ÚLOHY PRO ROZVOJ MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI

PISA 2009

Milan Hejný, Darina Jirotková
a kol.

Utváření kompetencí žáků na základě zjištění šetření PISA 2009

ČESKÁ ŠKOLNÍ INSPEKCE

Česká školní inspekce 2012

AUTOŘI A SPOLUPRACOVNÍCI

Koncepci publikace a úvodní texty vytvořili:
Milan Hejný, Darina Jirotková, Dominik Dvořák, Eva Šafránková.

Autorsky se podíleli:
Milan Hejný, Darina Jirotková, Anna Sukniak, Jiří Vaníček, Jana Žalská, Jarmila Žalská.

Recenze vypracovali:
Eva Řídká, Dana Tomandlová, Jana Hanušová a Jiří Zágora.

Na grafické úpravě a korekturách spolupracovali:
Eva Šafránková, Darina Jirotková, Pavel Hejný, Jana Slezáková.

Data pro analýzy zpracovali pracovníci Ústavu pro informace ve vzdělávání
pod vedením Jana Hučína.

Matematickou část projektu koordinovala Eva Šafránková.

Úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti
Utváření kompetencí žáků na základě zjištění šetření PISA 2009

Milan Hejný, Darina Jirotková a kol.
Česká školní inspekce 2012

Tato publikace byla vydána jako plánovaný výstup projektu Kompetence I, který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

ISBN 978-80-905370-0-2

OBSAH

PŘEDMLUVA

Česká republika se od devadesátých let minulého století účastní dvou velkých mezinárodních výzkumů, které zjišťují znalosti a dovednosti žáků také v oblasti matematiky – TIMSS a PISA. Účast v těchto významných šetřeních umožňuje srovnat výsledky českých žáků s výsledky žáků dalších zúčastněných zemí. Prováděné výzkumy doprovázejí také dotazníková šetření, která usilují postihnout faktory ovlivňující úroveň získaných vědomostí a dovedností. Pravidelné opakování těchto výzkumů umožňuje sledovat, jak se mění úroveň vědomostí a dovedností českých žáků v čase a ve srovnání s žáky ostatních účastnických zemí. Tak byl zaznamenán v roce 2007 propad ve výsledcích českých žáků ve výzkumu TIMSS, který je na rozdíl od výzkumu PISA zaměřen více na školní vědomosti a dovednosti stanovené učebními osnovami. Následně výzkum PISA, který je zaměřen především na zjišťování praktických znalostí a dovedností žáků a na jejich schopnost použít je v každodenním životě, v roce 2009 trend poklesu potvrdil.

Vhodnou a odpovídající reakcí na zjištěné výsledky tedy nemůže být mechanická snaha trénovat žáky na testy PISA a TIMSS. Nezbytná je kvalifikovaná analýza těchto výsledků, hledání příčin a efektivních východisek k překonání zaznamenávaného propadu. To je také záměrem projektu Kompetence I, v jehož rámci publikace vznikla.

CÍL PUBLIKACE

Zpracovatelé publikace si kladou za cíl seznámit čtenáře s výsledky českých žáků v matematickém testu výzkumu PISA 2009. Usilují upozornit na některé problémy, které se při řešení testových úloh objevily. Nabízejí také nové úlohy podobného typu, jaké se používají v šetřeních PISA. Úlohy z této publikace mohou učitelé využít jak při společné práci v hodinách, tak i k samostatné práci žáků. Vhodné jsou zejména do různých matematických seminářů. Neměly by nahrazovat klasické, běžně používané úlohy, ať už početní, či problémové, které jsou nezbytné k upevnění získaných vědomostí a dovedností.

V publikaci předkládané úlohy představují již určitou nadstavbu, vyžadují často integraci poznatků z více oborů i z mimoškolního prostředí, nezbytná bývá také schopnost čtení s porozuměním i schopnost srozumitelně zformulovat a zapsat svou myšlenku. Věkově jsou úlohy určeny žákům končícím základní vzdělávání, některé svou obtížností přesahují do počátku středoškolského studia.

KOMU JE PUBLIKACE URČENA

Publikace je určena především učitelům matematiky na základních a středních školách a jejich žákům. Využít ji mohou i pedagogové a studenti vysokých škol připravujících učitele. Vzhledem k tomu, že součástí publikace je i detailnější rozbor výsledků českých žáků z šetření PISA 2009, mohou se uživateli stát i další zájemci o oblast vzdělávání z řad odborné i laické veřejnosti.

STRUKTURA PUBLIKACE

V úvodní části publikace jsou rozebrány výsledky českých žáků v matematickém testu šetření PISA 2009 doplněné přehledem výsledků v letech 2000–2009. Pro srovnání uvádíme i výsledky žáků některých dalších zemí a průměr žáků zemí OECD. Stěžejní část publikace tvoří nově vytvořené úlohy podobného charakteru, jako se užívají ve výzkumu PISA.

Úlohy v grafické úpravě vhodné pro tisk a kopírování pro žáky naleznete na webu ČŠI:
http://www.csicr.cz/cz/O-nas/Projekty-ESF/Kompetence-I/Projekt-ESF-Kompetence-I

Doufáme, že učitelé nabízené úlohy ve své práci využijí. Mohou jim pomoci v nelehkém úkolu vzdělávat žáky v matematice.

Všem, kteří umožnili vznik publikace a přispěli nám radou a pomocí, děkujeme.

ÚVOD

Ve světě v současnosti probíhají dva velké mezinárodní výzkumy znalostí a dovedností žáků, které zahrnují i oblasti matematiky – šetření TIMSS a PISA. Nejznámějším (a také asi nejvíc kontroverzním) způsobem využití dat, která produkují, jsou „žebříčky zemí". Srovnání výkonů žáků různých zemí však zdaleka nejsou jedinou informací, jíž lze z mezinárodních šetření získat. Oba výzkumy se pravidelně opakují a díky tomu lze rovněž sledovat, jak se mění úroveň vědomostí a dovedností žáků jednotlivých zemí v čase.[1] Výzkumy navíc doprovázejí rozsáhlá dotazníková šetření, která zjišťují faktory školního i mimoškolního prostředí, jež mohou ovlivňovat vědomosti a dovednosti žáků.

Výsledky českých žáků v obou šetřeních, pokud jde o matematiku, byly zpočátku vnímány jako dobré až vynikající, i když se upozorňovalo na problematické postoje našich žáků k matematice. Avšak již v roce 1999 a znovu i v roce 2007 byl ve výzkumu TIMSS zaznamenán propad výkonu českých žáků. Výzkum TIMSS je (na rozdíl od výzkumu PISA) více zaměřen na tradičněji vymezené školní vědomosti a dovednosti, a tak mohlo být toto zhoršení vysvětlováno jednak posuny v rozvržení učiva v osnovách v důsledku prodloužení prvního stupně základní školy o jeden ročník v devadesátých letech, jednak změnou zaměření výuky, která hypoteticky přenesla důraz od specificky školních dovedností na ty, které lze uplatnit v praxi. To se zdály potvrzovat první cykly výzkumu PISA, který je zaměřen především na zjišťování praktických znalostí a dovedností žáků. Zejména šetření PISA 2003, jež kladlo hlavní důraz na zjišťování úrovně matematické gramotnosti, ukazovalo nadprůměrné dovednosti českých žáků. Tyto výkony navíc měly vzestupný trend (i když srovnání mezi lety 2000 a 2003 bylo možné provést jen v omezené míře). Šetření v roce 2006 však růst výsledků již nepotvrdilo a zejména výsledky PISA 2009 z tohoto pohledu přinesly velmi nepříjemnou zprávu – žáci z České republiky se oproti roku 2003 zhoršili nejvíce ze všech zúčastněných zemí.

Výsledky mezinárodních srovnávacích šetření jistě nejsou jediným měřítkem kvality vzdělávacího systému. Určitě však stojí za to výsledky hlouběji analyzovat a hledat příčiny propadu. To je také záměrem projektu Kompetence I, v jehož rámci tato publikace vznikla.

Naším cílem je upozornit čtenáře na vybraná zjištění o výsledcích českých žáků ve výzkumu PISA 2009 včetně informací, které nebyly uvedeny v národní zprávě. Hlavní část publikace však tvoří úlohy doprovázené metodickými komentáři. Knihu jsme však nesepsali proto, abychom umožnili trénování žáků na testy PISA nebo TIMSS, ale abychom podpořili učitele, kteří se – podobně jako my – domnívají, že výsledky PISA jen doložily naléhavou potřebu začít pracovat na proměně výuky matematiky v českých školách. Cesta k znovudosažení dobrých výsledků, které jsme ještě nedávno měli, totiž obvykle nevede zpátky, ale spíše vpřed, byť bychom využili i mnohé prvky starého přístupu. Obáváme se totiž, že tradiční vyučování dnes mnoho slabších žáků frustruje a schopným žákům neumožňuje ten intelektuální rozvoj, jehož jsou schopni. Proto jsme v druhé části knihy shromáždili úlohy vedoucí k tvořivosti i umožňující žáky diagnostikovat a na základě toho výuku diferencovat, aby silný i slabý žák pocítili radost z vlastního růstu.

Kniha je tedy určena především učitelům matematiky v základních a středních školách. Uvedené úlohy mohou učitelé využít jak ve společné práci v hodinách, tak k samostatné práci žáků. Věříme však, že kniha zaujme i širší okruh zájemců: školáky s hlubším zájmem o matematiku nebo připravující se k přijímacím zkouškám na střední školy, jejich rodiče, využít ji mohou i pedagogové a studenti vysokých škol připravujících učitele.

Pokud vás publikace, kterou držíte v rukou, zaujala, nepřehlédněte, že souběžně vycházejí další dvě analogicky koncipované knihy, jedna se týká čtenářské gramotnosti, druhá vychází z výsledků analýzy přírodovědné části téhož šetření. Při tvorbě tohoto textu vycházíme částečně i z podkladů jejich autorů (K. Starý a kol.; D. Mandíková, J. Houfková a kol.). Jim a mnoha dalším, kteří umožnili vznik publikace a přispěli nám radou a pomocí, děkujeme.

1 To samozřejmě platí, pokud se určitá země účastní šetření soustavně. V případě České republiky je tomu tak u šetření PISA, avšak, bohužel, neplatí to úplně v případě šetření TIMSS.

MATEMATICKÁ GRAMOTNOST ČESKÝCH ŽÁKŮ PODLE VÝZKUMU PISA 2009

Dominik Dvořák (UK Praha, Pedagogická fakulta)

Různá mezinárodní šetření (ostatně i jednotlivá domácí šetření organizovaná jak státem, tak soukromými subjekty) poskytují informaci o žácích ze své specifické perspektivy. Abychom těchto a dalších výsledků dokázali využít pro zlepšení našeho školství, je nutné se hlouběji zabývat otázkami, co se vlastně měří, jak se liší výsledky různých skupin žáků v rámci naší země apod. Konkrétně když chceme porozumět šetření PISA, jeho silným stránkám a omezením, je vhodné začít vysvětlením, čím se liší od jiných podobných výzkumů, zejména od souběžně probíhajícího výzkumu TIMSS.

Šetření TIMSS vzešlo z pedagogického prostředí a je navrženo tak, aby dobře sloužilo pedagogickému výzkumu (např. za východisko při konstrukci vzorku volí celé třídy jednoho postupného ročníku, což umožňuje sledovat vliv konkrétní třídy a učitele na výsledky žáků). Naproti tomu šetření PISA (*Programme for International Student Assessment*) inicializovali politici a ekonomové a koncipovali ho tak, aby sloužilo především jejich potřebám. Pořádá ho Organizace pro hospodářskou spolupráci (OECD), ale účastní se ho i řada nečlenských zemí nebo regionů. Hlavním cílem výzkumu je zjistit, zda si žáci na konci povinné školní docházky osvojili vědomosti a dovednosti, které autoři výzkumu považují za nezbytné pro úspěšné uplatnění v reálném životě. Předmětem zkoumání nemá být to, jak žáci dokážou nabyté vědomosti reprodukovat, ale to, jak je dovedou využít v různých situacích z běžného života. Proto se mluví o zaměření výzkumu na gramotnosti žáků. Co to znamená z hlediska matematiky, naznačíme níže. Ve srovnání s TIMSS pedagogům tedy PISA poskytuje spíše pohled zvenčí se všemi výhodami a nevýhodami, které z toho plynou.[2]

Výzkum pravidelně v tříletých cyklech zjišťuje vždy čtenářskou, matematickou a přírodovědnou gramotnost vzorků patnáctiletých žáků ze zúčastněných zemí. V každém z cyklů je věnována zvýšená pozornost jedné ze tří sledovaných oblastí (čtenářské, matematické nebo přírodovědné gramotnosti). V roce 2000 výzkum zkoumal především čtenářskou gramotnost, v roce 2003 matematickou gramotnost, v roce 2006 přírodovědnou gramotnost. Navíc bývá v šetření umožněno ověřovat si znalosti a dovednosti žáků v dalších specifických oblastech (např. v roce 2012 to je finanční gramotnost). Výzkum také vždy zjišťuje vztah žáků k oblasti, která je v popředí pozornosti daného cyklu šetření, a dotazuje se i na podmínky výuky.

V roce 2009 byla v centru pozornosti opět čtenářská gramotnost. Testováni byli žáci narození v roce 1993, symbolicky tedy žáci, kteří se narodili v prvním roce existence samostatné České republiky. Za velmi závažnou okolnost považujeme, že testovaná skupina absolvovala druhý stupeň základní školy nebo odpovídající ročníky víceletých gymnázií v období intenzivních příprav škol na práci podle nových vzdělávacích programů, nepatřila však mezi ty žáky, kteří měli podle nových osnov být vzděláváni závazně.[3]

Počet zemí, které se jednotlivých cyklů účastnily, a velikost vzorku českých škol a žáků ukazuje tabulka 1.[4]

Tabulka 1: Počty zúčastněných zemí, českých žáků a škol ve výzkumu PISA

	Počet zemí				
Rok	OECD	jiné	celkem	Počet žáků ČR	Počet škol ČR
2000	28	4	32	5343	229
2003	30	11	41	6316	259
2006	30	27	57	5927	244
2009	34	31	65	6049	260

V tabulce je uváděn počet skutečně testovaných českých žáků v mezinárodním vzorku. Národní vzorek byl v některých letech navyšován pro účely dalších zkoumání a srovnávání prováděných v rámci naší republiky.

2 Někdy se dokonce říká, že výzkum TIMSS je zaměřen na to, co se dnes ve školách vyučuje, zatímco PISA ukazuje, co by se vyučovat mělo. Toto tvrzení však považujeme za poněkud zjednodušující.

3 Špatný výsledek České republiky v šetření PISA 2009 můžeme proto spekulativně interpretovat i tak, že se žáci stali „obětí“ velké administrativní náročnosti přípravy školních vzdělávacích programů, která učitelům brala čas a síly na každodenní pedagogickou činnost. To je však jen jedna z možných hypotéz o příčinách zhoršení našich žáků, kterým se budeme věnovat dále.

4 Počty zemí, ke kterým se vztahují údaje o pořadí České republiky v následujícím textu, se v některých případech liší od údajů v tabulce 1. V roce 2000 bylo např. z datových analýz vyloučeno Nizozemsko a jedenáct nečlenských zemí administrovalo test dodatečně; do srovnání rovněž nejsou zahrnuty. Podobně v roce 2003 vypadlo z technických důvodů Spojené království. Tabulka dále neuvádí, že další země provedly šetření později, např. v roce 2010 provedlo dalších 10 zemí šetření s úlohami PISA 2009.

ŽÁCI VYPLŇUJÍ TESTY A DOTAZNÍKY, DALŠÍ ÚDAJE POSKYTUJÍ ŠKOLY

Úroveň gramotnosti žáků ve všech sledovaných oblastech se zjišťuje písemným testem, na jehož vyplnění mají žáci dvě hodiny. Vzájemný poměr počtu úloh z oblasti čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti, které mají žáci během těchto dvou hodin řešit, se ovšem v jednotlivých cyklech liší. Pro nás je důležité, že v roce 2009 bylo v šetření úloh z matematiky relativně nejméně. To, jak podrobněji popíšeme dále, ztěžuje interpretaci výsledků matematické části testu.

I v rámci jednoho šetření se dále liší sady úloh předložených jednotlivým žákům. Díky tomu je možné v šetření jako celku použít širší škálu úloh, aniž by se zvyšovala časová náročnost testu. Na druhou stranu to při snaze porovnávat výkony žáků nutně vede k složitějším statistickým postupům zpracování výsledků, které někteří odborníci kritizují pro nedostatečnou průhlednost. Při tvorbě této publikace jsme vycházeli z analýz, které zpravidla nesrovnávají celkové výkony různých žáků v testu, ale zaměřují se na porovnávání průměrných výkonů žáků z určité skupiny v jednotlivých úlohách. Využili jsme jednodušší statistické postupy, které však umožňují srovnání například s výsledky testů, které může zadávat a vyhodnocovat sám učitel.

Část úloh je v mezinárodních výzkumech používána opakovaně, což má z hlediska srovnávání výsledků v různých letech velký význam. Konkrétně v případě matematické části šetření PISA 2009 byly všechny použité úlohy (celkem 35) již zadávány i v předchozích dvou cyklech šetření.[5]

Aby bylo možné použít některé úlohy opakovaně, bývá po jednotlivých cyklech zveřejňována jen část otázek. V době přípravy této publikace žádná z otázek použitých v roce 2009 ještě nebyla „odtajněna". Nemůžeme zde tedy uvést přesné znění těch úloh, ke kterým se vztahují naše analýzy.

Kromě řešení úloh všichni testovaní žáci dále vyplňují dotazník, kde odpovídají na otázky týkající se jejich rodinného zázemí, prostředí, ve kterém žijí, jejich názorů a postojů, jejich školy i vyučovacích metod, s nimiž se setkávají. Ředitelé všech zúčastněných škol vyplňují dotazník mapující situaci ve školách. Krátký dotazník o výuce čtení vyplňovali v roce 2009 i učitelé českého jazyka v zúčastněných školách. Z organizace výzkumu opět vyplývá, že v tomto cyklu se otázky v dotaznících nevztahovaly specificky k matematice a její výuce.

VÝSLEDKY JSOU VYJÁDŘENY NĚKOLIKA ZPŮSOBY

V oficiálních zprávách o výzkumu PISA jsou výsledky jednotlivých zemí prezentovány dvěma základními způsoby.

Známější je vyjádření výsledků pomocí skórů (počtu bodů) na škálách úspěšnosti žáků při řešení testových úloh. Uvádějí se průměrné výsledky zemí na celkových škálách pro čtenářskou, matematickou a přírodovědnou gramotnost. Pro blíže zkoumanou oblast (v roce 2009 tedy pro čtenářskou gramotnost) jsou pak vytvořeny ještě dílčí škály zaměřené na okruhy sledovaných kompetencí a vědomostí. Pro matematiku byly výsledky na dílčích škálách pro jednotlivé země zveřejněny po šetření v roce 2003, Česká republika tehdy dosáhla špičkových výsledků v obsahové oblasti kvantita (aritmetika), velmi dobré výsledky byly dosaženy i v oblasti prostor a tvar a nadprůměrně jsme uspěli i v otázkách zaměřených na změnu a vztahy. Jen průměrných výsledků však naši žáci dosahovali v oblasti neurčitost. Předpokládáme, že informace o podrobné struktuře matematického výkonu žáků budou opět součástí zprávy o šetření PISA 2012.

Tabulka 2 uvádí základní „žebříčky" zemí v oblasti matematické gramotnosti (PISA 2009) v porovnání s výsledky šetření TIMSS 2007, posledního, pro které byly v době přípravy naší publikaci známy výsledky. V každém sloupci jsou šedým podtiskem označeny země, které leží v pásmu mezinárodního průměru. K této tabulce je třeba poznamenat, že i když obě měření – PISA a TIMSS – používají formálně stejné škály, nejsou souměřitelné (liší se koncepce obou měření, tady i sledovaný vzdělávací obsah). Přes tuto základní výhradu je tabulka užitečná v tom, že ukazuje, jak se některé země umisťují v obou typech šetření na vyšších příčkách (země jihovýchodní Asie), u jiných se postavení liší (typicky Rusko). Vysvětlení těchto rozdílů může být různé – od specifického zaměření kurikula po odlišný počet let školní docházky, kterou mají za sebou patnáctiletí v různých zemích. Dále si můžeme povšimnout, že pokud se výsledky uvádějí ve vztahu k regionům, mohou existovat značné rozdíly (např. Anglie a Skotsko v rámci TIMSS).

5 Můžeme díky tomu konstatovat, že mezi lety 2003 a 2009 v případě českých žáků došlo u 34 z 35 úloh k poklesu úspěšnosti řešení, pouze u jedné úlohy k malé pozitivní změně – podrobněji dále.

Tabulka 2: Srovnání pořadí zemí v matematice v různě zaměřených šetřeních (podle nces.ed.gov)

Skór	TIMSS 2007 (4. ročník)	TIMSS 2007 (8. ročník)	PISA 2009 (patnáctiletí žáci)
	Hongkong (Čína; 607)		
600	Singapur (599)	Tchaj-wan (598), Korejská republika (597)	Šanghaj (Čína; 600)
		Singapur (593)	
590			
580			
	Tchaj-wan (576)		
	Massachusetts (USA; 572)	Hongkong (Čína; 572)	
570	Japonsko (568)	Japonsko (570)	
			Singapur (562)
560			
	Minnesota (USA; 554)		Hongkong (Čína; 555)
550	Kazachstán (549)	Massachusetts (USA; 572)	
	Rusko (544)		Korejská republika (546)
	Anglie (UK; 541)		Tchaj-wan (543), Finsko (541)
540	Lotyšsko (537)		
	Nizozemsko (535)	Minnesota (USA; 532)	Lichtenštejnsko (536), Švýcarsko (534)
530	Litva (530), USA (529)	Quebec (Kan.; 528)	Japonsko (529), Kanada (527)
	Německo (525)		Nizozemsko (526), Macao (Čína; 525)
	Dánsko (523)		
520	Quebec (Kan.; 519)	Maďarsko, Ontario (Kan.; 517)	Nový Zéland (519)
	Austrálie (516)	Anglie (UK; 513), Rusko (512)	Belgie (515), Austrálie (514)
	Ontario (Kan.; 512)		Německo (513), Estonsko (512)
510	Maďarsko (510), Itálie (507)	Br. Kolumbie (Kan.; 509), USA (508)	Island (507)
	Br. Kolumbie (Kan.), Alberta (Kan.), Rakousko (505)	Litva (506), **Česko** (504)	
	Švédsko (503), Slovinsko (502)	Slovinsko (501)	Dánsko (503), Slovinsko (501)
500	Arménie, Průměr škály TIMSS (500)	Průměr škály TIMSS (500), Arménie (499)	Norsko (498), Francie, Slovensko (497)
	Slovensko (496) Skotsko (UK; 494)	Baskicko (Španělsko; 499), Austrálie (496)	Rakousko, Průměr zemí OECD (496), Polsko (495)
	Nový Zéland (492)	Švédsko (491)	Švédsko (494), **Česko** (493)
490		Malta (488), Skotsko (UK; 487)	Spojené království (492), Maďarsko (490)
	Česko (486)	Srbsko (486)	Lucembursko (489), Irsko, Portugalsko (487), USA (487)
			Španělsko, Itálie (483) Lotyšsko (482)
480		Itálie (480)	Litva (477)
	Norsko (473)	Malajsie (474)	
	…	…	…

Tabulka 2 (pokračování)

Skór	TIMSS 2007 (4. ročník)	TIMSS 2007 (8. ročník)	PISA 2009 (patnáctiletí žáci)
470 a méně	Ukrajina (469), Dubaj (SAE; 444), Gruzie (438), Irán (402), Alžírsko (378), Kolumbie (355), Maroko (341), Salvador (330), Tunisko (327), Kuvajt (316), Katar (296), Jemen (224)	Norsko (469), Kypr (465), Bulharsko (464), Izrael (463), Ukrajina (462), Rumunsko, Dubaj (SAE; 461), Bosna a Hercegovina (456), Libanon (449), Thajsko (441), Turecko (432), Jordánsko (427), Tunisko (420), Gruzie (410), Irán (403), Bahrajn (398), Indonésie (397), Sýrie (395), Egypt (391), Alžírsko (387), Maroko (381), Kolumbie (380), Omán (372), Palestina (367), Botswana (364), Kuvajt (354), Salvador (340), Saúdská Arábie (329), Ghana (309), Katar (307)	Rusko (468), Řecko (466), Chorvatsko (460), Dubaj (SAE; 453), Izrael (447), Turecko (445), Srbsko (442), Ázerbájdžán (431), Bulharsko (428), Rumunsko (427), Uruguay (427), Chile (421), Thajsko, Mexiko (419), Trinidad a Tobago (414), Kazachstán (405), Černá Hora (403), Argentina (388), Jordánsko (387), Brazílie (386), Kolumbie (381), Albánie (377) Tunisko, Indonésie (371), Katar (368), Peru (365), Panama (360), Kyrgyzstán (331)

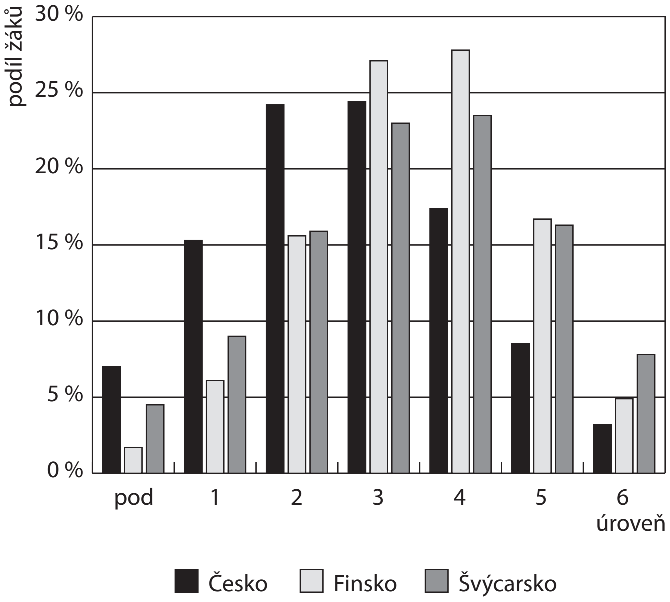
Druhý používaný způsob vyjadřuje výsledky pomocí úrovní způsobilosti.[6] Podle toho, jakého skóru žák v testu dosáhl, je mu přiřazena jedna ze šesti úrovní způsobilosti. Žáci na první úrovni způsobilosti dosahují nejnižších výsledků a ovládají pouze nejjednodušší kompetence. Úlohy, které zvládají tito žáci řešit, vycházejí z jednoduchého a žákovi velmi blízkého kontextu, vyžadují minimum interpretace a aplikaci jednoduchých znalostí v důvěrně známých situacích. Naopak na nejvyšší, šesté úrovni způsobilosti se nacházejí úlohy, které obsahují řadu různorodých prvků a vyžadují náročnou interpretaci. Situace nejsou žákům blízké a úlohy po nich vyžadují promyšlené úvahy a tvořivost, často je při jejich řešení třeba argumentovat a vysvětlovat. V rámci výzkumu PISA byla za základní stanovena druhá úroveň. Žáci, kteří této úrovně nedosáhnou, mohou mít problémy v dalším studiu a s uplatněním na trhu práce.
Rozložení pro tři evropské země ukazuje graf 1. Zařadili jsme do něj kromě České republiky dvě evropské země, které dosáhly z tohoto hlediska pozoruhodného výkonu.
Švýcarsko je spolu s Jižní Koreou zemí, kde dosahuje nejvyšší, šesté úrovně kolem 8 % žáků. Více než 5 % žáků s výkonem v této oblasti vykazuje ještě Japonsko, Belgie a Nový Zéland (Finsko leží těsně pod ní). Z teritorií, která se účastnila testování, avšak nejsou členy OECD, byla více než čtvrtina žáků na nejvyšší úrovni matematického výkonu v čínské Šanghaji. Také v Singapuru, na Tchaj-wanu a v čínském Hongkongu spadala do této kategorie více než desetina žáků.[7] Naproti tomu méně než 1 % nejlepších žáků bylo v Mexiku, Chile, Řecku a Irsku.
Mezi všemi zeměmi OECD bylo ve sledovaném vzorku nejméně žáků na první úrovni nebo pod ní ve Finsku. Jak jsme řekli, úroveň 2 je v šetření PISA považována za základní úroveň, na níž žáci začínají prokazovat zvládnutí dovedností potřebných pro jejich budoucího rozvoj. V roce 2009 v průměru zemí OECD podávalo 14 % žáků výkon na úrovni 1, přičemž 8 % se dokonce nacházelo pod ní. Mezi jednotlivými zeměmi však byly velké rozdíly – ve Finsku a Koreji (a Šanghaji, Hongkongu, Lichtenštejnsku a v Singapuru jako nečlenských územích OECD) leží pod úrovní 2 méně než 10 % žáků.[8]

6 Podrobné vymezení toho, co by měli žáci na jednotlivých úrovních umět, lze nalézt pro oblast čtení v PALEČKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V., BASL, J.: *Umíme ještě číst? Hlavní zjištění výzkumu PISA 2009.* ÚIV, Praha 2010, s. 43, pro matematiku v PALEČKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V.: *Učení pro zítřek.* Praha, ÚIV, 2005, s. 17, pro přírodní vědy v PALEČKOVÁ, J., a kol.: *Hlavní zjištění výzkumu PISA 2006. Pořadí si žáci s přírodními vědami?* ÚIV, Praha 2007, s. 22.

7 *PISA 2009 Results: What students know and can do*, Volume I, s. 130.

8 *PISA 2009 Results: What students know and can do*, Volume I, s. 133.

Graf 1: Podíl žáků na různých úrovních matematické gramotnosti ve třech evropských zemích (PISA 2009)



Jestliže tedy Finsko a Švýcarsko patří mezi evropskými zeměmi na špičku pomyslného žebříčku, pak k tomu u Finska více přispívá malý podíl žáků podávajících výkon na velmi nízké úrovni, zatímco ve Švýcarsku je to důsledkem vyššího počtu velmi úspěšných žáků. Vidíme, že v České republice podalo výkon na nejvyšších úrovních způsobilosti méně žáků ve srovnání jak se Švýcarskem, tak s Finskem. Naopak více žáků u nás podalo výkon na nejnižších úrovních, ať už se porovnáváme s kteroukoli z obou zemí.

Když se ještě na chvíli vrátíme k žebříčkům, můžeme zjistit, že pořadí zemí se liší, pokud se zaměříme jen na vybranou podskupinu žáků. Například Švýcarsko se mezi zeměmi OECD dostane na první místo, pokud ze vzorku vyloučíme žáky z rodin přistěhovalců. To spolu s daty zmíněnými v předchozím odstavci může znamenat, že výuka matematiky obecně probíhá v této zemi na velmi vysoké úrovni, avšak školskému systému se tolik nedaří překonávat překážky v učení dané například odlišným etnickým původem. V případě České republiky se průměrný výsledek testovaných žáků po vyloučení dětí z rodin imigrantů výrazně nezmění, a v pořadí dokonce o dvě příčky poklesneme (přeskočí nás Lucembursko a Spojené království). Zdá se, že pokud jde o matematiku, imigrace výkon žáků v České republice nepoškozuje.

NEJVÍCE ZNEPOKOJENÍ BUDÍ VÝVOJ VÝSLEDKŮ V ČASE

Víme již, že šetření PISA se podrobněji zaměřuje na matematickou gramotnost jednou za devět let. V roce 2003 provedli organizátoři šetření podrobné porovnání znalostí a dovedností patnáctiletých žáků různých zemí nejen v matematice jako celku, ale také v různých dílčích oblastech. Šetření provedené v roce 2009 takový cíl nesledovalo. Stanovilo s přijatelnou přesností jen celkový výsledek za matematiku ve formě skóru a rozložení úrovní, jak jsme právě uvedli. Tím také zachytilo trend vývoje celkových výsledků v jednotlivých zemích, který můžeme charakterizovat buď pořadím, nebo dosaženým skórem (viz tabulku 3). V tabulce 3 neuvádíme údaje za rok 2000. V tomto prvním cyklu šetření PISA byla sice matematika rovněž testována, ale obsah testu byl následně revidován a rozšířen, takže za plně srovnatelné jsou považovány celkové výsledky matematické části testu až od roku 2003.

Pozornost vyvolává právě pokles celkového skóru a rovněž pořadí v matematice (a přírodních vědách) v posledních letech. A tady nastává problém. Jak jsme se snažili v předchozích řádcích vysvětlit, z cyklického charakteru výzkumu PISA vyplývá, že zhoršení celkového výsledku mezi lety 2003 a 2009 můžeme poměrně spolehlivě konstatovat, avšak výzkum poskytl jen dosti omezené množství podkladů pro to, abychom je mohli vysvětlit. Přes to se pokusíme poukázat na některé možné příčiny.

ÚLOHY, OTÁZKY A ÚSPĚŠNOST JEJICH ŘEŠENÍ

Následující část úvodního textu má odlišný charakter než dosud prezentované údaje. Dosud jsme vycházeli z celkových skórů zemí a jejich pořadí. Nyní se nebudeme zabývat skóry vypočtenými metodami vycházejícími z teorie odpovědi na položku (IRT), ale podíváme se na prosté průměrné úspěšnosti na úrovni jednotlivých otázek nebo jejich podskupin. Proto nyní stručně charakterizujeme úlohy, resp. otázky, které žáci řešili.

Šetření PISA se od počátku snaží měřit **matematickou gramotnost**, která je pro potřeby výzkumu vymezena jako *schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.*

Typické **úlohy** výzkumu PISA tvoří soubor několika **otázek**, které zkoumají jedno určité téma. Úlohy obvykle uvádí více či méně rozsáhlý text, graf, obrázek nebo jiný písemný materiál, k němuž se vztahují otázky a který téma zasazuje do určité situace nebo kontextu: osobního, veřejného, pracovního, vzdělávacího nebo vědeckého.[9] Matematickou část šetření PISA 2009 tvořilo 35 otázek. Všechny byly použity již v šetřeních PISA 2003 a 2006.[10]

Tabulka 3: Vývoj pořadí a průměrného výsledku zemí OECD v šetření PISA (matematická gramotnost)

Pořadí	**PISA 2003**		**PISA 2006**		**PISA 2009**	
1.	Finsko	544	Finsko	548	Korea	546
2.	Korea	542	Korea	547	Finsko	541
3.	Nizozemsko	538	Nizozemsko	531	Švýcarsko	534
4.	Japonsko	534	Švýcarsko	530	Japonsko	529
5.	Kanada	532	Kanada	527	Kanada	527
6.	Belgie	529	Japonsko	523	Nizozemsko	526
7.	Švýcarsko	527	Nový Zéland	522	Nový Zéland	519
8.	Austrálie	524	Belgie	520	Belgie	515
9.	Nový Zéland	523	Austrálie	520	Austrálie	514
10.	**Česko**	**516**	Estonsko	515	Německo	513
11.	Island	515	Dánsko	513	Estonsko	512
12.	Dánsko	514	**Česko**	**510**	Island	507
13.	Francie	511	Island	506	Dánsko	503
14.	Švédsko	509	Rakousko	505	Slovinsko	501
15.	Rakousko	506	Slovinsko	504	Norsko	498
16.	Německo	503	Německo	504	Francie	497
17.	Irsko	503	Švédsko	502	Slovensko	497
18.	Slovensko	498	Irsko	501	Polsko	495
19.	Norsko	495	Francie	496	Švédsko	494
20.	Lucembursko	493	UK	495	**Česko**	**493**
21.	Polsko	490	Polsko	495	UK	492
22.	Maďarsko	490	Slovensko	492	Maďarsko	490
23.	Španělsko	485	Maďarsko	491	Lucembursko	489
24.	USA	483	Lucembursko	490	USA	487
25.	Portugalsko	466	Norsko	490	Irsko	487
26.	Itálie	466	Španělsko	480	Portugalsko	487
27.	Řecko	445	USA	474	Španělsko	483
28.	Turecko	423	Portugalsko	466	Itálie	483
29.	Mexiko	385	Itálie	462	Řecko	466
30.			Řecko	459	Izrael	447
31.			Izrael	442	Turecko	445
32.			Turecko	424	Chile	421
33.			Chile	411	Mexiko	419
34.			Mexiko	406		

Otázky mohou mít následující formu:
– otázky s výběrem odpovědi – žáci vybírají jedinou správnou odpověď ze 4–5 nabízených možností;
– komplexní otázky s výběrem odpovědi – žáci vybírají jednu z odpovědí ano/ne v souboru minimálně dvou otázek;
– uzavřené otázky s tvorbou odpovědi – žáci vytvářejí vlastní odpověď, jedná se však o odpověď vyjádřenou jen jedním či několika slovy (uvedení výsledku výpočtu, dokreslení symbolu do obrázku apod.);
– otevřené otázky s tvorbou odpovědi – žáci odpovídají vlastními slovy, jedná se o odpověď rozsáhlejší (zdůvodnění, jak dospěli ke svému závěru, uvedení argumentů podporující správnost či nesprávnost určitého tvrzení apod.).

9 Jedním z kontextů, s nímž se žáci ve svém dalším studiu a praktickém životě budou setkávat, je i svět matematiky. Proto se též objevují otázky zasazené do kontextu čistě matematického (neboli vnitromatematického). Charakteristické však je, že taková otázka byla v šetření v roce 2009 jen jedna.

10 Připomeňme, že do šetření PISA 2003 přešlo 20 otázek z šetření PISA 2000 a z nich 8 bylo dokonce použito i v následujících dvou cyklech šetření (OECD 2012a).

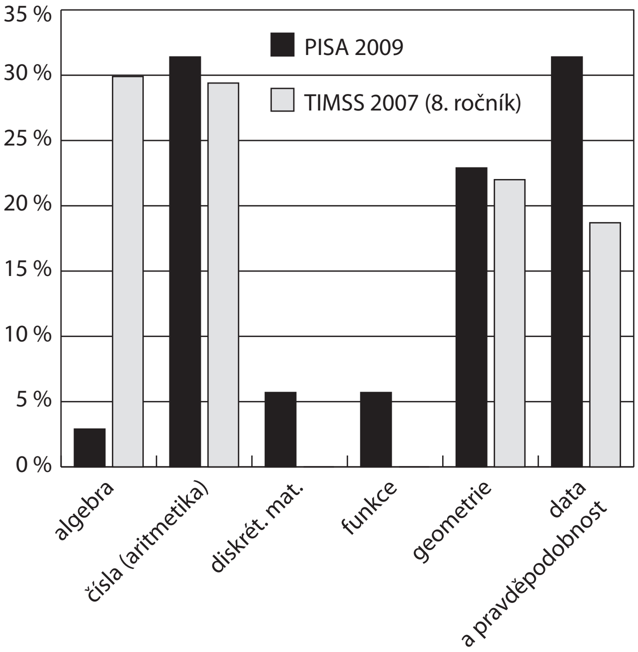
O jakou matematiku jde v těchto otázkách? V šetření PISA se vyvinula dvojí klasifikace tematiky úloh a otázek. Označení pro obě klasifikace v českých textech není úplně ustálené.
Výzkum PISA vymezil několik zastřešujících **tematických oblastí**, které představují základní okruhy problémů, k jejichž řešení v praktickém životě používáme matematiku: kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy, neurčitost. Postupem času se však ukázalo užitečné charakterizovat matematický **obsah** úloh (resp. otázek) v tradičnějších termínech, např. takových, které jsou používány pro třídění úloh TIMSS pro osmé ročníky[11] (aritmetika/čísla, algebra, geometrie…). Tabulka 4 uvádí strukturu úloh v obou klasifikacích, čímž zároveň naznačuje míru korespondence mezi různými kategoriemi.

Tabulka 4: Počty úloh v šetření PISA 2009 podle tématu a obsahu

	Téma				
Obsah	kvantita	neurčitost	prostor a tvar	změna a vztahy	celkem
algebra				1	1
čísla	10			1	11
diskrétní mat.	1	1			2
funkce				2	2
geometrie			8		8
pravděpodobnost		2			2
statistika		4		5	9
celkem	11	7	8	9	35

Zajímavé je porovnání s rozdělením úloh pro osmé ročníky v šetření TIMSS 2007, které ukazuje graf 2. Je vidět, že v šetření PISA se klade větší důraz na oblast pravděpodobnosti a statistiky, zatímco podstatně méně je zastoupena algebra. Někdy se rozdíl mezi šetřeními TIMSS a PISA prezentuje jako rozdíl mezi tím, jaké matematické vzdělávání je a jaké by mělo být. To je poněkud zjednodušené. Z dosud uvedených charakteristik lze však říci, že v šetření PISA je matematika **konkrétnější**, **méně symbolická**, **méně abstraktní** a více zakotvená v určitém kontextu či situaci. Jen málo otázek je „čistě matematických".

Graf 2: Porovnání struktury šetření PISA a TIMSS – podíl úloh podle matematického obsahu



Konečně lze otázky rozdělit podle skupin kompetencí či dovedností, jež jsou při jejich řešení potřebné. V šetření PISA se pracuje se třemi obecnějšími kategoriemi dovedností, jimiž jsou reprodukce, integrace a reflexe. Rozložení otázek použitých podle různých hledisek udává příloha.
I když celkový počet použitých úloh oproti roku 2006 poklesl z 48 na 35, tabulka 5 ukazuje, že celkové rozložení se příliš nezměnilo z hlediska tematiky ani typu kompetencí (kladné číslo znamená, že podíl úloh daného typu se v roce 2009 zvýšil). Příčinu výrazného zhoršení českých žáků tedy nehledáme ve změně obsahu testu.

11 *Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA*, OECD 2009.

Tabulka 5: Změna podílu různých druhů otázek použitých v roce 2009 oproti roku 2006 (v procentních bodech)

	Dovednost		
Téma	integrace	reflexe	reprodukce
kvantita	0	2	3
neurčitost	1	-3	-1
prostor a tvar	0	-1	2
změna a vztahy	1	-2	-1

Podívejme se teď na to, jak si čeští žáci vedli v různých otázkách. Zde je nutné znovu připomenout, že matematických úloh bylo v šetření 2009 nejméně ze všech tří základní oblastí. Proto jsou různé kategorie obsahu nebo dovedností zastoupeny nízkým počtem otázek (viz tabulku 4), který neumožňuje přesnější statistickou analýzu. Následující informace mají proto jen popisný charakter.

Tabulka 6 ukazuje, že nejnižší úspěšnosti čeští žáci dosáhli v otázce z algebry, která vyžadovala dovednost reflexe. Tuto otázku správně zodpovědělo necelých 8 % českých žáků. Byla to současně jediná otázka označená klasifikovaná jako algebraická. Z hlediska celkové obtížnosti za otázkou z algebry následovala otázka z geometrie vyžadující integraci a podobně nízkou úspěšnost měla úloha ze statistiky vyžadujíc opět reflexi. (Podle druhé možné obsahové klasifikace otázka s nejnižší úspěšností spadá do kategorie změna a vztahy, další dvě otázky s malou úspěšností řešení jsou v tematickém okruhu prostor a tvar.) Naopak nejvyšší úspěšnosti (94 %) dosáhli čeští žáci v aritmetické otázce vyžadující reprodukci, následované podobně reprodukčními otázkami v geometrii a pravděpodobnosti.

