Úlohy k zápočtu pro CŽV

Pro získání zápočtu je třeba vyřešit (s podrobným komentářem) alespoň 7 níže uvedených úloh.

1.) Označme si 3 vlastní vektory Hamiltonova operátoru $\widehat{H}$ jako ψ_1, ψ_2, ψ_3. Dále víme, že pro ně platí

$$\widehat{H}\psi_1 = E_1\psi_1 = 2E\psi_1 \quad \widehat{H}\psi_2 = E_2\psi_2 = 5E\psi_2 \quad \widehat{H}\psi_3 = E_3\psi_3 = 7E\psi_3,$$

kde E je konstanta. Uvažujme obecný stav $\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}(\psi_1 + \psi_2) + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_3$.
a.) Jaké energie můžeme ve stavu φ naměřit? S jakou pravděpodobností?
b.) Určete střední hodnotu energie ve stavu φ.
c.) V jakém stavu se bude systém nacházet po měření, ve kterém naměříme energii $3E$?
d.) Napište časový vývoj stavu φ.

2.) *(4 body)* Mějme dva lineární hermitovské operátory $\widehat{Q}, \widehat{R}$. Jestliže $[\widehat{Q}, \widehat{R}] = -2\mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotkový operátor. Spočtěte $[\widehat{Q}^2, \widehat{R}^2]$, $[\widehat{Q}\widehat{R}, \widehat{R}\widehat{Q}]$ a $[\widehat{Q}^n, \widehat{R}]$.

3.) *(3 body)* Svazek protonů s kinetickou energii 10 MeV prošel štěrbinou o velikostí 5 mm. Přesnost „nastavení“ energie je $\Delta E \approx 10^{-3}$ MeV. Porovnejte tuto přesnost s neurčitostí danou Heisenbergovými relacemi neurčitosti. Spočítejte vzdálenost, kterou by musely protony uletět, aby se v kolmém směru odchýlily o 5 mm jen díky vlivu relací neurčitosti.

4.) Najděte normalizační konstantu A a střední hodnoty operátorů $\widehat{x}, \widehat{x}^2, \widehat{p}, \widehat{p}^2$ ve stavu popsaném vlnovou funkcí $\psi = Ax(L - x)$ pro $0 < x < L$ a $\psi = 0$ mimo uvedený interval (L je pevně dané reálné číslo). Ověřte Heisenbergovu relaci neurčitosti v tomto stavu.

5.) Částice v jednorozměrné pravoúhlé nekonečně hluboké potenciálové jámě v intervalu $(0,\ L)$ se v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ nachází ve stavu

$$\psi(x, t = 0\,s) = N \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

a) *(1 bod)* Vlnovou funkci normujte.
b) *(2 body)* Rozložte tento stav na stacionární stavy. Určete, jaké hodnoty energie je možné v tomto stavu naměřit a s jakou pravděpodobností. Určete střední hodnotu energie v tomto stavu.
c) *(2 body)* Napište tuto vlnovou funkci v obecném čase t a čase $t = \pi\hbar/E_1$ (kde E_1 je energie základního stavu).
Tip: Příklad lze řešit „zuřivou“ integrací nebo „vtipným rozkladem“ pomocí vztahu součet/součin dvou goniometrických funkcí.

6.) Částice je uzavřená v 2D nekonečné potenciálové jámě. Napište podmínky pro rozměry této jámy tak, aby existovala alespoň jedna hladina, jejíž stupeň degenerace je alespoň 2. Napište velikost energie této hladiny a alespoň tři vlnové funkce odpovídající různým stacionárním stavům, které příslušejí dané energetické hladině.

7.) Ukažte, že vlnová funkce

$$\psi(x,t) = c_0 \mathrm{e}^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \mathrm{e}^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} + 2c_1 x \mathrm{e}^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \mathrm{e}^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}$$

je řešením Schrödingerovy rovnice pro lineární harmonický oscilátor pro libovolné komplexní konstanty c_1 a c_2. Energie energetické hladiny je $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$. Určete střední hodnotu souřadnice x částice ve stavu ψ a ukažte, že se chová jako lineární klasický harmonický oscilátor, tj. kmitá s úhlovou frekvencí ω.
Poznámka: Při řešení úkolu můžete využít $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-a^2x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^3}$.

8.) Určete pravděpodobnost, že se elektron v **prvním excitovaném** stavu atomu vodíku nachází ve vzdálenosti od jádra větší než je tzv. Bohrův poloměr.

9.) Napište operátor průmětu spinu elektronu do směru (1,0,1). Najděte jeho vlastní hodnoty a funkce. Svazek elektronů necháme procházet nehomogenním polem (Stern-Gerlachovým uspořádáním) natočeným ve výše popsaném směru. Vybereme si pouze elektrony s kladným průmětem spinu. U nich budeme měřit průmět spinu do směru z. Popište, co můžeme naměřit včetně vyčíslení pravděpodobností.

10.) Elektron je vázaný na úsečku $-L/2 \leq x \leq L/2$. Najděte korekce k energii dané malou poruchou $V(x) = \alpha x$ (resp. $V(x) = \beta x^2$). Jak se změní energie fotonu emitovaného při přechodu z prvního excitovaného stavu do základního?

11.) Pomocí variační metody odhadněte energii základního stavu pro potenciál $V(x) = Cx^4$, kde $C > 0$. Minimalizaci proveďte na třídě funkcí ve tvaru $\psi = \sqrt[4]{\frac{1}{a^2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2a^2})$, kde a je parametr.
Hint: $\int_0^{\infty} x^{2k} e^{-ax^2} dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}a^{(2k+1)/2}}$

12.) Uvažujte dvě vzájemně neinteragující částice v nekonečně hluboké pravoúhlé jámě. Napište energii a příslušnou vlnovou funkci (funkce) základního a prvního exitovaného stavu, jestliže částice jsou a) různé, ale stejně těžké, b) identické bosony, c) identické ferminony. Diskutujte degeneraci obou stavů.