - 1)^{-1}$.

Vypočteme body $C$, $M$, $N$: $C[tpq'; tp'q]$, $M[rpq'; rp'q]$, $N[-spq'; sp'q]$.
$L - M = rq' \cdot (-p; q)$, $K - M = rp' \cdot (p; -q) \Rightarrow x = \frac{-q'}{p'}$,
$L - N = sq' \cdot (p; -q)$, $K - N = sp' \cdot (p; -q) \Rightarrow y = \frac{q'}{p'}$.
Hledaná závislost: $x + y = 0$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ Zvolíme repér $\langle O, \vec{u}, \vec{v} \rangle$, kde $O$ je průsečík přímek $AC$, $BD$, $\vec{u}$ je libovolný směrový vektor přímky $OA$, $\vec{v}$ je libovolný směrový vektor přímky $OB$. Označme $A = [a; 0]$, $B = [0; b]$, $C = [c; 0]$, $D = [0; d]$, $E = [e; 0]$, $F = [0; f]$.

Přímky $BC$: $bx + cy = bc$ a $EF$: $fx + ey = ef$ se protínají v bodě
$K = [kce(b - f); kbf(e - c)]$, kde $k = [be - cf)^{-1}$,
Přímky $CD$: $dx + cy = cd$ a $AF$: $fx + ay = af$ se protínají v bodě
$L = [lac(d - f); ldf(a - c)]$, kde $l = [ad - cf)^{-1}$,
Přímky $AB$: $bx + ay = ab$ a $DE$: $dx + ey = de$ se protínají v bodě
$M = [mae(d - b); mbd(a - e)]$, kde $m = (ad - be)^{-1}$.

Použijeme tvrzení 3.5. Napíšeme determinant, který rozhodne o tom, zda body $K$, $L$, $M$ leží, nebo neleží v přímce. Nezajímá nás hodnota determinantu, pouze to, zda je roven 0. „Nulita" determinantu se nemění, když první řádek dělíme číslem $k$, druhý číslem $l$ a třetí číslem $m$:

$$\begin{vmatrix} kce(b-f) & kbf(e-c) & 1 \\ lac(d-f) & ldf(a-c) & 1 \\ mae(d-b) & mbd(a-e) & 1 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} ce(b-f) & bf(e-c) & be-cf \\ ac(d-f) & df(a-c) & ad-cf \\ ae(d-b) & bd(a-e) & ad-be \end{vmatrix}$$

Dále dělíme první řádek číslem $bcef$, druhý číslem $acdf$ a třetí číslem $abde$. Místo $\frac{1}{x}$ píšeme $x'$.
Dostáváme determinant:

$$\begin{vmatrix} f'-b' & c'-e' & c'f'-b'e' \\ f'-d' & c'-a' & c'f'-a'd' \\ b'-d' & e'-a' & b'e'-a'd' \end{vmatrix}$$

Řádky tohoto determinantu jsou lineárně závislé, neboť první mínus druhý plus třetí je nulový řádek. Proto je to determinant nulový. Body $K$, $L$, $M$ leží v přímce. Tvrzení je dokázáno.

Poznámka: Při volbě repéru jsme měli možnost volit vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ tak, aby se souřadnice dvou bodů zjednodušily. Například kdybychom byli volili $\vec{u} = A - O$, $\vec{v} = D - O$, bylo by $a = d = 0$. My jsme však záměrně toto zjednodušení nevyužili, aby lépe vynikla případná souměrnost. Ta nám též vlastně pomohla najít rychlé řešení. Podobné nevyužití možnosti specifikace je účinné u mnoha úloh. Například i u další a poslední ze série konfigurací **E**.

[!] Pozorný čtenář již asi zaregistroval autorovu lež. Hned na začátku důkazu jsme jako samozřejmost předpokládali, že přímky $AC$ a $BD$ jsou různoběžky. Nic nás k tomu neopravňovalo.

Musíme se vší skromností přiznat, že úloha je vyřešena jen pro případ, že přímky $AC$, $BD$ jsou různoběžné. Případ $AC \parallel BD$ je nutno doplnit. Toto potěšení přenecháme čtenáři.

**E** Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou směrové vektory přímek $SA$, $SB$, $SC$ volené tak, aby $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$. Zvolme repér $\langle S, \vec{u}, \vec{v}\rangle$, označme $A=[a;0]$, $B=[0;b]$, $C=[c;c]$, $D=[d;0]$, $E=[0;e]$, $F=[f;f]$.

Přímky $BC$: $(b-c)x+cy=bc$ a $EF$: $(e-f)x+fy=ef$ se protínají v bodě
$K=[kcf(b-e); kcb(f-e)+kef(b-c)]$, kde $k=(bf-ce)^{-1}$.

Přímky $AC$: $cx+(a-c)y=ac$ a $DF$: $fx+(d-f)y=df$ se protínají v bodě
$L=[lac(f-d)+ldf(a-c); lcf(a-d)]$, kde $l=(af-cd)^{-1}$.

Přímky $AB$: $bx+ay=ab$ a $DE$: $ex+dy=de$ se protínají v bodě
$M=[mad(b-e); mbe(d-a)]$, kde $m=(bd-ae)^{-1}$.

Chceme dokázat, že body $K$, $L$, $M$ leží v přímce. Podle tvrzení 3.5 stačí dokázat, že

$$\begin{vmatrix} kcf(b-e) & kcb(f-e)+kef(b-c) & 1 \\ lac(f-d)+ldf(a-c) & lcf(a-d) & 1 \\ mad(b-e) & mbe(d-a) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

První řádek dělíme číslem $k$, druhý číslem $l$ a třetí číslem $m$:

$$\begin{vmatrix} cf(b-e) & cb(f-e)+ef(b-c) & bf-ce \\ ac(f-d)+df(a-c) & cf(a-d) & af-cd \\ ad(b-e) & be(d-a) & bd-ae \end{vmatrix}$$

Dále dělíme první řádek číslem $bcef$, druhý číslem $acdf$ a třetí číslem $abde$. Místo $\frac{1}{x}$ píšeme $x'$. Dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} e'-b' & e'-b'+c'-f' & c'e'-b'f' \\ d'-a'+c'-f' & d'-a' & c'd'-a'f' \\ e'-b' & a'-d' & a'e'-b'd' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & v+w & X \\ u+w & u & Y \\ v & -u & Z \end{vmatrix},$$

který jsme zjednodušili zavedením označení $u, v, w, X, Y, Z$: $v=e'-b'$, $u=d'-a'$, $w=c'-f'$, $X=c'e'-b'f'$, $Y=c'd'-a'f'$, $Z=a'e'-b'd'$.