Tabulka 6: Nejnižší hodnota úspěšnosti, s níž čeští žáci řešili některou úlohu z dané skupiny (v procentech)

	Dovednost		
Obsah	reprodukce	integrace	reflexe
algebra			7,9
čísla	43,3	27,3	62,8
diskrétní matematika			44,4
funkce		39,9	49,2
geometrie	74,0	15,0	15,3
pravděpodobnost	70,7	30,1	
statistika	31,0	23,0	16,5

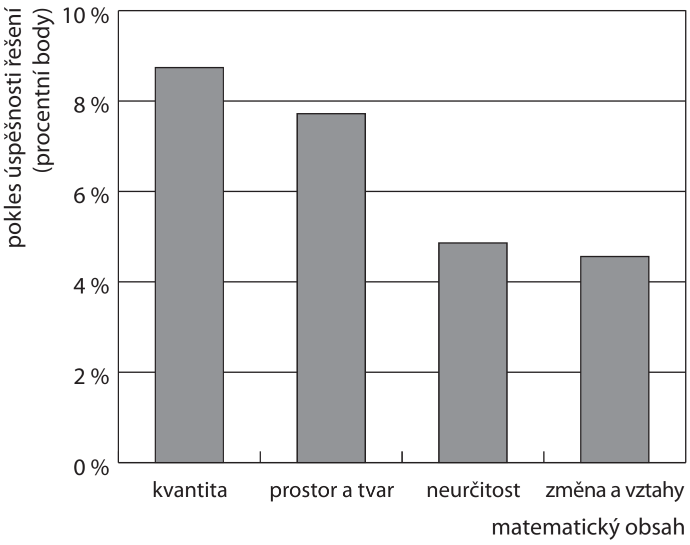
V tomto popisu úspěšně a neúspěšně řešených úloh nebylo zohledněno, zda například algebraická otázka, kde mělo jen málo českých žáků správné řešení, nebyla objektivně obtížnější než jiné otázky výzkumu. (Jednalo se mj. o otevřenou otázku s tvorbou odpovědi, kde obecně bývá úspěšnost nižší než u otázek s výběrem odpovědi.) Proto je zajímavé se podívat, jak úspěšně různé otázky řešili žáci z jiných zemí. Pokud srovnáme úspěšnost, s níž otázku řešili čeští žáci a průměr zemí OECD, pak se obraz změní. Všech pět otázek, při jejichž řešení naši žáci nejvíce zaostali za průměrným výkonem svých vrstevníků z jiných zemí, spadá z hlediska matematického obsahu do **teorie pravděpodobnosti** a do **statistiky**. V první desítce otázek obtížných pro naše žáky více než pro žáky ostatních zemí je z této oblasti celkem sedm otázek. Naopak do první desítky otázek, kde naši žáci dosáhli větší úspěšnosti než průměr zemí OECD, se žádná otázka z tematického okruhu neurčitost nedostala. To ukazuje, že tato tradiční slabina českých žáků přetrvává. Tabulka 7 ukazuje, že testovaní čeští žáci „ztratili" na své vrstevníky z jiných zemí zejména při řešení otázek z tematického okruhu neurčitost na nižší dovednostní úrovni. Nejkritičtěji z tohoto hlediska dopadly otázky z oblasti teorie pravděpodobnosti. Dvě ze tří otázek, které dělaly českým žákům relativně největší problémy, vyžadovaly „jen" výběr odpovědi – není tedy pravda, že „zaškrtávací" testové úlohy jsou vždy snadné.

Tabulka 7: Průměrný rozdíl v úspěšnosti řešení různých skupin úloh mezi českými žáky a žáky zemí OECD v procentních bodech (PISA 2009)

	Dovednost		
Téma	reprodukce	integrace	reflexe
kvantita	4,17	–0,65	4,62
neurčitost	**–7,22**	–4,33	4,53
prostor a tvar	6,89	3,59	3,88
změna a vztahy	3,91	–1,67	1,72

Relativně lépe než jejich vrstevníci si čeští žáci vedli především v některých otázkách z geometrie, popř. aritmetiky. Do ještě jiné perspektivy se ovšem data dostávají, když se podíváme na změny v úspěšnosti řešení úloh mezi lety 2003 a 2009, jak je ukazuje graf 3. Čeští žáci se zhoršili hlavně v těch oblastech učiva, kde se jim dříve relativně dařilo – v aritmetice a geometrii.

Graf 3: Zhoršení průměrné úspěšnosti řešení úloh českými účastníky výzkumu PISA mezi lety 2003 a 2009



ZNÁME PŘÍČINY ZHORŠOVÁNÍ?

Pokles výsledků českých žáků postihl nejen všechny testované obsahové oblasti matematiky, ale rovněž i přírodní vědy a čtenářskou gramotnost. Zdá se proto logické uvažovat o příčinách, které se týkají celé školy, nebo dokonce celé společnosti.

Ekonom Daniel Münich[12] v poslední době vystoupil se zajímavými hypotézami o možných příčinách našeho zhoršení. Jedním z faktorů, na které upozorňuje, jsou demografické změny. Při srovnávání výsledků z let 2003 a 2009 srovnáváme žáky narozené v letech 1987 a 1993. V devadesátých letech však prudce poklesla porodnost a podle Münicha zejména vzdělanější matky odložily mateřství do budoucna, přičemž vzdělání matky je výrazným faktorem ovlivňujícím vzdělávací výsledky dětí. Dalším podobným faktorem mohl být nárůst odkladů školní docházky, který vede k tomu, že ve skupině testovaných patnáctiletých přibylo žáků, kteří jsou v nižším postupném ročníku. Citovaný autor má pravdu v tom, že nejvýrazněji se na výsledcích podílejí charakteristiky žáků. Naše propočty také ukazují, že se složení vzorku žáků v uvedeném ohledu skutečně změnilo, nezdá se však, že by to mohlo vysvětlit tak masivní zhoršení výkonu. Navíc lze předpokládat, že podobné sociální proměny postihly i další země bývalého sovětského bloku, avšak vývoj v nich má odlišný charakter.

Vedle demografických faktorů Münich poukazuje na některé jevy v oblasti školství. Prvním je vliv kurikulární reformy. I když se testované populace přímo neměla dotknout, mohli podle Münicha někteří učitelé uplatňovat nové metody iniciativně již i při výuce testovaných žáků. Je možné, že na výuce testovaných žáků se podepsala zátěž, kterou na bedra učitelů naložila realizace reformy. Münich opět obecně uvažuje správně, když se jako na druhý nejvýznamnější faktor výsledků výuky zaměřuje na učitele. Obránci reformy však úvahy o efekty reformy v tuto dobu považují za nekorektní a domnívají se, že je ani u šetření PISA 2012 ještě nebude možné poznat, neboť žáci testovaní v roce 2012 se vzdělávali podle nových programů jen na druhém stupni a učitelé si ještě dostatečně neosvojili reformní metody práce. Vzhledem ke konstrukci výzkumu PISA 2009, který neobsahuje informace o učitelích matematiky, pro kterýkoli z názorů nemáme v našich datech oporu.

Dalším z možných faktorů je vznik krajů provázený zrušením odvětvového řízení škol (zánik školských úřadů na okresní úrovni), v důsledku čehož se dle Münicha hlavním partnerem základních škol staly obecní úřady, resp. politické reprezentace obcí, a z „řízení, koordinace a poradenství školám se celkem přirozeně začala vytrácet agenda pedagogická a zůstala jen agenda finanční a personálního obsazení škol". Tady je třeba potvrdit, že data z výzkumu PISA 2009 potvrzují, že míra autonomie – a tedy i odpovědnosti –, která byla přenesena na české školy, se jeví z pohledu ředitelů v kontextu ostatních zemí OECD mimořádně vysoká. Je proto otázkou, zda jsou všichni ředitelé dostatečně disponovaní a připravení pro šíři úkolů, které musí plnit.

Při hledání příčin se opakovaně poukazovalo také na to, že čeští žáci sice měli v předchozích šetřeních v matematice dobré výsledky, ale v mezinárodním srovnání vykazovali nepříznivé charakteristiky v oblasti postojů k matematice. Sami autoři šetření PISA však upozorňují na to, že srovnávání postoje žáků různých zemí k matematice je problematické. Ukazuje se totiž, že některé ze zemí opakovaně dosahujících nejúspěšnějších výsledků (Japonsko, Korea, Finsko…) vykazovaly značně podprůměrnou hodnotu indexu popisujícího oblibu matematiky. Dokonce bylo možné najít slabou nepřímou úměrnost mezi hodnotou tohoto indexu a výsledkem v matematice v roce 2003. Možná více světla do této problematiky vnesou novější zjištění výzkumů TIMSS a PISA, specificky zaměřená na kontexty vyučování matematiky.

---

12 Münich, D. (2011). Proč se čeští žáci zhoršují. *Lidové noviny*, 17. září, s. 21.

Konečně je také možné uvažovat o tom, že se čeští žáci v minulých letech zlepšili v něčem jiném než v testovaných oblastech matematické gramotnosti. Nabízí se algebra, která nehraje v koncepci PISA velkou roli. Ovšem víme, že právě v této obecně obtížné oblasti matematiky podali v šetření TIMSS 2007 čeští žáci slabší výkon – zdá se tedy, že ani v algebře naši žáci nad mezinárodní průměr (již) také nevynikají. Pokud se podíváme za rámec matematiky, pak vidíme, že reforma zaměřila pozornost a metodickou podporu škol a učitelů na klíčové kompetence a průřezová témata, do nichž však matematika nebo matematická gramotnost explicitně zařazeny nebyly. Můžeme se domnívat, že reforma probíhala na úkor podpory matematiky.
Na závěr je třeba ještě jednou připomenout, že šetření PISA 2009 nebylo primárně zaměřeno na matematiku. Výše uvedené úvahy o výkonu žáků v různých typech úloh jsou proto založeny na malém souboru testových položek. Spolehlivější informace lze proto očekávat až od šetření PISA 2012.

CO S TÍM LZE DĚLAT?

Pokud shrneme dosud uvedená zjištění, lze říci: výkon českých žáků v matematické části šetření PISA v posledních několika letech výrazně poklesl. Čeští žáci již tradičně měli problémy s řešením i relativně snadných úloh z oblasti pravděpodobnosti a práce s daty. Zhoršení se však nejvíce projevilo v oblastech, kde jsme byli dříve úspěšní, tedy v aritmetice a geometrii. Úspěšnost řešení poklesla prakticky u všech otázek, zdá se však, že obtížnějších úloh se zhoršení dotklo více.
Problém se zdá mít dvě složky: jedna z nich je kurikulární a týká se konkrétního učiva nebo určitých typů úloh, kde čeští žáci selhávají opakovaně, neboť tyto partie v české škole jsou probírány v menší míře nebo později než v jiných zemích. Druhý problém se však týká pravděpodobně matematiky jako celku (nebo přístupu k méně běžným a obtížným úlohám) a nelze ho vyřešit jen změnami v rozvržení učiva.
Je možné, že ve školách, do jejichž kurikula jsou vkládány další a další cíle, je na matematiku prostě méně času. Je však také možné, že dosavadní způsob výuky matematiky v nových podmínkách, tváří v tvář nové, odlišné generaci žáků, vyčerpal své možnosti. Ať už působí kterýkoli z faktorů nebo jejich kombinace, zdá se nutné hledat a zkoušet nové přístupy, jak využít ten čas, který je stále ještě výuce matematiky ve škole věnován.[13] V žádném případě nevoláme po tom, aby se školní matematika plně podřídila pojetí, na němž je založeno šetření PISA. To by mohlo mít velmi neblahé důsledky jak pro celkový rozvoj myšlení a osobnosti žáků, tak pro jejich schopnost pokračovat později v přípravě pro vědecké a technické profese. Na druhou stranu nemůžeme ignorovat, že pojetí matematiky v šetření PISA se snaží odrážet nejen potřeby pracovního trhu, ale je také „matematikou pro demokracii", tedy zastupuje takovou matematickou gramotnost, která umožňuje lidem kompetentně fungovat v rolích občana a voliče. Proto výsledky PISA nesmíme přeceňovat, ale neměli bychom je ani podceňovat.
Učiteli, který hledá možnosti zvýšení relevantnosti a kvality vyučování matematice, druhá, rozsáhlejší část naší knížky nabízí řadu námětů ukazujících zcela konkrétní cesty k tomuto cíli. Při jejich tvorbě autoři vycházeli z analýzy specifických obtíží, jež se u českých žáků při řešení testových otázek z mezinárodních šetření objevily. Proto jsou ve sbírce zařazeny úlohy podobného charakteru, jaké se vyskytují v šetřeních PISA. Vedle nich však učitel ve sbírce najde řadu dalších úloh, často stručnějších, které však mají přípravný charakter, rozvíjejí u žáků postupně ty kvality, které potřebují pro úspěšné řešení komplexnějších problémů.
Všechny komentáře k úlohám jsou prostoupeny základní radou účinného vyučování k tvořivosti: nevstupujte do myšlenkových procesů žáků, neraďte, nevysvětlujte; věřte, že skoro všechny myšlenky odhalí třída ve vzájemných diskusích žáků. Čtenář ovšem musí mít odvahu nový přístup vyzkoušet v praxi. Když tak udělá s nadějí, že „to bude fungovat" (abychom použili vyjádření jednoho z našich úspěšných spolupracovníků z praxe), a když uvidí nečekaně příznivou odezvu svých žáků, je zde veliká šance, že jeho vyučování se trvale změní k lepšímu.

13 Každá gramotnost – matematickou nevyjímaje – se ovšem utváří ve všech školních předmětech.

PŘÍLOHY

Příloha 1: Vývoj pořadí všech států a teritorií účastnících se šetření PISA (matematická gramotnost)

Pořadí	PISA 2003		PISA 2006		PISA 2009	
1.	Hongkong (Čína)	550	Tchaj-wan	549	Hongkong (Čína)	555
2.	Finsko	544	Finsko	548	Korea	546
3.	Korea	542	Hongkong (Čína)	547	Tchaj-wan	543
4.	Nizozemsko	538	Korea	547	Finsko	541
5.	Lichtenštejnsko	536	Nizozemsko	531	Lichtenštejnsko	536
6.	Japonsko	534	Švýcarsko	530	Švýcarsko	534
7.	Kanada	532	Kanada	527	Japonsko	529
8.	Belgie	529	Macao (Čína)	525	Kanada	527
9.	Macao (Čína)	527	Lichtenštejnsko	525	Nizozemsko	526
10.	Švýcarsko	527	Japonsko	523	Macao (Čína)	525
11.	Austrálie	524	Nový Zéland	522	Nový Zéland	519
12.	Nový Zéland	523	Belgie	520	Belgie	515
13.	**Česko**	**516**	Austrálie	520	Austrálie	514
14.	Island	515	Estonsko	515	Německo	513
15.	Dánsko	514	Dánsko	513	Estonsko	512
16.	Francie	511	**Česko**	**510**	Island	507
17.	Švédsko	509	Island	506	Dánsko	503
18.	Rakousko	506	Rakousko	505	Slovinsko	501
19.	Německo	503	Slovinsko	504	Norsko	498
20.	Irsko	503	Německo	504	Francie	497
21.	Slovensko	498	Švédsko	502	Slovensko	497
22.	Norsko	495	Irsko	501	Polsko	495
23.	Lucembursko	493	Francie	496	Švédsko	494
24.	Polsko	490	UK	495	**Česko**	**493**
25.	Maďarsko	490	Polsko	495	UK	492
26.	Španělsko	485	Slovensko	492	Maďarsko	490
27.	Lotyšsko	483	Maďarsko	491	Lucembursko	489
28.	USA	483	Lucembursko	490	USA	487
29.	Rusko	468	Norsko	490	Irsko	487
30.	Portugalsko	466	Litva	486	Portugalsko	487
31.	Itálie	466	Lotyšsko	486	Španělsko	483
32.	Řecko	445	Španělsko	480	Itálie	483
33.	Srbsko	437	Ázerbájdžán	476	Lotyšsko	482
34.	Turecko	423	Rusko	476	Litva	477
35.	Uruguay	422	USA	474	Rusko	468
36.	Thajsko	417	Chorvatsko	467	Řecko	466
37.	Mexiko	385	Portugalsko	466	Chorvatsko	460
38.	Indonésie	360	Itálie	462	Izrael	447
39.	Tunisko	359	Řecko	459	Turecko	445
40.	Brazílie	356	Izrael	442	Srbsko	442
41.			Srbsko	435	Ázerbájdžán	431
42.			Uruguay	427	Bulharsko	428
43.			Turecko	424	Rumunsko	427
44.			Thajsko	417	Uruguay	427
45.			Rumunsko	415	Chile	421
46.			Bulharsko	413	Thajsko	419
47.			Chile	411	Mexiko	419
48.			Mexiko	406	Černá Hora	403
49.			Černá Hora	399	Argentina	388
50.			Indonésie	391	Jordánsko	387
			…		…	

Příloha 2: Počet otázek v matematických úlohách výzkumu PISA 2009

	Podle formátu otázky					
	Celkem	s výběrem odpovědi	komplexní s výběrem odpovědi	uzavřené s tvorbou odpovědi	otevřené s tvorbou odpovědi	s krátkou odpovědí
Podle tematických okruhů (témat)						
kvantita	11	3	2	2	0	4
prostor a tvar	8	2	1	1	3	1
změna a vztahy	9	1	2	0	5	1
neurčitost	7	3	2	0	0	2
celkem	35	9	7	3	8	8
Podle dovedností (tříd kompetencí)						
reprodukce	9	5	0	1	1	2
integrace	18	1	6	1	4	6
reflexe	8	3	1	1	3	0
celkem	35	9	7	3	8	8
Podle typu situace nebo kontextu						
osobní	4	3	1	0	0	0
veřejná	13	5	2	1	2	3
pracovní	1	0	0	0	0	1
vzdělávací	4	0	2	2	0	0
vědecká	12	1	2	0	5	4
vnitromatematická	1	0	0	0	1	0
celkem	35	9	7	3	8	8

1 ZÁVISLOSTI: VÝŠKA A HMOTNOST, GRAFY A TABULKY

VSTUPNÍ ÚLOHA: **BMI**

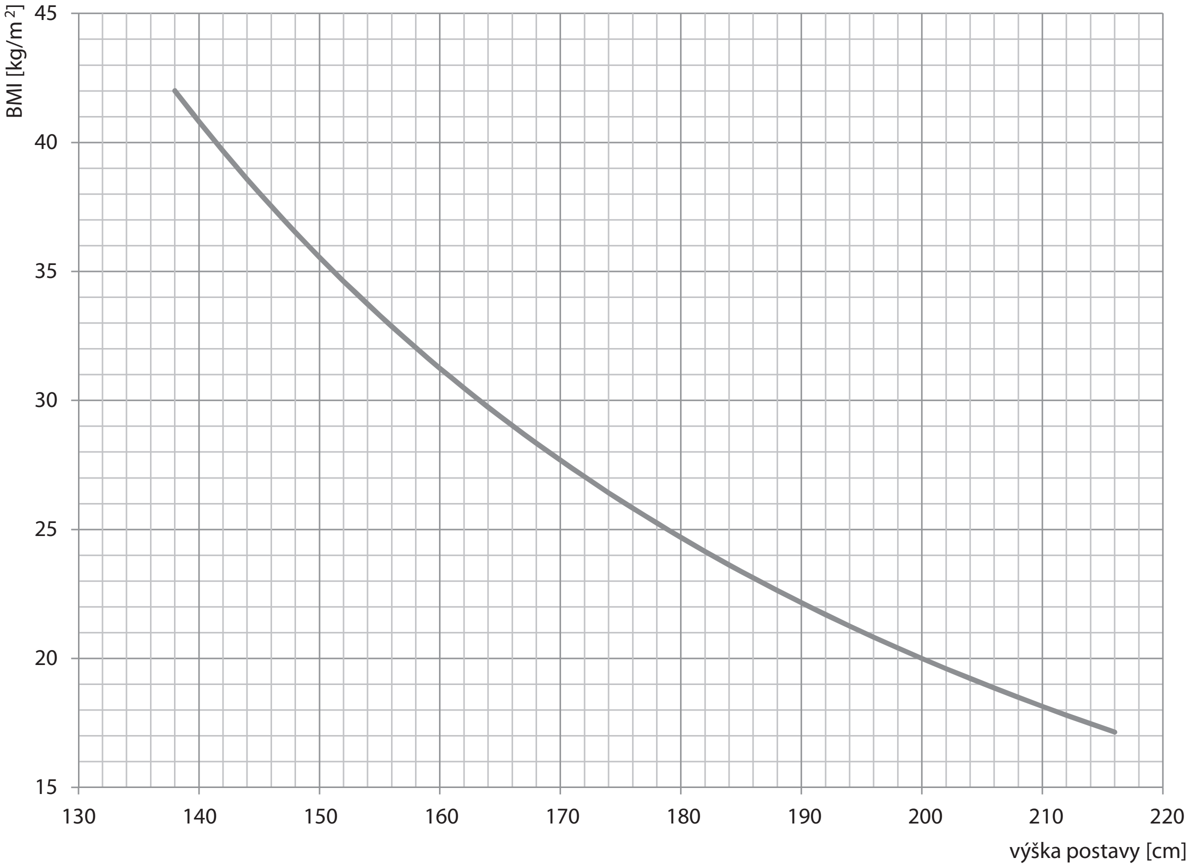
Jednou z možností, jak zjistit tělesné proporce, je spočítat si tzv. body mass index (BMI). Z výšky člověka a jeho váhy se zjistí, zda je člověk obézní, zda má podváhu nebo je jeho váha v normě. Příliš silný nebo hubený člověk může mít zdravotní rizika.

BMI vypočítáme, když váhu (v kg) vydělíme druhou mocninou výšky (v m) a zaokrouhlíme na jedno desetinné místo.

Pro dospělého platí tato tabulka:

Kategorie	podváha	normální	nadváha	obezita	těžká obezita
BMI	pod 18,5	18,5–24,9	25–29,9	30–34,9	35 a více

Závislost BMI dospělého na výšce pro hmotnost 80 kg



a) Na grafu je znázorněna závislost velikosti BMI na výšce postavy člověka vážícího 80 kg. Z grafu a tabulky zjisti:

1. Jaký je BMI pro člověka vysokého 190 cm?
2. Označ v grafu, která část čáry se týká obézního člověka.
3. Kolik cm musí člověk měřit, aby byl při váze 80 kg obézní? Urči s přesností na celé centimetry.
4. Může mít člověk s 80 kg váhy podváhu? Vysvětli.

b) Označ a zdůvodni správnou odpověď: Uvažujeme-li 80 kg vážícího člověka, s rostoucí výškou

A. se zvětšuje jeho BMI

B. se zmenšuje jeho BMI

C. nedá se říci

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

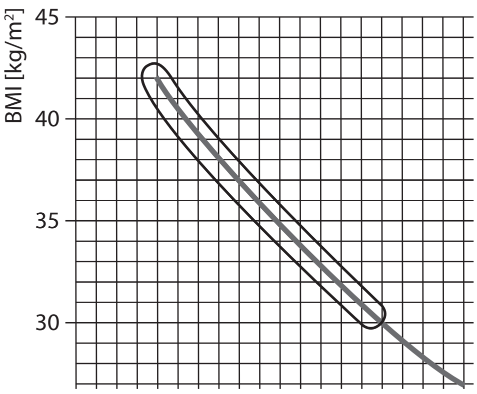
a) 1. 22,2

2. část grafu nad vodorovnou čarou vedoucí od čísla 30 (viz obr. vpravo)

3. 163 cm a méně

4. Může, pokud měří 208 cm a více, jeho BMI je menší než 18,5, a tedy má podváhu.

b) S rostoucí výškou se zmenšuje BMI, neboť čím větší výška, tím větším číslem dělíme váhu. Lze vysvětlit i z grafu: S rostoucí výškou se v grafu pohybujeme po čáře doprava dolů, klesá tedy BMI.



✂ ✂

DALŠÍ ÚLOHY

Připomínáme ze vstupní úlohy:

BMI vypočítáme, když váhu (v kg) vydělíme druhou mocninou výšky (v m) a zaokrouhlíme na jedno desetinné místo.

Pro dospělého jedince platí tato tabulka:

Kategorie	podváha	normální	nadváha	obezita	těžká obezita
BMI	pod 18,5	18,5–24,9	25–29,9	30–34,9	35 a více

1. Spočítej BMI člověka, který měří 1,84 m a váží 82 kg.

2. Lucky maminka váží 64 kg a měří 152 cm. Spočítej její BMI a zjisti z tabulky, do jaké kategorie patří.

3. Hokejista měří 2 metry a váží 95 kg. Jaká je jeho postava? Vypočítej BMI a zjisti z tabulky, do jaké kategorie patří.

4. Pan Talíř váží 88 kg a měří 179 cm. Obává se, že má nadváhu, nebo je dokonce obézní. Bojí se oprávněně?

5. Paní Novotná (165 cm) a Kubešová (159 cm) váží stejně, 61 kg. Která má větší BMI? Vysvětli.

6. Má-li člověk nižší BMI, je štíhlejší nebo silnější? Proč?

7. Spočítej BMI u těchto zaměstnanců pošty a zapiš do sloupce BMI:

Jméno	**výška [cm]**	**váha [kg]**	**BMI**
Karvánková	168	56	
Novák	195	103	
Karlík	178	95	
Hnilečková	152	74	
Koutný	180	67	
Bílá	161	58	
Lesák	198	110	

Martinův táta řekl, že vedoucí pošty je ze všech zaměstnanců „nejtlustší". Kdo to asi je?

8. Všichni čtyři veslaři ve čtyřce bez kormidelníka mají stejnou váhu. Mají stejný i BMI?

9. Když člověk zhubne o 5 kg, změní se nějak jeho BMI? Pokud ano, jak?

10. Říká se, že správná váha dospělého by měla být v kilogramech tolik, o kolik centimetrů přesahuje jeho výška 1 metr. Tedy pro člověka výšky 175 cm by byla správná váha 75 kg, pro člověka 190 cm pak váha 90 kg. Zjisti, jestli tato poučka odpovídá tabulce BMI. Opravdu člověk, který dodržuje toto pravidlo, nebude mít nadváhu? Dosazuj různé hodnoty.

11. Dušan počítal BMI dvěma svým rodičům (otec 200 cm / 116 kg a matka 170 cm / 60 kg). Neměl kalkulačku, tak počítal ručně na papír. U koho se mu počítalo pohodlněji?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY

1. 24,2

2. BMI maminky Lucky je 27,7 a má nadváhu.

3. BMI hokejisty je 23,8 a je váhově normální.

4. BMI pana Talíře je 27,5 a má nadváhu. Za obézního považován podle tabulky není.

5. Paní Kubešová má větší BMI, neboť při stejné váze je nižší, tedy se její váha dělí menším číslem, a tedy její BMI bude větší.

6. S nižším BMI je člověk štíhlejší, což vyplývá z toho, jak se BMI určuje.

7. Hodnoty BMI uvádíme v pořadí shora dolů v tabulce: 19,8; 27,1; 30,0; 32,0; 20,7; 22,4; 28,1. Nejvyšší BMI a tedy „nejtlustší" je paní Hnilečková. Ta je vedoucí pošty.

8. Nevíme, záleží na výšce. Nejmenší veslař bude mít největší BMI.

9. Jestliže člověk zhubne o 5 kg, jeho BMI se určitě zmenší. O kolik se ale nedá určit, museli bychom znát jeho výšku.

10. Poučka odpovídá pro dospělého člověka nižšího než 1,90 m a vyššího než 1,33 m.

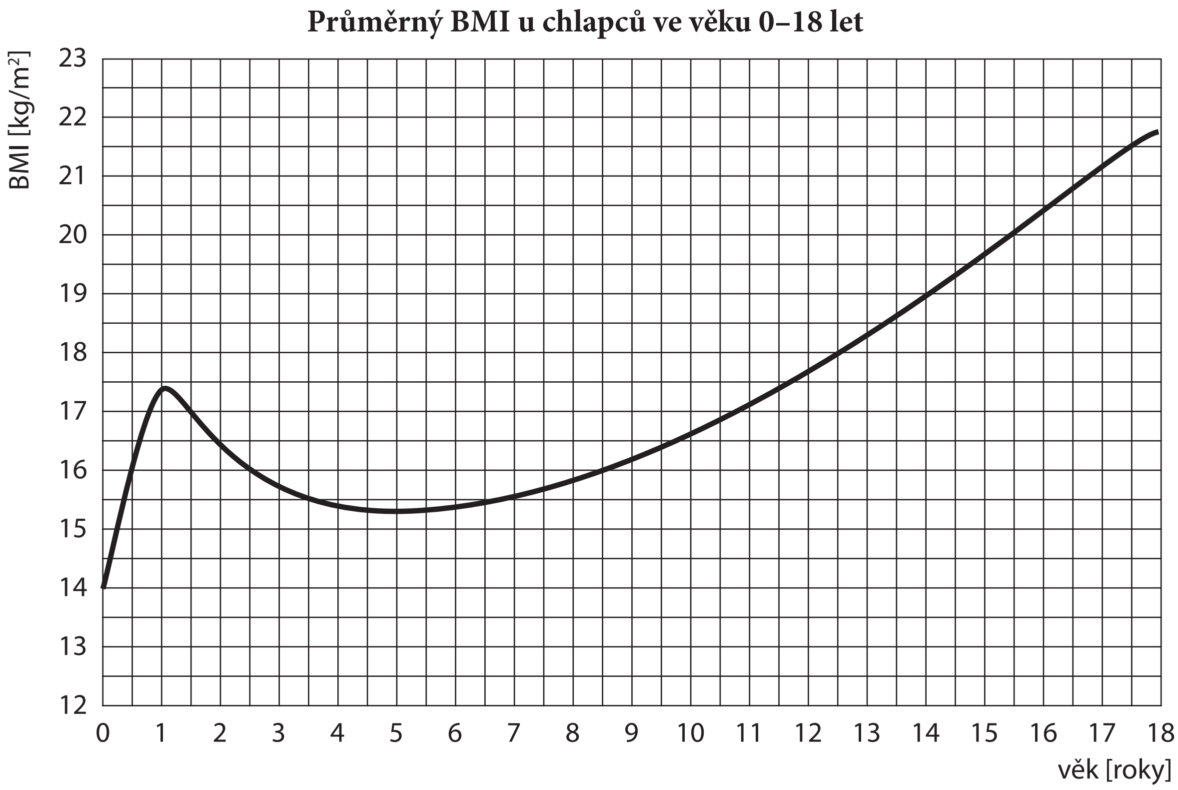
hmotnost [kg]	100	95	90	85	80	70	60	50	40	35	34	33	32
výška [m]	2,00	1,95	1,90	1,85	1,80	1,70	1,60	1,50	1,40	1,35	1,34	1,33	1,32
BMI	25,0	25,0	24,9	24,8	24,7	24,2	23,4	22,2	20,4	19,2	18,9	18,7	18,4

11. Lépe se bude BMI počítat u otce (dělí se 2^2, zatímco u matky se dělí $1{,}7^2$, což je těžší).

✂ ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **BMI CHLAPCŮ**

Chlapci z 6.A počítali svůj BMI a podle tabulky zjistili, že mají všichni podváhu, dokonce i tlustý Michal měl normální BMI. Na internetu pak našli, že u dítěte je BMI nižší než u dospělého. Našli také graf závislosti BMI na věku chlapců.



a) Tomášovi je 14 let a má BMI 19. Je jeho postava v normálu?

b) Tomáš spočítal svému čtyřletému bratru Jeníkovi BMI, vyšlo mu 17. Je jeho BMI nadprůměrný, nebo podprůměrný? Je tedy Jeník spíše cvalík, nebo hubeňour?

c) Bratři Ivan a Aleš mají oba BMI rovno 18. Ivan je nadprůměrně silný, Aleš podprůměrně silný. Co můžeme říci o jejich věku?

d) V jakém věku dosahuje průměrná hodnota BMI u chlapců hodnoty 16?

e) Když nebudeme uvažovat kojence do 1 roku, ve kterém věku jsou chlapci „nejštíhlejší"?

f) Lze říci, že během školní docházky BMI u chlapců trvale roste, nebo klesá?

g) Lukáš graf prozkoumal, chvíli přemýšlel a pak řekl: Kdyby nějaké 10leté dítě najednou o 5 let zestárlo, ale neměnila by se jeho výška a váha, vlastně by vzhledem k ostatním dětem „zhubnulo". Je jeho úvaha správná, nebo ne? Vysvětli. Jak bys jeho objev řekl jinými slovy?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

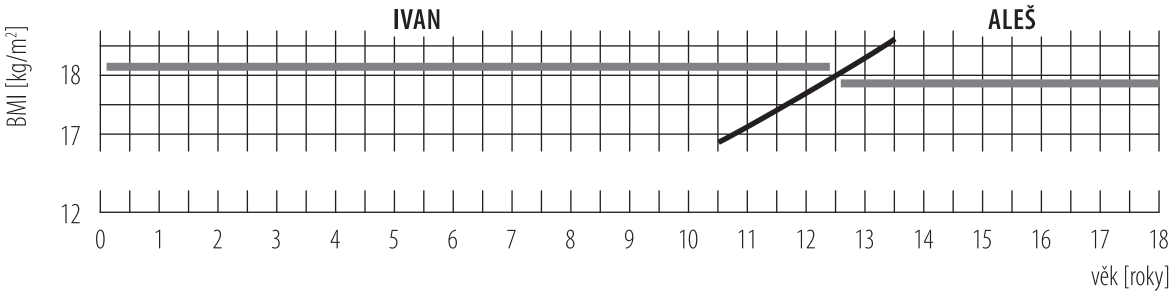
ŘEŠENÍ

a) Z grafu vyplývá, že pro věk 14 let je průměrná hodnota BMI = 19. Tomášova postava je v normálu.

b) Pro věk 4 roky je BMI přibližně 15,5. Jeník má nadprůměrný BMI, je spíše cvalík.

c) Ivanovi je méně než 12,5 let a Alešovi více než 12,5 let. Ivan má větší BMI než průměr, jeho hodnota leží nad křivkou grafu (viz obr. Výsek z grafu s. 20). Bude tedy někde na úsečce označené IVAN. Aleš má menší BMI než průměr, jeho hodnota bude pod křivkou, tedy někde na úsečce označené ALEŠ.

Výsek z grafu s. 20



d) Ve věku půl roku, dva a půl roku a osm a půl roku.

e) Kolem 5 let.

f) Trvale roste (školní docházka začíná od 6 let věku).

g) Úvaha je správná. Lze použít otázku c) s Ivanem a Alešem (kdyby se Ivan proměnil v Aleše). Lze říci, pokud se hodnota BMI u chlapce během několika let nezmění, tak protože se průměrný BMI zvyšuje, u tohoto chlapce by se poměrná hodnota BMI vzhledem k ostatním snižovala. Lze to vyčíst i z grafu. Jestliže bude chlapcova BMI = 18, pak pro věk 10 let bude nad čarou představující průměr, v 15 letech bude pod touto čarou.

✂ ✂

2 CIFERNÍKOVÁ ARITMETIKA

VSTUPNÍ ÚLOHA: **LANOVKA**

Třída na školní exkurzi jede jednosedačkovou lanovkou na hvězdárnu na hoře Kleť. Sedačky jsou od sebe stejně vzdáleny. Každá sedačka je očíslována, čísla jdou za sebou vzestupně, žádné není vynecháno a číslování začíná jedničkou. Sedaček je celkem 115. Třída má 32 žáků a doprovázejí ji dvě učitelky.

a) Jako první jela učitelka, sedla si na sedačku číslo 89. Na které sedačce seděla druhá paní učitelka, která jela jako poslední?

b) Kdyby poslední paní učitelka seděla na sedačce číslo 17, na jakém čísle by seděl první žák?

c) Petr pozoroval sedačky, které jely proti němu. Po tom, co ho minula sedačka číslo 11, řekl si: Aha, teď jsem právě v polovině cesty. Jaké číslo měla sedačka, na které Petr seděl?

d) Stejnou lanovkou se 115 sedačkami jede celá škola, tedy 638 žáků a 15 učitelů. První z nich seděl na sedačce číslo 47, poslední seděl na sedačce číslo 14. Kolik sedaček bylo během nastupování školy vynecháno?

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

a) Na lanovce pojede 34 lidí, poslední bude sedět na sedačce č. 7 (je třeba počítat, že po obsazení sedačky č. 89 pojede ještě 33 lidí). Výpočtem např. (89 + 33) – 115 = 7, nebo určit zbytek při dělení (89 + 33) : 115 (tento postup se hodí i do druhé úlohy).

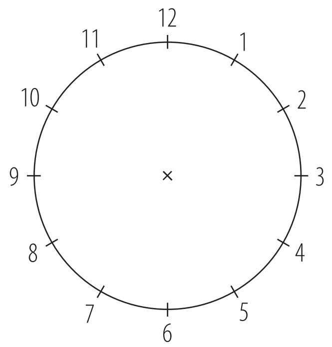
b) 17 je právě polovina z přepravovaných lidí. Tedy na číslech 115, 114, 113… by sedělo ještě 16 žáků a paní učitelka, tedy první žák musel sedět na sedačce č. 100.

c) Sedačka č. 1 je naproti středu mezery mezi sedačkami č. 58 a 59. Tedy aby se dostal do poloviny cesty nahoru, musí minout 57 sedaček. Kdyby Petr seděl na sedačce č. 1, byl by v polovině cesty hned po tom, jak by ho minula sedačka č. 58, a dříve, než by potkal sedačku č. 59. Kdyby seděl na sedačce č. 59, byl by v polovině hned po tom, jak by ho minula sedačka č. 1. Ale on byl v polovině hned po tom, co ho minula sedačka č. 11, tedy seděl na sedačce č. 69.

d) Všech cestujících bylo 653. Kdyby nevynechali ani jednu sedačku, poslední cestující by nasedal na 699. sedačku, počítáno od sedačky č. 1 (46 + 653 = 699). Čísel na sedačkách je 115, tedy číslo na poslední obsazené sedačce lze spočítat jako zbytek při dělení 699 : 115, tedy č. 9. Protože poslední cestující seděl ale na sedačce č. 14, muselo být při nastupování vynecháno 5 sedaček (nebo 120, 235, 350, … neboli 5+115*k* sedaček, kde *k* je přirozené číslo).

✂ -- ✂

DALŠÍ ÚLOHY



1. Na ciferníku hodin je 12 čísel.

a) Malá ručička ukazuje na osmičku. Na kterou číslici ukazuje její opačný konec?

b) Malá ručička ukazuje na osmičku. Na kterou číslici bude ukazovat za 7 hodin?

c) Malá ručička ukazuje na osmičku. Na kterou číslici bude ukazovat za 2 dny a 21 hodin?

d) Na kterou číslici ukazuje malá ručička, když její opačný konec ukazuje na číslici 5?¨

2. V Táboře na radnici mají na věži hodiny, které mají na ciferníku 24 čísel. Ručička pak obejde ciferník za 24 hodin. Když ukazuje ručička na osmičku,

a) na kterou číslici ukazuje její opačný konec na těchto hodinách?

b) za jakou nejkratší dobu bude ručička ve svislé poloze?

c) za jakou nejkratší dobu bude ručička ve vodorovné poloze?

d) na kterou číslici bude ukazovat za 100 hodin?

3. Na kolotoči je zavěšeno 16 očíslovaných sedaček. Čísla jdou za sebou.

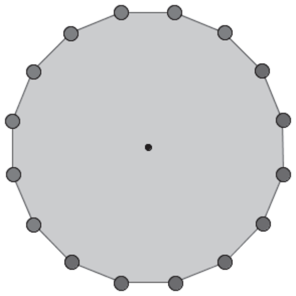
Pavlík si sedl na sedačku číslo 10. Lenka si sedla na jedinou sedačku, na kterou Pavlík přes stožár kolotoče neviděl. Na které sedačce Lenka seděla?

4. Na planetě Venuši je kratší den, má pouze 9 hodin. Proto se zde používají ciferníky, které mají jen 9 číslic (s devítkou nahoře). Minutová ručička oběhne ciferník za jednu hodinu stejně jako na Zemi.

a) Malá ručička ukazuje na osmičku. Kam bude ukazovat za 7 hodin?

b) Co lze říci o tom, kam ukazuje opačný konec malé ručičky?

c) Kam bude ukazovat minutová (velká) ručička dvě a půl hodiny po půlnoci? Urči směr a číslici, na kterou bude ukazovat.



5. Na kolotoči je 8 sedaček modrých a 8 červených, všechny modré jdou po sobě, mezi modrými sedačkami není žádná červená. Když kolotoč stál, Filip si všiml, že sedačky jsou číslovány, a ty, které jsou naproti sobě, dávají součet svých čísel vždy stejný. Když se kolotoč točil, Filip stál vedle něho a všiml si, že čísla na modrých sedačkách, která jej míjela, rostou od 1 do 8. Napiš, v jakém pořadí prolétla kolem Filipa čísla červených sedaček.

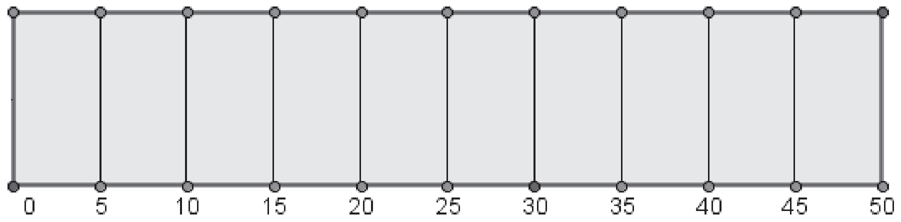
6. Centrifuga na pouti má 12 kabinek. Kabinky jsou očíslovány po řadě za sebou. Když není plně obsazená, je potřeba, aby se kabinky naplnily rovnoměrně a pravidelně kolem středu centrifugy, aby se při otáčení celý stroj nerozkýval a třeba se i nezřítil.

a) Na jednu jízdu zaplatily vstupné čtyři dvojice dětí. První dvojice se sedla do kabinky číslo 7. Do jakých kabinek si mají sednout ostatní dvojice?

b) Na jinou jízdu se hlásily pouze tři dvojice dětí. První si sedla do kabinky číslo 11. Jaké kabinky mají obsadit ostatní dvojice?

c) Jak rozmístit 9 dvojic, jestliže dvě dvojice si již sedly do kabinek číslo 4 a 6? Existuje více řešení?

7. Kamil chodí plavat do bazénu. Na dně tohoto 50 m dlouhého bazénu jsou příčné čáry, ukazující počet metrů od startovního bloku. Tyto čáry jsou po 5 metrech.



Kamil startoval od bloků. Hned po startu potkal u čísla 15 m pána, který plaval proti němu. Po otočce jej potkal znovu, tentokráte u čáry s číslem 30 m. Kamil si hned dokázal spočítat, jestli plave rychleji než ten pán. Opravdu plaval rychleji? Vysvětli.

8. Kamil si dal ve svém bazénu závod v plavání s Vojtou. Startovali najednou od bloků. Kamil byl rychlejší a po otáčce potkal Vojtu na čáře s číslem 45 m.

a) Na jaké čáře jej potká po další otáčce, pokud poplavou každý stále stejně rychle?

b) Kolik bazénů uplavali ve chvíli, kdy Kamil Vojtu dohonil o celé jedno kolo?

9. Plnič lahví v moštárně má 48 plnících hrdel uspořádaných do velkého kruhu. Plnič se otáčí, bere postupně lahve, které přicházejí na pojízdném pásu, a plní je ovocným koncentrátem. Hrdla, kterými se lahve plní, jsou po řadě očíslována.

a) Dnes ráno na začátku pracovní směny hrdlo číslo 35 začalo plnit lahve, bylo na pozici výměny lahve. V poledne bylo naplněno 9 168 lahví. Které hrdlo bylo na pozici výměny lahve v poledne?

b) Za celý den se v moštárně naplnilo 18 350 lahví. Které hrdlo bylo na pozici výměny lahve na konci dne?

c) O kolik míst se na konci dne musí plnič pootočit, aby stál stejně natočen jako ráno?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

1. a) 2; **b)** 3; **c)** 5; **d)** 11.

2. a) na číslici 20 – viz foto nahoře; **b)** 4; **c)** 10; **d)** 12.

3. sedačka č. 2

4. a) na číslici 6; **b)** Když malá ručička ukazuje na osmičku, její opačný konec neukazuje na žádné číslo, ale doprostřed mezi trojku a čtyřku; **c)** Bude ukazovat svisle dolů, doprostřed mezi 4 a 5.

5. sestupně od 16 k 9

6. a) do kabinky č. 1, 4, 10; **b)** do kabinky č. 3, 7; **c)** úloha je podobná úloze b), pokud zaměníme plné a obsazené kabinky. Rovnoměrně rozmístěné 3 prázdné kabinky znamenají, že budou vždy obsazené 3 po sobě jdoucí kabinky. Kabinky č. 4, 5, 6 tvoří takovou trojici. Protože kabinky 4 a 6 jsou již obsazené, kabinka č. 5, která je mezi nimi, může být prázdná nebo obsazená. Mohou být tedy 2 řešení: obsazené kabinky 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12 nebo obsazené 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 1, 2.

7. Kamil uplaval 35 m k obrátce a ještě 20 m k čáře 30 m, kde se znovu potkali. Pán uplaval 15 m k startovnímu bloku a ještě 30 m k čáře. Kamil celkem uplaval 55 m, pán uplaval 45 m. Kamil byl rychlejší.

