Nekonečně hluboká pravoúhlá potenciálová jáma

Popis situace a její řešení Máme potenciál, který je nulový v intervalu $(0, L)$ a nekonečný ($V \to \infty$) mimo něj (uvažujeme jednorozněrnou úlohu).

a) Nakreslete si obrázek celé situace. Kde se částice může pohybovat?
b) Napište hamiltonián částice v jámě. Napište a vyřešte stacionární Schrödingerovu rovnici pro tuto částici
c) Jak zní „sešívací“ podmínky, které z nich lze splnit. Jak se promítnou do možných hodnot energie této částice? Jaké hodnoty může nabývat kvantové číslo n?
d) Napište hodnotu energie a stacionární vlnovou funkci pro obecné n a pro hodnoty n = 1, 2, 3, 10. Pro uvedené hodnoty nakreslete amplituty a hustoty pravděpodobnosti. Co na základě těchto obrázků lze říci o výskytu částice? Pojmenujte co nejvíce vlastnosti energetických hladin a stacionárních vlnových funkcí. Rozhodněte, které vlastnosti řešení stacionárních stavů platí obecně a které budou specifické pro tento problém?

1.) Spočtěte normovací konstantu pro stacionární stavy. Co její hodnota znamená pro tvar jednotlivých funkcí? Proč by měly být výše spočtené stacionární vlnové funkce na sebe navzájem kolmé. Ověřte tuto skutečnost výpočtem.

2.) Na základě obrázků nejprve odhadněte a potom spočítejte střední hodnoty $\widehat{x}, \widehat{x}^2, \widehat{p}, \widehat{p}^2$ ve stacionárním stavu ψ_n. Ověřte platnost relací neurčitosti pro jednotlivé stacionární stavy.

3.) a) Napište vlnovou funkci částice v této jámě, která je v takovém stavu, že pravděpodobnost naměření energie E_1 je rovna 50%, E_2 20% a E_3 30%.
b) Napište obecné řešení nestacionární Schrödingerovy rovnice v nějakém čase t. Vysvětlete význam koeficientů a spočtěte střední hodnotu energie v obecném stavu.

4.) Částice se v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ nachází ve stavu

$$\psi(x, t = 0\,\mathrm{s}) = N \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[1 + 2\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right].$$

a) Vlnovou funkci normujte.
b) Rozložte tento stav na stacionární stavy. Určete, jaké hodnoty energie je možné v tomto stavu naměřit a s jakou pravděpodobností. Určete střední hodnotu energie v tomto stavu.
c) Napište tuto vlnovou funkci v obecném čase t a čase $t = \pi\hbar/E_1$ (kde E_1 je energie základního stavu).
Tip: Příklad lze řešit „zuřivou“ integrací nebo „vtipným rozkladem“.

5.) Mějme obecný stav popsaný v čase t=0 vlnovou funkcí $\psi = Ax(L - x)$. Jaká je pravděpodobnost, že v tomto stavu naměříme energii E_1, E_2, E_3? Rozložte tento obecný stav na součet stacionárních stavů a napište jeho časový vývoj. Jaká je střední hodnota energie v tomto stavu?

6.) Napište stav, který je v $t = 0$ superpozicí (součtem) základního a prvního excitovaného stavu. Jakou vlnovou funkcí bude systém popsán v obecném čase t? Zůstává vlnová funkce normovaná? Jaká je pravděpodobnost naměření E_1 v časech $t = 0\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}, 2\,\mathrm{s}, \ldots$ Určete časový průběh střední hodnoty souřadnice x v tomto stavu. Jak se výsledek liší od výsledku, který bychom získali ze stacionárního počátečního stavu. Své tvrzení podpořte výpočtem.

7.) Diskutujte, jak by se změnily výsledky předchozí úloh pro případ nekonečně hluboké jámy symetrické kolem počátku (tj. $V = 0$ pro $|x| < l/2$, jinak $V \to \infty$). Vyřešte tento případ a porovnejte váš odhad s výsledky výpočtu. Co se děje při $l \to \infty$?