Poslední determinant upravíme. Druhý řádek přičteme k prvnímu i k třetímu a označíme $t=u+v+w$. Pak druhý sloupec odečteme od prvního. Konečně použijeme Cramerovo pravidlo a výraz upravíme.

$$\begin{vmatrix} t & t & X+Y \\ u+w & u & Y \\ t & 0 & Y+Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & t & X+Y \\ w & u & Y \\ t & 0 & Y+Z \end{vmatrix} = t(tY - wY - wZ - uX - uY) =$$

$$= -t(uX - vY + wZ) =$$

$$= -t[(d' - a')(c'e' - b'f') - (e' - b')(c'd' - a'f') + (c' - f')(a'e' - b'd')] = 0$$

Poznámka: Zajímavé poznání o metodě analytické geometrie přinese zamyšlení se nad tím, do jaké míry bylo naše řešení pěti konfiguračních cvičení v souladu s návodem diskutovaným v 3.8**B**.

# Kapitola 4

## Cvičení 4.5

**A** Dokážeme dvě inkluze. (i) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, (ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

(i) Nechť je dán bod $X \in \mathcal{B}$, $X = M + x\vec{p} + y\vec{q}$. Tedy čísla $x$, $y \in \mathbf{R}$ jsou dána. Pak podle 4.2**A** $X = [\frac{d}{a}; 0; 0] + x(-b; a; 0) + y(-c; 0; a) = [\frac{d}{a} - xb - yc; xa; ya]$, tedy $x_1 = \frac{d}{a} - xb - yc$, $x_2 = xa$, $x_3 = ya$ a $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, tj. $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Naopak, nechť jsou dány souřadnice $x_1$, $x_2$, $x_3$ bodu $X \in \mathcal{A}$, tedy $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, z čehož plyne $x_1 = \frac{d}{a} - \frac{bx_2}{a} - \frac{cx_3}{a}$. Položme $x = \frac{x_2}{a}$, $y = \frac{x_3}{a}$. Ověřením zjistíme, že skutečně $X = M + x\vec{p} + y\vec{q}$. Tedy $X \in \mathcal{B}$.

**B** Uvažujme čtyři případy.

1. $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \vec{o}$. Pak $A = B = C = D$. Všechny čtyři body splývají.

2. Jeden z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je nenulový a zbylé dva jsou jeho násobkem. Nechť například $\vec{u} \neq \vec{o}$. Pak jsou $A$, $B$ různé a body $C$, $D$ leží na přímce $AB$.

3. Dva z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé a třetí vektor je jejich lineární kombinací. Nechť například $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou lineárně nezávislé. Pak $ABC$ je rovina a bod $D$ v ní leží.

4. Všechny tři vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé. Pak $\langle A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle$ je repér prostoru $E^3$ a $ABCD$ je čtyřstěn, tj. tyto čtyři body neleží v rovině.

**C** (a) (i) $B = A + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{w} + \vec{v})$, $C = A + \vec{u}$, $D = A + \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $E = A - \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $F = A + \vec{v}$, $G = A + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $H = A + \vec{w}$.
(ii) $A[0; 0; 0]$, $B[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}]$, $C[1; 0; 0]$, $D[\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $E[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $F[0; 1; 0]$, $G[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $H[0; 0; 1]$.

(b) (i) Např. úsečka $AB = \{A + \frac{1}{2}t(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}), t \in \langle 0, 1\rangle\}$.
(ii) Např. úsečka $AB = \{[\frac{1}{2}t; \frac{1}{2}t; -\frac{1}{2}], t \in \langle 0, 1\rangle\}$.

(c) Např. stěna $ABCD$. (i) $ABCD = \{A + \frac{1}{2}t(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) + \frac{1}{2}r(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}), t, r \in \langle 0, 1\rangle\}$.
(ii) $ABCD = \{[\frac{t}{2} - \frac{r}{2}; \frac{t}{2} + \frac{r}{2}; -\frac{t}{2} + \frac{r}{2}], t, r \in \langle 0, 1\rangle\}$.

Ostatní přenecháme čtenáři.

**D** Přímka $r$ je rovnoběžná s přímkou $o$, tedy její směrový vektor $\vec{r}$ je lineárně závislý se směrovým vektorem $\vec{o} = (0; 1; 1)$ přímky $o$, tj. $r = X + k\vec{o}$, $k \in \mathbf{R}$. Dále víme, že přímka $r$ protíná přímku $p$. Označme $p \cap r = \{A\}$. Bod $A$ je nějakým bodem přímky $p$, proto $A[1; m_A; 0]$. Přímka $r$ musí být také různoběžná s přímkou $q$. Jejich průsečík $B$ musíme tedy umět vyjádřit jednak jako bod přímky $r$, ale také jako bod přímky $q$: $B = [1; m_A; 0] + k_B(0; 1; 1) = [0; 0; 1] + t_B(1; 1; 0)$.

Řešením jednoduché soustavy tří rovnic pro tři neznámé dostáváme $m_A = 0$, $k_B = 1$, $t_B = 1$. Odtud $r = [1; 0; 0] + k(0; 1; 1)$ nebo též $r$: $x = 1$, $y = k$, $z = k$; $A[1; 0; 0]$, $B[1; 1; 1]$.

**E** Rada: Příčku $r$ můžeme najít např. jako průsečnici roviny $\alpha$ určené přímkou $p$ a bodem $S$ a roviny $\beta$ určené přímkou $q$ a bodem $S$.

Výsledek: $r$: $x = \frac{1}{2} + s$, $y = \frac{1}{2} + s$, $z = \frac{1}{2} - s$, $s \in \mathbf{R}$.

**F** (1) (a) Směrové vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ přímek $p$, $q$ jsou lineárně nezávislé, vektor $\overrightarrow{PQ}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$, tedy $\dim \langle P, \vec{p}, \vec{q} \rangle = 2$ a $\dim \left\langle P, \vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 2$. Přímky $p$, $q$ jsou různoběžné a jejich průsečík $X$ má souřadnice $[1; 0; -1]$.
(b) $\dim \left\langle R, \vec{r}, \vec{n}, \overrightarrow{RN} \right\rangle = 3$, tedy přímky $r$, $n$ jsou mimoběžné.
(c) $\dim \left\langle P, \vec{m}, \vec{k} \right\rangle = 1$, $\dim \left\langle P, \vec{m}, \vec{k}, \overrightarrow{PM} \right\rangle = 2$, tedy přímky $m$, $k$ jsou rovnoběžné různé.
(d) $\dim \left\langle P, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS} \right\rangle = 3$, tedy přímka $r$ je s rovinou $\alpha$ různoběžná a protíná ji v bodě $Y = [\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$.
(2) $2x - 3y + 5z - 2 = 0$

**G** Podobně jako v úloze 4.2**C** použijeme k popisu vzájemné polohy rovin $\alpha$, $\beta$ dva prostory: $\mathcal{F} = \{A + x\vec{p} + y\vec{q} + u\vec{u} + v\vec{v}; x, y, u, v \in \mathbf{R}\}$ a $\mathcal{G} = \{A + x\vec{p} + y\vec{q} + z(B - A); x, y, z \in \mathbf{R}\}$. Pak nastávají tyto možnosti:

| $\dim \mathcal{F}$ | $\dim \mathcal{G}$ | vzájemná poloha |
|---|---|---|
| 2 | 2 | $\alpha = \beta$ |
| 2 | 3 | $\alpha \parallel \beta \wedge \alpha \neq \beta$ |
| 3 | 3 | $\alpha$, $\beta$ jsou různoběžné |