8. a) Kamil plaval rychleji, uplaval 1 bazén a navíc 5 metrů, tedy celkem 55 m, zatímco Vojta 45 m. Až se příště potkají, Kamil uplave 2 bazény a 10 m, tedy 110 m, a bude u čáry 10 m. Vojta mezitím uplave 2 · 45 m = 90 m a bude také na čáře 10 m.

b) Na svých 55 metrů předhoní Kamil Vojtu o 10 m. Aby Vojtu předhonil o délku dvou bazénů, tedy 100 m, musí Kamil uplavat 550 metrů, tedy 11 bazénů. Vojta za tu dobu uplave 450 m, tedy 9 bazénů.

9. a) 9 168 : 48 = 191, zbytek 0. Kolo plniče se zastaví na stejné pozici, jako stálo ráno. Na pozici výměny lahve bude hrdlo č. 35.

b) 18 350 : 48 = 382, zbytek 14. Plnič se pootočí o 14 hrdel dále oproti začátku dne. Na pozici výměny lahve bude hrdlo 35 + 14 = 49, tedy hrdlo č. 1.

c) Pokud se plnič může otáčet zpět, bude to 14 míst, pokud pouze dopředu, pak 48 – 14 = 34 míst.

✂ ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **JEDNOSEDAČKOVÁ LANOVKA**

Jana jede jednosedačkovou lanovkou. Sedačky jsou od sebe stejně vzdáleny a očíslovány, čísla sedaček jdou za sebou a žádné není vynecháno. Jana na číslo své sedačky nevidí, ale vidí na sedačce před sebou číslo 76. Také viděla na protijedoucích sedačkách, že po sedačce číslo 96 následovala sedačka číslo 1.

a) Kterou sedačku bude Jana míjet, až bude v polovině dráhy nahoru?

b) Na páté sedačce před Janou seděl starší pán. Když na cílové stanici vystupoval, Jana právě míjela sedačku číslo 67. Na třetí sedačce před Janou seděla malá holčička. Kterou sedačku Jana míjela, když holčička vystupovala?

c) Jana změřila, že čas mezi tím, kdy potká dvě protijedoucí sedačky, jsou 4 sekundy. Jak dlouho bude trvat Janě cesta lanovkou nahoru? Zakroužkuj správnou odpověď.

A. méně než 4 minuty

B. 4 až 6 minut

C. 6 až 7 minut

D. více než 7 minut

d) Kolik cestujících přepraví lanovka ze spodní do horní stanice za každou hodinu, když bude plně obsazená a nebude zastavovat? Pozor, musíme počítat s tím, že cesta nahoru nějakou dobu trvá.

e) Na lanovce vyměnili motor za silnější, takže lanovka nyní jede o polovinu rychleji. Kterou sedačku bude Jana míjet, až bude v polovině dráhy nahoru, jestliže opět sedí na stejné sedačce jako v úloze a)? U kterých z úloh a) – d) se změní výsledky a u kterých nikoli?

✂ ------------------------------ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------------------------ ✂

ŘEŠENÍ

Ze zadání vyplývá, že lanovka má 96 sedaček. Protože po sedačce č. 96 následuje č. 1, sedačky jsou seřazeny vzestupně. Jana sedí na sedačce č. 77.

a) V polovině dráhy musí být mezi Janinou a právě míjenou sedačkou přesně polovina celkového počtu sedaček, tedy 48. Protože 77 + 48 = 125 je větší číslo než počet sedaček, musíme počet všech sedaček odečíst 125 – 96 = 29. Číslo sedačky zjistíme též odečtením poloviny sedaček, 77 – 48 = 29. Jana míjela sedačku č. 29.

b) Když lanovka popojede o délku jedné sedačky, cestující na sedačce mezitím mine dvě sedačky. Mezitím, než vystoupili pán a holčička, lanovka popojela o 2 sedačky, Jana tedy musela minout 4 sedačky. Jana míjela sedačku č. 71.

c) Cestou nahoru Jana potká všechny sedačky. Cesta nahoru tedy bude trvat 96 · 4 = 384 sekund = 6 minut 24 sekund. Správná odpověď je C. 6 až 7 minut.

Komentář: Přesnější argumentace zní, že cestou nahoru projede kolem Jany celé lano, všech 96 úseků lana mezi sedačkami. Je tedy správně uvažovat ve výpočtu číslo 96, i když Jana potká pouze 95 sedaček. Spočítaný výsledek 95 · 4 = 380 s lze brát za správný. Žáci mohou chybovat, když budou uvažovat, že cestou nahoru se lano pootočí pouze o polovinu svojí délky a na ní se nachází polovina všech sedaček. Pak by počítali 48 · 4 = 192 s.

d) Jestliže Jana potká každé 4 sekundy jednu sedačku, znamená to, že každých 8 sekund může nastoupit jeden cestující. Za hodinu tak může nastoupit 3 600 : 8 = 450 cestujících. Ovšem protože cesta nahoru trvá 384 s, poslední cestující lanovka nahoru nedopraví. Je třeba vzít v úvahu, že pouze cestující, kteří nastoupí během (3 600 – 384) s = 3 216 s, budou dopraveni nahoru. Je jich 3 216 : 8 = 402.

e) Výsledky úloh a), b) nejsou ovlivněny rychlostí lanovky, výsledky úloh c) a d) jsou. Čas jízdy nahoru v úloze c) se zkrátí na dvě třetiny. V úloze d) může každé 4 s nastoupit jeden cestující, tedy za hodinu může nastoupit 3 600 : 4 = 900 cestujících, ale ti, co nastoupí posledních 384 s : 2 = 192 s, již nedojedou na konec.
Tedy (3 600 – 192) s = 3 408 s a 3 412 : 4 = 853.

✂ -- ✂

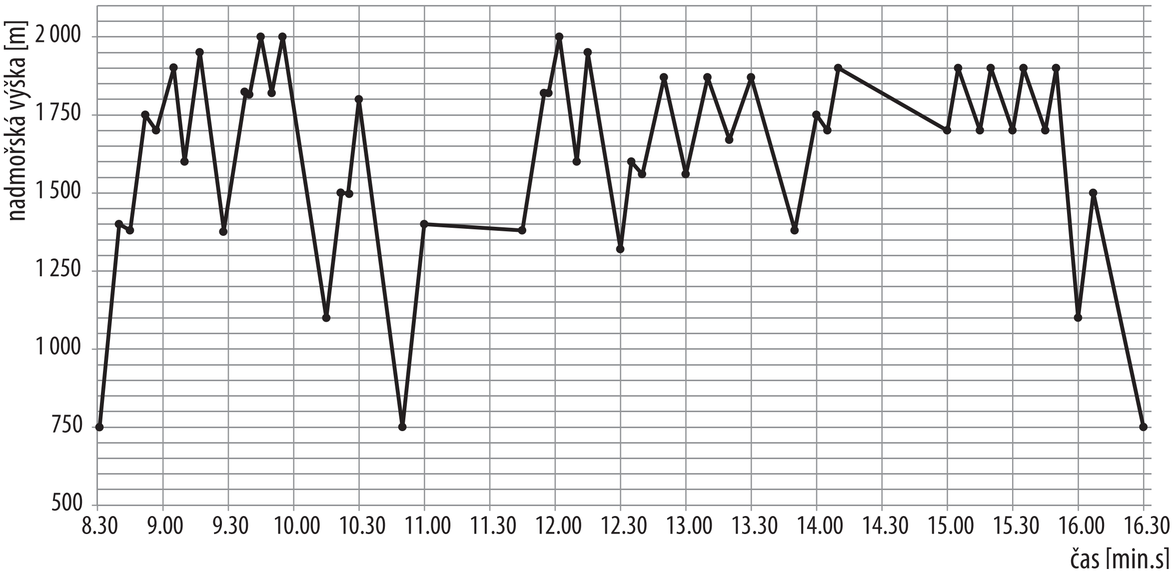
3 GRAFY

VSTUPNÍ ÚLOHA: **GRAFY LYŽOVÁNÍ**

V lyžařském středisku je mnoho sjezdovek, které jsou propojeny lanovkami. Některé lanovky vedou z údolí, některé končí na vrcholcích kopců. Lyžař je může různě střídat a kombinovat. U každé lanovky je turniket, který při nástupu lyžaře zkontroluje a zároveň zaeviduje jeho jízdenku. Na konci dne může lyžař svou jízdenku vložit do zvláštního zařízení a to mu vytiskne graf jeho jízdy lanovkami, které lanovky v kolik hodin použil.

Takový graf je na obrázku. Na vodorovné ose je znázorněn čas, na svislé ose nadmořská výška. Každý nástup a výstup z lanovky je na grafu znázorněn zvýrazněným bodem. Je tedy vidět, kdy lyžař nastupoval a vystupoval z lanovky a v jaké nadmořské výšce. Lze také vyčíst, kdy sjížděl dolů.

Skigraf – Schladming, 3. März 2012



Náš lyžař jezdil od rána do odpoledne. Udělal si ovšem přestávku na oběd, který si dal v jedné restauraci, a odpoledne se jen na chvíli zastavil u horské chaty na čaj. K jízdě dolů nikdy nepoužil lanovku.

a) Jak poznáš, že lyžař jel lanovkou?

b) Kolikrát během dne jel lanovkou?

c) Do jaké nejvyšší nadmořské výšky vyjel náš lyžař lanovkou?

d) Kolikrát během dne sjel zpět do výchozí nadmořské výšky?

e) Jak se z grafu pozná, že lyžař odpočíval? (Neuvažujeme, že odpočíval také v lanovce při jízdě nahoru.)

f) Od kolika do kolika hodin lyžař obědval?

g) V kolik hodin skončil přestávku na čaj?

h) Pil čaj ve stejné horské chatě, jako obědval?

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

a) Při jízdě lanovkou se zvětšuje nadmořská výška. Lomená čára grafu po tuto dobu stoupá.

b) Údaj zjistíme určením počtu všech stoupajících úseků. Ten je 24. Náš lyžař 24 krát nastoupil do lanovky.

c) Do výšky 2 000 m.

d) Během dne sjel dvakrát až dolů na nadmořskou výšku 750 m. Bylo to před 11. hodinou a v 16.30 hodin.

e) Jízda lanovkou nahoru i jízda po sjezdovce dolů jsou rychlé, za krátký čas se rychle mění nadmořská výška. Pokud lyžař odpočívá, nějakou dobu se jeho nadmořská výška nemění. Na grafu se to projevuje tak, že úsek lomené čáry je mírný, případně téměř vodorovný. Záleží na tom, kde zase nastupoval na další lanovku.

f) Na grafu lze najít dva časové úseky, kdy úseky grafu mají mírný sklon: od 11.00 do 11.45 hodin a od asi 14.10 do

15.00. Tedy v této době lyžař mohl chvíli stát a chvíli sjíždět k nástupní stanici další lanovky. První přestávka byla na oběd.

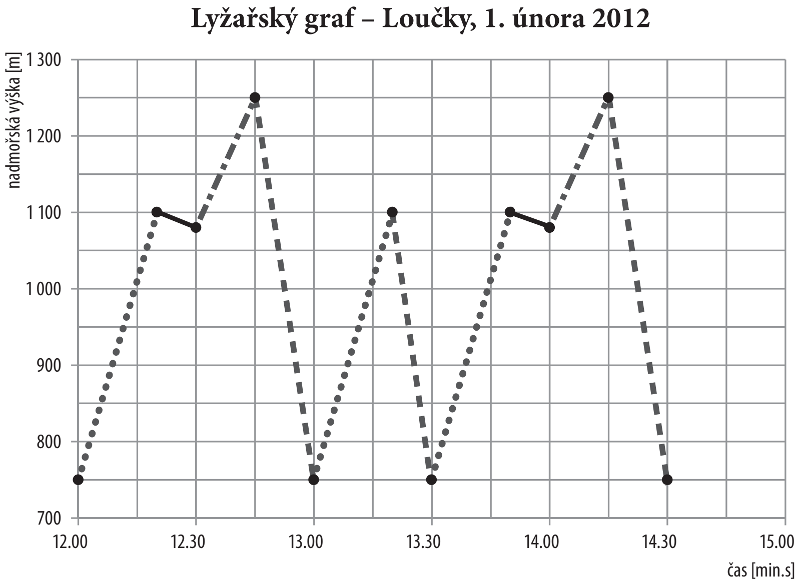
Poznámka. V době od 14.10 do 15.00 hodin je čára strmější než v době oběda, protože část tohoto času lyžař sjížděl sjezdovku a jen část času stál. Protože body grafu zaznamenají pouze turnikety při nástupu či výstupu z lanovky, z grafu není poznat, jestli lyžař nejprve sjel k chatě na čaj a pak odpočíval, nebo nejprve odpočíval a pak pokračoval v jízdě.

g) Přestávku na čaj skončil v 15.00 hodin.

h) Oběd strávil v nadmořské výšce asi 1 400 m, zatímco čaj pil v jiné nadmořské výšce (někde mezi 1 700 a 1 900 m). Obědval tedy v jiné horské chatě, než pil čaj.

DALŠÍ ÚLOHY

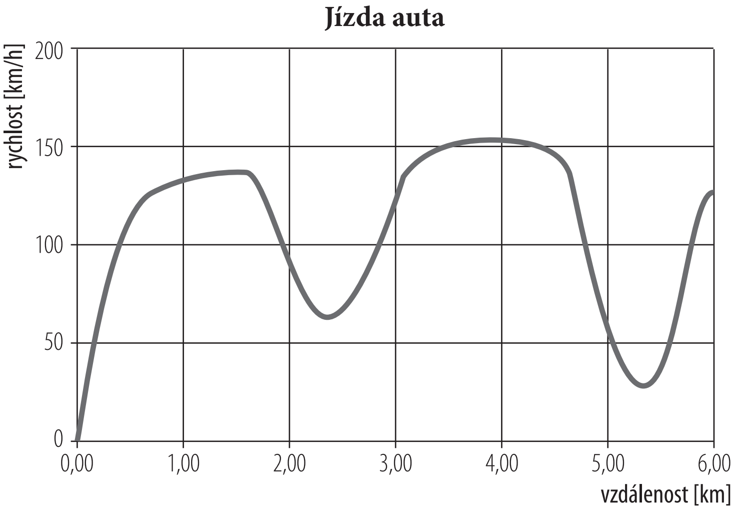
Lyžař jezdil v lyžařském areálu Loučky a správce areálu mu poté vytiskl graf (viz obrázek). Je v něm zanesen čas a nadmořská výška v okamžiku, kdy nastupoval nebo vystupoval z lanovky. Lomená čára tak ukazuje, jak lyžař jezdil.



1. V kolik hodin začal lyžovat a kdy skončil?
2. V jaké nadmořské výšce byla spodní stanice lanovky?
3. V jaké nadmořské výšce byl lyžař ve 14.15 hodin?
4. Kolikrát jel lyžař lanovkou? Jak jsou jízdy lanovkou znázorněny?
5. Kolikrát byl lyžař v nadmořské výšce 1 150 m?
6. Co znamenají čárkované úseky? Podle čeho se pozná, co tyto úseky znamenají?
7. Co myslíš, že znamenají plnou čarou vyznačené úseky?
8. Kolik různých lanovek lyžař navštívil?

Auto jezdí po závodním okruhu dlouhém 6 km. Na obrázku je znázorněn graf rychlosti auta během jízdy prvního okruhu.

Zjisti z grafu:



9. Dosáhl automobil větší rychlostí než 150 km/h?
10. Ukaž na grafu místo, které představuje start. Stálo auto na startu, nebo startovním místem projíždělo?
11. Když auto v místě startu dokončilo okruh, zastavilo, nebo tím místem projelo?
12. Na kolikátém kilometru auto dosáhlo nejvyšší rychlosti?
13. Kolik bylo na závodním okruhu prudkých zatáček? Podle čeho je poznáš?
14. Která zatáčka byla ostřejší, více uzavřená?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

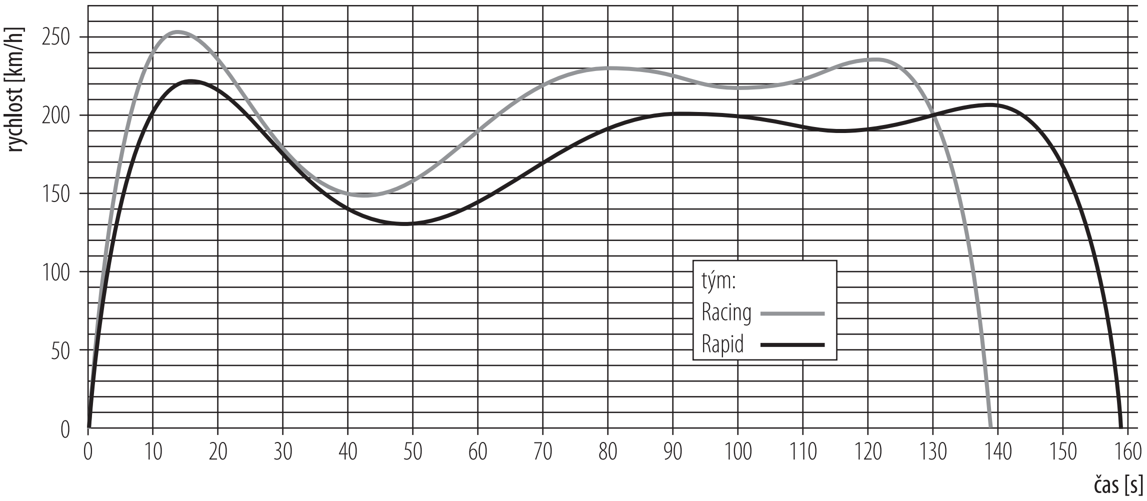
VÝSLEDKY

1. Začal lyžovat ve 12 hodin, skončil v 14.30 hodin.
2. 750 m nad mořem
3. 1 250 m nad mořem
4. Pětkrát. Jízda lanovkou se pozná podle toho, že v čase stoupá nadmořská výška, tedy že úsek lomené čáry roste.
5. Čtyřikrát (dvakrát při cestě nahoru, dvakrát při cestě dolů)
6. Čárkované úseky grafu popisují jízdu lyžaře po sjezdovce. V těchto úsecích totiž prudce klesá nadmořská výška.
7. V úsecích grafu vyznačených plnou čarou lyžař přejížděl mezi dvěma lanovkami, z jedné vystoupil a na druhou nastoupil. Mohl také čekat ve frontě na druhou lanovku nebo jet po mírně se svažující cestě, protože nadmořská výška mezi krajními body červeného úseku grafu se příliš nezměnila.
8. Patrně dvě. Jestliže nějaké úseky čáry začínají i končí ve stejné nadmořské výšce, patrně jde o tutéž lanovku, kterou lyžař použil vícekrát. Z nadmořské výšky 750 m jel lyžař třikrát, vždy do stejné výšky, patrně tedy jel toutéž lanovkou (vyznačeno tečkovaně). Druhou lanovku použil dvakrát (vyznačeno čerchovaně).
9. Ano.
10. Start je popsán bodem, kde vzdálenost je 0 km a rychlost auta je 0 km/h, tedy auto stálo.
11. Auto na konci okruhu (v místě, kde bylo ujeto 6 km) mělo rychlost více než 100 km/h. Startem dalšího okruhu tedy projelo.
12. Na čtvrtém km.
13. Dvě prudké zatáčky. V zatáčce auto musí snížit rychlost, což se v grafu projeví jako „dolík“.
14. Druhá zatáčka byla více uzavřená, auto jí muselo projet menší rychlostí. První zatáčku projelo rychlostí větší než 50 km/h, druhou rychlostí menší než 50 km/h.

✂ ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **ZÁVOD AUTOMOBILŮ**

Graf rychlosti během 1. kola závodu



Ředitelství závodu automobilů vydalo graf, z něhož je patrné, jak jely automobily týmů Racing a Rapid během prvního kola závodu. Oba automobily po prvním kole zastavily v boxech, aby jim mechanici přezuli pneumatiky.

a) Startovaly oba automobily současně?

b) Který z automobilů jel po startu rychleji?

c) Který z automobilů projel okruh dříve?

d) Kdy jely oba automobily stejnou rychlostí?

e) V čase kolem 30 s jdou křivky obou grafů vedle sebe. Jely také automobily vedle sebe?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) Ano, automobily startovaly ve stejném okamžiku.

b) Racing měl od času 0 s do 130 s pořád větší rychlost než Rapid.

c) Racing projel okruh za necelých 140 s, zatímco Rapid za necelých 160 s.

d) Ve 130. sekundě dosáhly oba automobily rychlosti 200 km/h. Jejich grafy se protnuly. Přibližně stejně rychle jely automobily v intervalu mezi 28. a 35. sekundou.

e) V čase kolem 30 s jely automobily přibližně stejnou rychlostí, ovšem protože předtím jel Racing rychleji a protože vyjížděly současně, jel Rapid za Racingem. Jen vzdálenost mezi automobily zůstávala v tuto dobu stejná.

✂ ✂

4 VZTAHY: DRÁHA A RYCHLOST

VSTUPNÍ ÚLOHA: **CYKLOPOČÍTAČ**

Jirka má na svém kole cyklopočítač, který mu ukazuje, kolik ujel km a jakou jel rychlostí. Jirka zjistil, že cyklopočítač pracuje takto: Na drátu předního kola má připevněn magnet. Na vidlici předního kola má magnetické čidlo. Čidlo dokáže zjistit, jestli magnet prošel kolem něho. Když se přední kolo otočí kolem dokola, magnet jednou projde kolem čidla a cyklopočítač to zaznamená.

a) Cyklopočítač tak vlastně počítá otáčky předního kola. Jaký údaj potřebuje ještě znát, aby mohl měřit ujetou vzdálenost?

b) Aby mohl cyklopočítač ukazovat rychlost, potřebuje kromě ujeté vzdálenosti měřit ještě nějaký údaj. Který?

c) Jirkův cyklopočítač si pamatuje nejvyšší dosaženou rychlost. Jirka chtěl tuto rychlost mít co největší, proto se uchýlil k podvodu: zdvihl přední kolo a prudce jej roztočil. Pomohl si, nebo ne?

d) Jirka jel na výlet na kole, ale přední kolo měl podhuštěné, málo nafouklé. Ukazuje cyklopočítač správně ujetou vzdálenost? Jestliže ne – jakou vzdálenost ukazuje?

e) Tonda má také cyklopočítač, který mu navíc ukazuje, kolik je hodin. Ovšem neumí jej seřídit, takže mu neustále ukazuje 10 minut napřed (o 10 minut více než správný čas). Ukazuje Tondovi cyklopočítač ujetou vzdálenost správně, jestliže všechno ostatní má nastaveno správně?

f) Tonda by rád, aby cyklopočítač ukazoval větší rychlost, než kterou jede ve skutečnosti. Proto chtěl do počítače nastavit jiný poloměr předního kola, než ve skutečnosti má. Pomůže mu to? Jaký poloměr by měl v takovém případě nastavit?

g) Jirka našel použitý magnet z jiného cyklopočítače. Namontoval si jej na protilehlé dráty předního kola tak, aby čidlo dokázalo zjistit oba magnety. Myslel si, že mu bude měřit rychlost přesněji. Nespletl se?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) Potřebuje znát, kolik ujede metrů na jednu otáčku kola. Potřebuje tedy znát obvod předního kola nebo jeho poloměr, popř. průměr, ze kterého obvod spočítá.

b) Cyklopočítač zná ujetou vzdálenost. Aby zjistil, kolik km ujel za hodinu, potřebuje ještě měřit čas. Cyklopočítač má v sobě zabudované hodinky.

c) Protože cyklopočítač měří počet otáček kola, větší počet otáček „pochopí" jako větší rychlost kola. Jirka by si pomohl, pokud by dokázal roztočit přední kolo rychleji, než by se otáčelo při rychlé jízdě. Tento údaj můžeme spočítat pouze přibližně, záleží na velikosti kola. Např. jestliže Jirka dokáže rukou roztočit přední kolo tak, aby se otočilo pětkrát za sekundu a obvod kola je 2 m, cyklopočítač naměří rychlost 10 m/s = 36 km/h.

d) Jestliže je přední kolo podhuštěné, poloměr kola je menší a pak je menší tedy i jeho obvod. Tedy na ujetí jisté vzdálenosti se přední kolo musí vícekrát otočit. Cyklopočítač tak ukazuje větší vzdálenost, než je skutečná.

e) Tondův cyklopočítač sice ukazuje nesprávný čas, ale hodinky v cyklopočítači se nezrychlují ani nezpomalují. Časový úsek tedy měří přesně a zobrazovaná rychlost je správná.

f) Tondově podvodu by pomohlo, kdyby nastavil větší poloměr než skutečný. Když nastaví dvakrát větší poloměr kola, cyklopočítač bude měřit dvakrát větší rychlost.

g) Čidlo cyklopočítače počítá, kolikrát kolem něho projde magnet. Každý průchod magnetu kolem čidla znamená jednu otáčku kola. Jestliže během jedné otáčky projdou kolem čidla dva magnety, cyklopočítač bude místo jedné otáčky počítat dvě. Nebude tedy měřit přesněji, ale bude ukazovat dvojnásobnou rychlost proti skutečné.

✂ ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Pan Zahradník má historický bicykl, který má přední kolo obrovské a zadní kolečko velmi malé. Jeho synek Petr změřil, že přední kolo tohoto velocipedu je třikrát vyšší než zadní kolo.

a) Když se malé kolo otočí kolem dokola, velociped ujede 70 cm. Kolik cm ujede, než se velké kolo otočí kolem dokola?

b) Když bicykl jede, vypadá to, že se velké kolo točí pomaleji než malé. Není to jen optický klam? Kolikrát se otočí malé kolo za dobu, za kterou se velké kolo otočí třikrát?

c) Než pan Zahradník se svým bicyklem dojede na zahrádku, otočí se zadní kolo 135krát. Kolikrát se za tu dobu otočí přední kolo?

2. Malý Pavlík si myslí, že když na tomto velocipedu je přední kolo větší, musí jet rychleji, takže v cíli bude přední kolo dříve. Jak bys mu to vysvětlil?

3. V závodech Round cup jezdí automobily po kruhové dráze. Jezdí tak stále do zatáčky, auta pořád zatáčejí doprava (obr.).

a) Ujedou obě přední kola automobilu během závodu stejnou vzdálenost?

b) Jezdí obě přední kola automobilu stejnou rychlostí?

4. Náš taťka do své octavie vždy čerpá „plnou". To znamená, že u čerpací stanice tankuje tolik benzinu, až mu kontrolka hlásí, že je nádrž plná.

a) Od minulé návštěvy čerpací stanice spotřeboval 27 litrů benzinu. Přitom nádrž má na 60 litrů. Právě teď přijíždí k čerpací stanici. Kolik litrů benzinu natankuje? 27 litrů, 33 litrů nebo 60 litrů?

b) Naše octavie má spotřebu 7 litrů benzinu na 100 km. Od poslední návštěvy čerpací stanice ujela 700 km. Kolik litrů musí taťka dotankovat, aby doplnil nádrž?

5. Autopočítač v naší octavii ukazuje dva údaje: celkový počet ujetých kilometrů a počet ujetých kilometrů od posledního tankování benzínu. Co lze pouze z těchto dvou údajů ještě spočítat?

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY

1. a) 210 cm

b) Jestliže obě kola ujedou stejnou vzdálenost, ale větší kolo na jedno otočení ujede třikrát více, musí se třikrát méně otočit. Malé kolo se otočí 9krát.

c) 135 : 3 = 45

2. Za správné můžeme očekávat odpovědi typu: Pavlík uvažoval nesprávně, ale přesto říká pravdu.
Přední kolo nejede rychleji, protože zadní kolo se zase točí rychleji.
Kdyby jelo přední kolo rychleji, velociped by se musel roztrhnout.
Přední kolo bude v cíli dříve než zadní, ale jen o tolik centimetrů, o kolik cm dříve vyjede za startu.

3. Závodní dráha je kruhová, kola závodního auta jedou pořád po dvou kružnicích. Kružnice, která leží dále od společného středu, má větší délku.

a) Každé z předních kol jede po jiné kružnici, vnější kolo ujede delší dráhu.

b) Vnější kolo pojede rychleji, protože za stejnou dobu ujede delší dráhu.

4. a) 27 litrů (to je množství, které v nádrži chybí, protože se spotřebovalo; 33 litrů v nádrži zbývá)

b) Za 100 km auto spotřebovalo 7 litrů, za 700 km spotřebovalo 7 · 7 litrů = 49 litrů, v nádrži zbývá (60 – 49) litrů = 11 litrů. Dotankovat se musí 49 litrů.

5. Ze dvou údajů můžeme jejich odečtením zjistit, kolik km mělo auto ujeto, když bylo naposled u čerpací stanice.

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **AUTOPOČÍTAČ**

Řidič má ve své dodávce autopočítač. Když mačká páčku u volantu, na displeji se mu postupně ukáže:

1. Počet ujetých kilometrů celkem
2. Počet ujetých kilometrů od posledního tankování benzinu
3. Předpokládaný počet km, které ještě auto ujede, než by mu došel benzin v nádrži
4. Průměrná spotřeba v litrech na 100 km od posledního tankování
5. Průměrná rychlost od posledního tankování

Řidič vždy tankuje „plnou", tedy když odjíždí od čerpací stanice, má vždy plnou nádrž.

a) Dá se zjistit, kolik Kč řidič zaplatil při posledním tankování, jestliže cena benzinu byla 35,00 Kč za litr? Jestliže ano, spočtěte tuto částku. Víme, že na autopočítači byly po zastavení u čerpací stanice tyto hodnoty:

1. 112 548
2. 1 430
3. 217
4. 7,0
5. 71,5

b) Co dalšího lze spočítat z údaje č. 5 autopočítače?

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

a) Aby řidič zjistil, kolik Kč zaplatil u čerpací stanice, potřebuje vědět, kolik litrů benzinu natankoval. Jestliže po každém čerpání měl plnou nádrž, počet natankovaných litrů benzinu je roven počtu litrů, které automobil spotřeboval mezi návštěvami čerpací stanice.

Průměrná spotřeba (v litrech na 100 km) je údaj, který lze spočítat, známe-li počet spotřebovaných litrů a počet ujetých kilometrů. Známe-li počet ujetých km a průměrnou spotřebu, počet litrů benzinu můžeme vypočítat ze vztahu pro výpočet průměrné spotřeby.

Pro zjištění, kolik řidič zaplatil u čerpací stanice, potřebujeme znát údaje 2 a 4 z autopočítače.

Konkrétně: $$\textit{průměrná spotřeba na 100 km} = \frac{\textit{počet litrů}}{\textit{počet stovek km}}$$

z toho $$\textit{počet litrů} = \textit{průměrná spotřeba na 100 km} \cdot \textit{počet stovek km}$$

neboli $$\textit{počet litrů} = \frac{\textit{průměrná spotřeba na 100 km} \cdot \textit{počet km}}{100}$$

Dosadíme hodnoty 4 a 2 z autopočítače, dostaneme

$$\textit{počet litrů} = \frac{7{,}0 \cdot 1\,430}{100} = \frac{10\,010}{100} = 100{,}1$$

Jestliže cena jednoho litru je 35 Kč, cena natankovaného benzinu je 35 Kč · 100,1 = 3 503,50 Kč.

Řidič u čerpací stanice uhradil 3 503,50 Kč.

b)

Z údajů 2 a 5 lze spočítat, jakou dobu automobil jezdil od posledního tankování benzinu.

$$\textit{doba jízdy} = \frac{\textit{počet ujetých km od posledního tankování}}{\textit{průměrná rychlost od posledního tankování}}$$

Konkrétně: $$\textit{doba jízdy} = \frac{1\,430}{71{,}5} = 20$$

Automobil od posledního tankování jezdil 20 hodin.

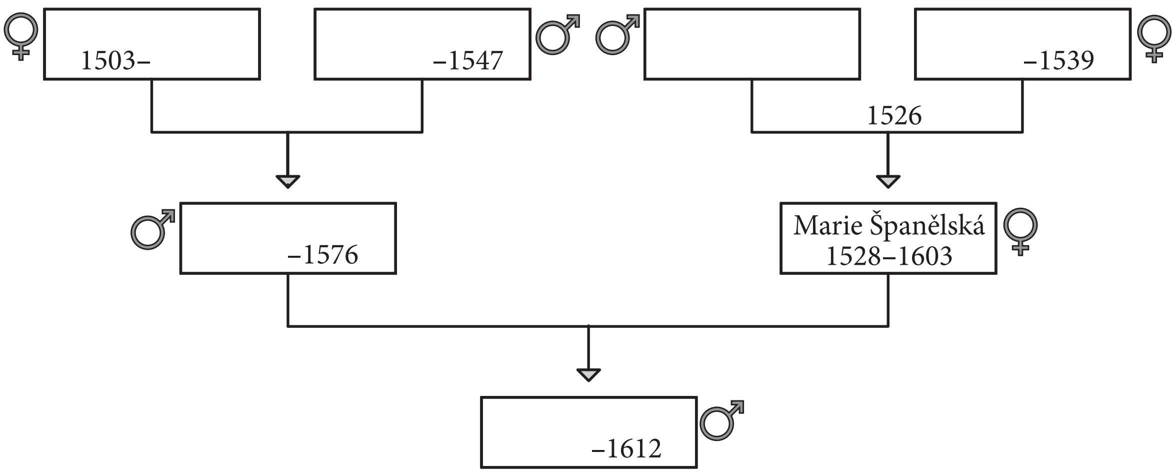
5 RODOKMEN

VSTUPNÍ ÚLOHA: **RUDOLF II.**

Na obrázku je část rodokmenu jednoho českého panovníka. V rodokmenu je pouze jméno Marie (Španělská) a je vymazáno těchto 6 jmen: Anna Jagellonská, Isabela Portugalská, Ferdinand I. Habsburský, Karel V., Maxmilián II., Rudolf II. Na pozici označené znakem ♂ je muž, na pozici označené znakem ♀ je žena.

Ze 17 letopočtů určujících buď rok narození, nebo rok úmrtí, nebo rok sňatku je v rodokmenu uvedeno 8, dalších 9 uvedeno není.

[Vysvětlení: tchyně = matka manžela nebo manželky.]



a) Doplň do rodokmenu scházející jména Anna, Isabela, Ferdinand, Karel, Maxmilián a Rudolf. Víš, že:

1. Maxmilián je otec Rudolfa;
2. Maxmilián je synem tchyně Marie Španělské;
3. dědeček Rudolfa, Karel, byl manželem matky Marie Španělské;
4. Ferdinand byl manželem Anny.

b) Doplň scházející letopočty do rodokmenu, jestliže víš, že:

5. Marie se vdávala jako 20letá, což bylo 4 roky před narozením jejího syna;
6. Maxmilián je o rok starší než jeho manželka;
7. když bylo Maxmiliánovi 20 let, zemřela jeho matka;
8. jeden dědeček Rudolfa zemřel 10 let po svatbě jeho rodičů;
9. Anna a Ferdinand se brali, když jim bylo 18 let;
10. babičky Rudolfa se narodily ve stejném roce;
11. Karel je o 3 roky starší než jeho bratr Ferdinand.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) Z prvních dvou podmínek umíme dopsat do rodokmene jména Maxmilián (manžel Marie) a Rudolf (syn Marie). Ze třetí podmínky víme, že Karel je otec Marie. Pro manželskou dvojici Anna–Ferdinand, zbývá jediná manželská pozice (viz podmínka 4). Na poslední volné místo doplníme poslední zbylé jméno seznamu – Isabela.

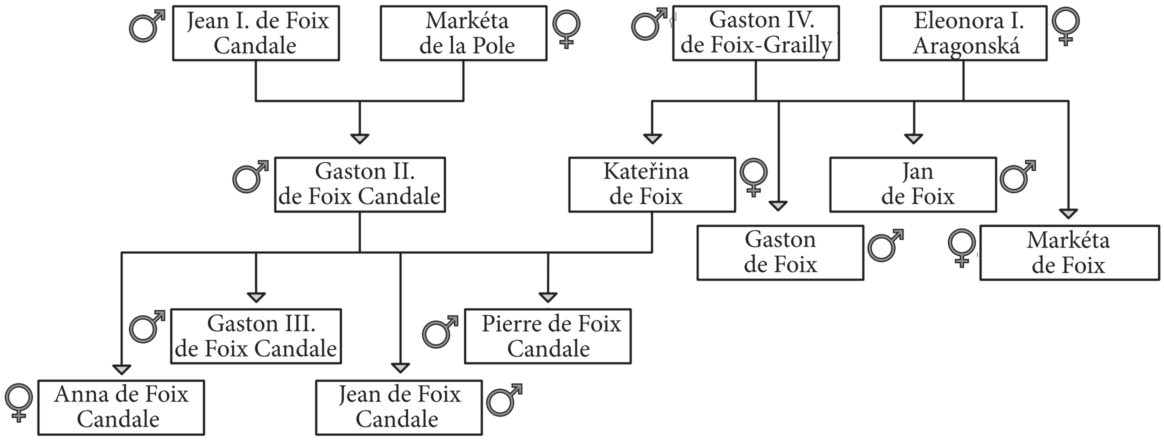
b) Z podmínky 5 plyne, že Marie se vdávala v roce 1548 a její syn Rudolf se narodil roku 1552. Z podmínky 6 plyne, že Maxmilián se narodil v roce 1527. Z podmínky 7 vyplývá, že Anna zemřela roku 1547. Z podmínky 8 je zřejmé, že Karel zemřel v roce 1558. Z podmínky 9 plyne, že Ferdinand se narodil roku 1503 a ženil se v roce 1521. Z podmínky 10 je jasné, že Isabela se narodila roku 1503. Z podmínky 11 vyplývá, že Karel se narodil v roce 1500.

✂ ✂

DALŠÍ ÚLOHY

Na obrázku je část rodokmenu panovnice Anny de Foix-Candale, která byla českou, uherskou, chorvatskou a slavonskou královnou (v letech 1502–1506). Následující úlohy se vztahují pouze ke jménům zde uvedeným. Osoba Jean I. má jediného syna, Gastona II., i když ve skutečnosti daný člověk mohl mít synů více. Na pozici označené ♂ je muž, na pozici označené ♀ je žena.

[Vysvětlení: Švagrová = sestra manžela nebo manželky, nebo manželka bratra; švagr = bratr manžela nebo manželky, nebo manžel sestry; tchán = otec manžela nebo manželky, neteř = dcera sourozence; teta = sestra rodiče, nebo manželka bratra rodiče; strýc = bratr rodiče, nebo manžel sestry rodiče.]



V následujících úlohách podle rodokmenu doplň jména tak, aby tvrzení jednotlivých osob byla pravdivá.

1. a) Kateřina: „Dcera mého manžela je ___________."
b) Gaston II.: „Můj švagr je ___________."
c) Pierre: „Otec mého otce je ___________."
d) Anna: „Moje teta je ___________."
e) Kateřina: „Babička mé dcery je ___________."

2. a) Markéta de Foix: „Otec manžela mé sestry je ___________."
b) Gaston II.: „Matka matky mojí dcery je ___________."
c) Markéta de la Pole: „Dcera syna mého manžela je ____________."
d) Gaston II.: „Matka mé švagrové je ___________."
e) Eleonora: „Matka matky mojí vnučky je ___________."

3. a) Gaston II.: „Dcera manželky mého tchána je ___________."
b) Jean I.: „Strýc dětí mého syna je ___________."
c) Jan: „Matka otce mojí neteře je ___________."
d) Gaston IV.: „Manžel matky manžela mé dcery je ___________."
e) Anna: „Tchán manžela matky mého bratra je ___________."

4. Doplň do tabulky jméno toho, kdo daný výrok řekl. Jestliže daný výrok mohlo říci více lidí, napiš je všechny.

Výrok	**Řekl jej**
a) „Otec otce mých dětí je Jean I. de Foix"	
b) „Matka manželky mého syna je Eleonora."	
c) „Sestra mé švagrové je Kateřina."	
d) „Otec manželky mého otce je Gaston IV."	

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

1.

a) Můj manžel je Gaston II. Jeho dcera je **Anna**.

b) Můj švagr je bratr mé manželky, tedy **Gaston** a **Jan de Foix**.

c) Můj otec je Gaston II. Jeho otec je **Jean I. de Foix**.

d) Moje teta je sestra jednoho z mých rodičů, tedy **Markéta de Foix**.

e) Moje dcera je Anna. Její babičkou je **Eleonora** i **Markéta de la Pole**.

2.

a) Moje sestra je Kateřina. Její manžel je Gaston II. Jeho otec je **Jean I. de Foix**.

b) Moje dcera je Anna. Anina matka je Kateřina. Její matka je **Eleonora**.

c) Můj manžel je Jean I. Jeho syn je Gaston II. Jeho dcera je **Anna**.

d) Moje švagrová je Markéta de Foix. Její matka je **Eleonora**.

e) Moje vnučka je Anna. Její matka je Kateřina. Kateřinina matka je **Eleonora** (neboli já).

3.

a) Můj tchán je Gaston IV. Jeho manželka je Eleonora. Její dcery jsou **Kateřina** a **Markéta de Foix**.

b) Můj syn je Gaston II. Jeho děti jsou Anna, Gaston III., Jean a Pierre. Jejich strýcové jsou **Jan** a **Gaston de Foix**.

c) Moje neteř je Anna. Její otec je Gaston II. Jeho matka je **Markéta de la Pole**.

d) Moje dcera je Kateřina. Její manžel je Gaston II. Jeho matka je Markéta. Markétin manžel je **Jean I**.

e) Můj bratr je Gaston III., Jean i Pierre. Jejich matka je Kateřina. Její manžel je Gaston II. Tchánem Gastona II. je **Gaston IV**.

4.

a) Jean I. de Foix je otcem Gastona II. On je otcem Gastona III., Anny, Jeana de Foix-Candale a Pierra. Ti jsou dětmi **Kateřiny**.

b) Eleonora je matkou Kateřiny, Jana, Gastona de Foix a Markéty de Foix. Kateřina má za manžela Gastona II. Ten je synem **Jeana I. de Foix** a **Markéty de la Pole**.

c) Kateřina je sestrou Markéty de Foix. Ona je švagrovou **Gastona II**.

d) Gaston IV. je otcem Kateřiny, Jana, Gastona de Foix a Markéty de Foix. Z nich jedině Kateřina je manželkou, a to Gastona II. On je otcem **Gastona III.**, **Anny**, **Jeana de Foix-Candale** a **Pierra**.

Komentář

I když se úlohy o rodinných vztazích historických postav týkají bezprostřední životní zkušenosti dítěte jen minimálně, mohou být emocionálně choulostivé zejména pro děti z neúplných rodin. Je potřeba s tím počítat. Ze zkušenosti jedné paní učitelky víme, že se obdobný problém vyřešil, když si hoch za svého tatínka zvolil Supermana, za strýčka Batmana a podobně. Hoch potřeboval reprezentanta ve svém životě, aby sociální handicap překonal.

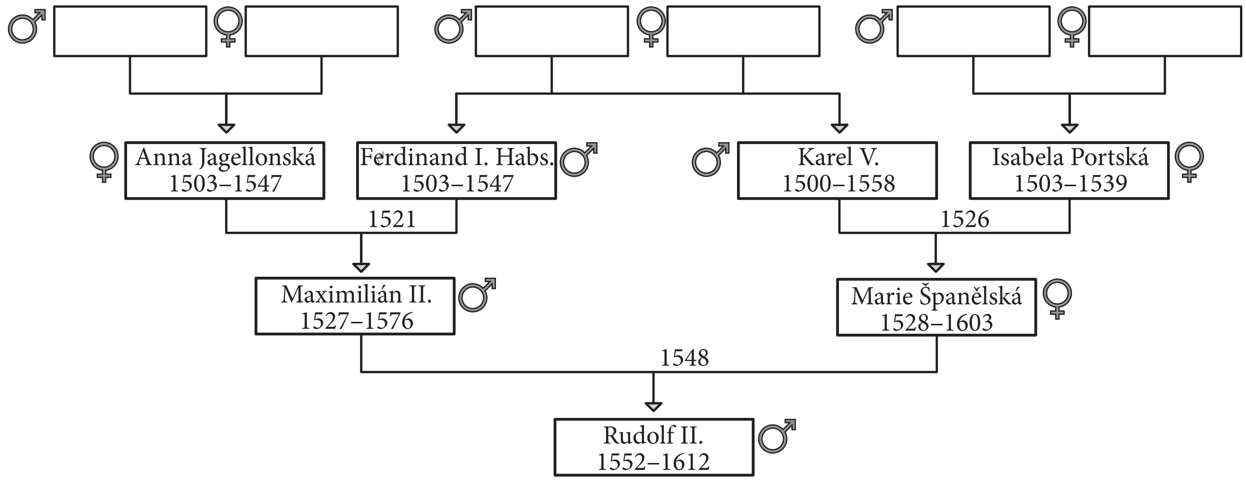
Z didaktického hlediska je důležité si uvědomit, že slova jako matka, syn, bratr… neoznačují konkrétní osobu, ale vztah, relaci. Výrok „Marie Španělská je matka" říká pouze to, že tato žena má alespoň jedno dítě. Ale výrok „Marie Španělská je matka Rudolfa II." určuje vztah dvou osob. Řekneme-li „manželova matka", pak vztahy „manžel" a „matka" skládáme. Je to propedeutika skládání funkcí; například funkce $y = (x + 1)^2$ je složením funkcí $z = x + 1$ a $y = z^2$. Tedy práce s rodokmenem učí žáka pracovat se vztahy (relacemi) a funkcemi.