## Cvičení 4.7

**A** V souřadnicové soustavě dané repérem $\langle D, \vec{u} = A - D, \vec{v} = B - D, \vec{w} = C - D \rangle$ je $T_A = [0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$, $T_B = [\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}]$, $T_C = [\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0]$, $T_D = [\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$, odkud pak dále:

$t_a = \{A + p(T_A - A); p \in \langle 0, 1 \rangle\} = \{[1 - p; \frac{p}{3}; \frac{p}{3}]; p \in \langle 0, 1 \rangle\}$, podobně
$t_b = \{[\frac{m}{3}; 1 - m; \frac{m}{3}]; m \in \langle 0, 1 \rangle\}$, $t_c = \{[\frac{n}{3}; \frac{n}{3}; 1 - n]; n \in \langle 0, 1 \rangle\}$, $t_d = \{[\frac{q}{3}; \frac{q}{3}; \frac{q}{3}]; q \in \langle 0, 1 \rangle\}$.

Najdeme průsečík těžnic $t_a$ a $t_d$: $T = [1 - p; \frac{p}{3}; \frac{p}{3}] = [\frac{q}{3}; \frac{q}{3}; \frac{q}{3}]$.

Odtud $1 - p = \frac{q}{3}$ a $p = q$, tj. $p = q = \frac{3}{4}$ a $T = [\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$.

Ze symetrie plyne, že $T$ leží i na $t_b$, $t_c$, což lze nahlédnout lehce přímo. Protože $T - A = \frac{3}{4}(T_A - A)$, je $\overrightarrow{T_A T} = \frac{1}{4}\overrightarrow{T_A A}$.

**B** Bod $Q_1$ probíhá vnitřek těžnice $t_d$, bod $Q_2$ probíhá vnitřek těžnice $t_c$ (s výjimkou těžiště $T$, jestliže rovnoběžník nepovažujeme za speciální případ lichoběžníku).

**C** Výsledek: $\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Vztah platí i pro $X$, $Y$, $Z$, které neleží uvnitř příslušných hran, ale pohybují se po přímce. Musíme však vyloučit případy, kdy $X = A$, $Z = A$, $Y = A$, $W = A$.

**D** Rada: Použijte v řešení tvrzení 4.1 pro zajištění toho, aby body $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ byly komplanární.

Výsledek: $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

## Cvičení 4.9

**A** Případy (a)–(e) jsou lehké. Dokážeme případ (f). Přímý výpočet dá

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (c_1, c_2, c_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

Dále pak platí $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \det[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = \det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

**B** Dlouhý výpočet si zjednodušíme tíme, že se omezíme na porovnání členů obsahujících souřadnici $a_1$. Na levé straně dostaneme výraz

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + \cdots = a_1 b_2 (c_1 d_2 - d_1 c_2) + a_1 b_3 (c_1 d_3 - d_1 c_3) + \ldots .$$

Na pravé straně vztahu dostaneme výraz

$a_1 c_1 (b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3) - a_1 d_1 (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) + \cdots = a_1 b_2 (c_1 d_2 - d_1 c_2) + a_1 b_3 (c_1 d_3 - {}$
${} - d_1 c_3) + \ldots .$

Vidíme, že oba výrazy jsou stejné. Analogicky jsou stejné i výrazy obsahující souřadnici $a_2$ i výrazy obsahující souřadnici $a_3$. Tím je identita dokázána.

**C** Řešením je tvrzení 4.6.

**Tvrzení 4.6:** V kartézské souřadnicové soustavě je dán čtyřstěn $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$, $C[c_1; c_2; c_3]$, $D[d_1; d_2; d_3]$. Objem čtyřstěnu $ABCD$ je dán vzorcem

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Důkaz: Patu kolmice spuštěné z vrcholu $C$ na rovinu $ABD$ označme $M$. Objem $V_{ABCD}$ najdeme jako $\frac{1}{3} \cdot S \cdot d$, kde $S$ je obsah trojúhelníku $ABD$ a $d = |MC|$ je výška čtyřstěnu odpovídající vrcholu $C$.

Označme $\vec{a} = A - D, \vec{b} = B - D, \vec{c} = C - D$. Vektor $\vec{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu $ABD$.

Výpočet $S$: Podle úlohy 4.8**F** je $|\vec{a} \times \vec{b}|$ obsah rovnoběžníku, jehož polovinou je trojúhelník $ABD$. Proto $S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Výpočet $d$: Víme, že $d = |C - M| = |\vec{c} - \vec{m}|$, kde $\vec{m} = M - D$. Protože jsou vektory $\overrightarrow{MC}$ a $\vec{u}$ kolmé na rovinu $ABD$, jsou lineárně závislé. Navíc $|\vec{n}| = 1$, proto $\overrightarrow{MC} = \pm d \cdot \vec{n}$, kde znaménko závisí na orientaci vektoru $\vec{n}$. To ale nehraje žádnou roli. Platí totiž $\overrightarrow{MC} = \vec{c} - \vec{m}$, tj. $\pm d \cdot \vec{n} = \vec{c} - \vec{m}$, odkud $\pm d \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = \vec{c} \cdot \vec{n} - \vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{c} \cdot \vec{n}$, neboť $\vec{m} \perp \vec{n}$. Tedy $d = |\vec{c} \cdot \vec{n}| = |\frac{\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}|$.

Výpočet $V_{ABCD}$: Oba dílčí výsledky dosadíme do původního vztahu. Dostaneme $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot d = \frac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\frac{\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}| = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

Podle vztahu (f) ze cvičení 4.9**A** je

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = |\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \left|\begin{vmatrix} a_1 - d_1 & a_2 - d_2 & a_3 - d_3 \\ b_1 - d_1 & b_2 - d_2 & b_3 - d_3 \\ c_1 - d_1 & c_2 - d_2 & c_3 - d_3 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} a_1 - d_1 & a_2 - d_2 & a_3 - d_3 & 1 \\ b_1 - d_1 & b_2 - d_2 & b_3 - d_3 & 1 \\ c_1 - d_1 & c_2 - d_2 & c_3 - d_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Odtud ihned plyne tvrzení 4.6.

$\boxed{\mathbf{D}}$ Z rovnice roviny $\gamma$ máme $z = 4y - 1$ a z rovnice roviny $\beta$ pak $x = 4 - y$. Tedy bod $M(t) = [4-t; t; 4t-1]$ pro $t \in \mathbf{R}$ probíhá přímku $p$. Hledáme takové hodnoty $b \neq c$ parametru $t$, aby body $B = M(b), C = M(c)$ spolu s bodem $A[0; 1; 0]$ tvořily rovnostranný trojúhelník, tj. aby $|AB| = |AC| = |BC|$. Po přepsání do souřadnic dostaneme $b^2 - b + 1 = c^2 - c + 1 = (b - c)^2$.