Vztah matka je jednodušší než vztah sourozenec, protože je v reálném životě frekventovanější a dítě jej častěji slyší. Úlohy jsou obtížnostně gradovány. Obtížnost je však mj. také určena zkušenostmi řešitele, takže gradaci obtížnosti úloh mohou žáci vnímat různě. Do kategorie nejjednodušších rodinných vazeb jsme zařadili: matka/otec, syn/dcera, bratr/sestra, manžel/ka. Druhou kategorii tvoří: dítě, sourozenec, vnuk/vnučka, babička/dědeček/prarodič. Do nejnáročnější kategorie patří: švagr/švagrová, teta/strýc, neteř/synovec, bratranec/sestřenice, tchyně/tchán. V úloze 1 se vyskytují dvě jednoduché nebo jedna složitá vazba; v úloze 2 tři jednoduché nebo jedna složitá a jedna jednoduchá vazba; v úloze 3 čtyři jednoduché nebo jedna složitá a dvě jednoduché nebo dvě složité vazby. V úlohách 1, 2, 3 řešitel zná autora výroku a postupně dohledává, o kom tento mluví. V úloze 4 řešitel ví, o kom se mluví, ale musí zpětně dohledat autora výroku. Tato verze je složitější.

Podobnou analogii představují úlohy: $3 + 4 = x$ (jednoduchá) a $3 + y = 7$ (složitější). První rovnici vyřešíme v podstatě jednoduše sečtením. U druhé rovnice (pokud nemáme zautomaizovaný algoritmus na její řešení) jsme nuceni zpětně dohledávat. Ještě obtížnější je úloha typu: Najdi všechny vazby typu X-Y… – nebo: Nalezni všechna A, B. A říká: „B je můj X." Například: A: „B je můj otec." Řešením by byly všechny dvojice otec–syn. Na náročnosti by přidala formulace A: „B je manžel mé matky."

✂ ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **ROZŠÍŘENÝ RODOKMEN RUDOLFA II.**



Na obrázku je rodokmen Rudolfa II. ze vstupní úlohy, který je rozšířen o jeho prarodiče: Anna de Foix-Candale, Filip I. Sličný, Jana I. Kastilská, Manuel I. Portugalský, Marie Aragonská a Vladislav II. Jagellonský. Na pozici označené ♂ je muž, na pozici označené ♀ je žena.

a) Doplň jména do rodokmene, jestliže víš, že:

1. Anna C. je babičkou Karlova synovce a zároveň není tchyní Isabely;
2. otcem strýčka Marie Španělské je Filip;
3. dědeček Ferdinandovy neteře je Manuel;
4. Vladislav je tchánem Isabelina švagra;
5. matka bratra Maxmiliánova otce byla Jana.

b) Doplň scházející letopočty do rodokmene, jestliže víš, že:

6. tchyně Isabely se narodila v roce 1479;
7. tchyně Anny J. zemřela v roce 1555;
8. tchán a tchyně Ferdinanda se vzali rok před jeho narozením;
9. babička bratrance Marie Španělské žila v letech 1484–1506;
10. manžel Anny C. zemřel 10 let po její smrti, čímž se dožil o 38 let více než ona;
11. tchán babičky Rudolfa žil v letech 1478–1506;
12. praděd syna sestřenice Maxmiliána se narodil v roce 1469;
13. tchán Ferdinandova bratra zemřel v roce, ve kterém se ženil bratr jeho zetě;
14. Manuel si svoji o 13 let mladší manželku, která se dožila o 17 let méně než on, vzal ve stejném roce, ve kterém se narodil jejich budoucí zeť;
15. matka otce Marie Španělské se vdávala v roce 1496.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) Z první podmínky víme, že Anna C. je babičkou Maxmiliána a zároveň to není matka Karla. Tedy je matkou Anny J. Z druhé podmínky plyne, že Filip je Ferdinandův otec. Ze třetí podmínky víme, že jeden z dědečků Marie Španělské byl Manuel, zároveň Filipa už máme dopsaného, tedy je otcem Isabely Portské. Ze čtvrté podmínky vyplývá, že Vladislav je otec Anny J. Z poslední podmínky je zřejmé, že matkou Karla byla Jana. Na poslední volné místo doplníme poslední zbylé jméno seznamu – Marie A.

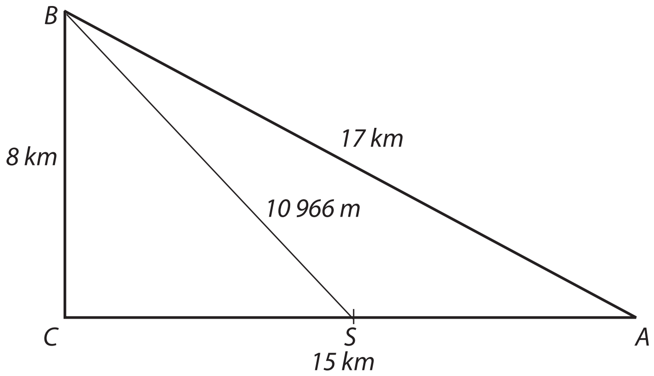
b) Z 6. a 7. podmínky víme, že Jana žila v letech 1479–1555. Z 8. podmínky plyne, že Vladislav a Anna C. se vzali v roce 1502. Z 9. podmínky víme, že Anna C. žila v letech 1484–1506. Z 10. podmínky vyplývá, že Vladislav žil v letech 1456–1516. Z 11. podmínky plyne, že Filip žil v letech 1478–1506. Z 12. a 13. podmínky se dozvídáme, že Manuel žil v letech 1469–1521. Předposlední podmínka říká, že Manuel a Marie A. se brali v roce 1500 a že Marie A. žila v letech 1482–1517. Poslední podmínka říká, že v roce 1496 se konal sňatek Filipa a Jany.

✂ ✂

6 OPTIMALIZACE

VSTUPNÍ ÚLOHA: **NEJLEVNĚJŠÍ TRASA**

Mezi osadami A a B je nutno do země položit kabel. Když využijeme dřívější výkop mezi A a C, bude položení 1 metru kabelu stát 120 Kč. Když budeme muset kopat nový výkop, bude položení 1 metru kabelu stát 200 Kč.



Inženýři, kteří výkop plánovali, zvážili tři možnosti:

A. přímou trasu AB

B. trasu přes bod C (tedy AC a CB)

C. trasu přes střed S úsečky AC (tedy AS a SB)

a) Která z uvedených tří možností je nejlevnější?

b) Inženýři pak našli levnější trasu AXB za 3 080 000 Kč. Bod X leží na úsečce AC. Najdi vzdálenost bodu X od místa A.

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

a) Vstupní úloha má dvě části: standardní a náročnější. Řešení standardní části:

A. Cena trasy AB je 17 000 m · 200 Kč/m = 3 400 000 Kč.

B. Cena trasy ACB se skládá z ceny za úsek AC, tj. 15 000 m · 120 Kč/m = 1 800 000 Kč, a ceny za úsek CB, tj. 8 000 m · 200 Kč/m = 1 600 000 Kč; celkem 3 400 000 Kč.

C. Cena trasy ASB se skládá z ceny za úsek AS, tj. 7 500 m · 120 Kč/m = 900 000 Kč, a ceny za úsek SB, tj. 10 966 m · 200 Kč/m = 2 193 200 Kč; celkem 3 093 200 Kč.

Nejlevnější je možnost C.

Komentář

V experimentálním vyučování autora úlohy jeho sedmáci nejprve zjistili, že cena trasy v případě A i B je stejná. Několik žáků z toho ihned vyvodilo, že i v případě C bude trasa stát 3 400 000 Kč. Překvapení, které žáci zažili zjištěním svého omylu, přispělo k jejich příští opatrnosti s rychlým zobecňováním.

b) Zvolme X tak, že $|AX| = 9$ km. Pak cena úseku AX je 9 000 m · 120 Kč/m = 1 080 000 Kč a cena úseku XB, jehož délka je 10 km, je 10 000 m · 200 Kč/m = 2 000 000 Kč. Cena celé trasy je tedy 3 080 000 Kč, což je méně než v případě C.

Náročné je pro žáky, kteří neovládají Pythagorovu větu, zjištění, že $|XB| = 10$ km. Stačí znát pravoúhlý trojúhelník o stranách 3, 4, 5 a náš trojúhelník XCB je dvakrát zvětšený. Žáci mohou číslo $|XB|$ najít přibližně rýsováním.

Lepší možnost je dát žákům tabulku:

$\|AX\|$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\|XB\|$	1 612	1 526	1 442	1 360	1 281	1 204	1 131	1 063	1 000	943	894	854	825	806
cena	3 344	3 292	3 244	3 200	3 162	3 128	3 102	3 086	3 080	3 086	3 108	3 148	3 210	3 292

Délky $|XB|$ jsou zaokrouhleny na desetimetry a jednotkou délky je 10 metrů. V poslední řádce jsou ceny v tisícikorunách.

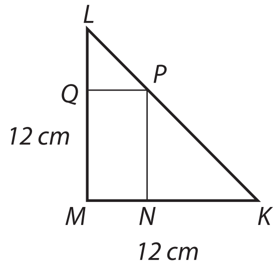
✂ ---------- ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Do rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka *KLM*, pro který je $|KM| = |LM| = 12$ cm, je vepsán obdélník *MNPQ*, jak vidíme na obrázku. Najdi takovou polohu bodu *N* (tj. najdi vzdálenost $|MN|$), aby

a) obvod obdélníku *MNPQ* byl co největší,

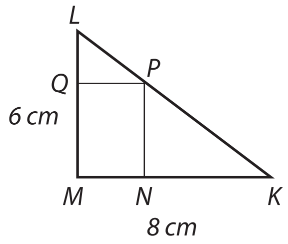
b) obsah obdélníku *MNPQ* byl co největší.



2. Do pravoúhlého trojúhelníka *KLM*, pro který je $|KM| = 8$ cm, $|LM| = 6$ cm, je vepsán obdélník *MNPQ*, jak vidíme na obrázku. Najdi takovou polohu bodu *N* (tj. najdi vzdálenost $|MN|$), aby

a) obvod obdélníku *MNPQ* byl co největší,

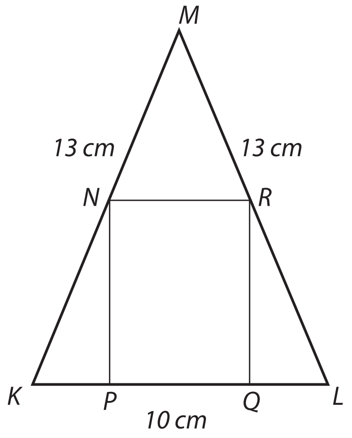
b) obsah obdélníku *MNPQ* byl co největší.



3. Do rovnoramenného trojúhelníka *KLM*, pro který je $|KM| = |LM| = 13$ cm, $|KL| = 10$ cm je vepsán obdélník *NPQR*, jak vidíme na obrázku. Najdi takovou polohu bodu *N* (tj. najdi vzdálenost $|MN|$), aby

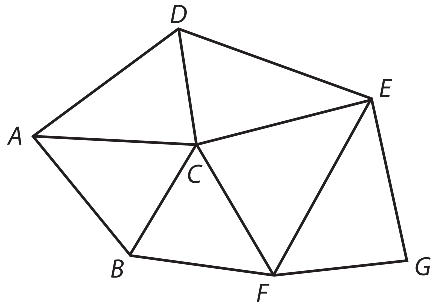
a) obvod obdélníku *MNPQ* byl co největší,

b) obsah obdélníku *MNPQ* byl co největší.



4. Na obrázku je plánek sítě cest spojujících 7 osad *A, B, C, D, E, F* a *G*. V tabulce jsou vyznačeny vzdálenosti (v km) každých dvou sousedních osad.

A	11	13	15			
	B	12			18	
		C	12	17	14	
			D	16		
				E	23	15
					F	12
						G



a) Doplň do tabulky údaj o nejkratší vzdálenosti osad *A* a *E*.

b) Podobně doplň celou tabulku.

c) Během povodní byly strženy dva mosty a dvě z 12 cest byly neprůjezdné. Tím se cesta z *D* do *F* prodloužila na 39 km, cesta z *A* do *B* na 25 km, ale cesta *B* do *D* se neprodloužila. Které dvě cesty byly neprůjezdné?

d) Vytvoř tabulku vzdáleností pro tuto novou dopravní situaci.

5. Písmena A, B, C, D nahraď číslicemi 1, 3, 7, 9 (stejná písmena stejnou číslicí, různá písmena různými číslicemi) tak, aby číslo

a) AB · CD bylo co největší,

b) AB – BC + CD – DA bylo co největší.

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

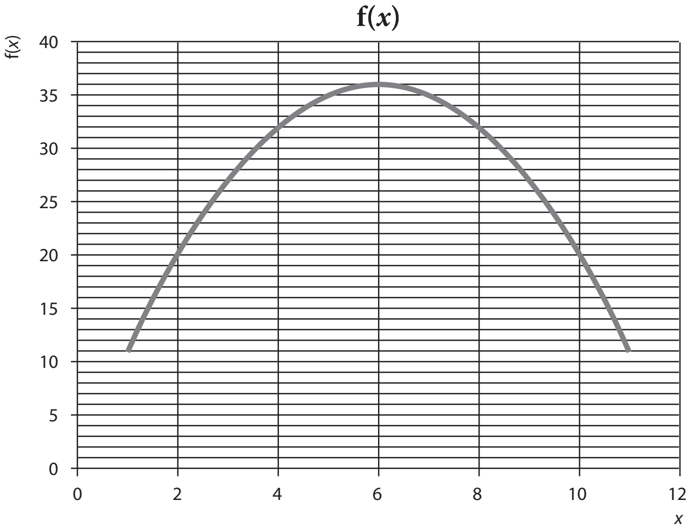
VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

1. Označme $x = |MN|$. Pak $|KN| = |NP| = 12 - x$.

a) Obvod obdélníku $MNPQ$ je $2 \cdot (|MN| + |NP|) = 24$. To je konstanta, tedy na umístění bodu N nezáleží.

b) Obsah obdélníku $MNPQ$ je $|MN| \cdot |NP| = (12 - x) \cdot x$. Funkce $f(x) = (12 - x) \cdot x$ nabývá maxima pro $x = 6$. Žáci to najdou tabulkou:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	11	20	27	32	35	36	35	32	27	20	11



Na grafu funkce $f(x)$ je vidět její parabolický průběh. To nás utvrzuje v přesvědčení, že od vrcholu [6, 36] funkce f „do obou stran klesá“. Přesný důkaz získáme pomocí substituce $x = t + 6$. Pak je $(12 - x) \cdot x = (6 - t) \cdot (6 + t) = 36 - t^2$ a toto číslo je největší, když $t = 0$.

2. Označme $x = |MN|$, $y = |QM|$. Z podobnosti trojúhelníků LQP a LMK je $\frac{(6 - y)}{x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Tedy $3x + 4y = 24$ a $x = 8 - \frac{4y}{3}$.

a) Obvod obdélníku $MNPQ$ je $o = 2 \cdot (x + y) = 16 - \frac{2y}{3}$. Protože $y > 0$, nemá tato funkce maximum. Může být libovolně blízko k číslu 16, ale tuto hodnotu nedosáhne, protože to by obdélník $MNPQ$ degeneroval na úsečku. Žáci vidí důležitý příklad funkce, která má supremum, ale nemá maximum.

b) Tabulkou, podobně jako u úlohy 1, žáci zjistí, že maximum funkce $f(x) = x \cdot (6 - \frac{3x}{4})$ nastává pro $x = 4$, $y = 3$. Opět tedy N je středem odvěsny MK, P je středem přepony KL a Q je středem odvěsny ML.

3. Nechť S je střed úsečky KL. Z Pythagorovy věty nebo měřením žáci najdou velikost výšky MS trojúhelníka KLM: $|MS| = 12$ cm. Označme $x = |PQ|$, $y = |PN|$. Z podobnosti trojúhelníků MSL a RQL máme $x = 10 - \frac{5y}{6}$.

a) Obvod obdélníku $NPQR$ je $o = 2(x + y) = 20 + \frac{y}{3}$. Protože $y < 12$, je $o < 24$ cm. Funkce $o(y) = 20 + \frac{y}{3}$ tedy nemá maximum.

b) Opět tabulkou žáci zjistí, že maximum funkce obsahu $f(x) = x \cdot (12 - \frac{6x}{5})$ nastává pro $x = 5$. Tedy N je střed úsečky KM a R je střed úsečky LM.

4. a), b) Doplněné vzdálenosti jsou v horní pravé (podbarvené) části přiložené tabulky.

c) Povodeň vyřadila cesty AB a CF.

d) Nová tabulka vzdáleností redukované sítě cest je v dolní levé (nepodbarvené) části přiložené tabulky. Tak vzdálenost mezi A a B se z původních 11 km prodloužila na 25 km a cesta z C do G se z původních 26 km prodloužila na 32 km.

A	11	13	15	30	27	39
25	***B***	12	24	29	18	30
13	12	***C***	12	17	14	26
15	24	12	***D***	16	26	31
30	29	17	16	***E***	23	15
43	18	30	39	23	***F***	12
45	30	32	31	15	12	***G***

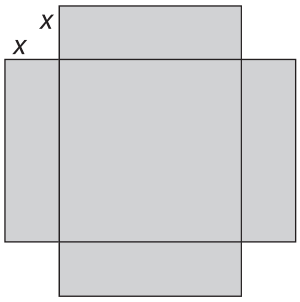
5. a) Je zřejmé, že číslice 7 a 9 musí být na místech A a C. Žáci zjistí, že $73 \cdot 91 = 6\,643$ a $71 \cdot 93 = 6\,603$. Tedy A = 7, B = 3, C = 9, D = 1 je jedno řešení. Druhé řešení je symetrické: A = 9, B = 1, C = 7, D = 3.

b) AB – BC + CD – DA = 10A + B – (10B + C) + 10C + D – (10D + A) = 9(A + C – B – D). Toto číslo je největší, když {A, C} = {7, 9} a {B, D} = {1, 3}. Hodnota tohoto čísla je 108.

✂--✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **KRABICE**

Ze čtverce o straně 42 cm vystřihneme čtyři čtvercové růžky o straně x cm, jak je naznačeno na obrázku. Pak ohnutím čtyř obdélníků vytvoříme krabici. Objem této krabice označíme $V(x)$.



a) Zjisti, zda je možné najít x tak, aby objem $V(x)$ byl větší než 5 a půl litru.

b) Podobnou úlohu řeš pro čtverec se stranou 54 cm. Jakou největší hodnotu může objem $V(x)$ nabýt? Jaké je v tom případě x?

c) Podobnou úlohu řeš pro čtverec o straně 60 cm. Jakou největší hodnotu může objem $V(x)$ nabýt? Jaké je v tom případě x?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) Funkce objemu je $V(x) = (42 - 2x)^2 \cdot x$. Funkci zapíšeme do tabulky:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V[x]	1 600	2 888	3 888	4 624	5 120	5 400	5 488	5 408	5 184	4 840	4 400

Vidíme, že maximum 5 488 cm^3 = 5,488 l nastává pro $x = 7$. Je to méně než 5,5 litru. Ale není vyloučeno, že pro $x = 7{,}1$, nebo $x = 6{,}9$ to bude více než uvedených 5,5 l. Výpočet ukáže, že tomu tak není: $V(6{,}9) = 5\,487{,}156$ a $V(7{,}1) = 5\,487{,}164$. Hodnota $V(x)$ klesá, když od čísla $x = 7$ jdeme dolů nebo nahoru.

b) Strana čtverce je 54 cm. Postupujeme jako u případu a). U funkce $V(x) = (54 - 2x)^2 \cdot x$ se omezíme na méně hodnot x, protože čekáme podobný průběh funkce jako v případě a).

x	7	8	9	10	11
V[x]	11 200	11 552	11 664	11 560	11 264

Vidíme, že maximum 11 664 cm^3 nastává pro $x = 9$. V obou případech je hledaná hodnota x rovna šestině strany výchozího čtverce. Toto pozorování prověříme na následujícím případu.

c) Strana čtverce je 60 cm. Šestina této délky je 10 cm. Tedy čekáme, že maximum funkce $V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x$ nastane pro $x = 10$. Výpočet tuto hypotézu potvrdí: $V(9) = 15\,876$, $V(10) = 16\,000$, $V(11) = 15\,884$.

Dodejme, že označíme-li stranu výchozího čtverce a, je $V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x$. Podle našeho (nedokázaného, ale pravdivého) zjištění maximum objemu $V(x)$ nastává pro $x = a/6$. Je to $V(a/6) = 2 \cdot (a/3)^3$.

Komentář

Optimalizační úlohy patří z hlediska aplikace matematiky k nejdůležitějším. Objevují se jak v diskrétních prostředích (zde úlohy 4 a 5), tak ve spojitých prostředích, kde silným nástrojem jejich řešení je diferenciální počet. Na úrovni žáků druhého stupně ZŠ je hlavním nástrojem tabulka. Vyplňováním tabulky si žák uvědomuje průběh funkce – kde je rostoucí, kde klesající, kde má extrém – a poznává charakter funkce.

✂ ✂

7 DĚLITELNOST

VSTUPNÍ ÚLOHA: DLÁŽDĚNÍ ČTVERCOVÉHO DVORU

Domluva

$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je množina všech přirozených čísel s nulou.

Zápis $p|n$ říká, že číslo n je dělitelné číslem p, tj. $n = k \cdot p$, kde $k \in \mathbf{N}_0$.

Řekneme, že dvě čísla mají **různou paritu**, když jedno z nich je sudé a druhé liché. Jsou-li obě čísla sudá, nebo obě lichá, říkáme, že čísla mají **stejnou paritu**.

Dvůr ve tvaru čtverce o straně 24 m je třeba celý přesně pokrýt obdélníkovými panely. K dispozici jsou panely tří typů:

Panel typu A má rozměry 25 dm × 24 dm a jeden panel stojí 7 zedů.

Panel typu B má rozměry 24 dm × 30 dm a jeden panel stojí 9 zedů.

Panel typu C má rozměry 20 dm × 36 dm a jeden panel stojí 8 zedů.

Žádný panel není povoleno řezat nebo jinak upravovat a také se panely nesmí překrývat.

O každém z následujících tvrzení rozhodni, zda je pravdivé, nebo nepravdivé. Je-li tvrzení pravdivé, zakroužkuj P, je-li nepravdivé, zakroužkuj N.

Dvůr lze pokrýt panely typu A a cena pokrytí nepřesáhne 700 zedů.	P / N
Dvůr lze pokrýt panely typu B a cena pokrytí nutně přesáhne 700 zedů.	P / N
Dvůr lze pokrýt panely typu C a cena pokrytí nutně přesáhne 650 zedů.	P / N

✂ ------------------------ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------------------ ✂

ŘEŠENÍ

Čtverec o straně 240 dm lze přesně pokrýt panely o rozměrech u dm × v dm, právě když je číslo 240 dělitelné oběma čísly u, v. Číslo 240 není dělitelné ani číslem 25, ani číslem 36. Tedy první a třetí tvrzení je nepravdivé (N). Druhé tvrzení je pravdivé (P), neboť 240 : 24 = 10 a 240 : 30 = 8. K pokrytí je tedy třeba $10 \cdot 8 = 80$ panelů v ceně 720 zedů, což je více než 700 zedů.

Komentář

Úloha zasahuje jak do geometrie (tvary, obsah), tak do aritmetiky (dělitelnost). Lze očekávat, že někteří řešitelé zaměří pozornost pouze na obsahy a celkovou cenu panelů. Zapomenou zjistit, zda se danými panely dá dvůr skutečně pokrýt.

V případě A žák zjistí, že obsah dvora je 57 600 dm^2 a obsah panelu 600 dm^2. Tedy k pokrytí dvora je třeba 576 : 6 = 96 panelů. Jejich cena je $96 \cdot 7$ zedů, tj. 672 zedů, tedy méně než 700 zedů. Žák zakroužkuje chybnou odpověď P. V případě C stejný postup vede k výpočtům 57 600 : 720 = 80 a $80 \cdot 8 = 640$ zedů, tudíž nepřesáhne 650 zedů. Žák zakroužkuje správnou odpověď N, byť část jeho úvah byla chybná.

✂ -- ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. V uvedených větách škrtni jedno ze dvou nabízených slov tak, abys dostal pravdivé tvrzení. Čísla m, n jsou přirozená a zároveň $m > n$.

T1. Součet sudého a lichého čísla je vždy číslo sudé/liché.

T2. Čísla $m + n$ a $m - n$ mají vždy stejnou/různou paritu.

T3. Číslo $m \cdot n$ je liché, pak $m + n$ je vždy sudé/liché.

T4. Součet čtyř po sobě jdoucích čísel je vždy číslo sudé/liché.

T5. Součet pěti po sobě jdoucích čísel je vždy číslo sudé/liché.

2. Zjisti, kolik existuje trojmístných čísel dělitelných číslem 4, jejichž ciferný součet se rovná číslu **a)** 4; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 16.

3. Ida na základě výsledků úlohy 2 řekla, že trojmístných čísel se součtem 7 je sedm, trojmístných čísel se součtem 8 je osm atd. Má Ida pravdu? Prověř tvrzení Idy pro trojmístná čísla se součtem **a)** 7; **b)** 10; **c)** 20.

4. Rozděl šest čísel 29, 36, 42, 71, 88 a 98 do tří dvojic tak, aby součet čísel každé dvojice byl dělitelný číslem 4.

5. Rozhodni o pravdivosti tvrzení, když m, n jsou libovolná přirozená čísla a $m > n$.

T6. $(4|m$ a $4|n) \Rightarrow 4|(m + n)$.

T7. $4|(m + n) \Rightarrow 4|(m - n)$.

T8. $4|(2m + n) \Leftrightarrow (2|n \wedge 2|(m + n/2))$.

6. Přirozené číslo AB je dvoumístné. Rozhodni o pravdivosti tvrzení:

T9. Je-li B$\in\{2, 6\}$, pak 4|AB $\Leftrightarrow$ A je lichá číslice.

T10. Je-li B$\in\{0, 4, 8\}$, pak 4|AB $\Leftrightarrow$ A je sudá číslice.

7. Přirozené číslo p je alespoň dvoumístné. Rozhodni o pravdivosti tvrzení:

T11. $4|p \Leftrightarrow$ poslední dvojčíslí čísla p je dělitelné 4.

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

1. Škrtáme slova: v T1 „sudé“; v T2 „různou“; v T3 i T4 „liché“; v T5 lze škrtnout každé slovo, protože součet může být jak číslo sudé, tak číslo liché.

2.

a) Rozklady čísla 4 na součet tří čísel jsou čtyři: 4 + 0 + 0, 3 + 1 + 0, 2 + 2 + 0, 2 + 1 + 1. Z prvního rozkladu lze vytvořit jediné trojmístné číslo dělitelné číslem 4, a sice 400. Z druhého rozkladu žádné, ze třetího jen 220 a ze čtvrtého jen 112. Celkem tři čísla.

b) pět: 104, 140, 212, 320, 500;

c) šest: 132, 204, 240, 312, 420, 600;

d) šestnáct: 196, 268, 376, 448, 484, 556, 592, 628, 664, 736, 772, 808, 844, 880, 916, 952.

3. Tvrzení Idy není pravdivé.

a) osm: 124, 160, 232, 304, 340, 412, 520, 700;

b) čtrnáct: 136, 172, 208, 244, 280, 316, 352, 424, 460, 532, 604, 640, 712, 820;

c) osm: 488, 596, 668, 776, 848, 884, 956, 992.

4. Existuje jediný rozklad 29 + 71 = 100, 36 + 88 = 124 a 42 + 98 = 140.

5. T6 je pravdivé. T7 je nepravdivé; pravdivé je, právě když jsou přirozená čísla m, n sudá. T8 je pravdivé. Důkaz implikace ($\Rightarrow$): Z předpokladu $4|(2m + n)$ plyne, že n je sudé, tedy $k = n/2 \in \mathbf{N}$. Pak $4|(2m + n) \Rightarrow 4|2(m + k) \Rightarrow 2|(m + n/2)$. Důkaz implikace ($\Leftarrow$): Když $2|p$, tak $4|2p$. Stačí sem dosadit $p = m + n/2$.

6. T9 i T10 jsou pravdivá. Stačí prověřit případy B = 0. Pro další čísla tvrzení plyne z toho, že 4|AB $\Leftrightarrow$ 4|(AB + 4n) a 4|AB $\Leftrightarrow$ 4|(AB + 20n), $n\in\mathbf{N}$.

7. T11 je pravdivé. Jestliže AB je poslední dvojčíslí čísla p, pak $p = 100q$ + AB.

Komentář

Prvních pět úloh ukazuje, jak žáci sami mohou odhalovat kritéria dělitelnosti čísly 2 a 4. Totéž se týká úloh 6 až 10 pro dělitelnost čísly 3, 9 a 6. Na úloze 11 ilustrujeme práci učitele, který nic nevysvětluje, ale řídí diskusi třídy, ve které žáci sami objevují tvrzení. Na základě domácích i zahraničních zkušeností víme, že tato forma vyučování přináší žákům nejrychlejší rozvoj matematického myšlení. Na učitele ale klade vysoké nároky.

✂ -- ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHY: **ZKOUMÁNÍ DĚLITELNOSTI**

8. Do trojmístného čísla 51X doplň číslici X tak, aby toto číslo bylo dělitelné číslem **a)** 3; **b)** 6; **c)** 9. Hledej všechna řešení. Totéž pro čísla 15X, 21X, 30X, 4X5, 81X, 6X1, 34X, X52, 5X5, 91X, 4X0, 13X, X04, 1X3, 1X0, 2X6, 71X, 17X, 7X1, 23X, 5X0, X14, 2X0, 20X, 1X1.

9. Najdi dvojmístné číslo AB dělitelné 3, jehož ciferný součet je **a)** 6; **b)** 7; **c)** 8. Hledejte více řešení.

10. Pro libovolné číslice A, B, C, D (a pro čísla z nich sestavená) dokaž:

a) 3|(AB – A – B);
b) 3|(ABC – A – B – C);
c) 3|(ABCD – A – B – C – D);
d) 9|(AB – A – B);
e) 9|(ABC – A – B – C);
f) 9|(ABCD – A – B – C – D).

11. Na několika pětimístných číslech n prověř, že $9|(n - CS(n))$, kde $CS(n)$ je ciferný součet čísla n. Na základě této zkušenosti vyslov kritérium pro dělitelnost číslem 9 i číslem 3.

12. Formuluj a dokaž kritérium dělitelnosti číslem 6.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

8.

a) $3|51X \Leftrightarrow X \in \{0, 3, 6, 9\}$; stejně pro čísla 15X, 21X, 30X, 4X5, 81X;
$3|6X1 \Leftrightarrow X \in \{2, 5, 8\}$; stejně pro čísla 34X, X52, 5X5, 91X, 4X0, 13X, X04, 1X3, 1X0
$3|2X6 \Leftrightarrow X \in \{1, 4, 7\}$; stejně pro čísla 71X, 17X, 7X1, 23X, 5X0, X14, 2X0, 20X, 1X1

b) Ani jedno z čísel 4X5, 5X5, 1X3, 7X1, 1X1, 6X1 není dělitelné číslem 6; čísla jsou lichá.
$6|51X \Leftrightarrow X \in \{0, 6\}$; stejně pro čísla 15X, 21X, 30X, 81X
$6|13X \Leftrightarrow X \in \{2, 8\}$; stejně pro čísla 34X, 91X
$6|X52 \Leftrightarrow X \in \{2, 5, 8\}$; stejně pro čísla 4X0, X04, 1X0
$6|2X6 \Leftrightarrow X \in \{1, 4, 7\}$; stejně pro čísla 5X0, X14, 2X0
$6|71X \Leftrightarrow X = 4$; stejně pro čísla 17X, 23X, 20X

c) Čísla 4X5 a 81X jsou dělitelná 9, právě když $X \in \{0, 9\}$;
čísla 71X, 17X, 7X1 a 2X6 jsou dělitelná 9, právě když X = 1;
čísla 34X, X52 a 6X1 jsou dělitelná 9, právě když X = 2;
čísla 15X a 51X jsou dělitelná 9, právě když X = 3;
čísla 23X, 5X0 a X14 jsou dělitelná 9, právě když X = 4;
čísla 4X0, 13X, X04 a 1X3 jsou dělitelná 9, právě když X = 5;
čísla 21X a 30X jsou dělitelná 9, právě když X = 6;
čísla 20X, 2X0 a 1X1 jsou dělitelná 9, právě když X = 7;
čísla 5X5, 91X a 1X0 jsou dělitelná 9, právě když X = 8.

9. $A + B = 6 \Rightarrow 3|(A + B) \Rightarrow 3|AB$; je-li $A + B = 7$, nebo $A + B = 8$, pak AB není dělitelné 6.

10. Číslo $AB - A - B = 10A + B - A - B = 9A$ je dělitelné 9, tedy i 3. Případy b) až e) jsou podobné. Ukážeme až f).
Číslo $ABCD = 1000A + 100B + 10\,C + D - A - B - C - D = 999A + 99B + 9C = 9(111A + 11B + C)$ je dělitelné 9, tedy i 3.

11. Žáci s pomocí učitele formulují kritérium dělitelnosti devíti:
$\forall\, n \in \mathbf{N}: 9|n \Leftrightarrow 9|CS(n)$.
Stejně pro číslo 3. I když obecný důkaz je zatím nad jejich síly, podstatu důkazu znají – poznali ji na případech čísel menších než 10 000.

12. Hledané kritérium zní: $\forall\, n \in \mathbf{N}: 6|n \Leftrightarrow (2|n$ a současně $3|n)$.
Důkaz implikace ($\Rightarrow$): Platí $2|6$, tedy z $6|n$ plyne, že $2|n$; stejně tak pro číslo 3.
Důkaz implikace ($\Leftarrow$): Ze vztahu $3|n$ plyne, že n můžeme psát ve tvaru $n = 3k$, $k \in \mathbf{N}$. Ze vztahu $2|3k$ plyne, že k je sudé, tedy můžeme je psát $k = 2t$. Odtud $n = 6t$.

✂ ✂

Komentář

Ukázka diskuse třídy jako účinného edukačního nástroje

„Je součet dvou lichých čísel pokaždé číslo sudé?“ Tuto otázku položil Martin (druhák) sestře Báře (sedmačka) a ta ji přinesla do třídy. Následovala diskuse třídy.

V hranatých závorkách je přibližné hodnocení úrovně žáka; [1] – slabší, [2] – dobrý, [3] – výborný.

Adam [1]: „Ukážu mu to na příkladech. Například 5 + 3 = 8.“

Bára [2]: „To jsem udělala. On řekl, že v malých číslech to platí, ale neví, zda to platí i pro tisíce a miliony.“

Cyril [3]: „Ukážu mu, že liché číslo se dá psát $2n + 1$. Pak vezmu dvě taková lichá čísla $2n + 1$ a $2m + 1$ a sečtu je. Dostanu $2n + 2m + 2 = 2 \cdot (n + m + 1)$, a to je sudé číslo.“

Čeněk [1]: „Já ti nerozumím. A to ti má ten druhák rozumět?“

Dana [2]: „Jak vlastně druhák chápe sudé číslo? A jak liché?“

U.: „Skvělá otázka. Jak druhák chápe sudé a liché číslo? A vůbec, jak to chápeme my?“

Padlo několik názorů a následující čtyři zasluhují zaznamenání.

Eva [2]: „Z hromady bonbonů odebírám po dvou. Když nakonec zůstane na hromadě jeden bonbon, byl jich lichý počet. Když nezůstane nic, byl jich sudý počet.“

Filip [2]: „Když po dělení 2 dá zbytek 0, je sudé, když dá zbytek 1, je liché.“

Gita [2]: „Když končí číslicí 0, 2, 4, 6, nebo 8, je sudé, když končí lichou číslicí, je liché.“

Hugo [2]: „Když se děti dají do dvojic a jeden přebývá, je jich lichý počet.“

U.: „Výborně, máte 4 vymezení pojmů lichý a sudý. Které z nich pochopí druhák?“

Gita [2]: „Moje, nebo Hugovo, nebo Evino. Určitě ne Cyrilovo. Ani Filipovo.“

Igor [3]: „Já bych mu nic nevnucoval. Dal bych mu úlohu, která mu pomůže vymezení objevit. Já umím jen to, co si sám objevím. Když mi to někdo řekne, tak mne to nebaví a zapomenu to.“

U.: „Velice souhlasím s Igorem. Tak jakou úlohu dáme druhákovi, aby sám řekl třeba to Hugovo vymezení?“

To byla náročná výzva. Až po delším hledání zazněla první pěkná úloha, která měla druháka dovést k vymezení pojmů sudý/lichý podle Huga. Úlohu vytvořil Jiří.

Jiří [2]: „Děti stojí v dlouhém dvojstupu. Vidíš jen jeho konec. Jak poznáš, zda je v dvojstupu sudý, nebo lichý počet dětí?“

Další pěknou úlohu, která by druháka navedla na vymezení Gity, vytvořila Karolína.

Karolína [3]: „Máš dvojmístné číslo AB. Máš říct, zda je sudé, nebo liché; můžeš si říct o jednu, ale jen jednu z obou číslic – a já ti ji řeknu. O kterou číslici si řekneš?“

Bára nakonec řekla, že zkusí dát bráškovi úlohu Jiřího. Dodala: „Když mám dva dvojstupy a v každém přebývá jeden žák, dvojstupy spojím a ty dva přebývající žáci se chytí za ruce. Všech bude sudý počet.“

V diskusi z úst žáků zazněly tři klíčové myšlenky, k nimž úloha žáky navádí. Je to myšlenka:

* metakognitivní: Zdůvodňování vyžaduje jasné a přesné pojmy. (Eva)
* kognitivní: Existuje více způsobů vymezení pojmů sudý a lichý. (Cyril, Filip, Gita, Hugo)
* edukační: Vysvětlování není nejúčinnější cesta, jak někoho dovést k poznání; účinnější je promyšlená série úloh, jejichž řešením žák daný poznatek sám odhalí. (Igor)

8 PRAVDĚPODOBNOST (POROVNÁVÁNÍ, PŘEDPOVĚDI)

VSTUPNÍ ÚLOHA: LEDOVÍ MUŽI

Meteorologové dlouhodobě sledují průběh teplot v období tzv. ledových mužů (Pankrác, Servác, Bonifác, 12.–14. května), kdy teploty klesají pod bod mrazu a mohou způsobit špatnou úrodu ovoce. Zjistili, že pravděpodobnost, že v průběhu příštích deseti let alespoň jednou v období ledových mužů klesne teplota pod bod mrazu, je $\frac{3}{5}$. Která z následujících vět správně vyjadřuje předpověď meteorologů?

A. Protože číslo $\frac{3}{5} = 0{,}6$ je malé číslo, je pravděpodobnost příchodu mrazů v období ledových mužů v příštích deseti letech zanedbatelná a nemusíme je očekávat.

B. Číslo $\frac{3}{5} = 0{,}6$ je větší než 0,5, proto je jisté, že v období ledových mužů bude příštích deset let mrznout.

C. Platí-li předpověď na 10 let dopředu, pak přijdou mrazy v období ledových mužů po uplynutí $\frac{3}{5}$ z 10 let, tedy za 6 let.

D. Pravděpodobnost, že v příštích 10 letech alespoň jednou přijdou mrazy v období ledových mužů, je větší než pravděpodobnost, že nepřijdou.

E. Dopředu nelze nijak zjistit, zda alespoň jednou v období příštích deseti let mrazy v květnu přijdou, nebo ne, oboje je stejně možné.

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

Tvrzení A není správné, pravděpodobnost jevu vyjadřujeme čísly z intervalu od 0 do 1, hodnota 0,6 leží blízko střední hodnoty, a proto není zanedbatelná.

Tvrzení B není správné, pokud je hodnota pravděpodobnosti menší než 1, není jisté, že jev nastane.

Tvrzení C není správné, zlomek $\frac{3}{5}$ vyjadřuje, že v dlouhodobém sledování by měl být příchod mrazu zaznamenán častěji, a to v průměru ve třech z pěti případů. Tvrzení se nevztahuje k údajům o tom, kdy mráz nastane.

Tvrzení D je správné.

Tvrzení E je správné v první části věty, u náhodného jevu nelze dopředu určit, zda nastane. Druhá část věty však správná není, pravděpodobnost, že mrazy nepřijdou, je vyjádřena číslem $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ a tudíž je menší než pravděpodobnost, že mrazy přijdou. Předpověď meteorologů správně vyjadřuje pouze věta D, nelze s jistotou očekávat, zda mrazy přijdou, či nikoliv, ale lze porovnat, který z jevů může nastat s větší pravděpodobností.

✂ -------------------- ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Při hodu mincí jsou dva možné výsledky: padne panna, padne orel.

a) Petr prohlásil: „Pravděpodobnost, že při hodu mincí padne buď panna, nebo orel, je stoprocentní.“ Vyber z následujících možností věty, které správně objasňují, co to znamená:

A. Nemůže padnout nic jiného.

B. Je možné, že padne buď panna, nebo orel, ale jisté to není.

C. Je jisté, že padne buď panna, nebo orel.

D. Je nemožné, aby padl orel.

b) Pavel prohlásil: „Pravděpodobnost, že padne panna, je 50 %?“ Vyber z následujících možností věty, které správně objasňují, co to znamená:

A. Není jisté, že padne panna.

B. Je jisté, že padne panna.

C. Je nemožné, aby padl orel.

D. Panna padne se stejnou pravděpodobností jako orel.

2. V košíku jsou pouze modré a červené koule. 20 z nich jsem vybral do bedny a zbytek ponechal v košíku.

a) Martina si myslí, že si potmě z bedny vytáhne kouli své oblíbené barvy (červenou) s pravděpodobností 50 %, protože jsou jen dvě barvy koulí. Myslíš, že má pravdu? Může pravděpodobnost vytažení červené koule záležet i na dalších okolnostech?

b) Martina přepočítala červené koule v bedně a zjistila, že jich je 12. Co je pravděpodobnější, že si vytáhne červenou kouli, nebo modrou? Umíš předpovědět, s jakou pravděpodobností si vytáhne červenou kouli?

c) Kolik by v bedně muselo být modrých koulí, aby pravděpodobnost, že si Martina vytáhne kouli červenou, byla větší než 80 %?

d) Kolik by muselo být v bedně červených koulí, aby bylo jisté, že si Martina vytáhne červenou kouli? Jaká hodnota pravděpodobnosti tuto situaci vyjadřuje?

3. V bedně je 10 koulí. Pět velkých červených, dvě malé zelené a zbytek jsou modré.

a) Jaká je pravděpodobnost, že když vytáhnu jednu kouli, bude červená?

b) Jaká je pravděpodobnost, že když vytáhnu jednu kouli, nebude modrá?

c) Vytáhl jsem jednu kouli. Je pravděpodobnější, že je velká, nebo malá?

d) Vím, že pravděpodobnost, že náhodně vytažená koule bude malá, je 0,4. Mohu z toho zjistit, kolik modrých koulí je malých?

✂ -------------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -------------------- ✂

VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

1. a) Správné výroky jsou A, C, nesprávné B, D.

b) Správné výroky jsou A, D, nesprávné B, C.

2. a) Zdůvodnění Martiny není správné. Pravděpodobnost vytažení červené koule závisí pouze na počtu červených koulí a na počtu modrých koulí v bedně. Přesto se může stát, že si potmě z bedny vytáhne kouli své oblíbené barvy (červenou) s pravděpodobností 50 %. To nastane tehdy, když v bedně bude po 10 koulích od obou barev.

b) Pravděpodobnější je, že si vytáhne červenou kouli. Příznivých výsledků jejího pokusu při tažení koule je 12 z 20, nepříznivých pouze 8 z 20. Pravděpodobnost tažení červené koule vyjádříme poměrem 12/20 = 0,6, tedy 60 %.

c) Pravděpodobnost vytažení červené koule je větší než 80 %, právě když je pravděpodobnost vytažení modré koule menší než 20 %. Protože 20 % z 20 je 4, uvedený jev nastává právě v případě, když v bedně není žádná modrá koule, nebo je tam 1, nebo 2, nebo 3 modré koule.

d) Martina si s jistotou vytáhne červenou kouli, právě když v bedně nebude ani jedna modrá koule, to znamená, že červených koulí bude 20. Tuto situaci vyjadřuje hodnota pravděpodobnosti 20/20 = 1, to znamená 100 %.

3. a) Je to 50 %.

b) Pravděpodobnost, že barva vytažené koule bude modrá, je 0,3. Tedy pravděpodobnost, že modrá nebude, je 0,7, to znamená 70 %.

c) Zatím nevím nic o velikosti modrých koulí. Vím ale, že alespoň polovina koulí je velkých a alespoň dvě jsou malé. Tedy pravděpodobnost, že vytažená koule bude velká, je aspoň 50 % a ne více než 80 %. Mohou nastat dvě situace: buď budou obě možnosti stejně pravděpodobné (to nastane právě tehdy, když budou všechny modré koule malé), nebo bude pravděpodobnější vytažení velké koule (to nastane právě tehdy, když bude alespoň jedna z modrých koulí velká).

d) Z dané informace vím, že v bedně jsou 4 malé koule. Vím, že žádná červená není malá a obě zelené jsou malé. Tedy dvě modré koule jsou malé a jedna velká.

Komentář

1. U obou úloh jde o intuitivní vytváření představy o jistém jevu, nemožném jevu a pravděpodobném jevu a propojení s hodnotou pravděpodobnosti vyjádřenou v %.

2. a) Testuje formální pochopení situace, kdy jsou dva jevy stejně pravděpodobné. Diskuse odpovědí by měla vyústit v poznatek, že pravděpodobnost závisí na počtu koulí jedné a druhé barvy.

b) Správná odpověď na první otázku vyplyne z řešení úlohy a). Pokud není zatím zaveden výpočet klasické pravděpodobnosti, mohou žáci navrhovat způsoby výpočtu, učitel debatu usměrňuje a vede k výpočtu poměru (počet příznivých výsledků pokusu) : (počet všech možných výsledků pokusu).

c) Žáci si vyzkoušejí zpětný chod předchozího výpočtu obohacený o vztah nerovnosti.

d) Jde opět o zkušenost, že „jistý jev“ má hodnotu pravděpodobnosti 1, tj. 100 %.

✂ -------------------- ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **ÚSPĚŠNOST STŘELBY NA KOŠ**

U hráčů basketbalu se vedou statistiky úspěšnosti zásahu koše při střelbě. Tabulka ukazuje úspěšnost dvou hráčů u tří různých druhů střelby na koš:

Hráč	A	B
tříbodová střelba	25 %	40 %
střelba z pole	42 %	45 %
volné hody	78 %	80 %

a) U kterého druhu střelby je pravděpodobnější zásah koše než minutí koše u hráče A? Totéž řeš u hráče B.

b) U kterého druhu střelby je pravděpodobnější minutí koše než zásah koše u hráče A? Totéž řeš u hráče B.

c) U kterého hráče je pravděpodobnější, že při střelbě z pole dá koš? Odpověď zdůvodni.

d) U kterého hráče a druhu střelby je pravděpodobnost zásahu koše $\frac{4}{5}$? Odpověď dolož výpočtem.

e) U kterého hráče a druhu střelby je pravděpodobnost minutí koše $\frac{3}{4}$? Odpověď dolož výpočtem.

f) Pravděpodobnost zásahu koše při tříbodových hodech u hráče B je $\frac{2}{5}$ (40 %). Které z následujících tvrzení trenéra tuto informaci správně vyjadřuje?

A. Pokud bude hráč B házet alespoň pět tříbodových hodů, pak při druhém hodu určitě koš zasáhne, a tím získá tři body pro družstvo.

B. Bude-li hráč B mít tříbodový hod, je pravděpodobnost minutí koše větší než pravděpodobnost zisku tří bodů pro družstvo.

C. Pokud bude hráč B házet pět tříbodových hodů, pak máme jistotu, že dvakrát zasáhne koš a získá celkem šest bodů.

D. Protože pravděpodobnost zásahu je menší než $\frac{1}{2}$, nemáme žádnou naději, že hráč B při tříbodovém hodu dá koš.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) K tomu dochází tam, kde je pravděpodobnost zásahu koše větší, než 0,5 (50 %). U obou hráčů je to jen u volných hodů.

b) K tomu dochází tam, kde je pravděpodobnost zásahu koše menší, než 0,5 (50 %). U obou hráčů je to u tříbodové střelby a střelby z pole.

c) Správná odpověď: Hráč B, protože 42 < 45. Z toho ovšem neplyne, že z každých 100 pokusů hráč A uspěje 42krát a hráč B 45krát. Tento rozdíl se projeví až u velikého počtu pokusů obou hráčů.

d) Pravděpodobnost „čtyři z pěti" vyjádřena desetinným číslem je 0,8 a v % je 80 %. To nacházíme u hráče B při volných hodech.

e) Pravděpodobnost „tři ze čtyř" vyjádřena desetinným číslem je 0,75 a v % je 75 %. To nacházíme u hráče A při tříbodové střelbě.

f) Tvrzení A je nesprávné, u náhodného pokusu nelze s jistotou očekávat jeho výsledek, pokud se nejedná o jev jistý. Tvrzení B je správné. Tvrzení C je nesprávné. Zdůvodnění jako u A. Tvrzení D je nesprávné, překročení hranice pravděpodobnosti 0,5 neznamená nulovou naději na to, zda zásah koše nastane. Zásah koše je nemožný právě v tom případě, když je jeho pravděpodobnost rovna nule. Správně je pouze tvrzení B.

✂ ✂

9 CELEK A ČÁST, POMĚR

VSTUPNÍ ÚLOHA: **FILM DO FOTOAPARÁTU**

V době, kdy vaši rodiče byli dětmi, bylo běžné, že některé zboží bylo dlouhodobě nedostatkové, nedalo se koupit v obchodech, protože výroba nestačila a z ciziny se nedováželo. Z té doby pochází tato zpráva z Televizních novin. Redaktor řekl:

„V loňském roce chyběla v obchodech polovina barevných filmů do fotoaparátů. Máme pro diváky radostnou zprávu. V podniku vyrábějícím tyto filmy se v příštím roce navýší výroba o polovinu, takže barevných filmů do fotoaparátů bude na trhu dostatek."

Udělal někde redaktor matematickou chybu? Zdůvodni.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

Správná odpověď:

U obou výpočtů uvažoval polovinu z jiného základu (z jiné hodnoty). V prvním případě počítal polovinu z množství potřebného na trhu, v druhém případě počítal polovinu ze skutečně vyrobeného množství.

Jako správné odpovědi lze hodnotit např.: Polovina z potřebného množství není totéž co polovina z vyrobeného množství. – Jestliže chyběla polovina, vyrobili polovinu z potřebného množství. Když navýší tuto hodnotu o polovinu, pak vyrobili tři čtvrtiny potřebného množství. – Polovina z poloviny je čtvrtina, takže výrobu navýšili o čtvrtinu a vyrobili tři čtvrtiny potřebného množství.

Částečně správná odpověď: Oba údaje o počtu filmů uvedené v reportáži nejsou stejné (bez dalšího vysvětlení). – Poukázání na eventualitu, že za rok mohou být potřeby trhu jiné než letos.

Zcela nesprávná odpověď: Chyba viděná v jiném jevu; nematematická chyba v jiné části redaktorovy zprávy; tvrzení, že redaktor chybu neudělal.

✂ ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Poptávka po filmech do fotoaparátu byla loni 1 milion kusů. Vyrobila se však pouze polovina požadovaného množství. Kolik filmů se vyrobilo?
2. Loni se vyrobilo půl milionu filmů do fotoaparátu. Letos se výroba zvýší o polovinu. Kolik filmů se vyrobí letos?
3. Jestliže spojíme úlohy 1 a 2, dostaneme zadání: Loni byly potřeba na trhu 4 miliony paměťových karet. Dovezla se ale jen polovina požadovaného množství. Letos se doveze o polovinu paměťových karet více než (se dovezlo) vloni. Kolik karet se dovezlo vloni? Kolik karet se doveze letos? Bude letošní množství karet dostačující?
4. Loni se na jistou střední hotelovou školu hlásilo 270 uchazečů. Přijato však bylo o třetinu přihlášených méně. Letos se počet přijímaných uchazečů o třetinu navýší. Kolik uchazečů letos přijmou? Vyjádřete zlomkem, o jakou část by bylo letos potřeba navýšit počet přijímaných uchazečů, aby při stejném zájmu jako v loňském roce byli všichni uchazeči přijati?
5. Cena banánů loni kvůli ekonomické krizi klesla o jednu šestinu. O jakou část musí cena opět stoupnout, aby cena banánů byla stejná jako před krizí?
6. Během loňského roku se rozrostl počet ovcí v našem stádu o třetinu. Vlci však přes zimu zadávili tolik ovcí, že jejich stav je nyní stejný jako před rokem. Jakou část ovcí vlci přes zimu zadávili?
7. Cyklista jedoucí na kole nepůsobí svou váhou na obě kola stejně, protože sedlo je více vzadu, a tedy tlačí na zadní kolo více než na přední. Cyklista váží 60 kg. Jestliže je jeho váha při jízdě rozložena mezi přední a zadní kolo v poměru 2:3, jako vahou cyklista působí na zadní kolo?
8. V autobusu se řeší nerovnoměrné zatížení předních a zadních kol tím, že se na zadní nápravu přidá jeden pár pneumatik. Autobus pak má na přední nápravě dvě a na zadní čtyři pneumatiky. Po této úpravě jsou všechny pneumatiky stejně zatíženy. Jaký bude poměr zatížení přední a zadní nápravy?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

1. Půl milionu (tohle je opravdu lehké, ovšem je to příprava na úlohu č. 3).

2. Polovina z půl milionu je čtvrt milionu. Polovina milionu plus čtvrt milionu je tři čtvrtě milionu.

3. Loni 2 miliony, letos 3 miliony. Množství nebude dostačující (ačkoliv toto vlastně nevíme, pokud nevíme, jaká bude letos poptávka).

4. Loni přijato 180, letos 240, je třeba navýšit o 30 přijatých, tedy o jednu šestinu (ze základu 180).

5. O pětinu ceny banánů v ekonomické krizi. (Se slabšími žáky je praktické počítat s nějakou vymyšlenou konkrétní cenou, např. „původně banány stály 30 Kč".)

6. O čtvrtinu stáda rozrostlého před zimou. (Pro bystřejší žáky lze volit argumentaci: jestliže 1 celek vzrostl o třetinu, měl 4/3; jakým číslem je třeba násobit tyto 4/3, abychom opět dostali 1 celek? ... Tedy 4/3 · **?** = 1.)

7. 36 kg (60 kg rozdělit na 2 + 3 = 5 dílů)

8. 2 : 4, tedy 1 : 2

✂ ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **CYKLISTA**

Cyklista jedoucí na bicyklu nepůsobí svou váhou na obě kola stejně. Protože sedlo je více vzadu, tlačí na zadní kolo více než na přední.

Když se závodník Roman zvedne ze sedla „do stupaček", zatížení zadního kola se zmenší o jednu čtvrtinu. Závodníkova váha pak bude rozložena na obě kola v poměru 1 : 1.

a) V jakém poměru je rozložena váha závodníka Romana, jestliže sedí v sedle?

b) Když Roman sedí v sedle, které kolo trpí více nárazy na obrubníky chodníku nebo na kameny, přední nebo zadní? Vysvětli.

c) Závodník má své kolo rád a snaží se je šetřit. Proto, když se blíží k obrubníku, zvedne se ze sedla. Pomáhá tím svému kolu nebo ne? Vysvětli.

d) Jak bude celá tato úloha znít a jaké bude řešení a), pokud místo závodníka Romana na kole budeme mít závodníka Milana na tříkolce, ale všechno ostatní zůstane stejné?

Komentář. Úloha je zaměřena na poměr (procenta). V úloze se nepracuje s konkrétními hodnotami velikosti síly, jsou dány pouze relativní vztahy (čísla jako operandy). Je třeba porozumět a matematizovat situaci, např. pokud se odlehčí zadní kolo, o stejnou hodnotu se zatíží přední kolo.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

K úspěšnému vyřešení žák potřebuje znát, že:

– při jízdě ve stupačkách se zatížení zadního kola zmenší o ¼, takže zatížení zadního kola bude rovno ¾ zatížení původního.

– u cyklisty stojícího ve stupačkách je zatížení obou kol stejné, takže i zatížení předního kola bude rovno ¾ původního zatížení zadního kola.

– při stoupnutí do stupaček se zatížení předního kola zvětší o stejnou hodnotu, o kterou se sníží zatížení zadního kola. Zatížení předního kola se zvýší o ¼ původního zatížení zadního kola. Původní zatížení předního kola tak bylo ¾ – ¼ = ½ původního zatížení zadního kola.

Správné odpovědi

a) Původně byla kola bicyklu zatížena v poměru ½ : 1, tedy 1 : 2.

b) Nárazy více trpí zadní kolo, protože při větším zatížení je větší riziko, že se kolo prorazí. Předpokládáme, že se bicykl nezpomalí při nárazu předním kolem.

c) Závodník odlehčením zadního kola zmenšuje riziko jeho proražení. Sice tím více zatíží přední kolo a zvýší riziko proražení předního kola, toto riziko však není tak velké, protože zadní kolo je při běžné jízdě více zatížené než přední.

d) „Přepracované" zadání úlohy pro tříkolku bude znít: Když se závodník Milan zvedne ze sedla „do stupaček", zatížení zadního kola tříkolky se zmenší o jednu čtvrtinu. Závodníkova váha pak bude rozložena na všechna tři kola v poměru 1 : 1 : 1. V jakém poměru je rozložena váha závodníka Milana, jestliže sedí v sedle? K úspěšnému vyřešení této úlohy s tříkolkou žák potřebuje vědět, že

– při jízdě ve stupačkách se zatížení zadního kola zmenší o ¼, takže zatížení zadního kola bude rovno ¾ zatížení původního.
– u závodníka, stojícího ve stupačkách, je zatížení všech tří kol stejné, takže i zatížení předního kola bude rovno ¾ původního zatížení zadního kola.
– při stoupnutí do stupaček se zatížení předního kola zvětší o stejnou hodnotu, o kterou se sníží zatížení obou zadních kol. Zatížení předního kola se zvýší dvakrát o ¼, tedy o ½ původního zatížení zadního kola. Původní zatížení předního kola tak bylo ¾ – ½ = ¼ původního zatížení zadního kola.

Původně byla tříkolka zatížena v poměru ¼ : 1 : 1, tedy 1 : 4 : 4. Na předním kole spočívala váha pouhé devítiny zatížení tříkolky.

Kontrola

1. Zkontroluj správnost řešení otázky a) tím, že za původní zatížení zadního kola dosadíš 60 kg.

2. Zkontroluj správnost řešení úlohy tím, že dosadíš hmotnost závodníka 60 kg.

3. Zkouška správné odpovědi myšlenkovým pokusem:

a) Poměr zatížení obou kol vyšel 1 : 2, budeme uvažovat stejný poměr 2 : 4, s nímž se bude snadněji počítat. Zatížení zadního kola se poté zmenší o čtvrtinu, tedy o 1, zatížení předního kola se zvětší o 1. Zatížení obou kol bude pak 3 : 3, tedy stejné.

b) Poměr zatížení všech kol vyšel 1 : 4 : 4. Zatížení každého zadního kola se poté zmenší o čtvrtinu, tedy o 1, zatížení předního kola se zvětší o dvakrát 1, tedy o 2. Zatížení všech kol pak bude 3 : 3 : 3.

Poznámka

Kontrolní úlohy č. 1 a 2 lze zařadit jako přípravné k výstupní gradované úloze: stejné zadání, pouze další údaj navíc.

Přidáním údajů o konkrétní hmotnosti závodníka nebo zatížení kola do zadání výstupní úlohy lze tuto úlohu zjednodušit.

10 DÉLKA KRUŽNICE

VSTUPNÍ ÚLOHA: **PŮL ROKU NA ISS**

Mezinárodní vesmírná stanice ISS obíhá Zemi ve výšce 350 km nad jejím povrchem. Průměr Země je 12 750 km, její rovník má délku asi 40 000 km (3,14 · 12 750). Jeden oběh ISS kolem Země trvá 92 minut. Na ISS se každého půl roku střídají posádky kosmonautů. Vypočti přibližně celkovou dráhu, kterou každá z posádek stanice nalétá. Výsledek zaokrouhli na celé miliony kilometrů. Za π dosazuj 3,14.

(Zdroj: www.matzem.cz.)

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

Vypočteme délku jednoho oběhu: 3,14 · (12 750 + 700) km = 3,14 · 13 450 km = 42 233 km. Vyjádříme dobu obíhání v minutách:
6 (počet měsíců) · 30 (počet dnů) · 24 (hodin za den) · 60 minut = 259 200 minut. (Dobu obíhání v minutách můžeme také vypočítat např.: (365 : 2) · 24 · 60 minut = 262 800 minut apod. Pro různé doby obíhání budou různé počty oběhů.)

Vypočteme počet oběhů za půl roku: 259 200 : 92 ≐ 2 817. Vypočteme celkovou dráhu za půl roku:
2 817 · 42 233 = 118 970 361 km. Zaokrouhlíme na celé miliony: 119 milionů kilometrů.

Odpověď: Každá z posádek nalétá přibližně 119 milionů kilometrů.

Jiné řešení, které vychází ze změny délky kružnice odpovídající změně jejího průměru, lépe umožňuje přibližné výpočty. Vypočteme přibližně, o kolik je délka jednoho oběhu ISS delší než obvod Země:
3,14 · 700 km ≐ 3 · 700 km = 2 100 km.
Vypočteme přibližně kolik minut trvá půl roku: 6 · 30 · 24 · 60 min = 180 · 1440 min ≐ 200 · 1400 min = 280 000 min.
Vypočteme přibližně počet oběhů: 280 000 : 92 ≐ 280 000 : 100 = 2 800.
Vypočteme celkovou dráhu za půl roku 2 800 · (40 000 + 2 100) km ≐ 2 800 · 42 000 km = 117 600 000 km.
Zaokrouhlíme na miliony: Posádka nalétá 118 milionů kilometrů.

✂ ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Cvičitel vodí koně ve výběhu na oprati dlouhé 8 metrů tak, že sám stojí na místě. Odhadni zpaměti, kolik kilometrů ujde kůň při 30 okruzích.

2. Eva chodí každý den pěšky do školy. Přitom prochází zatáčkou ve tvaru čtvrtkružnice. Vždy přejde na chodník na vnitřní straně zatáčky, aby si zkrátila cestu. Vozovka je v zatáčce široká 9 metrů, poloměr zatáčky v místě vnitřního chodníku je 30 metrů. (Šířka chodníku je zanedbána.)

a) Vypočti, kolik metrů Eva ušetří oproti chůzi po chodníku na vnější straně zatáčky.

b) Ušetřila by více, kdyby byl vnitřní poloměr zatáčky dvakrát větší, tedy 60 metrů? Zdůvodni svou odpověď.

3. Evropská meteorologická družice Meteosat-8 je stacionární, to znamená, že oběhne kolem Země za stejnou dobu, za kterou se Země otočí kolem své osy. Družice obíhá ve výšce 35 800 km nad povrchem Země. Na oběžné dráze se nachází od 28. srpna 2002. Kolik kilometrů nalétala do 28. srpna 2011? Výsledek zaokrouhli na miliony kilometrů. (Zdroj: www.matzem.cz)

4. Dlouhý, Široký a Bystrozraký se ocitli na neznámé planetě. Byla to planeta poměrně malá, mnohem menší než naše Země. Byla také úplně kulatá a její průměr byl přibližně 980 km. S našimi známými kamarády cestoval i pták Ohnivák, o kterém se ví, že je to dobrý letec a že zásadně létá jako doprovod 100 metrů nad hlavou svých spoluputovníků. Pohyb planety zanedbávejme.

a) Dlouhý se hned rozhodl protáhnout své dlouhé nohy a planetu prozkoumat. Bystrozraký se k němu přidal, nechal se vysadit Dlouhému na rameno a vyrazili. Vzali si to rovnou za nosem a obešli celou planetku po jejím rovníku za necelých sedm hodin. Kolik kilometrů ušel Dlouhý při průzkumu?

b) Když se vrátili z průzkumu, pták Ohnivák se nechal slyšet, že toho uletěl za den mnohem více než ušel Dlouhý s Bystrozrakým na rameni. Nato se ozval Bystrozraký, že on tedy také vlastně urazil větší vzdálenost, než Dlouhý. Souhlasíš s Ohnivákem? Zdůvodni. Souhlasíš s Bystrozrakým? Zdůvodni.

c) Která z níže uvedených informací nám postačí k tomu, abychom zjistili, jakou vzdálenost uletěl během oné průzkumné cesty Ohnivák? Vyber všechny možnosti.

A. Ohnivák letěl průměrnou rychlostí 440 km/h.

B. Dlouhý s Bystrozrakým na ramenou měří 4 m.

C. Rozpětí křídel Ohniváka je 4,2 m.

D. Planeta se nachází 459 234 000 km od své hvězdy.

d) Jak bychom měli zaokrouhlit vzdálenost, kterou uletěl pták Ohnivák a kterou ušel Dlouhý, aby to vypadalo, že oba urazili stejnou vzdálenost?

e) Černokněžník, jenž drží v zajetí princeznu, vzkázal našim hrdinům, že jim ji vydá, jen pokud se jim podaří do půlnoci obejít planetu 3 330krát. Kolik kilometrů musí ujít do půlnoci Dlouhý? Kolik musí uletět pták Ohnivák, pokud chce Dlouhého doprovázet?

f) Jak se změní odpověď na otázku d) poté, co naši hrdinové splní Mágův úkol?

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY

1. Odhadem ujde kůň 1,5 km.

2. a) Ušetří přibližně 14 m. **b)** Ušetří také 14 m. Zdůvodnění výpočtem: Vnitřní chodník (3,14 · 120) : 4 = 94,2 m, vnější chodník (3,14 · 138) : 4 = 108,3 m, rozdíl asi 14 m. Zdůvodnění úvahou: Když se průměr kružnice zvětší o 1 m, zvětší se její délka o 3,14 m. Změna délky kružnice je 3,14 násobek změny jejího průměru.

3. Družice nalétala 871 milionů kilometrů.

4. Ve výpočtech se počítá s π = 3,14.

a) Dlouhý ušel 3 077 km.

b) Souhlasím s Ohnivákem, uletěl větší vzdálenost, protože se pohyboval po kružnici o větším průměru. Ze stejného důvodu souhlasím i s Bystrozrakým.

c) Správná odpověď je B.

d) Obě vzdálenosti bychom měli zaokrouhlit na desítky kilometrů.

e) Dlouhý musí ujít 10 247 076 km, Ohnivák uletěl 10 249 167 km.

f) Tentokrát bychom měli vzdálenosti zaokrouhlit na desítky tisíc kilometrů, tj. na 10 250 000 km.

Komentář

1. Žáci odhadují 3,14 násobek průměru 16 m na 50 m (například 3 · 16 = 48), násobí 30 okruhy a převádějí na kilometry.

2. a) Výpočet délky čtvrtkružnice pro menší průměr (3,14 · 60) : 4 = 47,1 m a větší průměr [3,14 · (60 + 18)] : 4 = 61,2 m. Rozdíl délek je asi 14 m. **b)** Zdůvodnění je možné výpočtem podle modelu v úloze a) – viz výsledek. Vhodnější je přivést žáky k úvaze například otázkou: O kolik se zvětší délka kružnice, když se její průměr zvětší o 1 m? Závisí zvětšení na původním průměru kružnice? Někteří žáci mohou argumentovat úpravou výpočetního vztahu
3,14 · (120+18) = 3,14 · 120 + 3,14 · 18, ze které je zřejmé, že po výpočtu rozdílu délek zůstane pouze člen
3,14 · 18 a že tedy na velikosti původního průměru změna délky kružnice nezávisí.

3. V úloze žáci počítají s velkými čísly. Jde o výpočet délky jednoho oběhu 3,14 · (12 750 + 2 · 35 800) km = 264 859 km a počtu oběhů, který se rovná počtu dní za 9 let, to je 9 · 365 = 3 285. Celková dráha je 264 859 · 3 285 = 870 061 815 km, po zaokrouhlení 870 milionů kilometrů. (Přestupné roky neuvažujeme.)

4. a) Jde o výpočet délky kružnice o průměru 980 km, tj. 980 · π. Výsledek bude záviset na zvoleném zaokrouhlení hodnoty π (3 077,2 km pro hodnotu 3,14).

b) Pták Ohnivák má pravdu – opravdu uletěl delší vzdálenost, protože se pohyboval po kružnici o větším průměru. Bystrozraký má podle stejného argumentu také pravdu, pokud předpokládáme, že se pohyboval po kružnici vedoucí ve výšce ramen Dlouhého. Ačkoli sám tuto vzdálenost nešel, „urazil" ji.

c) Podle zadání létá Ohnivák 100 m nad hlavou souputníka, pro správný údaj o průměru jeho trajektorie potřebujeme tedy znát informaci o výšce Dlouhého a Bystrozrakého.

d) Určíme, jakou vzdálenost uletěl Ohnivák: průměr kružnice, po které letěl, určíme tak, že k průměru planety připočteme ještě dvakrát (neboť jde o průměr, ne pouze poloměr) vzdálenost Ohniváka od povrchu planety, tj. 2 · 104 m = 208 m = 0,208 km. Pták Ohnivák tedy urazí dráhu 980,208 · π = 3 077,85 km. Obě vzdálenosti by tedy musely být zaokrouhleny na desítky kilometrů: 3 080 km.

e), f) Počítání s velkými čísly, procvičování čtení velkých čísel. V úloze 4 se postupně objevují všechny požadované dovednosti: výpočet (odhad) délky kružnice, změna délky kružnice při změně jejího průměru, práce s velkými čísly, zaokrouhlování.

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **MARS**

Náš vesmírný soused, planeta Mars, má průměr 13 600 km a obíhá kolem Slunce ve vzdálenosti o polovinu větší než Země. Mars má dva měsíce: Phobos a Deimos. Phobos obíhá planetu Mars ve vzdálenosti 9 450 km od jejího povrchu a jeden oběh mu trvá 0,3 pozemského dne. Deimos obíhá ve vzdálenosti 23 550 km od povrchu planety a jeden oběh mu trvá 1,26 dne. Zatímco Měsíc oběhne Zemi jednou, Phobos vykoná 93 oběhů a Deimos 22 oběhů Marsu.

a) Který z měsíců uletí víc kilometrů při jednom svém oběhu? Odpověď zdůvodni a odhadni, kolik kilometrů činí rozdíl.

b) Který z měsíců nalétá víc milionů kilometrů za dobu oběhu našeho Měsíce? Odpověď dolož přibližným výpočtem.

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

a) Při jednom oběhu uletí více kilometrů Deimos, protože obíhá po kružnici s větším průměrem než Phobos. Každý kilometr, o který se zvětší průměr kružnice, znamená zvětšení délky kružnice o 3,14 km. Protože průměr dráhy Deimose je asi o 30 000 km větší, bude jeho oběh odhadem o 3 · 30 000 km = 90 000 km delší.

b) Jeden oběh Phobose je dlouhý 3,14 · (13 600 + 2 · 9 450) km = 3,14 · 32 500 km ≐ 3 · 33 000 = 99 000 km. Při 93 obězích uletí Phobos dráhu 99 000 · 93 km ≐ 100 000 · 90 = 9 000 000 km. Jeden oběh Deimose je dlouhý 3,14 · (13 600 + 2 · 23 550) km = 3,14 · 60 700 km ≐ 3 · 61 000 km = 183 000 km. Při 22 obězích uletí Deimos 183 000 km · 22 ≐ 200 000 · 20 km = 4 000 000 km. Více milionů kilometrů nalétá Phobos (asi 9 milionů) než Deimos (asi 4 miliony).

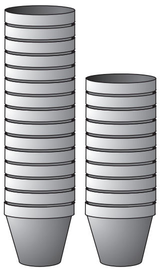
11 ROVNICE

VSTUPNÍ ÚLOHA: **KVĚTINÁČE**

V obchodě vedle sebe stojí dva sloupce stejných květináčů. Výška sloupce tvořeného 10 květináči je 45 cm. Výška sloupce tvořeného 15 květináči je 60 cm.

a) Jak vysoký je jeden květináč?

b) Kolik květináčů tvoří sloupec o výšce 51 cm?



✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

a) Z podmínek umíme zjistit, že 5 květináčů zvýší výšku sloupce o 15 cm. To znamená, že jeden květináč zvýší výšku sloupce o 3 cm. Deset květináčů zvýší sloupec o 30 cm. Tedy základ květináče je 15 cm (45 – 30) a část, která zvyšuje výšku sloupce, měří 3 cm. Celý květináč tedy měří 18 cm.

Úlohu lze vypočítat i pomocí rovnic. Víme, že květináč se skládá jakoby ze dvou částí, a to základu, ten označíme z, a z okraje, ten označíme o. Informace „výška sloupce tvořeného 10 květináči je 45 cm" znamená, že základ z a 10 okrajů o měří 45 cm. Analogicky postupujeme i při následující informaci „výška sloupce tvořeného 15 květináči je 60 cm" a dostaneme soustavu rovnic o dvou neznámých:

$$z + 10 \cdot o = 45$$
$$\underline{z + 15 \cdot o = 60}$$
$$5 \cdot o = 15 \Rightarrow o = 3, \text{ dosadíme do původní rovnice}$$
$$z + 10 \cdot 3 = 45$$
$$z + 30 = 45$$
$$z = 15$$

Květináč měří 18 cm.

b) Úlohu lze počítat i pomocí soustavy rovnic: $k + 9\,o = 45$ a $k + 14\,o = 60$, kde k je výška celého květináče a o je výška okraje. Když už víme, že květináč měří celkem 18 cm a každý další vložený květináč změní výšku o 3 cm, můžeme sestavit rovnici $15 + 3x = 51 \Rightarrow x = 12$. Tedy aby sloupec měřil 51 cm, potřebuji na sebe naskládat 12 květináčů.

✂ -- ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Bydlíme ve věžáku. Z ulice k vchodovým dveřím domu vedou 3 schody a z jednoho patra do druhého vede na schodišti 11 schodů. Kolik schodů vede z ulice

a) do přízemí?

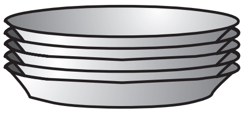
b) do prvního patra?

c) do sedmého patra?

d) do čtrnáctého patra?

e) Kolik pater má náš věžák? Všech schodů v domě včetně těch tří před domem, je skoro 180.

2. Tatínek uklízel umyté nádobí. Dal na sebe 5 stejných misek. Sloupec, který z misek vytvořil, má výšku 9 cm. Každá z misek má výšku 7 cm. O kolik se zvýší sloupec, přidám-li na něj 2 misky?



3. Martina doma staví hradby z plastových pohárků. Zjistila, že 50 takových pohárků vložených do sebe měří 12 cm a 10 takových pohárků měří 8 cm. Kolik pohárků potřebuje na stavbu sloupce vysokého

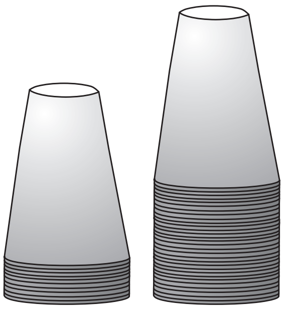
a) 9 cm?

b) 10 cm?

c) 11 cm?

d) 13 cm?

e) 5 cm?



4. Výška sloupce, který je vytvořen 5 malými květináči, je 27 cm. Výška sloupce, který je vytvořen 11 malými květináči, je 39 cm. Výška sloupce, který je vytvořen 13 velkými květináči a 4 malými květináči, je 86 cm. Výška sloupce, který je vytvořen 5 velkými květináči a 9 malými květináči, je 56 cm. Malý květináč zapadne do velkého tak, že jejich okraje jsou v jedné rovině. Kolik měří velký květináč?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

1. a) 3 schody; **b)** 3 schody do přízemí a 11 schodů z přízemí do prvního patra, tj. 14 schodů; **c)** 3 schody do přízemí a 11 · 7 schodů z přízemí do sedmého patra, tj. 80 schodů; **d)** 3 schody do přízemí a 11 · 14 schodů z přízemí do sedmého patra, tj. 157 schodů; **e)** $3 + 11x < 180 \Rightarrow 11x < 177 \Rightarrow x < 16{,}09 \Rightarrow x = 16$. Náš věžák má 16 pater.

2. Jedna miska měří 7 cm, a když na ni položím další 4, sloupec se zvýší o 2 cm. To znamená, že jedna miska zvýší sloupec o 0,5 cm, dvě misky o 1 cm.

Úlohu lze vypočítat i pomocí rovnic. Vím, že se miska skládá jakoby z dvou částí, základu x a okraje y. Můžeme napsat: $x + y = 7$, $x + 5y = 9 \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = ½$.

Přidáme-li dvě misky, sloupec se zvýší o 1 cm.

3. Jestliže 50 pohárků měří 12 cm a 10 jich měří 8 cm, to znamená, že 40 pohárků zvýší výšku o 4 cm, tedy jeden pohárek o 0,1 cm. Dále můžeme usoudit, že když 10 pohárků zvýší výšku o 1 cm, tak základ pohárku měří 7 cm (8 – 1), a tedy pohárek samotný měří 7,1 cm.

Úlohu lze vypočítat i pomocí rovnic. Víme, že se pohárek skládá jakoby ze dvou částí, základu x a okraje y. Dále víme, že 50 takových pohárků vložených do sebe má výšku 12 cm, tedy $x + 50y = 12$, a 10 takových pohárků vložených do sebe má výšku 8 cm, tedy $x + 10y = 8 \Rightarrow 40y = 4 \Rightarrow y = 0{,}1$. Dosadíme do původní rovnice: $x + 10 \cdot 0{,}1 = 8 \Rightarrow x = 7$.

a) 20 pohárků; **b)** 30 pohárků; **c)** 40 pohárků; **d)** 60 pohárků; **e)** nelze, protože jeden pohárek měří 7,1 cm.

4. Zjistíme, o kolik zvyšuje sloupec malých květináčů další malý květináč. Víme, že 5 malých květináčů má výšku 27 cm a 11 malých květináčů má výšku 39 cm. To znamená, že 6 květináčů zvýší sloupec o 12 cm (39 – 27), tedy jeden květináč o 2 cm. Dále víme, že sloupec 13 velkých a 4 malých květináčů má výšku 86 cm. Malý květináč přesně zapadne do velkého, tedy když vložíme do velkého květináče 4 malé, sloupec se zvýší o 3 okraje malých květináčů, tedy o 6 cm. Z toho vyplývá, že 13 velkých květináčů má výšku 80 cm. Podobně postupujeme i při poslední podmínce a zjistíme, že 5 velkých květináčů má výšku 40 cm, 8 velkých květináčů zvýší sloupec o 40 cm, tedy jeden velký květináč o 5 cm. Velký květináč a čtyři okraje měří 40 cm, tedy velký květináč má výšku 20 cm.

Komentář

Cílem úloh je zkoumání lineárních zobrazení, zkoumání vztahu mezi koeficientem lineárního členu a růstem (resp. klesáním) funkce, zkoumání významu absolutního členu. Všechny úlohy kromě výstupní lze řešit nápaditě i tabulkou závislosti. Blíže se podíváme na úlohu o miskách.

n	1	2	3	4	5	6	7
f(n)	7				9		

Žák přímo vhledem dopíše scházející čísla 7½, 8, 8½. Z tabulky je ihned vidět, že koeficient u lineárního členu je ½. Tímto nestandardním postupem získává žák hlubší poznání toho, že lineární funkce a přímá úměra spolu úzce souvisejí. Ve výstupní úloze o taxi se dostáváme dokonce do trojrozměrného prostoru. Zde se vzhledem k netriviálním výsledkům a obtížnosti zadání nejvíce vyplatí převést si zadání do soustav tří rovnic. Jiný postup možný je, ale vzhledem k množství proměnných je opravdu náročný. Úlohy o květináčích navozují i představu aritmetických posloupností, kdy sloupec vystavěný z k květináčů představuje k-tý člen aritmetické posloupnosti, okraje květináčů představují diferenci aritmetické posloupnosti. Důležité je nechat žáky mezi sebou diskutovat, aby získali správnou představu, o čem se v zadání mluví, a aby prodiskutovali případné nejasnosti, jako například, jestli má věžák i sklep.

✂ ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **TAXI**

a) Účet za dopravu taxislužbou v Zedlandu je dán jako součet následujících položek: jednotná sazba *N* za nastoupení každé osoby do taxi a cena *C* za 1 km vynásobená počtem ujetých kilometrů. V Zedlandu se platí zedy. V uplynulém měsíci jsem použila taxislužbu dvakrát. Při první jízdě byl účet 150 zedů. Trasa byla 10 km dlouhá. Při druhé jízdě byl účet 104 zedů. Jela jsem spolu s kamarádem. Trasa byla 6 km dlouhá. Kolik se účtuje za nástupné a kolik za jeden kilometr jízdy taxislužbou v Zedlandu?

b) Účet za dopravu u taxislužby, kterou používám, je dán jako součet následujících položek: jednotná sazba *N* za nastoupení každé osoby do taxi, cena *C* za 1 km vynásobená počtem ujetých kilometrů a sazba *B* Kč za každou ukončenou minutu čekání. V uplynulém měsíci jsem použila taxislužbu třikrát. Při první jízdě byl účet 304 Kč. Taxi na mne čekalo 5 minut a trasa byla 10 km dlouhá. Při druhé jízdě byl účet 203,40 Kč. Taxi na mne čekalo 4 minuty a trasa byla 6 km dlouhá. Při třetí jízdě byl účet 224,50 Kč. Jela jsem spolu s kamarádem. Taxi na nás čekalo 5 minut a trasa byla 5 km dlouhá. Kolik se účtuje za nástupné, čekání a za jeden kilometr jízdy?

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

ŘEŠENÍ

a) Úlohu lze převést na soustavu rovnic o dvou neznámých: *n* bude znázorňovat nástupné, *c* poplatek za 1 km:

$$\begin{aligned} n + 10c &= 150 \\ \underline{2n + 6c} &\underline{= 104} \\ 7c &= 98 \Rightarrow c = 14 \\ n + 10 \cdot 14 &= 150 \Rightarrow n = 10 \end{aligned}$$

V Zedlandu se za nástup do taxi platí 10 zedů a 1 km jízdy stojí 14 zedů.

b) Úlohu lze převést na soustavu rovnic o třech neznámých: *n* – nástupné, *c* – čekací poplatek za minutu a *b* – poplatek za 1 km jízdy.

$$\begin{aligned} n + 5c + 10b &= 304 \\ n + 4c + 6b &= 203{,}40 \\ 2n + 5c + 5b &= 224{,}50 \\ n &= 40 \text{ Kč},\ c = 5 \text{ Kč},\ b = 23{,}90 \text{ Kč} \end{aligned}$$

✂ -- ✂

12 PRÁCE S DATY, DESETINNÁ ČÍSLA, ZAOKROUHLOVÁNÍ

VSTUPNÍ ÚLOHA: **NÁRŮST HMOTNOSTI DĚTÍ**

Paní Hrubá učí v mateřské škole. Má třídu pětiletých dětí. Její syn Mirek jí rád pomáhá, když děti měří a váží. Mirek na internetu našel informaci:

Dítě od 4 do 5 let zvýší svoji hmotnost 1,2krát.

Rozhodl se tuto informaci prověřit. Vyhledal si hmotnosti šesti matčiných žáků z minulého roku, když jim byly 4 roky:

Anna (17,2 kg), Bára (18,0 kg), Cyril (20,1 kg),
Dan (17,6 kg), Eva (15,7 kg), Filip (16,9 kg).

Vypočítal, kolik by každé z těchto dětí mělo podle horního pravidla vážit letos. Výsledky zaokrouhlil na jedno desetinné místo. Pak tyto předpovědi porovnal s hodnotami, které letos naměřili:

Anna (21,1 kg), Bára (21,6 kg), Cyril (23,9 kg),
Dan (21,1 kg), Eva (18,5 kg), Filip (20,8 kg).

Udělej všechny výpočty, které udělal Mirek. Rozhodni, zda je informace, kterou našel Mirek na internetu, spolehlivá.

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

Data evidujeme tabulkou, kde jsou všechna čísla v kilogramech.

První dva číselné sloupce uvádějí naměřená data, další tři data vypočtená.

Ve třetím sloupci jsou 1,2násobky čísel prvního sloupce a ve čtvrtém sloupci jsou tato čísla zaokrouhlena na jedno desetinné místo. Číslo v posledním sloupci je rozdíl „naměřené letos" – „předpověď". Absolutní hodnoty těchto rozdílů jsou čísla malá. To značí, že pro šestici měřených žáků je informace z internetu dosti spolehlivá.

	Naměřené		1,2krát „loni"	Předpověď	Rozdíl
	loni	letos			
A	17,2	21,1	20,64	20,6	–0,5
B	18,0	21,6	21,60	21,6	0,0
C	20,1	23,9	24,12	24,1	+0,2
D	17,6	21,1	21,12	21,1	0,0
E	15,7	18,5	18,84	18,8	+0,3
F	16,9	20,8	20,28	20,3	–0,5

Komentář

Z hlediska motivace i hloubky prožití úlohy žáky výrazně přispěje podobné měření a zaokrouhlování, které třída sama uskuteční. Tabulku jako nástroj na organizaci dat objeví třída. Žáci vytvoří různé tabulky a diskuse o výhodách či nevýhodách jednotlivých tabulek dá žákům hlubší vhled do techniky organizace dat. Zaokrouhlování je operace, která vyžaduje jak nácvik, tak porozumění.

✂ -- ✂

DALŠÍ ÚLOHY

Označení. Znak x^* znamená: číslo x zaokrouhlené na desetiny, například $4{,}29^* = 4{,}3$.
Čteme: Číslo 4,29 zaokrouhlené na desetiny se rovná číslu 4,3. Pětku zaokrouhlujeme nahoru.

1. Najdi 2,156*; 7,545*; 0,94*; 39,94*; 39,96*; 40,03*; 40,049* ; 75,5432*.
2. Najdi $(\frac{1}{2})^*$; $(\frac{7}{2})^*$; $(\frac{1}{3})^*$; $(\frac{2}{3})^*$; $(\frac{5}{3})^*$; $(\frac{11}{4})^*$; $(\frac{2}{7})^*$; $(\frac{3}{7})^*$; $(\frac{5}{11})^*$.
3. Najdi $(\frac{1}{2} - 0{,}1)^*$; $(\frac{7}{2} - 0{,}01)^*$; $(\frac{1}{3} + 0{,}2)^*$; $(\frac{2}{3} - 0{,}02)^*$; $(\frac{3}{7} + 0{,}03)^*$.
4. Najdi $(\sqrt{2})^*$; $(0{,}04 + \sqrt{2})^*$; $(\sqrt{2} - 0{,}71)^*$; $(\sqrt{3} + 0{,}02)^*$; $(\sqrt{3} + 0{,}018)^*$.
5. Najdi $(\sqrt{10})^*$; $(\sqrt{17})^*$; $(\sqrt{26})^*$; $(\sqrt{37})^*$; $(\sqrt{50})^*$; $(\sqrt{65})^*$; $(\sqrt{82})^*$; $(\sqrt{101})^*$.
6. Lumír tvrdí, že pro každé přirozené číslo $n > 10$ je $[\sqrt{(n^2 + 1)}]^* = n$. Má pravdu?
7. Najdi $(\sqrt{8})^*$; $(\sqrt{15})^*$; $(\sqrt{24})^*$; $(\sqrt{35})^*$; $(\sqrt{48})^*$; $(\sqrt{63})^*$; $(\sqrt{80})^*$; $(\sqrt{99})^*$.
8. Lada tvrdí, že pro každé přirozené číslo $n \geq 11$ je $[\sqrt{(n^2 - 1)}]^* = n$. Má pravdu?