Z prvního vztahu je $b^2 - c^2 = b - c$, tj. $(b - c)(b + c - 1) = 0$, tedy $b + c - 1 = 0$, čili $b = 1 - c$. Po dosazení do druhé rovnosti je $c^2 - c + 1 = (1 - 2c)^2$, tj. $c(c - 1) = 0$.

Dvě možnosti, které získáváme $b = 0$, $c = 1$ a $b = 1$, $c = 0$, se liší pouze označením. Stačí vzít jen první z nich a pak jsou $B[4; 0; -1]$, $C[3; 1; 3]$ hledané body.

$\boxed{\mathbf{E}}$ (a) $d$, (b) $d$, (c) $\frac{d}{\sqrt{3}}$, (d) $\frac{d}{\sqrt{6}}$.

$\boxed{\mathbf{F}}$ Vzdálenost hran $AB$ a $CD$ označme $|AB, CD|$. (a) $|AB, CD| = 2$, $|AC, BD| = 1$, $|AD, BC| = 1$. (b) $|AB, CD| = 2$, $|AC, BD| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $|AD, BC| = \sqrt{2}$.

$\boxed{\mathbf{G}}$ Nechť $v_A$, $v_B$, $v_C$, $v_D$ jsou přímky výšek vedených z vrcholů $A$, $B$, $C$ a $D$. Jejich směrové vektory najdeme pomocí vektorového součinu. Např. $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}$.

(a) Přímky $v_A = \{[0;0;0] + a(-2;-2;-1), a \in \mathbf{R}\}$ a $v_B = \{[1;1;0] + b(-2;-2;1), b \in \mathbf{R}\}$ jsou různoběžné a protínají se v bodě $V[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}]$.

Přímky $v_C = \{[1;0;2] + c(2;-2;1), c \in \mathbf{R}\}$ a $v_D = \{[0;1;2] + d(-2;2;1), d \in \mathbf{R}\}$ jsou různoběžné a protínají se v bodě $W[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{7}{4}]$. Ostatní čtyři dvojice přímek výšek jsou mimoběžné. Takovýto čtyřstěn se nazývá *biortocentrický*.

(b) Čtyřstěn $ABCD$ je rovněž biortocentrický: $v_A \cap v_B = \{B\}$, kde $B[1;1;-1]$, $v_C \cap v_D = \{C\}$, kde $C[1;1;1]$. Ostatní čtyři dvojice přímek výšek jsou mimoběžné.

$\boxed{\mathbf{H}}$ Střed kulové plochy opsané čtyřstěnu je průsečíkem rovin souměrnosti jednotlivých hran čtyřstěnu. Vezměme například roviny souměrnosti tří hran $AB$, $AC$ a $AD$ , které neleží v jedné stěně, a označme je po řadě $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ jsou normálové vektory rovin $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Ty procházejí středy příslušných hran.

(a) $\beta$: $x + y - 1 = 0$, $\gamma$: $x + 2z - 2,5 = 0$, $\delta$: $y + 2z - 2,5 = 0$, $\beta \cap \gamma \cap \delta = \{O\}$, $O[0{,}5; 0{,}5; 1]$.

(b) $\beta$: $x = 0$, $\gamma$: $x + z = 0$, $\delta$: $x - y + z = 0$, $\beta \cap \gamma \cap \delta = \{O\}$, $O[0;0;0]$.

$\boxed{\mathbf{I}}$ Střed podstavy $S$ je těžiště trojúhelníku $ACE$, tedy $S[11;5;1]$ a $D = S + \overrightarrow{AS} = [14;0;-7]$, $F = S + \overrightarrow{CS} = [12;1;10]$ a $B = S + \overrightarrow{ES} = [7;14;0]$.

Obsah podstavy, tj. pravidelného šestiúhelníku, je $147\sqrt{3}$. Objem jehlanu je $\frac{1}{3} \cdot 147\sqrt{3} \cdot |SV| =$ $= 1\,029$, z čehož po úpravě $|SV| = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7 \cdot \sqrt{3}$.

Vektor $\overrightarrow{SV}$ je kolmý na vektor $\overrightarrow{SA}$ a $\overrightarrow{SC}$, tedy $\overrightarrow{SV} = \overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SC}$ a po úpravě $\overrightarrow{SV} = t(11;5;1)$. Konečně $|\overrightarrow{SV}| = \sqrt{t^2(11^2 + 5^2 + 1^2)} = |t|\sqrt{147} = \frac{21}{\sqrt{3}}$ a odtud $t = 1$, nebo $t = -1$. Dostáváme dva výsledky: $V_1 = S + \overrightarrow{SV} = [22;10;2]$, $V_2 = S - \overrightarrow{SV} = [0;0;0]$.

$\boxed{\mathbf{J}}$ Hledáme nejprve bod $D[d_1; d_2; d_3]$. Víme, že

$$D \in ABM \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow d_1 + 8d_2 - 4d_3 + 1 = 0.$$

(Použili jsme tvrzení 4.1.)

$$AD \perp AB \Rightarrow (D - A)(B - A) = 0 \Rightarrow -4d_1 + 4d_2 + 7d_3 - 4 = 0$$
$$|AD| = |AB| \Rightarrow (d_1 + 1)^2 + d_2^2 + d_3^2 = 81$$

Získaná soustava tří rovnic má dvě řešení:

$$d_1 = 7, d_2 = 1, d_3 = 4 \text{ a } d_1 = -9, d_2 = -1, d_3 = -4.$$

Podmínce $d_1 \geqq 0$ vyhovuje pouze první řešení, tedy $D[7; 1; 4]$.

Vrchol $C$ teď získáme z vazby $C - \bullet - A = B - \bullet - D$, tj. $\frac{c_i + a_i}{2} = \frac{b_i + d_i}{2}$ pro $i = 1, 2, 3$. Z těchto vztahů získáme $C[3; 5; 11]$.

Vrchol $E[e_1; e_2; e_3]$ najdeme ze tří podmínek:

$$\begin{aligned}
&AE \perp AB \Rightarrow (e_1 + 1; e_2; e_3) \cdot (-4; 4; 7) = 0 && \Rightarrow -4e_1 + 4e_2 + 7e_3 = 4\\
&AE \perp AD \Rightarrow (e_1 + 1; e_2; e_3) \cdot (8; 1; 4) = 0 && \Rightarrow 8e_1 + e_2 + 4e_3 = -8\\
&|AE|^2 = |AB|^2 \Rightarrow (e_1 + 1)^2 + e_2^2 + e_3^2 = 81
\end{aligned}$$

Z této soustavy tří rovnic dostáváme dvě řešení

$$e_1 = 0, e_2 = 8, e_3 = -4, \text{ nebo } e_1 = -2, e_2 = -8, e_3 = 4.$$

Podmínce $e_1 \geqq 0$ vyhovuje pouze první řešení, tedy $E[0; 8; -4]$.