9. Zjisti, pro která přirozená čísla n
a) je $[\sqrt{(n+1)} - \sqrt{(n)}]^* = 0$;
b) je $\{[\sqrt{(n+1)} - \sqrt{(n)}] : 10\}^* = 0$.

10. Zjisti, pro která x je
a) $x^* = 0{,}5$;
b) $(0{,}01 + x)^* = 0{,}5$;
c) $(x - 0{,}02)^* = 2{,}5$.

11. Zjisti, pro která x je
a) $(2 \cdot x)^* = 1{,}0$;
b) $(x \cdot 1{,}25)^* = 2{,}3$;
c) $(1{,}1 \cdot x)^* = 2{,}2$;
d) $(x \cdot 1{,}25 - 0{,}23)^* = 2{,}5$.

Označení. Znak $x^{\sim}$ znamená čislo x zaokrouhlene na celá čísla, například $4{,}2^{\sim} = 4$. Čteme: Číslo 4,2 zaokrouhlene na celá čísla se rovna číslu 4. Pětku zaokrouhlujeme nahoru.

12. Najdi čísla x, y tak, aby bylo $x^{\sim} + y^{\sim} = 5$ a zároveň $(x + y)^{\sim} = 6$.

13. Najdi čísla x, y, z tak, aby bylo $x^{\sim} + y^{\sim} + z^{\sim} = 5$ a zároveň $(x + y + z)^{\sim} = 7$.

14. Najdi čísla x, y tak, aby bylo $x^{\sim} = y^{\sim}$ a zároveň $(x - y)^{\sim} = 1$.

15. Najdi čísla x, y tak, aby bylo $x^{\sim} \cdot y^{\sim} = 3$ a zároveň číslo $(x \cdot y)^{\sim}$ bylo rovno
a) 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4; **e)** 5.

16. Ceny zboží v našem nákupním středisku jsou v desítkách haléřů. Například houska stojí 3,40 Kč a kobliha 8,70 Kč. U pokladny se pak všechny položky nákupu sčítají a výsledek se zaokrouhlí na celé koruny.

a) Lenka si koupila ráno jednu housku, v poledne další housku a odpoledne třetí housku. Matylda si hned ráno koupila tři housky. Kolik která za tři housky zaplatila?

b) Šest dívek si chce koupit 6 koblih po 8,70 Kč. Dohromady mají 51 Kč. Nela tvrdí, že jim to nestačí, protože 6 · 8,70 Kč = 52,20 Kč. Olina tvrdí, že nákup lze pořídit za 51 Kč. Má Olina pravdu?

c) Pavel si do nákupního košíku dal tři rohlíky po 3,60 Kč, jeden jogurt za 9,30 Kč. Na nákup má 80 Kč a chce si ještě koupit co nejvíc koblih po 8,70 Kč. Kolik těch koblih bude a kolik Pavel za nákup zaplatí?

17. a) U které dívky ze vstupní úlohy byl rozdíl hodnot „předpověď“ – „naměřené letos“ nejmenší?
b) U kterého hocha byl největší?

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

Prvních patnáct úloh je věnovaných získávání vhledu do desetinných čísel.

1. $2{,}156^* = 2{,}2$; $7{,}545^* = 7{,}5$; $0{,}94^* = 0{,}9$; $39{,}94^* = 39{,}9$; $39{,}96^* = 40{,}0$; $40{,}03^* = 40{,}0$; $40{,}049^* = 40{,}0$; $75{,}5432^* = 75{,}5$.
Zaokrouhlení nejprve na setiny a pak na desetiny ($7{,}545 \to 7{,}55 \to 7{,}6$) může dát jiný výsledek než přímé zaokrouhlení na desetiny ($7{,}545 \to 7{,}5$).

2. $(\frac{1}{2})^* = 0{,}5$; $(\frac{7}{2})^* = 3{,}5$; $(\frac{1}{3})^* = 0{,}3$; $(\frac{2}{3})^* = 0{,}7$; $(\frac{5}{3})^* = 1{,}7$; $(\frac{11}{4})^* = 2{,}8$;
$(\frac{2}{7})^* = 0{,}3$; $(\frac{3}{7})^* = 0{,}4$; $(\frac{5}{11})^* = 0{,}5$.

3. $(\frac{1}{2} - 0{,}1)^* = 0{,}4$; $(\frac{7}{2} - 0{,}01)^* = 3{,}5$; $(\frac{1}{3} + 0{,}2)^* = 0{,}5$; $(\frac{2}{3} - 0{,}02)^* = 0{,}6$;
$(\frac{3}{7} + 0{,}03)^* = 0{,}5$.

4. Tato i další úlohy předpokládají, že žáci již znají odmocniny a mají k dispozici kalkulačku, popř. tabulky. $(\sqrt{2})^* = 1{,}4$; $(0{,}04 + \sqrt{2})^* = 1{,}5$; $(\sqrt{2} - 0{,}71)^* = 0{,}7$; $(\sqrt{3} + 0{,}02)^* = 1{,}8$; $(\sqrt{3} + 0{,}018)^* = 1{,}8$.

5. $(\sqrt{10})^* = 3{,}2$; $(\sqrt{17})^* = 4{,}1$; $(\sqrt{26})^* = 5{,}1$; $(\sqrt{37})^* = 6{,}1$; $(\sqrt{50})^* = 7{,}1$; $(\sqrt{65})^* = 8{,}1$; $(\sqrt{82})^* = 9{,}1$; $(\sqrt{101})^* = 10{,}0$.

6. Pomocí série konkrétních výpočtů pro $n = 10, 11, 12, \ldots$ žáci zjistí, že Lumír má pravdu. Výjimečně zdatný žák dokáže, že pro $n \geq 10$ je $\sqrt{(n^2 + 1)} < n + 0{,}05$, tj. $n^2 + 1 < n^2 + n \cdot 0{,}1 + 0{,}0025$. Poslední nerovnost je pro $n \geq 10$ evidentně splněná.

7. $(\sqrt{8})^* = 2{,}8$; $(\sqrt{15})^* = 3{,}9$; $(\sqrt{24})^* = 4{,}9$; $(\sqrt{35})^* = 5{,}9$; $(\sqrt{48})^* = 6{,}9$; $(\sqrt{63})^* = 7{,}9$; $(\sqrt{80})^* = 8{,}9$; $(\sqrt{99})^* = 9{,}9$.

8. Lada má pravdu. Podobně jako u úlohy 6 je zde $\sqrt{(n^2 - 1)} > n - 0{,}05$, tj. $n^2 - 1 > n^2 - n \cdot 0{,}1 + 0{,}0025$. Poslední nerovnost je pro $n \geq 11$ evidentně splněná.

9. Pro všechna přirozená čísla
a) $n \geq 100$.
b) n kromě nuly, pokud nulu počítáme do přirozených čísel.

10. a) Jsou to všechna x, pro která $0{,}45 \leq x < 0{,}55$. Například čísla $x = 0{,}5444$, nebo $x = \frac{5}{11}$. Jsou to všechna x z polouzavřeného intervalu $<0{,}45 ; 0{,}55)$; **b)** $(0{,}01 + x) \in <0{,}45 ; 0{,}55)$, a proto $x \in <0{,}44 ; 0{,}54)$;
c) $(x - 0{,}02) \in <2{,}45 ; 2{,}55)$, a proto $x \in <2{,}47 ; 2{,}57)$.

11. a) $(2 \cdot x)^* = 1{,}0 \Leftrightarrow 2x \in <0{,}5 ; 1{,}05) \Leftrightarrow x \in <0{,}25 ; 0{,}525)$; **b)** $x \in <1{,}8 ; 1{,}88)$;
c) $x \in <\frac{43}{22} ; \frac{45}{22})$; **d)** $(x \cdot 1{,}25 - 0{,}23)^* = 2{,}5 \Leftrightarrow (x \cdot 1{,}25 - 0{,}23) \in <2{,}45 ; 2{,}55) \Leftrightarrow$
$x \cdot 1{,}25 \in <2{,}68 ; 2{,}78) \Leftrightarrow x \in <2{,}144 ; 2{,}224)$

12. Například $x = 2{,}4$ a $y = 3{,}3$.

13. Taková čísla neexistují.

14. Například $x = 3{,}4$ a $y = 2{,}6$.

15. Například **a)** $x = 0{,}5$ a $y = 2{,}5$; **b)** $x = 0{,}6$ a $y = 3$; **c)** $x = 1$ a $y = 3$; **d)** $x = 1{,}2$ a $y = 3$; **e)** $x = 1{,}4$ a $y = 3{,}4$.

16. a) Lenka za 3 housky platila 9 Kč, Matylda 10 Kč.
b) Olina má pravdu. Stačí kupovat koblihy po dvou. Dvojice koblih stojí 17,40 Kč, po zaokrouhlení 17 Kč. Za tři takové nákupy dají dívky $3 \cdot 17$ Kč = 51 Kč.
c) Když Pavel nakoupí zboží v jediném nákupu, bude mít 6 koblih a zaplatí 72 Kč. Koblihy stojí 52,20 Kč, rohlíky 10,80 Kč, jogurt 9,30 Kč. Celkem 72,30 Kč. Zaplatí tedy 72 Kč. Když ale Pavel rozloží zboží do čtyř nákupů, koupí 7 koblih. Za třikrát po dvou koblihách zaplatí 51 Kč, zbytek v jednom nákupu bude stát 29 Kč. Celkem zaplatí 80 Kč.

17. a) U Anny je uvedený rozdíl nejmenší: 20,6 kg – 21,1 kg = –0,5 kg.
b) U Cyrila je uvedený rozdíl největší: 24,1 kg – 23,9 kg = 0,2 kg.

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **NÁKUP**

V nákupním středisku byla před Vánoci nabídka. U vybraného zboží byla při nákupu pěti kusů sleva. Například jeden jogurt byl za 12,20 Kč a pět jogurtů jen za 53,90 Kč.

	Za 1 kus	Za 5 kusů
jogurt	12,20	53,90
džem	23,10	99,90
sýr	18,30	78,90

a) Jdu si koupit 6 jogurtů. Zvažuji dvě možnosti:
I. udělám tři nákupy po dvou jogurtech
II. koupím 5 kusů (se slevou) a jeden jogurt zvlášť. Kolik zaplatím v prvním případě a kolik ve druhém?

b) Jana si koupila 2 jogurty a Dana 3. Kolik která zaplatila? Kolik by dívky ušetřily, kdyby si koupily najednou 5 kusů za 54 Kč? Kolik by každá z nich na společný nákup měla přispět?

c) Podobnou úlohu, jako je předchozí, řeš v případě, že dívky kupují džem.

d) Podobnou úlohu, jako je předchozí, řeš v případě, že dívky kupují sýr.

e) Jana si chce koupit 2 jogurty a 2 sýry. Dana 3 sýry a 3 jogurty. Jana řekla, že to bude jednoduché, protože tři jogurty stojí 36,60 a dva sýry též 36,60. Tedy Dana koupí 5 sýrů, dva dá Janě, Jana koupí 5 jogurtů a 3 dá Daně. Bude taková výměna spravedlivá?

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

a) U nákupu I. platím 72 Kč. U nákupu II. platím 66 Kč. U druhého nákupu ušetřím 6 Kč.

b) Jana zaplatila 24 Kč, Dana 37 Kč. Kdyby Dana rozdělila nákup na dvě části, platila by za 1 jogurt 12 Kč, za dva jogurty 24 Kč, za celý nákup 36 Kč a ušetřila by 1 Kč. Když koupí spolu 5 jogurtů, zaplatí 54 Kč. Jana přispěje 2/5 této částky, tj. 21,60 Kč, a Dana 3/5 z 54 Kč, tj. 32,40 Kč. Po zaokrouhlení Jana dá 22 Kč a Dana 32 Kč. Jana by ušetřila 2 Kč a Dana 5 Kč. Je jasné, že vzhledem k zaokrouhlování zde neexistuje naprosto spravedlivé řešení. Tato skutečnost je výzvou k diskusi třídy. Stejně provokativní jsou i další úlohy.

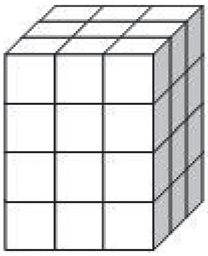
c) Zde je situace přehlednější. Při jednotlivých nákupech zaplatí Jana 46 Kč, Dana 69 Kč. Při hromadném nákupu zaplatí Jana 40 Kč a Dana 60 Kč. Tím Jana ušetří 6 Kč a Dana 9 Kč. Všechny tyto hodnoty jsou v přesné proporcionalitě Jana : Dana = 2 : 3. Zde není prostor ke sporům.

d) Podobně jako u úlohy **a)** i zde je situace diskutabilní. Do společného nákupu má Jana přispět 31,60 Kč a Dana 47,40 Kč. Po zaokrouhlení Jana 32 Kč, Dana 47 Kč. To není zcela spravedlivé, neboť Jana platí za 1 sýr 16 Kč, ale Dana 15,67 Kč. V případě, že Jana zaplatí 31 Kč a Dana 48 Kč, bude cena jednoho sýru pro Janu 15,50 Kč a pro Danu 16 Kč. Žáci uvádí důvody pro jedno i druhé řešení.

e) Za celý nákup zaplatí dívky 54 Kč + 79 Kč = 133 Kč. Jana si z nákupu vezme 2/5 a Dana 3/5. Tedy i platit by měly dívky ve stejném poměru 2 : 3, Jana 53,20 Kč a Dana 79,80 Kč. Po zaokrouhlení Jana 53 Kč, Dana 80 Kč. V navrhované výměně Jana zaplatí 54 Kč a Dana 79 Kč. Dana by tím vydělala na Janě 1 Kč.

13 KRYCHLOVÁ TĚLESA, POVRCH, OBJEM

VSTUPNÍ ÚLOHA: **BARVENÍ HRANOLU**



Franta si tvořil z malých krychlí hranoly a další větší krychle. Jeden takový hranol je na obrázku.

1. Kolik malých krychlí Franta spotřeboval na hranol na obrázku?

2. Franta ponořil celý hranol do modré barvy a po zaschnutí barvy jej zase rozebral na jednotlivé krychličky. Kolik jich mělo

a) 3 stěny modré?

b) 2 stěny modré?

c) 1 stěnu modrou?

d) žádnou stěnu modrou?

Každou odpověď zdůvodni.

3. Ze všech rozebraných krychliček hranolu si Franta postavil krychle.

a) Je možné, že měl nakonec před sebou pouze 3 různě velké krychle a žádná krychlička nezbyla? ANO/NE

b) Je možné, že některá z vytvořených krychlí byla jednobarevná? ANO/NE

Uveď všechny možnosti a každou odpověď zdůvodni.

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

1. Franta spotřeboval 3×3×4 = 36 malých krychlí. Je to vlastně objem hranolu.

2. a) Tři stěny mělo obarveno 8 krychliček. Jsou to krychličky, jejichž jeden vrchol je i vrcholem hranolu. Tedy jejich počet odpovídá počtu vrcholů hranolu.

b) Dvě stěny mělo obarveno 16 krychliček. Jsou to všechny krychličky, jejichž hrana tvoří část hrany krychle a přitom neobsahuje vrchol. Po dvou krychličkách je to na delších hranách a po jedné na kratších hranách hranolu.

c) Jednu stěnu mělo obarveno 10 krychliček. Jsou to ty krychličky, jejichž stěna je vnitřní částí stěny hranolu. Po dvou jsou na obdélníkových stěnách a po jedné na čtvercových podstavách hranolu.

d) Žádnou stěnu neměly obarveny dvě krychle. Ty jsou uvnitř hranolu.

3. a) ANO. Franta vytvořil 3 krychle: 3×3×3, 2×2×2 a 1×1×1. Žádná krychlička nezbyla. Počet spotřebovaných krychliček je 27 + 8 + 1 = 36.

b) ANO. Jednobarevné mohly být dvě krychle: buď modrá 3×3×3 a nebarevná 1×1×1, nebo modrá 2×2×2 a nebarevná 1×1×1. Modrá krychle mohla být jen jedna, neboť pouze 8 krychliček má tři stěny modré a ty je potřeba umístit do „vrcholů“. Zbylá krychlička je vždy nebarevná, neboť žádná krychlička nemá 6 stěn modrých.

Komentář

Vstupní úloha je obdobná úloze M309 z PISY 2009, v níž je klíčovým pojmem objem hranolu a krychle. Potřebné informace je třeba získat z obrázku. Jde tedy i o čtení 2D obrazu 3D situace. Některé informace jsou ukryty, je zde tedy aktuální i prostorová představivost. V těchto úlohách se jedná o průvodní jevy hranolu a krychle, tj. vrcholy, hrany, stěny a také o vazbu mezi objemem a povrchem hranolu či krychle. Vyžaduje se zde také argumentace, která byla v testových úlohách PISA značným problémem našich žáků. Jestliže má některý žák problém řešit úlohu v představách, je velice důležité, aby ji mohl řešit manipulativně.

✂ -- ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Franta z krychliček rozebraného obarveného hranolu v 1. úloze postavil jiný hranol o rozměrech 2×2×9. Mohl ho postavit tak, aby byl celý obarven? Řešení zdůvodni.

ANO / NE

2. Franta měl 36 krychliček a vždy ze všech postavil nějaký hranol. Pak jej rozebral a znovu postavil ze všech 36 krychliček jiný hranol.

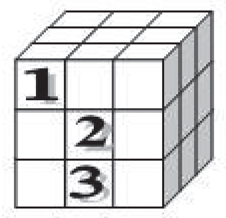
a) Kolik různých hranolů mohl postavit?

b) U každého hranolu urči jeho povrch. Za jednotku obsahu zvol jeden čtverec, který je stěnou malé krychličky. Výsledky zaznamenej do tabulky.

36 krychliček			
Rozměry hranolu			Povrch

3. Franta si chce postavit dva různé hranoly, ale ze stejného počtu krychlí. Jeden má rozměry 1×2×6 a druhý 2×2×3. Přemýšlí, který z nich má postavit jako první, aby po jeho obarvení a rozebrání krychliček mohl postavit ten druhý a ten byl také celý obarvený. Rozhodl se pro ten první. Svoji volbu zdůvodnil tím, že první hranol má větší povrch. Bylo jeho rozhodnutí správné? Zdůvodni.

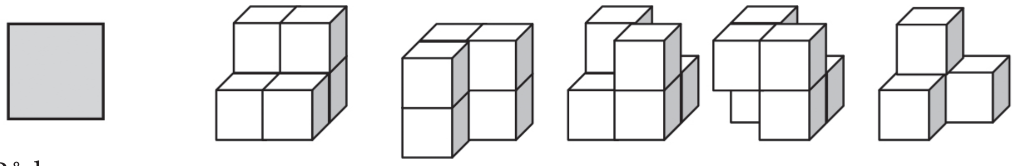
4. Na obrázku je zobrazena krychle vytvořená z 27 krychliček. Její povrch S je 54 čtverečků, zapíšeme to: S = 54 □. Urči povrch krychlového tělesa, které vznikne odebráním jedné krychličky z dané krychle. Odeber krychličku označenou číslem **a)** 1; **b)** 2; **c)** 3.



Termín **krychlové těleso** zde používáme intuitivně. Je to těleso vytvořené z konečného počtu krychliček tak, že každá použitá krychlička tvoří s některou jinou krychličkou hranol 1×1×2.

5. Kolik a kterých krychliček lze odebrat z krychle 3×3×3 tak, aby se nezměnil povrch krychlového tělesa?

6. Na obrázku je znázorněn pohled shora i zepředu (půdorys i nárys) na jisté těleso. V obou případech jde o čtverec. Dále je na obrázku znázorněno pět krychlových těles (a)–(e). Zakroužkuj všechna tělesa, jejichž půdorys i nárys v dané poloze je čtverec.



Půdorys i nárys tělesa (a) (b) (c) (d) (e)

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY

1. NE. Argument může být například: Hranol 2×2×9 má povrch S = 80 □ a hranol 3×3×4 pouze S = 66 □. Nebo: V hranolu 3×3×4 jsou dvě krychle neobarvené a v hranolu 2×2×9 není žádná.

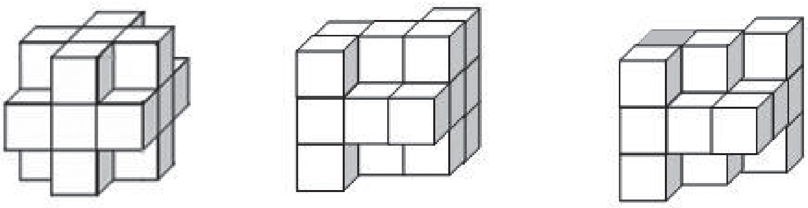
2. a) Osm různých hranolů.

2. b) 1×1×36, S = 146 □; 1×4×9, S = 98 ; 1×6×6, S = 96 □; 1×3×12, S = 102 □; 1×2×18, S = 112 □; 2×2×9, S = 80 □; 2×3×6, S = 72 □; 3×3×4, S = 66 □.

3. Frantovo rozhodnutí nebylo správné. Úloha nemá řešení. Frantovi buď budou chybět čtyři „rohové“ krychličky s obarvenými třemi stěnami s jedním vrcholem společným, nebo při druhé volbě nebude ani jedna krychlička vhodně obarvena.

4. a) Také 54 □; **b)** 58 □; **c)** 56 □.

5. Lze odebrat např. všech 8 rohových krychliček (viz první obrázek). 8 krychliček je možné odebrat i jiným způsobem (viz např. druhý obrázek). Dokonce je možné odebrat 10 až 12 krychliček (viz např. třetí obrázek).



6. Jsou to tělesa (a), (c), (d).

Komentář

Úlohy 2.–4. vedou ke dvěma poznatkům. 1. Dva hranoly se stejným objemem nemusí mít stejný povrch. 2. Čím více se hranol blíží krychli, tj. čím je poměr délek hran blíže k 1, tím je povrch hranolu menší při zachování objemu. Tento poznatek lze zobecnit: Čím je těleso pravidelnější, tím je jeho povrch menší při stejném objemu. Nejmenší povrch má koule.

Úloha 5. odkrývá, že mohou být tělesa se stejným povrchem a různým objemem.

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **KRYCHLE**

Franta stavěl krychle z malých krychliček a počítal.

a) Je možné, aby se pro nějakou krychli číselně rovnal její objem a povrch?

b) Doplň tabulku.

Krychle	Kolik krychlí s kolika obarvenými stěnami?							Kolik krychliček celkem?	Kolik celkem obarvených čtverců – stěn malých krychliček?
	0	1	2	3	4	5	6		
1×1×1	0	0	0	0	0	0	1	1	6
2×2×2									
3×3×3									
4×4×4									
5×5×5									
…									
53×53×53									
…									
n*×*n*×*n									

c) Popiš, jak se mění poměr objemu a povrchu krychle.

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

a) Ano. Je to krychle o hraně délky přesně 6 (jednotek). Objem i povrch této krychle je 6 · 6 · 6.

b)

Krychle	Kolik krychlí s kolika obarvenými stěnami?							Kolik krychliček celkem?	Kolik celkem obarvených čtverců – stěn malých krychliček?
	0	1	2	3	4	5	6		
1×1×1	0	0	0	0	0	0	1	1	6
2×2×2	0	0	0	8	0	0	0	8	24
3×3×3	1	6	12	8	0	0	0	27	54
4×4×4	8	24	24	8	0	0	0	64	96
5×5×5	27	54	36	8	0	0	0	125	150
…									
53×53×53	132 651	15 606	612	8	0	0	0	53^3	$6 \cdot 53^2$
…									
n*×*n*×*n	$(n-2)^3$	$6 \cdot (n-2)^2$	$12 \cdot (n-2)$	8	0	0	0	n^3	$6 \cdot n^2$

c) Poměr objemu a povrchu krychle je: 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1, 7/6, 8/6, …, n/6.

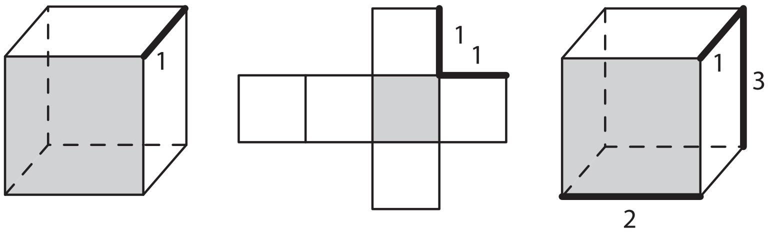
Komentář

Úlohu budou asi mnozí žáci řešit pomocí fyzické stavby nebo náčrtku. Tabulku mohou vyplňovat tak dlouho, dokud neuvidí pravidelnost v jednotlivých sloupcích. Když již náčrtek k výpočtu nestačí, je žák nucen hledat vazby v jednotlivých řádcích. Kvůli tomu je tam vložen řádek 53. Řešení tohoto řádku je již přechodem k obecnému vztahu. V tabulce jsou také prostřednictvím čísel vidět některé průvodní jevy krychle. Učitel může otázkami zaměřit pozornost žáků na tyto jevy: Jak je v tabulce vidět, že krychle má 8 vrcholů, 12 hran a 6 stěn?

14 SÍTĚ KRYCHLE

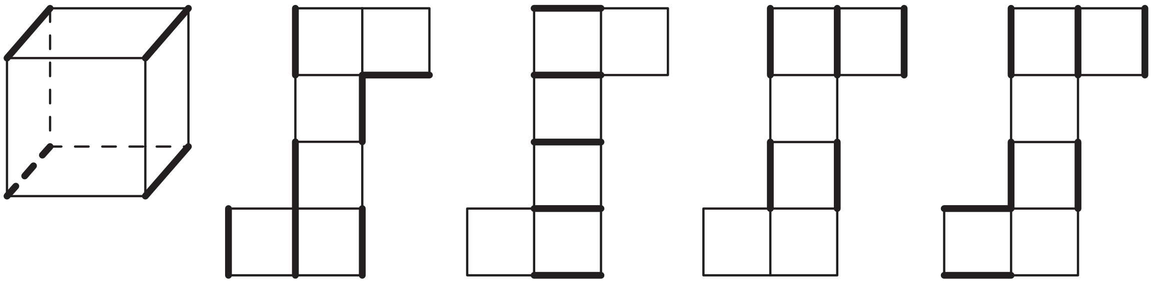
VSTUPNÍ ÚLOHY: **BARVENÍ HRAN KRYCHLOVÉ KRABICE**

1. Na prvním obrázku je zobrazena krychlová papírová krabice s jednou obarvenou hranou (1). Rozložíme krabici do roviny a vytvoříme síť krychle – druhý obrázek. Obarvené hraně krychle odpovídají dvě obarvené strany čtverců sítě. Na třetím obrázku jsou obarveny další dvě hrany krychle (2) a (3). Vyznač je na síti krychle.



2. Krychlová krabice na obrázku má obarveny čtyři rovnoběžné hrany. Dále jsou na obrázku nakresleny čtyři shodné sítě krychle s obarvenými některými stranami čtverců.

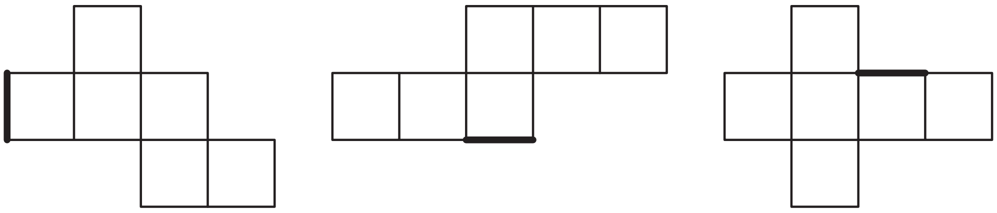
a) Je možné ze sítě složit krychlovou krabici z obrázku? Zakroužkuj správnou odpověď.



I. II. III. IV.

I. ANO / NE II. ANO / NE III. ANO / NE IV. ANO / NE

b) Na obrázku níže jsou nakresleny tři sítě krychle A, B, C. Na každé je jedna strana jednoho čtverce sítě obarvena. Obarvi další strany čtverců tak, aby po složení sítě měla krychle obarveny právě čtyři rovnoběžné hrany jako krychle na obrázku u úlohy a).



A B C

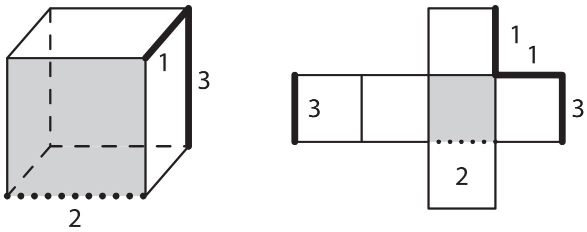
c) Formuluj pravidlo nebo soubor pravidel na obarvování stran čtverců jakékoli sítě krychle, která má obarveny právě čtyři rovnoběžné hrany.

d) U sítí A, B, C v úloze b) obarvi tu stranu čtverce, která spolu s již obarvenou stranou vytvoří jednu hranu krychle.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

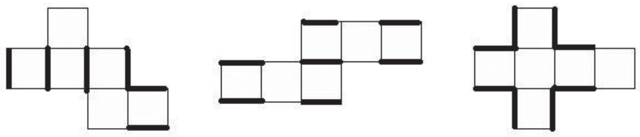
ŘEŠENÍ

1.



2. a) Jestliže žáci nejsou schopni řešit úlohu v představách, musí si síť vystřihnout a řešit pomocí manipulace.
I. NE; II. ANO; III. NE; IV. ANO.

b)

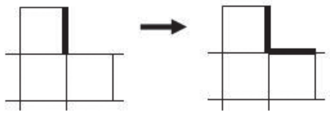


A B C

c) Pravidlo na barvení stran sítě odpovídajících rovnoběžným hranám krychle může být formulováno například takto:

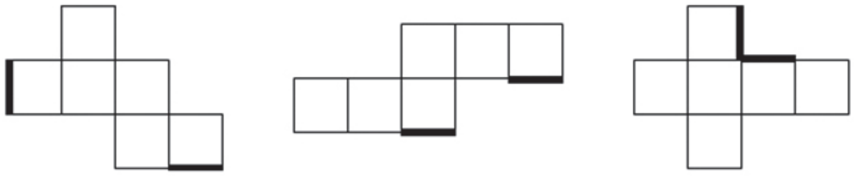
(1) Je-li dána jedna obarvená strana čtverce sítě, obarvíme i protější stranu čtverce sítě.

(2) Je-li obarvena jedna strana „koutu" sítě, obarvíme i druhou stranu.



(3) Je-li v obdélníku 3 . 1, který je částí sítě, obarvena strana krajního čtverce, která je částí delší strany obdélníku, obarvíme i stranu druhého krajního čtverce téže strany obdélníku.

d)



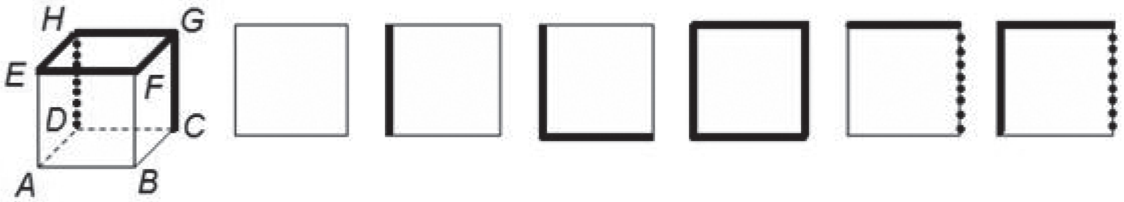
Komentář

Úloha se váže k úloze M555 Hrací kostky z Pisy 2009, kde se pracuje se sítí hrací kostky a kde je zvolen celkem běžný tvar sítě – T. Problém zde tedy nespočívá v identifikaci sítě jako tvaru, ale v identifikaci vazeb stěn 3D krychle a tomu odpovídající vazby čtverců 2D sítě. Mají se rozpoznat dvojice čtverců sítě, které odpovídají dvojici rovnoběžných stěn krychle. Tato úloha je celkem běžná a spíše se nabízí žákům prvního stupně ZŠ. Tomu nasvědčuje i vysoká úspěšnost řešení našich žáků (73,4 %). Nicméně oblast korespondence 3D krychle a 2D sítě krychle je důležitou oblastí pro rozvíjení prostorové představivosti, proto ji zde nabízíme v trochu obtížnějších a méně tradičních úlohách. Důležité na tom je, že vazby mezi prvky na krychli a jim odpovídající vazby mezi prvky na síti může žák odhalovat i pomocí modelování, když jeho prostorová představivost není na té úrovni, aby to mohl provádět v představách. Má-li žák možnost modelovat, je pak řešení dosažitelné pro každého. Opakovanou manipulací žák výrazně posiluje prostorovou představivost. Podle toho, jaké žák k řešení úloh použije pomůcky a jakou míru manipulace potřebuje, může učitel diagnostikovat žákovu úroveň prostorové představivosti (týkající se sítě krychle). Čistě geometrickou situaci lze zpřístupnit reálným kontextem, jako je tvorba krabice či její rozložení.

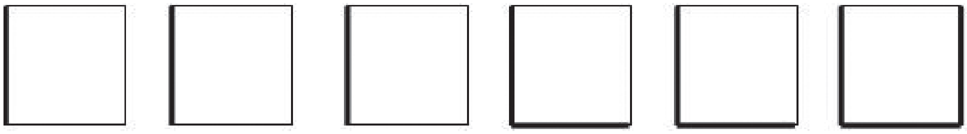
Zde nabízené úlohy jsou zaměřeny na vazby hran a stěn krychle a jim odpovídající vazbu stran čtverců sítě. Další úlohy se věnují i vazbě stěn krychle a jim odpovídající vazbě čtverců sítě. Výstupní úloha přibírá do hry vazbu vrcholů a stěn krychle a jim odpovídající vazbu vrcholů čtverců sítě.

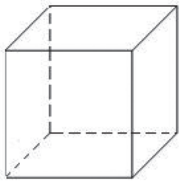
DALŠÍ ÚLOHY

1. Na krychlové krabici *ABCDEFGH* je každá hrana obarvena jednou ze tří barev. Ty jsou na obrázku označeny silnou čárou, slabou čárou a tečkovanou čárou. Všechny čtyři hrany stěny *ABCD* a hrany *AE* a *BF* jsou vyznačeny slabou čárou, všechny čtyři hrany stěny *EFGH* a hrana *CG* jsou vyznačeny silnou čárou a hrana *DH* je vyznačena tečkovaně. Dále máme šest čtvercových dílů, jak je uvedeno na obrázku. Každá strana každého čtverce je také obarvena jednou ze tří uvedených barev. Slep čtverce k sobě a sestav rozloženou krabici, která po složení bude mít hrany obarvené jako krychle na obrázku. Jinými slovy, vytvoř síť krychle z obrázku.



2. Je dáno šest čtvercových dílů na krychlovou krabici. Každá strana čtvercového dílu je obarvena jednou ze dvou barev. Na obrázku je to vyznačeno silnou a slabou čárou. Z těchto čtvercových dílů sestav rozloženou krabici (síť krychle). Smíš slepovat díly pouze podél obarvených stran a žádná obarvená strana nesmí zůstat neslepena s jinou obarvenou stranou, tedy nesmí zůstat na okraji rozložené krabice (tj. nesmí ležet na hranici sítě krychle). Nakonec obarvi hrany krabice na obrázku.





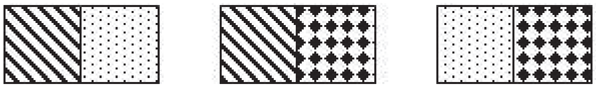
3. Na obrázku jsou dána tři domina obarvená třemi barvami a dvě rozložené krychlové krabice (sítě krychle) A a B. Polož domina na každou síť tak, aby po sestavení krabice

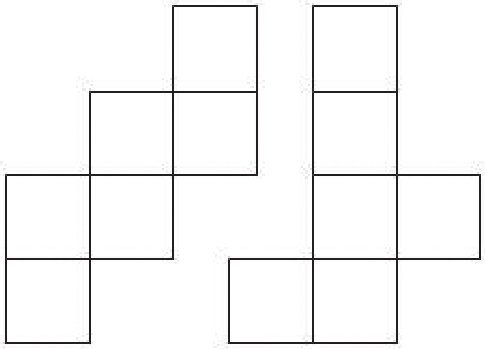
a) každé dvě protější stěny měly stejnou barvu.

b) pouze dvě dvojice protějších stěn měly stejnou barvu.

c) pouze jedna dvojice protějších stěn měla stejnou barvu.

d) žádná dvojice protějších stěn neměla stejnou barvu.



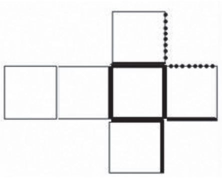


A B

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY

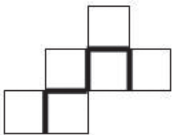
1. Například:



Komentář

Uvedená síť je jednou z mnoha možných. Žáci se slabší prostorovou představivostí mohou řešit například tak, že budou pracovat s papírovým modelem krychle. Hrany obarví podle obrázku a pak budou k modelu přikládat jednotlivé díly (stěny) a slepovat je. Nakonec „oblek“ krychle rozloží do roviny a vytvoří síť. Žák při tom rozvíjí kognitivní kompetence přiřadit dvě množiny na základě kritéria, které je dáno více než jednou informací – barvy stran čtverce. Sofistikovanější řešení je samozřejmě bez modelu krychle. Lze postupovat takto: Pojmenujeme vrcholy všech šesti čtverců podle obrázku krychle a pak přikládáme k sobě strany stejného jména, a tedy i stejně obarvené.

2.

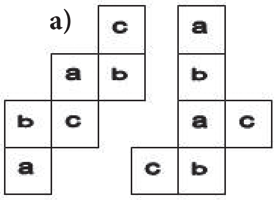


Komentář

Je vhodné, aby si žáci čtverce vystřihli a řešili úlohu manipulativně.

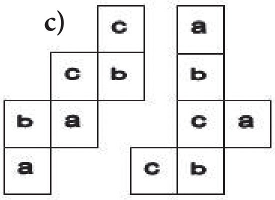
3. Barvy pro snazší orientaci označíme písmeny *a*, *b*, *c*. Řešení jsou například tato:

a)



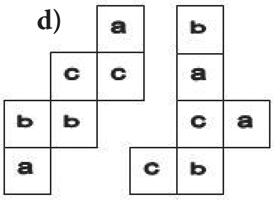
b) Nelze.

c)



Pouze barva *b* je
na protějších stěnách.

d)

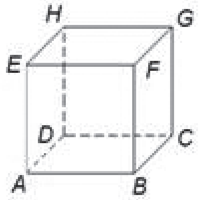


Komentář

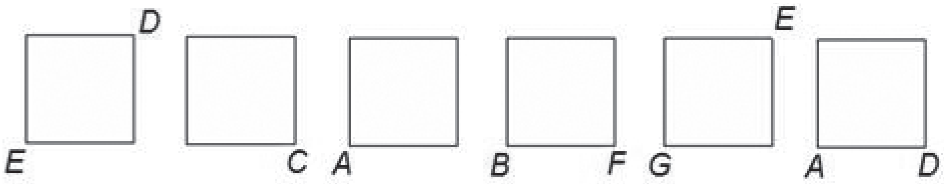
Úlohu je možné rozšířit na všechny sítě krychle. Pět sítí krychle z domin složit nelze. Všech dalších šest lze obarvit tak, že stejné barvy jsou buď tři, nebo jedna, anebo žádná dvojice protějších stěn. Případ, že právě dvě dvojice protějších stěn mají stejnou barvu, realizovat nelze, neboť máme-li k dispozici tři různé barvy, každá je na dvou stěnách, a mají-li dvě dvojice protějších stěn stejnou barvu, musí ji mít i třetí dvojice protějších stěn.

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **STĚNY KRYCHLE**

Na obrázku je standardně pojmenovaná krychle *ABCDEFGH*. Dále je dáno šest čtverců a některé jejich vrcholy jsou pojmenovány. V každé úloze a)–c) urči, který ze šesti čtverců je spodní stěna krychle na obrázku, který čtverec je horní, přední, zadní, levá a pravá stěna, a zapiš to pod příslušný obrázek.

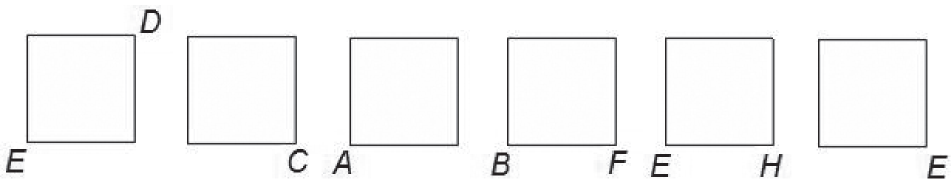


a)



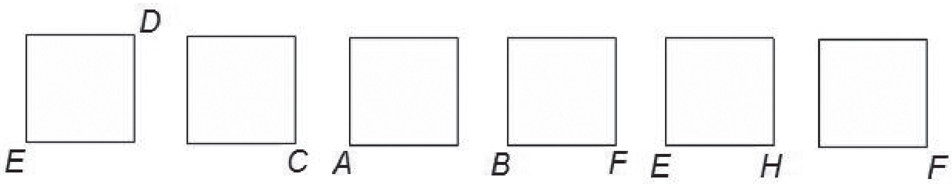
....

b)



....

c)



....

✂ -- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -- ✂

ŘEŠENÍ

Úloha je zde vybrána proto, abychom ukázali propojení geometrie s kombinatorikou. Úloha je geometrická, ale efektivní řešení je čistě kombinatorické. To zde ukážeme. Pro komunikaci o čtvercích – stěnách krychle zavedeme toto označení: první čtverec popíšeme pomocí jmen vrcholů *DXEX*. Písmena *X* značí neznámý vrchol. Podobně označíme další čtverce: *CXXX*, *AXXX*, *BFXX*, *EXGX* a *ADXX*.

a) Do tabulky zaznamenáme šest podmínek vyplývajících ze zadání takto: například znak **x** v prvním řádku *DXEX* a pátém sloupci levá znamená, že čtverec *DXEX* z prvního obrázku je určitě levá stěna, protože to je jediná stěna s oběma vrcholy *D* a *E*. V řádku *CXXX* jsou tři znaky **x**, neboť čtverec *CXXX* je buď spodní stěna, nebo pravá, anebo zadní stěna. Jen tyto stěny obsahují vrchol *C*. Třetí čtverec *AXXX* je buď spodní, nebo přední, anebo levá stěna, neboť všechny tyto stěny obsahují vrchol *A*. Hrana *BF* je společná přední a pravé stěně, tedy čtverec *BFXX* je buď přední, nebo pravá stěna. Čtverec *GXEX* je jednoznačně horní stěna, protože je to je jediná stěna s vrcholy *G* a *E*. A nakonec čtverec *ADXX* je buď spodní, anebo levá stěna.

	spodní	horní	přední	zadní	levá	pravá	spodní	horní	přední	zadní	levá	pravá
DXEX					**x**						1	
CXXX	**x**			**x**		**x**				5		
AXXX	**x**		**x**		**x**				3			
BFXX			**x**			**x**						4
GXEX		**x**						1				
ADXX	**x**				**x**		**2**					

Nyní je potřeba z dvanácti znaků **x** v tabulce vybrat vhodných šest tak, aby v každém řádku a v každém sloupci tabulky bylo vybráno právě jedno **x**, které bude určovat vazbu „čtverec ↔ stěna krychle“. Tímto způsobem je geometrický problém převeden na kombinatorický, který řešíme pomocí tabulky.

1) V řádcích *DXEX* a *GXEX* je pouze jeden znak **x**. To znamená, že tato dvě **x** musí být vybrána, a tedy *DXEX* je levá a *GXEX* horní stěna. Ve vedlejší tabulce místo těchto **x** napíšeme 1 jako pořadové číslo kroku, v němž byla **x** vybrána. Nakonec ve sloupečku levá vyškrtneme další dvě **x**.

2) Obdobně budou vybrána další **x** v tabulce. V jakém pořadí, to je dáno ve vedlejší tabulce.

VÝSLEDKY

a) *DXEX* je levá, *CXXX* zadní, *AXXX* přední, *BFXX* pravá, *GXEX* horní a *ADXX* spodní.

b) *DXEX* je levá, *CXXX* zadní, *AXXX* spodní, *BFXX* pravá, *EHXX* horní a *EXXX* přední.

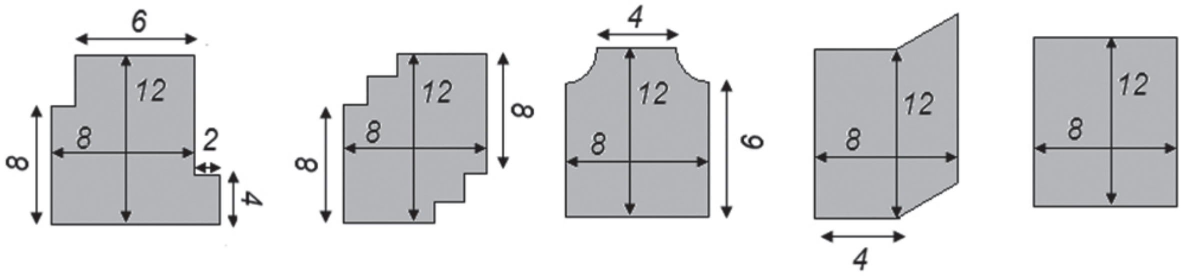
c) První řešení: *DXEX* je levá, *CXXX* zadní, *AXXX* spodní, *BFXX* pravá, *EHXX* horní a *FXXX* přední.
Druhé řešení: *DXEX* je levá, *CXXX* zadní, *AXXX* spodní, *BFXX* přední, *EHXX* horní a *FXXX* pravá.

✂ -- ✂

15 OBSAH, OBVOD

VSTUPNÍ ÚLOHA: **POZEMKY**

Pět kamarádů vlastní pozemky, které si chtějí osít trávou a nově natřít celý plot kolem nich. Náčrtky plánků jejich pozemků jsou znázorněny na obrázku. Čísla jsou udávána v kročejích. Aleš má pozemek A, Bedřich pozemek B, Cyril C, Dušan D a Emil E. Víme, že na plot délky 1 kročeje je potřeba půl žejdlíku barvy a že travní semeno na osetí 1 kročeje čtverečního stojí 10 zedů.



A B C D E

a) Zakroužkuj, kdo z pěti kamarádů nutně potřebuje 960 zedů na travní semeno, aby osil celý svůj pozemek.

Aleš Bedřich Cyril Dušan Emil

b) Zakroužkuj, kterému z pěti kamarádů bude stačit 20 žejdlíků barvy na natření celého svého plotu.

Aleš Bedřich Cyril Dušan Emil

c) Rozhodni, který z kamarádů bude mít celkové finanční náklady *V* na osetí pozemku a natření celého plotu vyšší, když víš, že všichni kamarádi si koupili stejnou barvu. Doplň znaménka nerovnosti. Každé tvrzení zdůvodni.

Například: $V(\mathrm{A}) \boxed{>} V(\mathrm{B})$, neboť Alešův plot je delší o 4 kročeje než Bedřichův a je zřejmé, že i jeho pozemek je větší, i když neumíme určit o kolik. Za popsanou úpravu pozemku tedy Aleš zaplatí více než Bedřich.

$V(\mathrm{A})\square V(\mathrm{E})$ ....

$V(\mathrm{B})\square V(\mathrm{E})$ ....

$V(\mathrm{C})\square V(\mathrm{E})$ ....

$V(\mathrm{D})\square V(\mathrm{E})$ ....

$V(\mathrm{C})\square V(\mathrm{B})$ ....

$V(\mathrm{A})\square V(\mathrm{C})$ ....

✂ ---------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------------- ✂

Komentář

Úloha b) je obdobná úloze Tesař (M266) z PISY 2009, ve které klíčovou roli hraje vztah mezi změnami obvodu a obsahu rovinného obrazce. Je známým jevem, že většina žáků tento vztah nemá dobře uchopen a ve svých úvahách používá myšlenku, že jestliže se obsah útvaru zmenší/zvětší, nutně se zmenší/zvětší i jeho obvod a obráceně. Tomu odpovídá i poměrně slabá průměrná úspěšnost řešení této úlohy našimi žáky – 28,9 %. Za povšimnutí stojí, že významně lépe (o 11,35 %) si v této úloze vedli chlapci. Je tedy naším úkolem nabídnout sérii úloh, které vazbu mezi změnami obsahu a obvodu obrazce osvětlí, a také najít úlohy, jež jsou motivačně vhodné pro dívky.

Učebnice sice často nabízejí úlohy typu: „Je dán obsah obdélníku a jedna jeho strana. Urči jeho obvod." Tyto úlohy spíše přispívají budování závislosti mezi obsahem a obvodem, nikoli však závislosti mezi změnami obsahu a obvodu obrazce. Oba pojmy, obsah i obvod obrazce, se podle většiny učebnic zavádějí zároveň se vzorečkem. Učitelé jejich bezchybnou znalost obvykle vyžadují a žákům většinou postačí na řešení standardních úloh. A tak jsou tyto pojmy v mysli převážné většiny žáků vázány na vzorečky, a nikoli na dobrou představu.

ŘEŠENÍ

a) [Aleš] Bedřich Cyril [Dušan] [Emil]

Otázka obsahu obvykle nebývá obtížná. Určení obsahu pozemku E je jednoduché a porovnání obsahů ostatních obrazců s obrazcem E je celkem zřejmé. $S(A) = 96$, $S(B) < 96$ i $S(C) < 96$ a nezáleží na tom, o kolik je obsah menší než 96. $S(D) = S(E) = 96$. Čísla jsou uváděna v kročejích čtverečných.

Komentář

Bude-li mít nějaký žák problémy pracovat s neznámou jednotkou, o které nemá žádné představy, může jej učitel nechat počítat v metrech, korunách a litrech místo kročejů, zedů a žejdlíků.

b) Aleš [Bedřich] [Cyril] Dušan [Emil]

Nyní určujeme obvod obrazce, který vznikl jistými úpravami obrazce E. Jeho obvod je 40 kročejů, $o(E) = 40$ kročejů. Tedy na natření plotu bude Emil potřebovat přesně 20 žejdlíků barvy. Je zřejmé, že $o(A) = 44$ kročejů a na natření je potřeba 22 žejdlíků barvy. Zde žáci mohou uvažovat tak, že obvod obrazce A se vzhledem k obvodu obrazce E nezmění, protože obsah je stejný. To, co u obrazce A chybí v levém horním rohu, je přilepeno v pravém dolním rohu. Obsah obrazce B se vzhledem k obrazci E zmenšil, ale obvod ne, $o(B) = 40$ kročejů, tedy Bedřich bude potřebovat přesně 20 žejdlíků. $o(C) < 40$ kročejů, tedy Cyrilovi 20 žejdlíků barvy bude stačit. Zde je zdánlivě stejný jev jako v případě B, ale délka čtvrtkružnice je menší než dva poloměry. $o(D) > 40$ kročejů, Dušanovi tedy 20 žejdlíků stačit nebude.

c) $V(A)\ \boxed{>}\ V(E)$; obrazce A a E mají stejný obsah, ale obrazec A má větší obvod $[S(A) = S(E), o(A) > o(E)]$, tedy Aleš bude mít větší náklady na barvu na plot než Emil.

$V(B)\ \boxed{<}\ V(E)$; $S(B) < S(E)$ a $o(B) = o(E)$, tedy Emil zaplatí více než Bedřich.

$V(C)\ \boxed{<}\ V(E)$; $S(C) < S(E)$ a $o(C) < o(E)$, tedy Emil zaplatí více než Cyril.

$V(D)\ \boxed{>}\ V(E)$; $S(D) = S(E)$, $o(D) > o(E)$, tedy Dušan zaplatí více než Emil.

$V(C)\ \boxed{??}\ V(B)$; $o(C) < o(B)$, k určení obsahu nám chybí údaje o rozměrech „zubaté" části obrazce B i údaje o ceně za barvu na plot.

$V(A)\ \boxed{>}\ V(C)$; $S(A) > S(C)$ i $o(A) > o(C)$, tedy Aleš zaplatí více než Cyril.

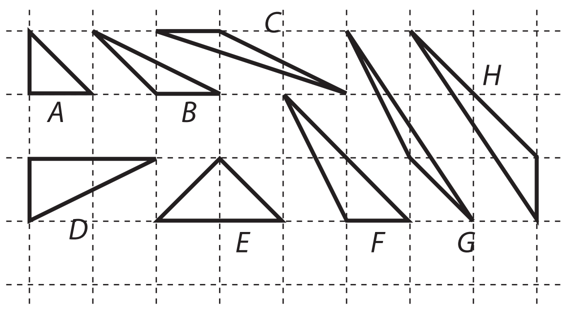
Komentář

Učitel může rychlejší žáky požádat, aby zadali všechny potřebné údaje tak, aby bylo možné výdaje kamarádů jednoznačně uspořádat, tedy aby bylo možné rozhodnout, zda zaplatí více Cyril, nebo Bedřich a Aleš, anebo Dušan. Bylo by také možné vyzkoušet, zda vložení úlohy do jiného kontextu, například místo pozemků dekorativní ubrusy, jejichž cena se odvíjí jak od délky stehu na obrubě, tak i od spotřebovaného materiálu, by posílilo motivaci dívek.

DALŠÍ ÚLOHY

V následujících úlohách pracujeme na čtvercové centimetrové mříži. Průsečíky linek mříže se nazývají **mřížové body**. Úsečka, která má oba krajní body mřížové, se nazývá **mřížová úsečka**. Obdobně trojúhelník se všemi vrcholy v mřížových bodech se nazývá **mřížový trojúhelník** atd. Budeme pracovat v centimetrové mříži, protože všechny metrické údaje o obrazcích jsou jednoznačně dané mříží a není nutno potřebné informace uvádět. Jednotkou délky je 1 cm, jednotkou obsahu je 1 cm^2. Bylo by i možné používat jednotky nezávislé na velikosti mříže, například 1 dílek (1 d) a 1 čtvereček (1 □). Pak úlohy, kde se žádá měření centimetrovým měřítkem, je potřeba přeformulovat a žádat výpočty.

1. Na obrázku je osm mřížových trojúhelníků A, B, …, H. Bez měření a výpočtu porovnej obvody nebo obsahy zvolených trojúhelníků. Doplň znaménko rovnosti nebo nerovnosti a zdůvodni. Například: $o(\Delta A) < o(\Delta B)$, protože každý z trojúhelníků A a B má jednu stranu 1 cm, druhou stranu úhlopříčku jednoho čtverečku a třetí strana je u trojúhelníku A 1 cm a u B je to úhlopříčka obdélníku 2 cm ×1 cm.



(a) $o(\Delta B)$ …… $o(\Delta C)$
(b) $o(\Delta F)$ …… $o(\Delta H)$
(c) $o(\Delta B)$ …… $o(\Delta F)$
(d) $o(\Delta E)$ …… $o(\Delta F)$
(e) $S(\Delta A)$ …… $S(\Delta B)$
(f) $S(\Delta F)$ …… $S(\Delta H)$
(g) $S(\Delta D)$ …… $S(\Delta E)$
(h) $S(\Delta B)$ …… $S(\Delta G)$
(i) $S(\Delta D)$ …… $S(\Delta G)$
(j) $S(\Delta C)$ …… $S(\Delta G)$

2. Doplň do tabulky obvody a obsahy trojúhelníků A–H z obrázku. Obsahy urči přesně výpočtem s využitím mříže, jednotku obsahu zvol buď jeden čtvereček dané mříže (1□), nebo 1 cm^2, obvod urči buď výpočtem s přesností na dvě desetinná místa (jednotka délky je buď 1 cm, nebo 1 dílek = strana základního čtverečku mříže), nebo překreslením do přesné centimetrové mříže a změřením s přesností na milimetry. Pozoruješ něco zajímavého?

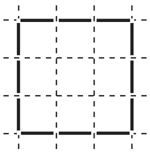
Trojúhelník	A	B	C	D	E	F	G	H
Obvod								
Obsah								

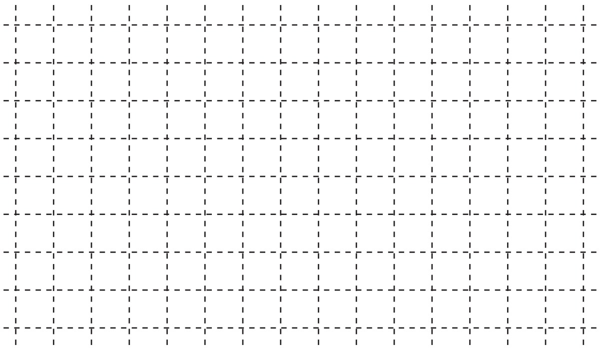
3. a) Najdi další mřížový trojúhelník J, který není shodný s žádným z trojúhelníků na obrázku u úlohy 1, obsah má roven 1 cm^2, ale obvod má menší než trojúhelník D.

Trojúhelník	J	K
Obvod		
Obsah	1	1/2

b) Najdi mřížový trojúhelník K, který má obvod větší než 10 cm a obsah je 0,5 cm^2. Doplň údaje do tabulky.

4. Ve čtvercové mříži je dvanácti dřívky vyznačen čtverec jako na obrázku. Pomocí těchto dvanácti dřívek vyznač obdélník a zjisti jeho obsah (S), délku svislé strany (s) a délku vodorovné strany (v). Najdi všechny možnosti a údaje zapiš do tabulky. Grafem popiš závislost délek stran.



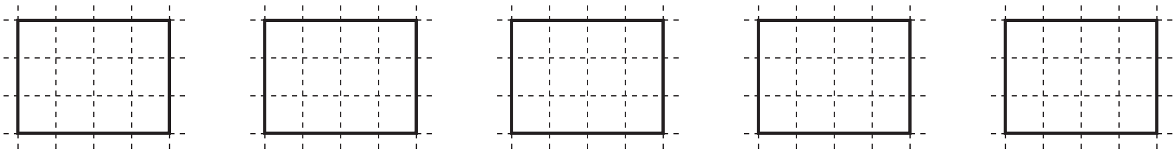


S	s	v

5. Úlohu 4 řeš pro **a)** 16 dřívek; **b)** 24 dřívek; **c)** 36 dřívek.

6. Je dán pravoúhelník (obdélník, čtverec), jehož obsah je 36 čtverečků. Urči jeho obvod. Najdi všechna řešení. Zaznamenej do tabulky délky stran a jejich vztah vyjádři grafem.

7. Z obdélníku 3 cm × 4 cm ve čtvercové mříži odřízni co nejvíce čtverečků tak, aby vzniklý mnohoúhelník měl stejný obvod jako daný obdélník.



✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

1. (a) $o(\Delta B)$ $\boxed{<}$ $o(\Delta C)$

(b) $o(\Delta F)$ $\boxed{<}$ $o(\Delta H)$

(c) $o(\Delta B)$ $\boxed{<}$ $o(\Delta F)$

(d) $o(\Delta E)$ $\boxed{<}$ $o(\Delta F)$

(e) $S(\Delta A)$ $\boxed{=}$ $S(\Delta B)$

(f) $S(\Delta F)$ $\boxed{=}$ $S(\Delta H)$

(g) $S(\Delta D)$ $\boxed{=}$ $S(\Delta E)$

(h) $S(\Delta B)$ $\boxed{=}$ $S(\Delta G)$

(i) $S(\Delta D)$ $\boxed{>}$ $S(\Delta G)$

(j) $S(\Delta C)$ $\boxed{=}$ $S(\Delta G)$

Zdůvodnění např. (e): Trojúhelníky A a B mají jednu stranu a výšku na ni shodnou.

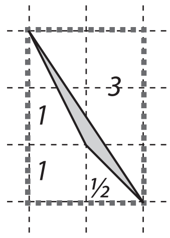
2.

Trojúhelník	A	B	C	D	E	F	G	H
Obvod [v cm]	3,41	4,65	6,4	5,24	4,83	6,06	7,26	7,43
Obsah [v cm^2]	0,5	0,5	0,5	1	1	1	0,5	1

Na údajích v tabulce je zajímavé, že popisují čtyři trojúhelníky s obsahem 0,5 cm^2 a čtyři trojúhelníky s obsahem 1 cm^2, kde každý z nich má jiný obvod. Další zajímavostí je například to, že trojúhelník D má větší obsah než C nebo G, ale má menší obvod než C nebo G.

Komentář

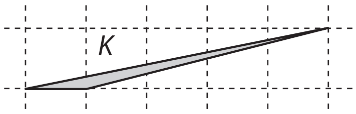
Kromě trojúhelníku G lze obsahy trojúhelníků určit snadno pomocí vzorečku pro obsah trojúhelníku. U trojúhelníku G je účelné použít jinou metodu než zjišťování délky nějaké strany a příslušné výšky, například metodu „rámování". Tu lze ostatně použít univerzálně.



Nejdříve trojúhelníku obkreslíme pravoúhelníkový (obdélník nebo čtverec) rámeček, který leží v mříži. Zjistíme jeho obsah. Ten je 6 čtverečků. Pak z rámečku „odřízneme" tři pravoúhlé trojúhelníky o obsazích 3, 1 a 0,5 čtverečku a 1 celý čtvereček. Tedy obsah trojúhelníku G je: $S(\Delta G) = (6 - 5{,}5) = 0{,}5$ (čtverečku nebo cm^2).

3. a)

Trojúhelník	J	K
Obvod	neex.	10,22
Obsah	1	0,5



Mřížový trojúhelník s obsahem 1 čtvereček a obvodem menším než obvod trojúhelníku D je pouze trojúhelník E, ale ten už je na obrázku. Tedy mřížový trojúhelník J neexistuje.

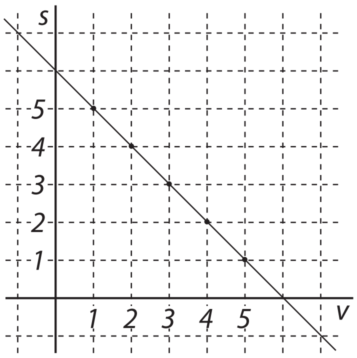
b) Příklad trojúhelníku K je na obrázku. Jeho obvod lze libovolně prodlužovat posouváním „horního" vrcholu po lince rovnoběžné s „dolní" vodorovnou stranou například vpravo.

Komentář

Žáci zde a v dalších úlohách poznávají problematiku, která souvisí s tzv. izoperimetrickým problémem v rovině,[14] tj. najít ze všech obrazců daného obsahu ten, jehož obvod je minimální, nebo najít ze všech obrazců daného obvodu ten, jehož obsah je maximální. Je známo, že mezi všemi rovinnými útvary právě kruh splňuje izoperimetrickou podmínku. Označíme-li S obsah kruhu a L obvod kruhu, pak platí: $16\, S/L^2 = 4/\pi$.

4.

S	s	v
5	1	5
8	2	4
9	**3**	**3**
8	4	2
5	5	1



Komentář

Izoperimetrický koeficient čtverce je 1. Čím blíže je izoperimetrický koeficient obdélníku k 1, tím více se obdélník blíží ke čtverci.

14 Izometrický problém: Která uzavřená křivka o dané délce ohraničuje oblast o maximálním obsahu? Už ve starém Řecku Pappos vyslovil domněnku, že je to kružnice, což bylo potvrzeno až v 19. století pomocí diferenciálního a integrálního počtu.

5. a)

S	*s*	*v*
7	1	7
12	2	6
15	3	5
16	4	4
15	5	3
12	6	2
7	7	1

b)

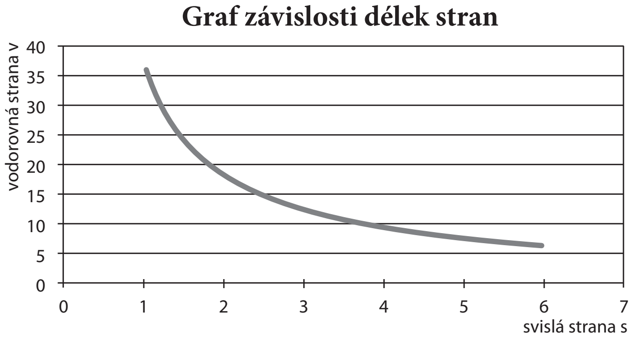
S	*s*	*v*
11	1	11
20	2	10
27	3	9
32	4	8
35	5	7
36	6	6
35	7	5
32	8	4
27	9	3
20	10	2
11	11	1

c)

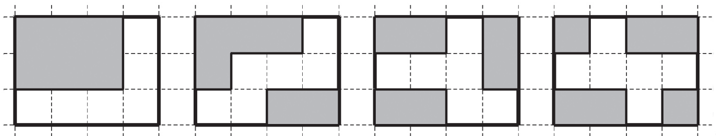
S	*s*	*v*
17	1	17
32	2	16
45	3	15
56	4	14
65	5	13
72	6	12
77	7	11
80	8	10
81	9	9
80	10	8
…	…	…

6.

s	*v*	*o*
1	36	74
2	18	40
3	12	30
4	9	26
6	6	24
…	…	…



7. Lze odstřihnout maximálně 6 čtverečků. Na obrázku jsou uvedeny některé takové mnohoúhelníky.



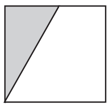
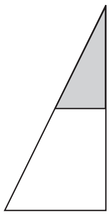
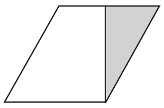
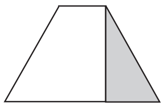
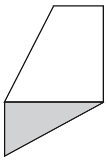
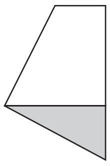
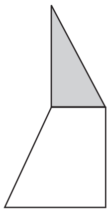
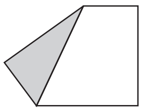
VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **TVARY SE STEJNÝM OBSAHEM A RŮZNÝM OBVODEM**

Vystřihni čtverec a ten jedním rovným střihem rozstřihni na dva obrazce tak, aby z těch dvou dílů bylo možné sestavit každý z následujících obrazců: pravoúhlý nerovnoramenný trojúhelník, kosodélník, rovnoramenný lichoběžník, pětiúhelník konvexní i nekonvexní, pětiúhelník se třemi pravými úhly. Najdi všechny další možnosti. U všech obrazců urči obvod.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

Pro výpočty obvodu volíme délku strany čtverce 1.

				
	původní čtverec	pravoúhlý nerovnoramenný trojúhelník	kosodélník	rovnoramenný lichoběžník
obvod	4	3+√5	2+√5	2+√5
				
	5-úhelník konvexní	4-úhelník se dvěma pravými úhly	5-úhelník nekonvexní	5-úhelník se třemi pravými úhly
obvod	2+√5	2+√5	3+√5	4

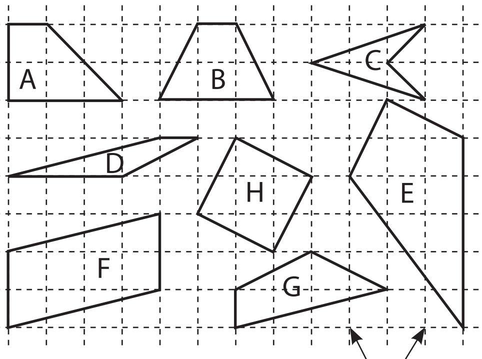
✂ ✂

16 2D TVARY A JEJICH VLASTNOSTI

VSTUPNÍ ÚLOHA: **ČTYŘÚHELNÍKY**

Aleš a Beáta se dívají na obrázek 1, kde je ve čtvercové mříži nakresleno 8 mřížových čtyřúhelníků (všechny vrcholy mají v mřížových bodech).

Aleš říká: „Beáto, vyber si jeden čtyřúhelník z obrázku a uvidíš, že ho dokážu uhodnout na tři otázky. Jen mi budeš odpovídat ANO, nebo NE.“ Beáta nevěří: „Vždyť je tady 8 obrazců.“



Obr. 1

Aleš: „Jsou některé dvě sousední strany tvého čtyřúhelníku na sebe kolmé?“

Beáta: „Ano.“

Aleš: „Má tvůj čtyřúhelník právě dvě dvojice stejně dlouhých stran?“

Beáta: „Ne.“

Aleš: „Lze ho rozstřihnout jedním střihem na dva shodné trojúhelníky?“

Beáta: „Ne.“

Aleš: „Tak už to vím, je to pravoúhlý lichoběžník A.“

a) Uhodl Aleš čtyřúhelník správně?

b) Byla to náhoda, že Aleš uhodl Beátin útvar na tři otázky?

c) Ze tří nabízených otázek I), II), III) vyber tu, která je do této hry jako první otázka nejvhodnější. Zdůvodni proč.

I) Je obsah obrazce menší než 5 čtverečků?

II) Jsou úhlopříčky obrazce stejně dlouhé?

III) Lze z obrazce jedním střihem podél linek čtvercové sítě udělat pravoúhlý lichoběžník?

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

a) ANO. Aleš uhodl čtyřúhelník správně.

b) Náhoda to nebyla, neboť Aleš volil otázky tak, že odpověď na první otázku rozdělila 8 čtyřúhelníků na dvě skupiny po čtyřech a odpověď na druhou otázku na dvě skupiny po dvou.

c) Otázka I) není vhodná, protože pro 5 obrazců by byla odpověď ANO, a to by mohlo přinést nutnost jedné otázky navíc. Otázka II) také není vhodná, protože by opět pro 5 obrazců byla odpověď NE. Otázka III) je vhodná, protože odpověď ANO je pro stejný počet obrazců jako odpověď NE.

DALŠÍ ÚLOHY

K osmi čtyřúhelníkům A–H na obr. 1 se vztahují otázky 1.–10. Napiš znak + do příslušného pole tabulky, jestliže pro daný čtyřúhelník (A–H) je odpověď na příslušnou otázku ANO, a znak –, jestliže je NE. Například v řádku 1 a sloupci A je znak –, protože úhlopříčky pravoúhlého lichoběžníku A nejsou na sebe kolmé. Ale pod písmenem B je +, protože v rovnoramenném lichoběžníku B jsou úhlopříčky na sebe kolmé, což je patrné z toho, že obě procházejí úhlopříčkami čtverců mříže.

1. Jsou úhlopříčky čtyřúhelníku na sebe kolmé?
2. Má čtyřúhelník alespoň dvě strany stejně dlouhé?
3. Lze ze čtyřúhelníku jedním střihem odstřihnout pravoúhlý lichoběžník?

čtyřúhelník otázka	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
1	–	+						
2								
3								

4. Má čtyřúhelník právě jeden vnitřní úhel ostrý?

5. Má čtyřúhelník alespoň jednu stranu rovnou 5?

6. Je ve čtyř úhelníku součet některých sousedních vnitřních úhlů úhel přímý?

7. Lze čtyřúhelníku opsat kružnice?

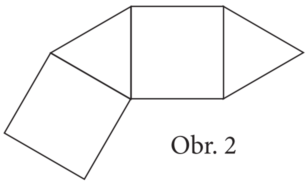
8. Obsahuje vnitřní oblast čtyřúhelníku alespoň 4 mřížové body?

9. Leží na hranici čtyřúhelníku více než 4 mřížové body?

čtyřúhelník otázka	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								

10. Je možné ze čtyřúhelníku vykrojit alespoň jeden čtverec mříže?

11. Na obrázku 2 je nakreslen začátek řady: čtverec, rovnostranný trojúhelník, čtverec, rovnostranný trojúhelník, …. Čtverce a trojúhelníky se budou přikládat naznačeným způsobem dále. Pod obrázkem jsou uvedena čtyři tvrzení. Rozhodni, které z nich je pravdivé. Svou volbu zdůvodni.



Obr. 2

A. Řada se po přiložení dalších 6 čtverců a 7 trojúhelníků zacyklí (spojí). Vnitřní hranice vzniklého obrazce pak vytvoří pravidelný osmiúhelník a vnější hranice vytvoří pravidelný sedmnáctiúhelník.

B. Řada se nikdy nezacyklí.

C. Řada se po přiložení dalších 4 čtverců a 4 trojúhelníků zacyklí (spojí). Vnitřní hranice vzniklého obrazce pak vytvoří pravidelný šestiúhelník a vnější hranice vytvoří pravidelný dvanáctiúhelník.

D. Řada se po přiložení dalších 2 čtverců a 2 trojúhelníků zacyklí (spojí). Vnitřní hranice vzniklého obrazce pak vytvoří kosočtverec a vnější hranice vytvoří (nepravidelný) osmiúhelník.

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

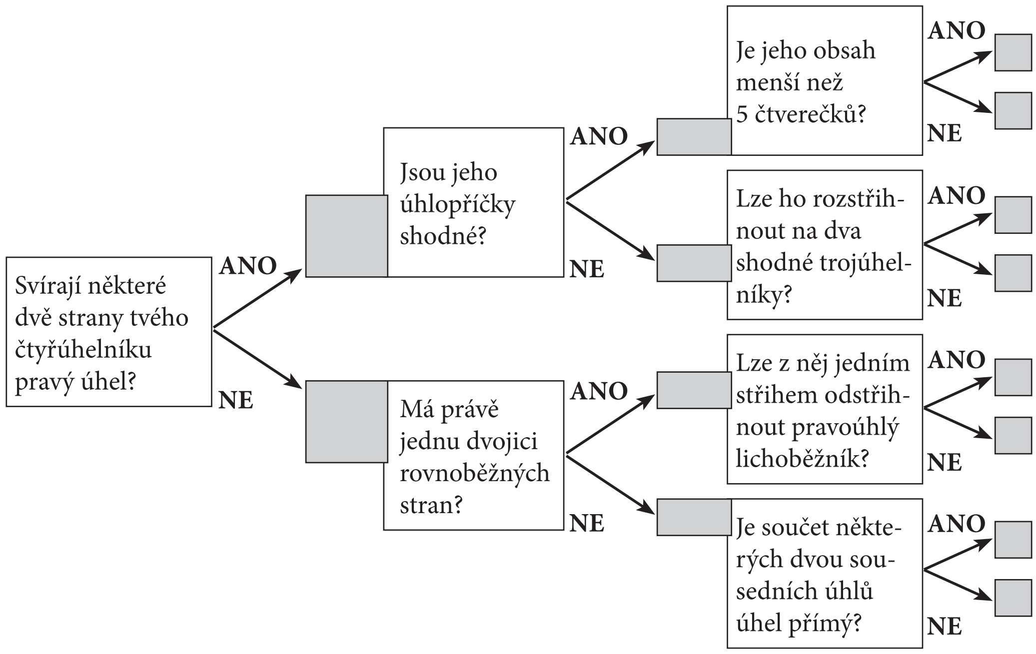
ŘEŠENÍ

čtyřúhelník otázka	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-	+	+	-	+	-	-	+
2	-	+	+	-	+	+	+	+
3	+	+	-	-	-	+	-	+
4	+	-	-	-	+	-	-	-
5	-	+	-	+	+	-	+	+
6	+	+	-	+	-	+	-	+
7	-	+	-	-	-	-	-	+
8	-	-	-	-	+	+	-	+
9	+	+	-	+	+	+	-	-
10	+	+	-	-	+	+	-	+

11. Jestliže k sobě přiložíme dva čtverce a jeden trojúhelník, je pak při vrcholu trojúhelníka budoucího mnohoúhelníku, který bude vnitřním, úhel 120°. Tedy vnitřní mnohoúhelník, jehož strany jsou strany pouze čtverců, je pravidelný šestiúhelník. Vnější mnohoúhelník je pravidelný dvanáctiúhelník. Řada se tedy zacyklí při šesti čtvercích a šesti trojúhelnících. Odpověď C) je tedy správně.

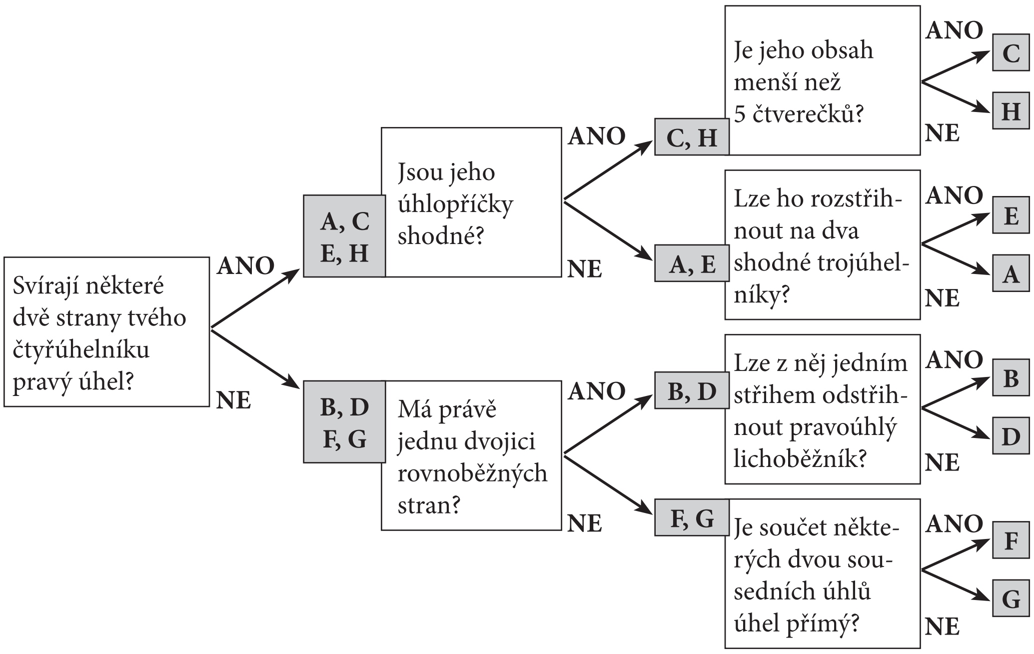
VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **ANO/NE**

Beáta se na další hru důkladně připravila, aby ji Aleš nemohl zaskočit. Připravila si následující schéma otázek, které Alešovi bude klást, aby jeho čtyřúhelník vybraný z A–H na obrázku 1 bezpečně určila také na tři otázky. Doplň do vyznačených okének správné čtyřúhelníky a zjisti, zda Beátě budou stačit vždycky tři otázky.



↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ



Komentář

Úlohy tohoto souboru se vážou k úloze M161 Trojúhelníky z PISY 2009, kde se z nabídky vybírá obrazec nebo obrazce, které vyhovují posloupnosti vlastností. Vlastnosti se týkají pravých úhlů, porovnávání úseček a vazeb tří bodů na úsečce (např. bod X je středem úsečky AB). Úloha z hlediska geometrie obsahuje celkem jednoduchá a zřejmá tvrzení. Obtížnost úlohy spočívá spíše v práci s daty. S obrázky na papíře nelze nijak manipulovat, a je tedy potřeba si nějak zaznamenat a vhodně zorganizovat informace, které je obtížné uchopit pouze pamětí. Zde jsou uvedeny dva možné organizační principy. Problémem obdobných úloh, kde je dán obrázek nějakého obrazce, je to, že s obrazcem na obrázku se zachází, jako kdyby měl ty vlastnosti, které na první pohled může mít. Například trojúhelník vypadá jako pravoúhlý, tak se s ním zachází jako s pravoúhlým a nikdo to nezpochybňuje. Stejně tak, když se popisuje, že jistý bod S je středem nějaké úsečky, tak pokud to tak na první pohled vypadá, pracujeme s tím jako s faktem. O ověřování předpokladů měřením se neuvažuje. Navíc ty by se při kopírování pracovního listu mohly změnit. Proto zde předkládáme obrazce na čtverečkovaném papíru, kde ale musíme pracovat s předpokladem, že je skutečně čtverečkovaný. Tím jsou metrické vlastnosti daných mřížových obrazců jednoznačně dány.

Zjišťování, zda nějaký obrazec jistou vlastnost má, nebo nemá, je méně obtížné než hledat vlastnost, která je společná dané skupině objektů a jež ji diferencuje od druhé skupiny objektů. Doporučujeme tedy s touto hrou často pracovat.

17 KOMBINATORIKA

VSTUPNÍ ÚLOHA: **SLOVA**

Z písmen K, O, R lze vytvořit šest třípísmenných slov: KOR, ROK, OKR, ORK, KRO a RKO. Každé písmeno je použito ve slově právě jednou, žádné písmeno se neopakuje. Není nutné, aby vytvořené slovo mělo nějaký význam. U prvních dvou slov jsou K a R odděleny samohláskou O, u posledních čtyř stojí souhlásky K a R vedle sebe.

Kolik šestipísmenných slov lze vytvořit ze šesti písmen E, O, U, K, L, M, jestliže žádné písmeno se ve slově nesmí opakovat a vedle sebe nesmí stát ani dvě samohlásky, ani dvě souhlásky?

✂ -- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -- ✂

ŘEŠENÍ

Jestliže samohlásku označíme znakem ○ a souhlásku znakem □, pak každé hledané slovo má buď tvar □○□○□○, nebo tvar ○□○□○□. Ptáme se, kolik je slov tvaru □○□○□○. Jedno takové slovo je například KELOMU. Nechme samohlásky, jak jsou, a měňme pozice souhlásek. Dostaneme dalších pět slov LEMOKU, MEKOLU, KEMOLU, MELOKU, LEKOMU. Tedy slov typu □E□O□U je šest. Stejně šest je i slov typu □U□E□O. Ke každému pořadí samohlásek existuje 6 slov. Pořadí samohlásek je stejně tolik, kolik bylo pořadí souhlásek, tedy 6. Všech hledaných slov tvaru □○□○□○ je tedy 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36. Je jasné, že stejně je i všech hledaných slov tvaru ○□○□○□. Tedy všech hledaných slov je 72.

Přehledně lze zapsat všech 36 řešení tvaru □○□○□○ do tabulky, ve které sloupce budou nadepsané trojicí souhlásek a řádky trojicí samohlásek.

Komentář. Vypisování tabulky pomůže žákům pochopit všechny tři myšlenky, které tvoří páteř výše uvedeného řešení. Pracnost vypisování možná přivede některé žáky k rychlejšímu stromovému grafu.

	K_L_M_	L_M_K_	M_K_L_	K_M_L_	M_L_K_	L_K_M_
EOU	KELOMU	LEMOKU	MEKOLU	KEMOLU	MELOKU	LEKOMU
OUE	KOLUME	LOMUKE	MOKULE	KOMULE	MOLUKE	LOKUME
UEO	KULEMO	LUMEKO	MUKELO	KUMELO	MULEKO	LUKEMO
EUO	KELUMO	LEMUKO	MEKULO	KEMULO	MELUKO	LEKUMO
UOE	KULOME	LUMOKE	MUKOLE	KUMOLE	MULOKE	LUKOME
OEU	KOLEMU	LOMEKU	MOKELU	KOMELU	MOLEKU	LOKEMU

Žákům, pro které je úloha příliš náročná, dáme obdobnou úlohu s menším počtem písmen. Všech pětipísmenných slov tvořených písmeny E, O, K, L, M, u nichž vedle sebe nesmí stát dvě samohlásky ani dvě souhlásky, je 12. Když ubereme písmeno M, bude hledaných čtyřpísmenných slov 8. Naopak, když k daným písmenům E, O, U, K, L, M přidáme N, bude počet hledaných slov 144. Zde totiž každé slovo má tvar □○□○□○□, pořadí samohlásek je 6, pořadí souhlásek je 24. Tedy výsledek je 24 × 6 = 144.

Uvedenou úlohu i její další variace lze vložit do různých kontextů. Například z číslic 1, 2, 3, 4, 5 a 6 tvořit všechna šestimístná čísla, ve kterých se žádná číslice neopakuje a dvě sudé ani dvě liché číslice nestojí vedle sebe. Nebo hledáme, kolika způsoby je možné do zástupu postavit Evu, Olgu, Uršulu, Karla, Láďu a Martina tak, že buď za každým hochem stojí dívka, nebo za každou dívkou hoch.

✂ -- ✂

DALŠÍ ÚLOHY

Ve všech následujících úlohách tvoříme slova z jistého počtu písmen. Ve všech případech se žádné písmeno ve tvořeném slově nesmí opakovat a každé z uvedených písmen musí být v slově použito.

1. Z písmen A, B, R, T tvoříme slova, v nichž samohláska je buď prvním, nebo posledním písmenem. Kolik takových slov můžeme vytvořit?
2. Z písmen A, B, R, T tvoříme slova, v nichž samohláska není ani první, ani poslední písmeno. Kolik takových slov můžeme vytvořit?
3. Z písmen A, E, B, R, T tvoříme slova, v nichž první i poslední písmeno je samohláska. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

4. Z písmen A, E, B, R, T tvoříme slova, v nichž žádné dvě souhlásky nestojí vedle sebe. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

5. Z písmen A, E, B, R, T tvoříme slova, v nichž obě samohlásky stojí vedle sebe, ale tři souhlásky vedle sebe nestojí. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

6. Z písmen A, E, B, R, T tvoříme slova, v nichž obě samohlásky stojí vedle sebe. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

7. Z písmen A, E, O, B, R, T tvoříme slova, v nichž žádné dvě samohlásky nestojí vedle sebe, a B a R stojí vedle sebe. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

8. Z písmen A, E, B, K, L, R, tvoříme slova, v nichž žádné tři souhlásky nestojí vedle sebe a písmena A, E stojí vedle sebe. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

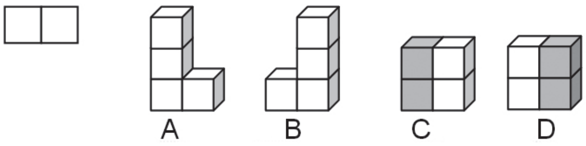
9. Z písmen A, E, O, B, K, L, R, tvoříme slova, v nichž mezi každými dvěma samohláskami leží dvě nebo čtyři souhlásky. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

10. Z písmen A, Á, E, É, B, K, L, tvoříme slova, v nichž mezi každými dvěma samohláskami leží souhláska a dlouhá samohláska je na začátku i na konci slova. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

11. Z písmen A, Á, E, É, B, K, L, tvoříme slova, v nichž mezi každými dvěma samohláskami leží souhláska a na začátku slova je dlouhá samohláska. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

12. Z písmen A, Á, E, É, B, K, L tvoříme slova, v nichž mezi každými dvěma souhláskami leží aspoň jedna krátká a aspoň jedna dlouhá samohláska. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

V další sérii úloh budeme z daného počtu krychlí tvořit stavby nad půdorysem, který je obdélníkem ze dvou čtverců. Za stejné při tom budeme považovat takové dvě stavby, pro něž platí, že jednu z nich lze dostat do stejné polohy, jako je druhá, otáčením podložky (rotací kolem svislé osy), na které stavba stojí. Stejné jsou tedy například stavby A a B nebo C a D na obrázku.



13. Tvoříme stavby ze čtyř krychlí. Tři jsou bílé a jedna černá. Kolik různých staveb lze vytvořit?

14. Tvoříme stavby ze čtyř krychlí. Dvě jsou bílé a dvě černé. Kolik různých staveb lze vytvořit?

15. Tvoříme stavby ze čtyř krychlí. Dvě jsou bílé a dvě černé. Kolik různých staveb lze vytvořit, jestliže se dvě černé krychle nesmí dotýkat stěnou?

16. Tvoříme stavby ze čtyř krychlí. Dvě jsou bílé a dvě černé. Kolik různých staveb lze vytvořit, jestliže se ani dvě černé, ani dvě bílé krychle nesmí dotýkat stěnou?

17. Tvoříme stavby ze čtyř krychlí. Dvě jsou bílé, jedna černá a jedna šedá. Kolik různých staveb lze vytvořit?

18. Tvoříme stavby ze čtyř krychlí. Dvě jsou bílé, jedna černá a jedna šedá. Kolik různých staveb lze vytvořit, jestliže se dvě bílé krychle nesmí dotýkat stěnou?

19. Tvoříme stavby z pěti krychlí. Čtyři jsou bílé a jedna černá. Kolik různých staveb lze vytvořit?

20. Tvoříme stavby z pěti krychlí. Tři jsou bílé a dvě černé. Kolik různých staveb lze vytvořit?

21. Tvoříme stavby z pěti krychlí. Tři jsou bílé a dvě černé. Kolik různých staveb lze vytvořit, jestliže se dvě bílé krychle nesmí dotýkat stěnou?

22. Tvoříme stavby z pěti krychlí. Tři jsou bílé a jedna černá a jedna šedá. Kolik různých staveb lze vytvořit?

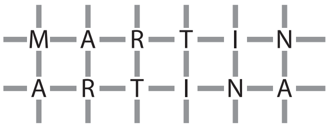
23. Tvoříme stavby z pěti krychlí. Tři jsou bílé a jedna černá a jedna šedá. Kolik různých staveb lze vytvořit, jestliže se dvě bílé krychle nesmí dotýkat stěnou?