Dále ze vztahů $A - \bullet - F = B - \bullet - E$, $A - \bullet - G = C - \bullet - E$ a $A - \bullet - H = D - \bullet - E$ najdeme $F[-4; 12; 3]$, $G[4; 13; 7]$, $H[8; 9; 0]$.

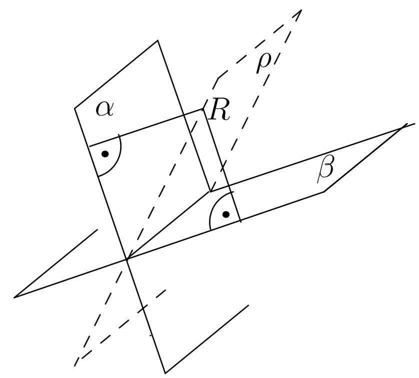
**K** Roviny $\alpha$, $\beta$, $\rho$ mají společnou přímku, tedy hod $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 0 & -2\\ a & b & c & d \end{pmatrix} = 2.$

Odtud plyne, že třetí řádek matice je lineární kombinací prvních dvou řádků: $a = t + 3r$, $b = -4t + 3r$, $c = -t$, $d = t - 2r$, kde $t, r \in \mathbf{R}$, alespoň jedno z čísel $t$, $r$ je nenulové.

Z podmínky $R \in \rho$ plyne $2a - c + d = 0$, tj. $t + r = 0$. Položme $r = 1$, $t = -1$ a získáme rovnici roviny $\rho$: $2x + 7y + z - 3 = 0$. Podobně z podmínky $S \in \sigma$ máme $\sigma$: $4x - y - z - 1 = 0$.

K důkazu tvrzení $|\sphericalangle \alpha\rho| = |\sphericalangle \beta\rho|$ stačí ukázat $|R\alpha| = |R\beta|$ (obr. 16). Skutečně $|R\alpha| = \frac{|2+1+1|}{\sqrt{1+16+1}}$, $|R\beta| = \frac{|6-2|}{\sqrt{9+9}}$, tedy $|R\alpha| = |R\beta|$. Stejně $|S\alpha| = \frac{8}{3\sqrt{2}} = |S\beta|$.

**L** Bod $S[-4; 4; 7]$ je střed tělesové úhlopříčky $EF$ a tedy je to i střed oktaedru. Rovina $\delta$: $4x - 4y - 7z + 81 = 0$ je rovinou souměrnosti úhlopříčky $EF$, tedy $A, B, C, D \in \delta$. Konečně $|ES| = 9$ a $|EA| = |ES|\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$.




Obr. 16

Pro bod $A[u;v;w]$ máme

$$A \in \rho \Rightarrow u + v - w + 2 = 0,$$

$$A \in \delta \Rightarrow 4u - 4v - 7w + 81 = 0.$$

Tedy $v = \frac{67-3u}{11}$, $w = \frac{8u+89}{11}$. Protože $|EA| = 9\sqrt{2}$, platí $u^2 + v^2 + w^2 = 162$. Po dosazení za $v$ a $w$ do kvadratické rovnice a po úpravě máme $97u^2 + 511u - 3\,596 = 0$, odkud $u_1 = 4$, $u_2 = -\frac{899}{97}$. Zadání vyhovuje pouze celočíselné řešení, tj. $u = 4$. Po dopočítání zbylých souřadnic dostáváme $A[4;5;11]$.

Bod $C$ vyjádříme jako $C = S + \overrightarrow{AS} = [-12;3;3]$. Směrový vektor $\vec{u}$ přímky $BD$ získáme jako vektorový součin vektorů $\overrightarrow{SE}$ a $\overrightarrow{SA}$ a bod $B$, resp. $D$ vyjádříme jako $B = S + t_1\vec{u}$, resp. $D = S + t_2\vec{u}$. Vektor $\vec{u}$ vyjde $(-1;-8;4)$ a najdeme taková čísla $t_1$, resp. $t_2$, aby $|BS| = |DS| = |AS| = 9$.

Výsledek: $B[-5;-4;11]$, $D[-3;12;3]$.

$\boxed{\mathbf{M}}$ Pata kolmice z bodu $A$ na rovinu $\rho$ je bod $S[\frac{10}{3};\frac{10}{3};-\frac{1}{3}]$. (Bod $S$ najdeme z podmínek $S \in \rho$ a $S$ leží na přímce $p$, která je kolmá na rovinu $\rho$.) Velikost $|AS| = |A\rho| = \frac{14}{\sqrt{3}}$ je délka výšky čtyřstěnu. Tedy délka hrany je $|AS| \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 7\sqrt{2}$.

Vrchol $B[u;v;w]$ najdeme z podmínek:

$$B \in \rho \Rightarrow -11u + v + 5w + 35 = 0$$

$$B \in \sigma \Rightarrow 9u - 4v + w - 49 = 0$$

Tedy $v = \frac{8u-40}{3}$, $w = \frac{5u-13}{3}$. Protože $|AB| = 7\sqrt{2}$, platí $(u+4)^2 + (v-4)^2 + (w-3)^2 = 98$. Po dosazení za $v$ a $w$ do kvadratické rovnice a po úpravě získáme rovnici $(u-5)^2 = 0$, která má jediný kořen $u = 5$. Tedy $B[5;0;4]$.

Dále hledáme bod $C[b;c;d]$. Najdeme nejprve pomocný bod $E = C - \bullet - D$ pomocí bodu $S$ (těžiště trojúhelníku $ABC$) a vektoru $\overrightarrow{BS}$ jako $E = S + \frac{1}{2}(S - B) = [\frac{5}{2}; 5; -\frac{5}{2}]$. Pak pro bod $C$ platí

$$\begin{aligned} &CE \perp EB && \Rightarrow (C-E)(E-B) = 0 \Rightarrow 5b - 10c + 13d + 70 = 0, \\ &C \in \rho && \Rightarrow -11b + c + 5d + 35 = 0, \\ &|CB| = 7\sqrt{2} && \Rightarrow (b-5)^2 + c^2 + (d-4)^2 = 98. \end{aligned}$$

Z prvních dvou lineárních rovnic najdeme

$$b = \frac{3d}{5} + 4 \ \text{ a } \ c = \frac{8d}{5} + 9$$

a dosadíme do poslední rovnice, kvadratické. Získáme rovnici $d^2 + 5d = 0$, z níž dostaneme $d_1 = 0$, $d_2 = -5$. To odpovídá hledaným vrcholům $C$, $D$. Po dosazení získáme $C[1;1;-5]$, $D[4;9;0]$.

# Kapitola 5

## Cvičení 5.5

**A** Pro hledaný vektor $\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ platí $\vec{n} \cdot \vec{a} = \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$, tj. $x\vec{a} \cdot \vec{a} + y\vec{a} \cdot \vec{b} + z\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ a $x\vec{a}\cdot\vec{b}+y\vec{b}\cdot\vec{b}+z\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$. Po přepsání do souřadnic vektorů dostáváme soustavu $9x-5y+13z = 0$, $-5x + 9y - z = 0$. Její řešení $x = 2t$, $y = t$, $z = -t$, $t \in \mathbf{R}$, dává (pro $t = -1$) hledaný vektor $\vec{n} = (2; 0; 1; 0)$.

**B** (a) Označme hod $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} = h$. Platí $\vec{n} = \vec{o}$, právě když každý subdeterminant řádu 3 uvedené matice je nulový, tj. když $h \leqq 2$, což platí, právě když jsou vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lineárně závislé.

(b) Determinant $\det[\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ rozvineme podle prvního řádku a dostaneme

$$n_1 n_1 + n_2 n_2 + n_3 n_3 + n_4 n_4 = \vec{n}^2.$$

## Cvičení 5.8

**A** Definice B2: Nechť jsou dány v $E^2$ tři nekolineární body $A$, $B$, $C$. Průnik polorovin $ABC$, $BCA$, $CAB$ nazveme *trojúhelník* $ABC$.

Definice B3: Nechť jsou dány v $E^3$ čtyři nekomplanární body $A$, $B$, $C$, $D$. Průnik poloprostorů $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$ nazveme *čtyřstěn* $ABCD$.

Definice B4: Nechť je dáno v $E^4$ pět různých bodů, které neleží v jedné nadrovině. Pak průnik nadpoloprostorů $ABCDE$, $BCDEA$, $CDEAB$, $DEABC$, $EABCD$ nazveme *čtyřrozměrný simplex* $ABCDE$.

Definice C1: Nechť jsou dány v $E^1$ dva různé body $A$, $B$. Konvexní obal množiny $\{A, B\}$, tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje oba dva body $A$, $B$, nazveme *úsečka* $AB$.

Definice C3: Nechť jsou dány v $E^3$ čtyři nekomplanární body $A$, $B$, $C$, $D$. Konvexní obal množiny $\{A, B, C, D\}$, tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje všechny čtyři body $A$, $B$, $C$, $D$, nazveme *čtyřstěn* $ABCD$.

Definice C4: Nechť je dáno v $E^4$ pět bodů $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, které neleží v jedné nadrovině. Konvexní obal množiny $\{A, B, C, D, E\}$, tj. nejmenší konvexní množinu, která obsahuje všech pět bodů $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, nazveme *simplex* $ABCDE$.

**B** Vzájemnou polohu určíme pomocí dimenzí dvou prostorů:

$$\mathcal{P} = \text{ Obal}(A, \vec{p}, \vec{q}, \vec{u}, \vec{v}),\ \mathcal{Q} = \text{ Obal}(A, \vec{p}, \vec{q}, \vec{u}, \vec{v}, B - A).$$

Jestliže $\dim \mathcal{Q} = 3$, pak je klasifikace shodná s klasifikací v $E^3$, neboť $\mathcal{Q}$ je nadrovina.

V případě $\dim \mathcal{Q} = 4$ je buď $\dim \mathcal{P} = 4$ a obě roviny se protínají v bodě, nebo je $\dim \mathcal{P} = 3$ a roviny mají prázdný průnik, přičemž existuje přímka rovnoběžná s každou z rovin $\alpha$, $\beta$. To plyne z toho, že např. $\vec{v}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{u}$, tj. $\vec{v} = a\vec{p} + b\vec{q} + c\vec{u}$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$. Po úpravě dostaneme $\vec{v} - c\vec{u} = a\vec{p} + b\vec{q} = \vec{w}$. Vektor $\vec{w}$ je lineární kombinací dvojic vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{p}$, $\vec{q}$, je tedy směrovým vektorem přímky rovnoběžné s $\alpha$ i $\beta$.

**C** a) Vzájemnou polohu přímky $p$ a nadroviny $\Gamma$ určíme pomocí dimenzí dvou prostorů:

$$\mathcal{H} = \{G + u\vec{u} + v\vec{v} + w\vec{w} + t\vec{m}; u, v, w, t \in R\} = \text{Obal}\,(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{m})$$
$$a \quad \mathcal{K} = \{G + u\vec{u} + v\vec{v} + w\vec{w} + t(M - G); u, v, w, t \in R\} = \text{Obal}\,(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, M - G).$$

$\dim \mathcal{H} = 3$, $\dim \mathcal{K} = 3$ $\Leftrightarrow m$, $\Gamma$ incidují, tj. $m$ leží v $\Gamma$,
$\dim \mathcal{H} = 3$, $\dim \mathcal{K} = 4$ $\Leftrightarrow m$, $\Gamma$ jsou rovnoběžné neincidentní,
$\dim \mathcal{H} = 4$ $\Leftrightarrow m$, $\Gamma$ jsou různoběžné.

b) Vzájemnou polohu roviny $\alpha$ a nadroviny $\Gamma$ určíme pomocí dimenzí dvou prostorů:

$$\mathcal{L} = \text{ Obal}(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{p}, \vec{q})$$
$$\text{a } \mathcal{M} = \text{ Obal}(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, K - G).$$

$\dim \mathcal{L} = 3$, $\dim \mathcal{M} = 3$ $\Leftrightarrow \alpha$, $\Gamma$ incidují, tj. $\alpha$ leží v $\Gamma$,
$\dim \mathcal{L} = 3$, $\dim \mathcal{M} = 4$ $\Leftrightarrow \alpha$, $\Gamma$ jsou rovnoběžné neincidentní,
$\dim \mathcal{L} = 4$ $\Leftrightarrow \alpha$, $\Gamma$ se protínají v přímce.

**D** Volíme repér $\langle A, B - A, C - A, D - A, E - A\rangle$, tj. $A[0; 0; 0; 0]$, $B[1; 0; 0; 0]$, $C[0; 1; 0; 0]$, $D[0; 0; 1; 0]$, $E[0; 0; 0; 1]$.
(a) Hrana $CD = \{C + t(D - C); t \in \langle 0, 1\rangle\} = \{[0; 1 - t; t; 0]; t \in \langle 0, 1\rangle\}$.
(b) Stěna $ACD$ je trojúhelník, tedy $ACD = \{A + t(C - A) + k(D - A); t, k \in \mathbf{R}_0^+, t + k \leqq 1\} = \{[0; t; k; 0]; t, k \in \mathbf{R}_0^+, t + k \leqq 1\}$.
(c) Nadstěna $ABCD$ je čtyřstěn, tedy $ABCD = \{A + t(B - A) + k(C - A) + l(D - A); t, k, l \in \mathbf{R}_0^+, t + k + l \leqq 1\} = \{[t; k; l; 0]; t, k, l \in \mathbf{R}_0^+, t + k + l \leqq 1\}$.

**E** Rada: Vyřešte nejdříve analogickou úlohu v $E^3$ pro čtyřstěn a vyjádřete jej jako průnik čtyř poloprostorů.

Simplex $\mathbb{S}$ je průnikem pěti nadpoloprostorů určených nadrovinami $\Gamma_i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Nechť $\Gamma_0$ je nadrovina určená body $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Její analytické vyjádření tedy je

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{A_1 + x(A_2 - A_1) + y(A_3 - A_1) + z(A_4 - A_1); x, y, z \in \mathbf{R}\} = \\ &= \{[1;0;0;0] + x(-1;1;0;0) + y(-1;0;1;0) + z(-1;0;0;1); x, y, z \in \mathbf{R}\}.\end{aligned}$$

Parametrické vyjádření nadroviny $\Gamma_0$ je $\{x_1 = 1-x-y-z, x_2 = x, x_3 = y, x_4 = z; x, y, z \in \mathbf{R}\}$ a z něj můžeme najít vyjádření rovnicí $\Gamma_0$: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$. Nadrovina rozděluje prostor $E^4$ na dva nadpoloprostory. Dosazením souřadnice bodu $A_0$ do její rovnice zjistíme, který z nich obsahuje daný simplex. Jedná se o nadpoloprostor $\Omega_0$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 1$. Podobně najdeme ostatní nadpoloprostory.

$$\Omega_1\colon x_1 \geqq 0, \Omega_2\colon x_2 \geqq 0, \Omega_3\colon x_3 \geqq 0, \Omega_4\colon x_4 \geqq 0.$$

$\boxed{\mathbf{F}}$ (a) Najdeme průsečík přímky $p$ s každou z nadrovin $\Gamma_i$. Bod $X[3+5t; 2+3t; 1+t; 2+3t]$ leží na $\Gamma_0$, právě když $(3+5t) + (2+3t) + (1+t) + (2+3t) = 1$, tj. $t = -\frac{7}{12}$. Tedy průsečík $\{X_0\} = p \cap \Gamma_0$ je bod $X_0[\frac{1}{12}; \frac{1}{4}; \frac{5}{12}; \frac{1}{4}]$. Ptáme se, zda tento bod leží v nadstěně $A_1A_2A_3A_4$, nebo vně ní. V nadstěně leží, právě když leží v každém z nadpoloprostorů $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$, $\Omega_4$, tj. když všechny jeho souřadnice jsou nezáporné. To splněno je. Tedy bod $X_0$ je jeden z průsečíků přímky $p$ s povrchem simplexu $\mathbb{S}$.

Najděme dále bod $\{X_1\} = p \cap \Gamma_1$. Bod $X[3+5t; 2+3t; 1+t; 2+3t]$ leží na $\Gamma_1$, právě když $3+5t = 0$, tj. $t = -\frac{3}{5}$. Tedy $p \cap \Gamma_1 = \{X_1[0; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5}]\}$. Ptáme se, zda tento bod leží v nadstěně (tj. čtyřstěnu) $A_0A_2A_3A_4$, nebo vně nadstěny. V nadstěně leží, právě když leží v každém z nadpoloprostorů $\Omega_0, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, tj. když součet jeho souřadnic nepřesáhne 1 a všechny jeho souřadnice jsou kladné. To splněno je. Tedy bod $X_1$ je druhý z průsečíků přímky $p$ s povrchem simplexu $\mathbb{S}$. Tedy přímka $p$ protíná simplex $\mathbf{S}$ v úsečce $X_0X_1$. Simplex je konvexní těleso, žádné další průsečíky hledat nepotřebujeme.

Jiné řešení: Analytické vyjádření simplexu $\mathbb{S}$ je $\{[0;0;0;0]+t(1;0;0;0)+r(0;1;0;0)+s(0;0;1;0)+ +k(0;0;0;1); t, r, s, k \in \mathbf{R}_0^+, t+r+s+k \leqq 1\} = \{[t;r;s;k]; t, r, s, k \in \mathbf{R}_0^+, t+r+s+k \leqq 1\}$. Hledáme průsečík simplexu $\mathbb{S}$ a přímky $p = \{[3+5m; 2+3m; 1+m; 2+3m]; m \in \mathbf{R}\}$ pomocí porovnání příslušných souřadnic:

$$3+5m = t \geqq 0, \quad 2+3m = r \geqq 0, \quad 1+m = s \geqq 0, \quad 2+3m = k \geqq 0.$$

Současně platí

$$t+r+s+k = 3+5m+2+3m+1+m+2+3m = 12m+8 \leqq 1.$$

Řešením této soustavy nerovnic je interval $m \in \left\langle -\frac{3}{5}, -\frac{7}{12} \right\rangle$.

Průnikem $\mathbb{S}$ a přímky $p$ je tedy úsečka $AB$, kde $A[0; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5}]$ a $B[\frac{1}{12}; \frac{1}{4}; \frac{5}{12}; \frac{1}{4}]$.

(b) Uvádíme pouze mezivýsledky. Označme $\{Y_i\} = q \cap \Gamma_i$. Obecný bod $Y[4+7t; 1+2t; 3+ +5t; 4+7t]$ přímky $q$ leží na $\Gamma_i$, právě když $t = t_i$, kde $t_0 = -\frac{11}{21}$, $t_1 = -\frac{4}{7}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$,

$t_3 = -\frac{3}{5}$, $t_4 = -\frac{4}{7}$. Odpovídající průsečíky jsou $Y_0 = [\frac{1}{3}; -\frac{1}{21}; \frac{8}{21}; \frac{1}{3}]$, $Y_1 = Y_4 = [0; -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; 0]$, $Y_2 = [\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $Y_3 = [-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; 0; -\frac{1}{5}]$. Všechny tyto čtyři body leží vně simplexu $\mathbb{S}$, tedy $q$ neprotíná simplex **S**.

**G** Úlohu vyřešíme pomocí „dimenzionálního žebříku“.

| | vrcholy | hrany (stěny) | stěny | nadstěny | stěn. úhl. | těl. úhl. | nadtěl. úhl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E^2$ | $4 = 2^2$ | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $E^3$ | $8 = 2^3$ | 12 | 6 | 0 | 24 | 4 | 0 |
| $E^4$ | $16 = 2^4$ | 32 | 24 | 8 | 48 | 32 | 8 |

Hrany: Z každého vrcholu jdou v $E^2$ dvě hrany (strany), resp. v $E^3$ tři hrany, resp. v $E^4$ čtyři hrany. Tedy počet hran nadkrychle je roven $\frac{16 \cdot 4}{2} = 32$ (každou hranu jsme počítali dvakrát, proto je nutné dělit dvěma).

Dvojrozměrné stěny: Každá hrana v $E^3$ určuje dvě stěny, resp. v $E^4$ tři stěny. Tedy počet stěn nadkrychle je roven $\frac{32 \cdot 3}{4} = 24$ (každou stěnu jsme počítali čtyřikrát, proto je nutné dělit čtyřmi).

Nadstěny (trojrozměrné stěny): Nadstěny tvoří osm vrcholů, které mají vždy právě jednu souřadnici stejnou. Tedy máme $8$ nadstěn.

Počet úhlopříček je řešen v úloze 5.7**E**. Zde jen doplníme další způsob hledání jejich počtu na základě znalosti počtu stěn a nadstěn. V každé stěně jsou dvě úhlopříčky, máme $24$ stěn, tedy je $48$ stěnových úhlopříček. V každé nadstěně (krychli) jsou čtyři tělesové úhlopříčky, nadstěn je $8$, tedy máme $8 \cdot 4 = 32$ tělesových úhlopříček.

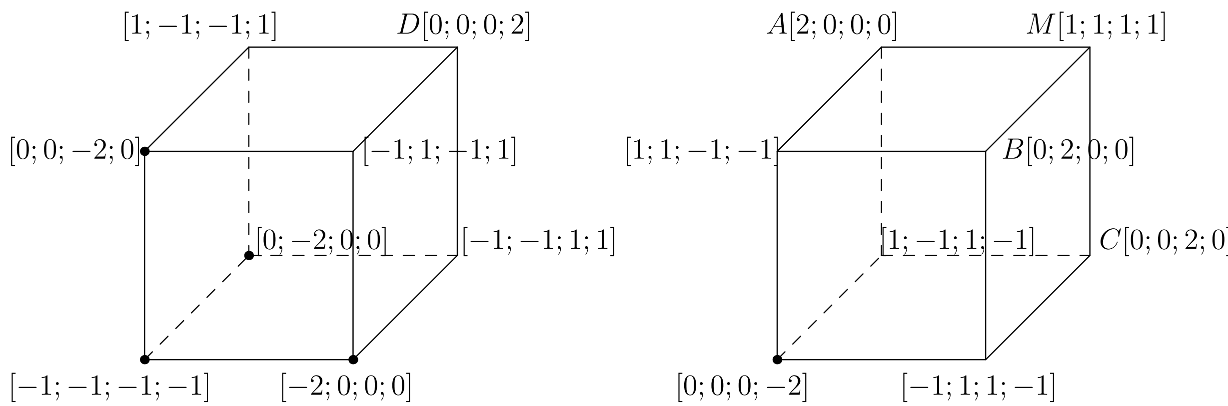
**H** Nechť $M[x_1; x_2; x_3; x_4]$. Hrana nadkrychle je 2, dostáváme tedy čtyři rovnice:
$(2 - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$, $x_1^2 + (2 - x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$,
$x_1^2 + x_2^2 + (2 - x_3)^2 + x_4^2 = 4$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (2 - x_4)^2 = 4$.

Po úpravě dostaneme
$4x_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, $4x_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$,
$4x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, $4x_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Odtud pak $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ a po dosazení do některé z rovnic máme $4x_1 = 4x_1^2$. Tedy $x_1 = 0$, nebo $x_1 = 1$. Bod $O[0; 0; 0; 0]$ je středem krychle, vezmeme tedy druhé řešení $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, tj. $M[1; 1; 1; 1]$.

**I** Protože $A$, $B$, $M$ tvoří vrcholy dvojdimenzionální stěny, čtverce, platí pro jeho čtvrtý vrchol $E$: $M - \bullet - E = A - \bullet - B$, a tedy $E[1; 1; -1; -1]$. Další body dostaneme podobně z dvojdimenzionálních stěn $MAC$, $MAD$, $MBC$, $MBD$ a $MCD$: $[1; -1; 1; -1]$, $[1; -1; -1; 1]$, $[-1; 1; 1; -1]$, $[-1; 1; -1; 1]$, $[-1; -1; 1; 1]$.

Posledních pět vrcholů dostaneme na základě trojdimenzionálních stěn, tj. krychlí, pomocí středové souměrnosti nadkrychle podle počátku 0. Tyto body jsou vyznačeny na obrázku 17.




Obr. 17

**J** Nadmnohostěn $\mathbb{T}$ má osm vrcholů: $A_1[+1;0;0;0]$, $A_2[0;+1;0;0]$, $A_3[0;0;+1;0]$, $A_4[0;0;0;+1]$, $B_1[-1;0;0;0]$, $B_2[0;-1;0;0]$, $B_3[0;0;-1;0]$, $B_4[0;0;0;-1]$.

Osm vrcholů určuje $\binom{8}{2}$, tj. 28 úseček. Z nich každá je buď hranou, nebo úhlopříčkou nadmnohostěnu $\mathbb{T}$. Hranou je, právě když je její délka $\sqrt{2}$, a úhlopříčkou, právě když je její délka 2. To vyplývá z dimenzionálního žebříku, protože stejné tvrzení platí i v $E^2$ a $E^3$. Každá úsečka $A_iB_i$ spojující dva dipodální body obsahuje počátek $O[0;0;0;0]$ jako svůj střed. Tento bod je středem souměrnosti tělesa $\mathbb{T}$. Tedy úhlopříčky jsou pouze čtyři: $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, $A_4B_4$. Z každého vrcholu vychází právě jedna úhlopříčka spojující tento vrchol s dipodálním vrcholem. Hran je tedy $28-4=24$.

Dva vrcholy $A$, $B$ (nad)mnohostěnu, kterému lze opsat (nad)kouli, nazveme *dipodální*, když je úsečka $AB$ průměrem této (nad)koule.

## Cvičení 5.10

**A** (a) Jedná se o těžiště těchto tetraedrů, tj. $\left[\frac{5}{4};\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{5}}{4}\right]$ je bod dotyku kulové nadplochy vepsané simplexu $ABCDE$ se stěnou $ABCE$, $\left[\frac{3}{4};\frac{5}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{5}}{4}\right]$ je bod dotyku se stěnou $ABDE$, $\left[\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{5}{4};\frac{\sqrt{5}}{4}\right]$ je bod dotyku se stěnou $ACDE$, $\left[\frac{5}{4};\frac{5}{4};\frac{5}{4};\frac{\sqrt{5}}{4}\right]$ je bod dotyku se stěnou $BCDE$.
(b) Vzdálenost libovolných dvou z těchto bodů je $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**B** (a) $u=v=w=z=1+\sqrt{5}$, (b) $u'=v'=w'=z'=1+\frac{1}{\sqrt{5}}$, (c) $r=\frac{8}{\sqrt{5}}$,$\rho=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

# Rejstřík

| | |
|---|---|
| Název: | Úvod do studia analytické geometrie |
| Editoři: | Naďa Stehlíková, Milan Hejný, Darina Jirotková |
| Vydává: | Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta |
| Formát: | A4 |
| Počet stran: | 146 |
| Rok vydání: | 2005 |

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou.

ISBN 80-7290-188-5