24. Na obrázku a) je nakreslen plán ulic města, kde na každé křižovatce je značka s jedním písmenem. Cizinec prochází městem a přitom přečte slovo MARTINA.

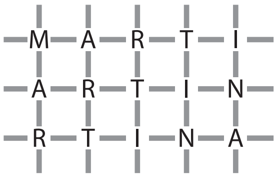
Kudy šel cizinec městem?

Kolika různými cestami mohl cizinec městem projít?

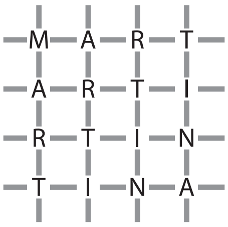
Úlohu řeš pro plán ulic města na obrázku b); c); d); e).



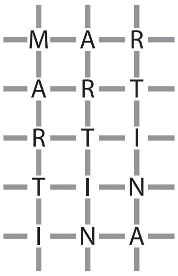
obr. a)



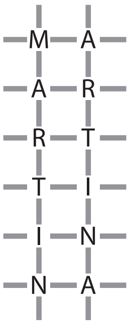
obr. b)



obr. c)



obr. d)



obr. e)

✂ ------------------------------ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ------------------------------ ✂

VÝSLEDKY

1. 12; **2.** 12; **3.** 12.; **4.** 12; **5.** 24; **6.** 48; **7.** 24; **8.** 48; **9.** 144; **10.** 24; **11.** 72; **12.** 96; **13.** 6; **14.** 9; **15.** 4; **16.** 3; **17.** 18; **18.** 8; **19.** 10; **20.** 20; **21.** 2; **22.** 40; **23.** 4; **24. a)** 6; **b)** 15; **c)** 20; **d)** 15; **e)** 6.

Komentář

M A R T I N A

→	→	→	→	→	↓
→	→	→	→	↓	→
→	→	→	↓	→	→
→	→	↓	→	→	→
→	↓	→	→	→	→
↓	→	→	→	→	→

Úloha 24. svádí ke grafickému řešení kreslením všech cest. To je velice nepřehledné. Navrhujeme řešení uchopit opět tabulkou. Písmena M, A, R, T, I, N, A jsou umístěna v záhlaví nad svislými linkami tabulky. V okénku tabulky je buď →, nebo ↓ podle toho, kterým směrem se z daného místa vydáváme. Uvedená tabulka řeší úlohu a). Místo šipek lze psát jakékoli dva různé znaky.

Uvedeme sofistikovanější řešení této úlohy, které připravuje i řešení obecné (kdy je potřeba jít *m* kroků vpravo a *n* kroků dolů). Nejprve si nakreslíme plán velkého města, z něhož můžeme „vyříznout“ každý z našich pěti plánů. Na tomto plánu počítáme, kolika cestami se od písmene M dostaneme do písmene R, pak do písmene T atd. Tyto počty jsou uvedeny v tabulce vpravo od plánu. Do každého písmena na prvním řádku i v prvním sloupci se dostaneme jen jedním způsobem, proto jsou v prvním řádku i sloupci samé jedničky. Do R na druhém řádku se dostaneme dvěma způsoby: M→↓R nebo M↓→R. Proto místo R ve druhém řádku píšeme dvojku. A takto pokračujeme. Do písmene N na třetím řádku se dostaneme buď z písmene I na druhém řádku (sem se můžeme dostat 4 cestami), nebo z písmene I na třetím řádku (sem se můžeme dostat 6 cestami). Tedy do písmene N na třetím řádku se můžeme dostat 4 + 6 = 10 cestami. Tímto způsobem lze rozšiřovat tabulku podle potřeby. Vyspělí žáci se mohou pokusit o zobecnění v jednotlivých řádcích nebo sloupcích tabulky.

M	A	R	T	I	N			1	1	1	1	1
A	R	T	I	N	A		1	2	3	4	5	6
R	T	I	N	A			1	3	6	10	15	
T	I	N	A				1	4	10	20		
I	N	A					1	5	15			
N	A						1	6				

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **AUTOBUSOVÁ LINKA**

Autobusová linka má zastávku nástupní, zastávku výstupní a k dalších zastávek. V nočním provozu, kdy cestuje méně lidí, plánuje dopravní podnik zrychlit jízdu autobusu tím, že ve dvou zastávkách bude autobus zastavovat jen na znamení. Podmínkou ale je, že dvě zastávky na znamení nesmí být hned za sebou. Kolik je možností výběru dvou zastávek, kde bude autobus zastavovat jen na znamení? Řeš úlohu, jestliže:

a) $k = 5$,

b) $k = 6$,

c) $k = 7$,

d) $k = 10$,

e) $k = 18$.

Komentář. Úlohu lze snadno gradovat například tím, že se počet zastávek na znamení zvýší na tři. Nejšikovnější žáci by mohli vyjádřit i obecné řešení u obou úloh.

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

Přehledné řešení dostaneme například tabulkou, kde vodorovné záhlaví jsou pořadová čísla zastávek, které lze zvolit jako zastávky na znamení. Křížkem jsou vyznačeny zvolené zastávky na znamení. První a poslední sloupec vyznačují nástupní a výstupní zastávky, kde autobus musí zastavit. Počet řádků vyjadřuje počet řešení.

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**V**
N	X		X			V
N	X			X		V
N	X				X	V
N		X		X		V
N		X			X	V
N			X		X	V

Dvě zastávky na znamení: **a)** 6; **b)** 10; **c)** 15; **d)** 36; **e)** 136;

obecně $(n - 2) + (n - 3) + (n - 4) + \ldots + 2 + 1 = (n - 1) \cdot (n - 2)/2$.

Tři zastávky na znamení: **a)** 1; **b)** 4; **c)** 10; **d)** 56; **e)** 560.

Při více zastávkách autobusové linky a při třech a více zastávkách na znamení je však i tabulka nepřehledná. Nabízíme tento postup obecného řešení:

Odložme dvě zastávky stranou a z $k - 2$ zbylých zastávek vyberme tři, které budou na znamení.

To lze udělat $(k - 2) \cdot (k - 3) \cdot (k - 4)/6$ způsoby. Kamkoli za první i kamkoli za druhou z vybraných zastávek vložme jednu z odložených zastávek. Tím zajistíme, že první a druhá zastávka na znamení a také druhá a třetí nebudou hned za sebou. Všech k zastávek je opět na místě a tři z nich jsou na znamení.

V případě, že místo tří zastávek vybíráme m zastávek na znamení, počet řešení bude $\binom{k - m + 1}{m}$.

Komentář. Máme dva vážné důvody pro zařazování úloh z oblasti kombinatoriky do učiva matematiky 8. a 9. ročníku. Jedním důvodem je, že se kombinatorické úlohy vyskytují v šetření PISA. Jsou ale vždy takové, že je lze řešit bez znalosti vzorečku, jen vyjmenováním všech možností. Druhým důvodem je to, že v RVP druhého stupně se požadavek na kombinatoriku nevyskytuje, a tak jen někteří učitelé druhého stupně tyto úlohy do učiva matematiky zařazují. Kombinatorika je zařazena do učiva střední školy, kde se mnohdy žákům předloží již hotové vzorečky bez dostatečného množství zkušeností s řešením bez vzorečku. Vzoreček pak nepřichází s porozuměním jako nástroj na zjednodušení práce. Řešení úloh se pak obvykle odehrává v identifikaci vzorečku, který se na danou úlohu „nasadí“. Doporučujeme tedy již na druhém stupni často zařazovat takové kombinatorické úlohy, které lze řešit výčtem a vhodnou organizací souboru možností, a tak žáky připravit na porozumění vzorečkům na střední škole.

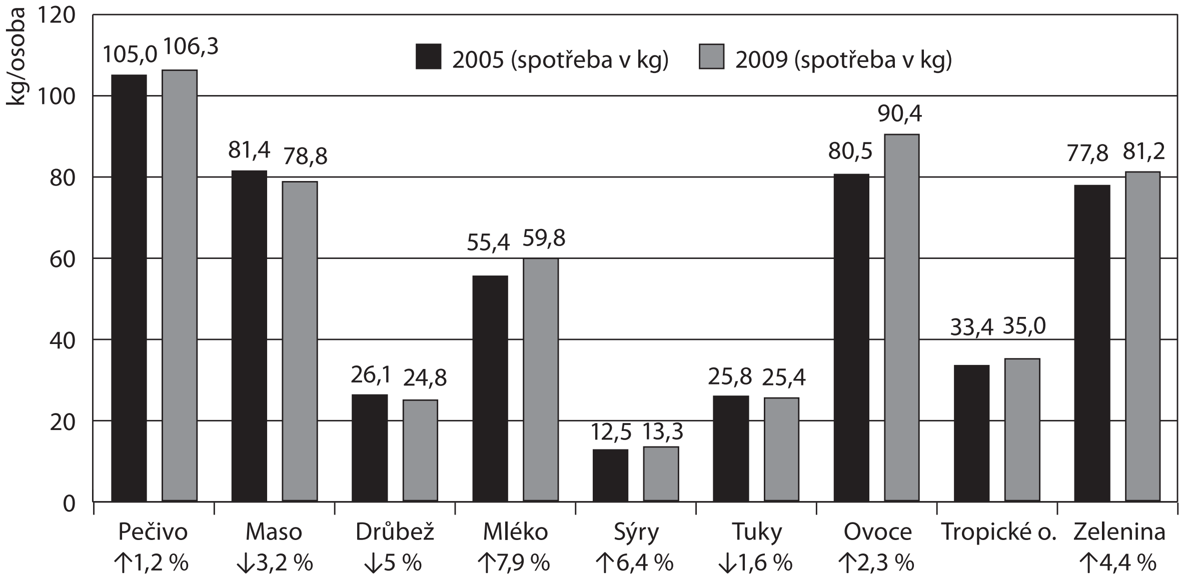
18 ABSOLUTNÍ A RELATIVNÍ ZMĚNA

VSTUPNÍ ÚLOHA: **KOLIK ČEHO JÍME**

Někteří odborníci se obávají, že se stravovací návyky obyvatel v ČR vyznačují vysokou spotřebou tuků a cukrů a malou spotřebou ovoce a zeleniny, což souvisí s vysokým výskytem civilizačních chorob. Diagram udává spotřebu potravin na jednoho obyvatele v ČR v roce 2005 a v roce 2009 a její změnu v procentech.

(Zdroj: www.czso.cz, odkazy: Statistiky – Obyvatelstvo – Data – ČR od roku 1989 v číslech – Spotřeba a ceny – Tabulka 03.02.)

Spotřeba potravin v kg na jednoho obyvatele v ČR



a) U tropického ovoce chybí údaj o změně spotřeby v procentech. Doplň scházející údaj do diagramu.

b) Tomáš prohlásil, že našel chybu v údajích o procentech. Pokles spotřeby drůbežího masa (5 %) je větší než pokles celkové spotřeby masa (3,2 %). A to není možné, když drůbeží maso je jen jeden z druhů masa. Souhlasíš s Tomášem? Své rozhodnutí zdůvodni.

c) David s Mirkou hledali v diagramu největší a nejmenší změny ve spotřebě potravin. Zatímco na největší změně se shodli – je to změna ve spotřebě ovoce, o nejmenší změnu se přeli. David tvrdil, že k nejmenší změně došlo u spotřeby pečiva. Mirka byla přesvědčena, že k nejmenší změně došlo ve spotřebě tuků. Mohl bys jako soudce rozřešit jejich spor smírem? Svou odpověď odůvodni.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) Změna vyjádřená v kg je +1,6 kg. Změna vyjádřená v procentech je +(1,6 : 33,4) · 100 % = +4,8 %. Nebo výpočet přes jedno procento: 33,4 : 100 = 0,334 (jedno procento). 1,6 : 0,334 = 4,8 (počet procent). Znaménko změny je v diagramu vyjádřeno šipkou nahoru (vzrůst).

b) Ne, nesouhlasím. Možné zdůvodnění: Spotřeba ostatních druhů masa mohla poklesnout mnohem méně, nebo dokonce mohla vzrůst. Drůbeží maso tvoří jen asi třetinu spotřeby masa, ostatní druhy masa mohou změnu více ovlivnit.

c) Ano, mohl. David i Mirka mají pravdu, každý z jiného hlediska. David nalezl nejmenší změnu vyjádřenou v procentech (nejmenší relativní změna), Mirka nalezla nejmenší změnu vyjádřenou v kg (nejmenší absolutní změna).

Výpočty: Absolutní změna ve spotřebě pečiva je (106,3 – 105,0) kg = 1,3 kg, tomu odpovídá relativní změna (1,3 : 105,0) · 100 % ≐ 1,24 %. Absolutní změna ve spotřebě tuků je (25,4 – 25,8) kg = – 0,4 kg, tomu odpovídá relativní změna (–0,4 : 25,8) · 100 % = –1,55 %, znaménko minus vyjadřuje, že u tuků došlo k poklesu spotřeby.

✂ ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. V tabulce je uveden počet vydávaných novin a časopisů v letech 2005 až 2010.

(Zdroj: www.czso.cz, odkazy: Vydáváme – Časové řady – ČR od roku 1989 v číslech – Vzdělávání a kultura – Tabulka 12.10.)

Rok	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Vydávané noviny	116	165	118	126	123	122
Vydávané časopisy	244	249	249	269	208	188

Zjisti z tabulky, mezi kterými dvěma roky došlo k největší změně v počtu vydávaných

a) novin,

b) časopisů.

Vyjádři tuto změnu absolutně (počet) a relativně (s přesností na celá %).

2. Meteorologové dlouhodobě sledují počty tropických dnů (teplota vystoupí nad 30 ˚C) a počty ledových dnů (teplota nevystoupí nad 0 ˚C) za rok. V období let 1991 až 2000 stoupl průměrný počet tropických dnů na 9,7 dne za rok, což je o 5,8 dnů za rok více než ve srovnání s obdobím let 1981 až 1990. Počet ledových dnů naopak v období let 1991 až 2000 poklesl o 8,3 % ve srovnání s lety 1981 až 1990, kdy bylo průměrně 35,3 ledového dne za rok.

(Zdroj: www.natr.cz, odkazy: Publikace – Časopisy – 2006 – Článek Projevy změn globálního klimatu v České republice – Obrázek 3.)

(Zdroj: www.amet.cz/klima/dny91-98.htm.)

Ze zadaných údajů zjistěte:

Která ze změn je větší, když ji vyjádříme počtem dnů?

Která ze změn je větší, když ji vyjádříme v %? Jaká znaménka můžeme změnám přiřadit?

Kolik bylo průměrně za rok tropických dnů v období let 1981 až 1990?

Kolik bylo průměrně za rok ledových dnů v letech 1991 až 2000?

3. Meteorologové dlouhodobě sledují také nejvyšší a nejnižší teploty vzduchu v průběhu dne. Tabulka srovnává průměrnou nejvyšší a nejnižší denní teplotu v období let 1961 až 1970 s průměrnou nejvyšší a nejnižší teplotou v letech 1991 až 2000 na dvou místech v České republice: v pražském Klementinu a v Českých Budějovicích.

(Zdroj: www.cbks.cz.)

Období	**1961–1970**	**1991–2000**
Klementinum – průměrná nejvyšší teplota	13,4 ˚C	14,6 ˚C
Klementinum – průměrná nejnižší teplota	6,0 ˚C	7,2 ˚C
České Budějovice – průměrná nejvyšší teplota	12,7 ˚C	13,6 ˚C
České Budějovice – průměrná nejnižší teplota	3,6 ˚C	4,5 ˚C

a) S kterým tvrzením souhlasíš? Svou odpověď zdůvodni.

A. Přírůstek průměrné nejnižší teploty je stejný jako přírůstek průměrné nejvyšší teploty, a to v Klementinu i v Českých Budějovicích.

B. K větší relativní změně došlo u průměrných nejnižších teplot.

b) Prohlédni si všechny získané údaje o teplotách a rozhodni, která z následujících tvrzení jsou správná a která nesprávná pro období 1961–2000. Své rozhodnutí zdůvodni.

A. Teploty v Českých Budějovicích jsou většinou nižší než v Praze.

B. Zatímco nejvyšší denní teploty v Praze rostly, v Českých Budějovicích poklesly.

C. Všeobecně platí, že v České republice nejvyšší denní teploty vzrostly a nejnižší denní teploty poklesly.

D. Zvyšování průměrných nejvyšších i nejnižších denních teplot bylo více patrné v Praze než v Českých Budějovicích.

✂ -------------------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -------------------- ✂

ŘEŠENÍ A VÝSLEDKY

1. a) K největší změně v počtu vydávaných deníků došlo mezi lety 2005 a 2006, absolutní změna byla +49 deníků, relativní změna +42 %.

b) K největší změně v počtu vydávaných časopisů došlo mezi lety 2008 a 2009, absolutní změna byla –61 časopisů, relativní změna –23 %.

2. Změna v počtu ledových dnů je 35,3 dny · 0,083, což je přibližně –2,9 dny, větší absolutní změna tedy nastala u tropických dnů. Změna v počtu tropických dnů vyjádřená v procentech je (5,8 dne : 3,9 dne) · 100 % = 148,7 %. Větší relativní změna tedy nastala u tropických dnů. Změnu v počtu tropických dnů označíme znaménkem + (vzrůst), změnu v počtu ledových dnů označíme znaménkem – (pokles). V období let 1981 až 1990 bylo průměrně 9,7 – 5,8 = 3,9 tropického dne. V letech 1991 až 2000 bylo průměrně 35,3 – 2,9 = 32,4 ledového dne.

	1981–1990	**1991–2000**	**absolutní změna**	**relativní změna v %**
tropické dny	3,9	**9,7**	**+5,8**	+148,72 %
ledové dny	**35,3**	32,4	–2,9	**–8,30 %**

3. a) Obě tvrzení jsou správná. Tvrzení A: Změny vyjádřené ve °C jsou u obou teplot v Klementinu +1,2 °C, v Českých Budějovicích +0,9 °C. Tvrzení B: Změny vyjádřené v % jsou větší u nejnižších teplot. V Klementinu je přírůstek nejvyšší denní teploty +9,0 % a přírůstek nejnižší teploty +20 %. V Českých Budějovicích je přírůstek nejvyšší teploty +7,1 % a přírůstek nejnižší teploty +25 %.

b) Tvrzení A je správné. Nejvyšší i nejnižší denní teploty jsou v Českých Budějovicích nižší než v Praze, tedy i ostatní teploty v průběhu dne budou většinou nižší. Tvrzení B není správné. Nejvyšší denní teploty rostou jak v Praze, tak v Českých Budějovicích. Tvrzení C není správné. Na obou místech dochází k nárůstu jak nejvyšších, tak nejnižších denních teplot. Tvrzení navíc nelze zobecnit na celou ČR. Tvrzení D není správné. Platí pro absolutní změny, neplatí pro relativní změny.

Komentář

1. K větší absolutní změně došlo u vydávání časopisů, k větší relativní změně došlo u vydávání novin. Děti zjišťují, že při výpočtu změny v % hraje roli výše procentového základu. Je také vhodné interpretovat znaménko změny.

2. V úloze žáci procvičují výpočty absolutních a relativních změn.

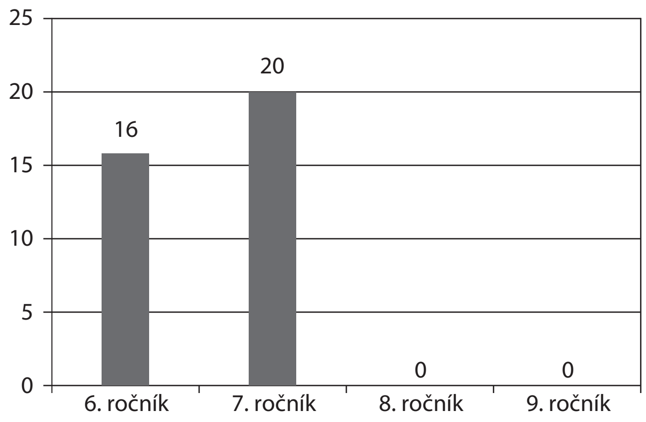
3. Úloha a). Při řešení úlohy je vhodné navrhnout žákům, aby vytvořili další sloupec v tabulce pro vyjádření všech čtyř absolutních změn teplot. Po výpočtu vyvstane potřeba dalšího sloupce pro relativní změny teplot. Úloha na konkrétní situaci ukazuje, že při hodnocení změn je užitečné porovnávat veličiny jak absolutně, tak relativně.

✂ -- ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **SPORTOVNÍ SOUTĚŽE**

Eva si od 6. ročníku vedla záznamy o tom, kolikrát se někdo z její třídy účastnil sportovní soutěže ve školním nebo vyšším kole. Pro své záznamy si připravila graf, který na konci 7. ročníku vypadal takto:

Počet účastníků sportovních soutěží

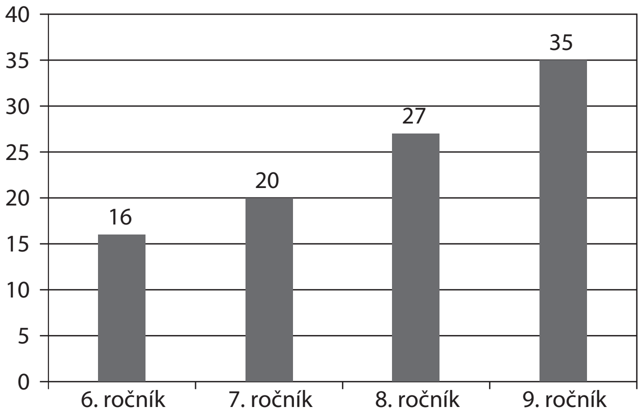


a) Když si graf prohlédla třídní učitelka, pochválila třídu za to, že od minulého školního roku zlepšila svou účast v soutěžích o 25 %, což je velký úspěch. Dolož výpočtem, co „viděla“ paní učitelka přímo z grafu.

b) Na konci 8. ročníku Eva vyvěsila ke grafu na nástěnce následující výzvu: „Od loňského školního roku jsme se zlepšili ještě více než minule, nárůst je 35 %. Kdo první správně dokreslí další sloupec, získá odměnu.“ Jak vysoký sloupec bys přikreslil(a) ty?

c) Na konci 9. ročníku Eva přikreslila sama poslední sloupec:

Počet účastníků sportovních soutěží



Na nástěnku připsala: „V tomto školním roce se počet sportovních reprezentantů třídy zvýšil nejvíce ze všech let. Dostaneme největší pochvalu.“ Adam však připsal: „Ani bych neřekl, já myslím, že k největší změně došlo v 8. ročníku. Záleží na tom, jak se to vezme.“ Zkus vysvětlit, jak to Adam myslel a zda mají oba pravdu.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) Výpočet relativního zvýšení účasti v soutěžích vychází z procentního základu 16, procentová část je 20, počet procent p = (20 : 16) · 100 % = 125 %, došlo k zvýšení účasti o 25 %. Jiný postup spočívá v určení absolutní změny 20 – 16 = 4, což je čtvrtina ze základu 16, to tedy odpovídá zvýšení o 25 %.

b) Výpočet výšky sloupce odpovídá výpočtu procentové části odpovídající 135 % ze základu 20.
Výpočet: (20 : 100) · 135 = 27. Jiný postup: Zvýšení počtu odpovídá 35 % z 20, což je (20 : 100) · 35 = 7.
Výška sloupce v grafu je 27 jednotek.

c) Oba mají pravdu. Eva má na mysli absolutní změnu a ta byla největší v 9. ročníku (přibylo 8 sportovců). Adam má na mysli relativní změnu vyjádřenou v % a ta byla v 9. ročníku jen (8 : 27) · 100 % = 29,6 %, což je ve srovnání s předcházejícím školním rokem méně.

✂ ✂

19 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ STATISTICKÝCH DAT

VSTUPNÍ ÚLOHA: **RYCHLOSTI ZVÍŘAT**

Alena, Barbora a Cilka si při návštěvě ZOO zapisovaly největší rychlosti, kterými se mohou různá zvířata pohybovat. Vytvořily následující tabulku:

zvíře	hlemýžď	želva	dikobraz	velbloud	lev	antilopa	klokan	gepard	sokol
rychlost	5 m/h	500 m/h	5 km/h	20 km/h	60 km/h	70 km/h	85 km/h	120 km/h	200 km/h

Druhý den se rozhodly, že údaje z tabulky znázorní grafem a vyvěsí ve třídě. Nemohly se ale dohodnout, jaký graf bude nejvhodnější. Sloupcový, spojnicový, nebo kruhový? U každého grafu totiž našly alespoň jeden důvod, proč je v daném případě nevhodný. Zapiš tyto důvody i ty.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

Sloupcový graf je nevhodný, protože rozdíl ve výšce sloupců je příliš velký. Želva nebo hlemýžď mají ve srovnání s nejrychlejšími zvířaty mnohonásobně menší rychlost a jejich sloupec by měl prakticky nulovou výšku.

Spojnicový graf je nevhodný, protože mezi rychlostmi zvířat není žádná souvislost (například časová). Spojení jednotlivých hodnot rychlostí čárami by vyvolalo dojem, že velikosti rychlosti pohybu jednotlivých zvířat spolu souvisejí.

Kruhový graf je nevhodný, protože výseče znázorňující rychlosti nejpomalejších zvířat mají nepatrný středový úhel. Kruh je pak rozdělen na příliš mnoho výsečí a graf je nepřehledný.

✂ ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Na jedné novinové stránce byly uveřejněny tři tabulky s výsledky statistických šetření. U každého z nich byla uvedena tabulka i diagram. Standa stránku rozstříhal a dal svým kamarádům hádanku: Která tabulka patří ke kterému diagramu?

(Zdroj: www.czso.cz, odkazy: Statistika – Informační technologie – Data – ČR od roku 1989 v číslech – Výzkum, vývoj informační technologie – tabulka 08.01.)

Tabulka 1: Domácnosti připojené k internetu

Rok	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Procento všech domácností	5,8	7,9	11,0	12,4	16,9	22,3	29,9	39,5

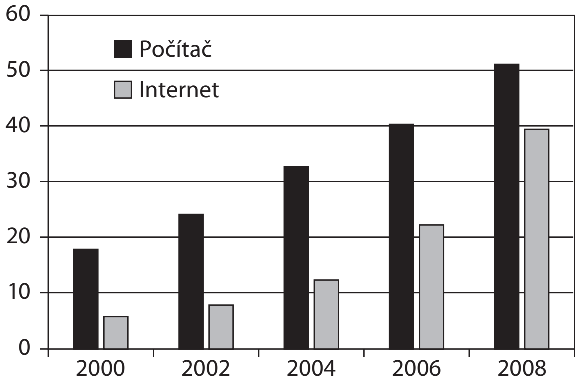
Tabulka 2: Domácností s počítačem a s připojením k internetu

Rok	2000	2002	2004	2006	2008
Procento domácností s počítačem	17,9	24,2	32,8	40,4	51,2
Procento domácností s internetem	5,8	7,9	12,4	22,3	39,5

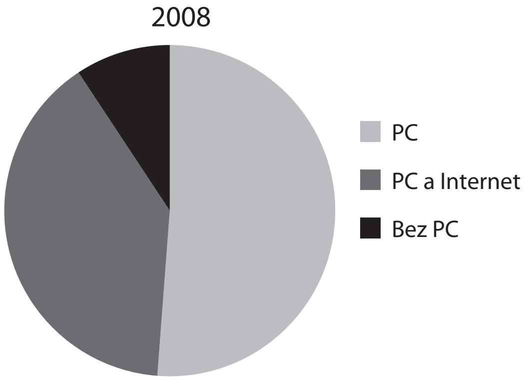
Tabulka 3: Rozdělení domácností podle vybavení IT technologiemi v roce 2008

IT technologie	PC	Internet
Procento domácností	51,2	39,5

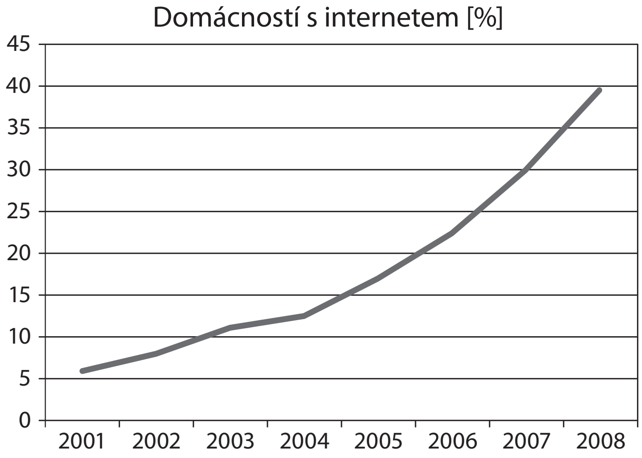
Graf A:



Graf B:



Graf C:



(Zdroj: Český statistický úřad, www.czso.cz).

2. Žáci z 8.A zjišťovali, jak se mění dopravní situace na ulici před jejich školou v průběhu dne. Každou hodinu jedna dvojice žáků počítala, kolik projede po ulici v obou směrech vozidel během 10 minut. Výsledky zapsali do následující tabulky:

Hodina	7.30–7.40	8.30–8.40	9.30–9.40	10.30–10.40	11.30–11.40	12.30–12.40	13.30–13.40
Měření	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Počet	208	195	147	122	81	76	164

a) Adam s Bárou znázornili hodnoty z tabulky pomocí sloupcového diagramu, Cyril s Danielou pomocí spojnicového diagramu a Emil s Františkou pomocí kruhového diagramu. Která dvojice zvolila nejlepší způsob – a proč? Která dvojice zvolila nejméně vhodný způsob – a proč?

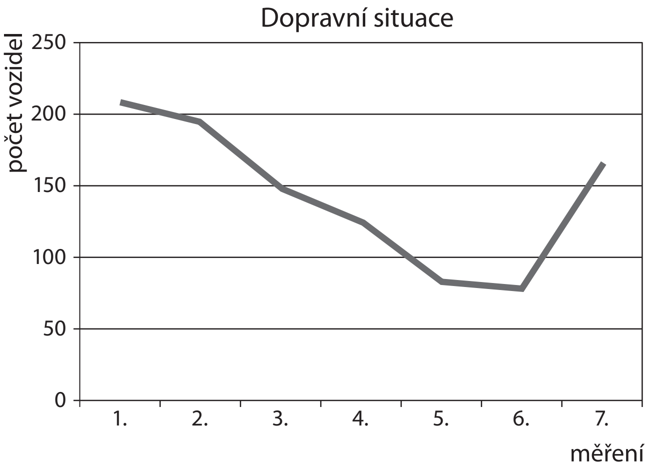
b) Využij spojnicového diagramu a rozhodni, který ze závěrů A–D je správný:

A. Počet projíždějících vozidel po celou dobu rovnoměrně klesá.

B. V době před začátkem vyučování (8.00 hodin) a po skončení vyučování (13.30 hodin) je ulice při přecházení nejnebezpečnější.

C. Od 8.30 do 12.30 hodin se počet projíždějících vozidel postupně snižuje.

D. Kolem poledne je počet vozidel nejnižší.



✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY

1. 1 – C; 2 – A; 3 – B.

2. a) Nejvhodnější je spojnicový diagram. Možná zdůvodnění:
- Umožňuje sledovat změny dopravní situace v průběhu celé doby.
- Ze sloupcového diagramu je možné rovněž vyčíst průběh, neboť časové intervaly jsou stejné.
- Kruhový diagram neukazuje časovou návaznost údajů z tabulky.

Nejméně vhodný je kruhový diagram. Možné zdůvodnění:
- V diagramu je hodně výsečí, které se od sebe moc neliší středovým úhlem.
- V diagramu nelze dobře znázornit, jak šly údaje za sebou.

b) A – nesprávně; B – správně; C – správně; D – správně.

Komentář

1. Úloha seznamuje žáky s různými způsoby grafického znázorňování statistických dat. Vyžaduje základní orientaci v údajích uvedených v grafech, jednotkách, měřítku. U kruhového diagramu navíc porovnání údajů v procentech s velikostí středových úhlů jednotlivých výsečí. Učitel může vyvolat diskusi o vhodnosti jednotlivých druhů diagramů v různých případech.

2. a) Je vhodné rozdělit třídu na 3 skupiny, každá z nich vypracuje jeden ze způsobů znázornění a pak ho budou obhajovat a odpovídat na námitky druhých dvou skupin.

b) Debata o správnosti závěrů umožní upřesnit pojmy jako „rovnoměrná změna“ a „postupné snižování“. Tvrzení B a D ukazují praktický význam zjišťování.

✂ ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **DOPINGOVÉ ANALÝZY**

Michal se zajímá o problémy sportovního dopingu a ukázal kamarádům tabulku o dopingových analýzách v různých sportech:

Disciplína	Provedených analýz	Počet pozitivních výsledků analýz
Atletika	11 266	108
Badminton	458	0
Basketbal	1 676	14
Běh na lyžích	16	1
Fotbal	9 936	39
Hokej	1 145	8
Jezdectví	168	3
Sjezdové lyžování	780	1
Vzpírání	4 165	86
Zápas	845	16

a) Pro znázornění údajů z tabulky není vhodný ani sloupcový, ani kruhový graf. Uveď jeden důvod, proč je nevhodné použít sloupcový graf, a jeden důvod, proč je nevhodné použít kruhový graf.

b) Tomáš navrhl zpracovat údaje z tabulky tak, aby bylo zřejmé, v kterém sportu se nejčastěji dopuje, a doplnil tabulku o další sloupec:

Disciplína	Provedených analýz	Počet pozitivních výsledků	Procento z počtu analýz
Atletika	11 266	108	1,0
Badminton	458	0	0,0
Basketbal	1 676	14	0,8
Běh na l.	16	1	6,3
Fotbal	9 936	39	0,4
Hokej	1 145	8	0,7
Jezdectví	168	3	1,8
Sjezdové l.	780	1	0,1
Vzpírání	4 165	86	2,1
Zápas	845	16	1,9

Poznámka: Běh na lyžích obsahuje pro statistické zpracování příliš málo sportovců, nemusí se jednat o reprezentativní vzorek.

Jsou údaje z Tomášova sloupce vhodné ke grafickému znázornění? Který graf bys pro ně zvolil? Své odpovědi zdůvodni.

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

a) Sloupcový graf je nevhodný proto, že rozdíly v hodnotách údajů jsou příliš velké. Výška sloupce například u běhu na lyžích by byla příliš malá ve srovnání s výškou sloupců třeba u atletiky. Graf by musel být buď příliš velký, nebo by malé sloupce nebyly znatelné. Kruhový graf je nevhodný proto, že počet výsečí by byl velký a graf by byl nepřehledný. Jiný možný důvod u kruhového grafu: Středové úhly některých výsečí by byly zanedbatelné ve srovnání se středovými úhly výsečí znázorňujících sporty s velkým počtem analýz a údaje by byly špatně čitelné.

b) Údaje vyjádřené v procentech pozitivních případů vzhledem k počtu provedených analýz u jednotlivých disciplín jsou pro grafické znázornění vhodné, protože rozdíly mezi jejich hodnotami již nejsou tak velké. Zvolil bych sloupcový graf, protože údajů je 10 a byly by lépe porovnatelné podle výšky sloupců než v kruhovém diagramu podle velikosti výsečí.

20 PRAVDĚPODOBNOST, NEZÁVISLÉ JEVY

VSTUPNÍ ÚLOHA: **HLADOMORNA**

Správce nejstaršího zedlandského hradu se rozhodl připravit pro návštěvníky neobvyklou atrakci. Do hladomorny dal umístit truhlici s 50 měšci, z nichž 5 je naplněno pravými zedy. Na závěr prohlídky se každý z návštěvníků může nechat spustit na dno temné hladomorny a z truhlice naplněné měšci si jeden bez otevírání vybrat a ponechat.

Emil byl při spuštění do hladomorny pátý v pořadí. Ani jeden z jeho čtyř kamarádů si předtím nevytáhl měšec s pravými mincemi. Který z výroků nejlépe popisuje Emilovu situaci? Svou odpověď zdůvodni.

A. Ani Emilovi se nepodaří získat měšec s pravými zedy, když se to nepodařilo žádnému z jeho kamarádů.

B. Pravděpodobnost, že Emil získá měšec s pravými zedy, je 10%.

C. Pravděpodobnost, že Emil získá měšec s pravými zedy, je větší než u jeho kamarádů, kteří se o to pokusili před ním.

D. Emil má stejnou naději na získání měšce s pravými zedy jako jeho kamarádi, protože je to náhoda.

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

Emilovu situaci správně popisuje výrok C. Možné zdůvodnění: Když přišel Emil na řadu, bylo v truhlici místo 45 už jen 41 nepravých měšců. Počet měšců s pravými zedy se přitom nezměnil. Poměr počtu pravých měšců k počtu všech měšců se zvětšil. Pravděpodobnost, že si první spuštěný do hladomorny vytáhne pravý měšec, je 5/50 = 1/10, což vyjádřeno v procentech je 10 %. Pravděpodobnost, že Emil vytáhne pravý měšec, je 5/46, což vyjádřeno v procentech je bezmála 11 %. Z toho plyne, že výroky A, B a D jsou nepravdivé.

✂ ---------- ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Adam si dal v pondělí do kapsy 8 bonbonů. Tři ovocné a pět mátových. Každý den cestou do školy jeden sní.

a) Který z nich si pravděpodobněji cestou do školy vytáhne z kapsy první den, ovocný nebo mátový?

b) Adam si zapamatoval, že si v pondělí vytáhl ovocný, v úterý mátový a ve středu zase mátový. Zvýšila se pravděpodobnost, že si ve čtvrtek vytáhne ovocný bonbon, který má raději?

2. Sada devíti karet je vyrobena tak, že každá karta má na jedné straně písmeno a na druhé straně jedno z čísel 1 až 9. Čísla ani písmena se neopakují. Lichá karta má vždy na druhé straně tvrdou souhlásku, sudá karta krátkou samohlásku.

a) Co je pravděpodobnější: že si ze sady vytáhnu kartu se samohláskou, nebo se souhláskou? Zdůvodni svou odpověď.

b) Adam a Boris si náhodně vybrali každý jednu kartu. Adam položil svoji kartu tak, že nahoře bylo písmeno, Boris tak, že nahoře bylo číslo. Každý z hochů má hádat, co je na druhé straně jeho karty. Který z hochů má větší pravděpodobnost, že uhodne?

c) Na stole jsou položeny tři karty se znaky A, R a 5. Na vedlejším stole je odložen balíček zbývajících karet se znakem 8 na vrchní kartě. Adam má ukázat na jednu kartu a uhodnout znak na druhé straně. Kterou kartu si vybere, aby měl co největší šanci znak uhodnout?

d) Na stole leží 4 karty. Umím s jistotou říct, jaké 4 znaky jsou na druhých stranách karet. (Ne pro každou kartu jednotlivě, ale pro všechny čtyři najednou.) Jaké karty leží na stole?

3. Honza obarvil dřevěnou kostku ve tvaru krychle s délkou hrany 4 cm na zeleno. Potom krychli rozřezal na krychličky o objemu 1 cm^3. Krychličky nasypal do sáčku a promíchal je. Pak navrhl svému bratru Vojtovi, že krychličky rozhodnou o tom, kdo bude mýt nádobí. Pokud si Vojta vytáhne neobarvenou krychličku, půjde mýt nádobí Honza, a pokud si vytáhne krychličku s alespoň jednou obarvenou stranou, půjde mýt nádobí Vojta.

a) Jsou pravidla hry stanovena spravedlivě nebo je jeden z bratrů ve výhodě? Zdůvodni.

b) Jaká je pravděpodobnost, že nádobí bude mýt Vojta?

c) Jaká by byla pravděpodobnost toho, že nádobí půjde mýt Vojta v případě, že by hrana krychle byla 5 cm, nebo 6 cm, nebo 7 cm, nebo 8 cm?

d) Jak musíme volit hranu krychle, aby pravděpodobnost toho, že nádobí půjde mýt Vojta, byla menší než 50 %?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY

1. a) Adam si pravděpodobněji vytáhne mátový bonbon, neboť je jich více.

b) Zvětšila, neboť $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$; pravděpodobnost, že vytáhnu ovocný bonbon z 8 bonbonů, z nichž jsou 3 ovocné, je $\frac{3}{8}$ a z 5 bonbonů, z nichž jsou 2 ovocné, je $\frac{2}{5}$.

2. a) Pravděpodobnost, že si vytáhnu kartu se souhláskou (tedy kartu s lichým číslem), je vyšší, neboť karet s lichým číslem je pět, se sudým pouze čtyři.

b) Větší pravděpodobnost má Adam. Když Adam vidí samohlásku, má pravděpodobnost $\frac{1}{4}$, že uhodne sudé číslo, které hádá. Když Adam vidí souhlásku, má pravděpodobnost $\frac{1}{5}$, že uhodne liché číslo, které hádá. Když Boris vidí sudé číslo, má pravděpodobnost $\frac{1}{6}$, že uhodne samohlásku, kterou hádá, neboť krátkých samohlásek je 6. Když Boris vidí liché číslo, má pravděpodobnost $\frac{1}{7}$, že uhodne souhlásku, kterou hádá, neboť tvrdých souhlásek je 7.

c) Kartu A, neboť u ní jsou na druhé straně možné pouze tři znaky: 2, 4 a 6 (karta s číslem 8 leží již vedle na stole), zatímco u ostatních je možností více (šest u karty s číslem 5, čtyři u karty se znakem R a pět u karty se číslem 8).

d) Na stole leží čtyři samohlásky. Na druhých stranách těchto karet jsou čísla 2, 4, 6, 8.

3. a) Pravidla zvýhodňují Honzu, protože neobarvených krychliček je jen 8 a obarvených 56.

b) Pravděpodobnost, že bude vytažena neobarvená krychlička je $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$. Proto pravděpodobnost, že nádobí bude mýt Vojta, je 87,5 %, tedy $\frac{56}{64}$.

c) V přiložené tabulce je dána pravděpodobnost toho, že nádobí bude mýt Vojta, pro krychle s hranou od 5 cm do 10 cm:

Délka hrany krychle v cm	5	6	7	8	9	10
Počet všech krychliček	125	216	343	512	729	1000
Z toho obarvených	98	152	218	296	386	488
Z toho neobarvených	27	64	125	216	343	512
Pravděpodobnost, že nádobí bude mýt Vojta v %	78,4	70,4	63,6	57,8	52,9	48,8

Vidíme, že tato pravděpodobnost postupně klesá.

d) Tato pravděpodobnost poprvé klesne pod 50 % při délce hrany krychle 10 cm.

Komentář

1. a) Učitel vede diskusi dětí, proč je pravděpodobnější vytažení mátového bonbonu. Argumentovat mohou například představou, že Adamova ruka spíše padne na mátový, když jich je v kapse více (prostorová představa). V diskusi by se měla vyskytnout otázka: „Může si Adam v pondělí vytáhnout ovocný bonbon, i když je pravděpodobnější vytažení mátového?“ Nejprůkaznější pro žáky je experiment – situaci s bonbony modelujeme; když každý žák udělá 10 tažení, získá se vzorek, který bude blízký teoretické pravděpodobnosti. Výsledek pokusu lze jen předvídat s určitou pravděpodobností. S tím souvisí i intuitivní uchopení jevu nemožného: „V jakém případě by si jej vytáhnout opravdu nemohl?“

b) Děti to zdůvodní například tím, že ovocných bonbonů je teď ve srovnání s mátovými více než na začátku. Učitel je může přivést k myšlence poměru „příznivých výsledků pokusu“ ke „všem možným výsledkům pokusu“ například otázkami: „Kolik je všech možností, jak si vytáhnout libovolný bonbon? Kolik je možností, jak si vytáhnout ovocný bonbon?“ Děti tak odhalí definici pravděpodobnosti: porovnávají poměr 3 : 8 na začátku s poměrem 2 : 5 nyní (přesah do učiva o porovnávání zlomků) a dojdou k závěru, že se pravděpodobnost zvětšila ve prospěch ovocných bonbonů.

2. Úloha dále rozvíjí intuitivní pojem pravděpodobnosti.

a) Žák získává vhled do situace balíku devíti karet, který si každý žák vytvoří. Tím se ukáže, že ze sedmi souhlásek H, CH, K, R, D, T, N dvě nepoužije a podobně nepoužije i jednu samohlásku. Tato nepoužitá písmena v žádném případě tažena být nemohou.

b) Náročnější situaci uchopí žák nejlépe tak, že proces tažení a pokládání karty na stůl několikrát opakuje a přehledně si zapíše vztahy mezi čísly a písmeny, například tabulkou.

c) Náročná úloha, protože sofistikovaně propojuje logiku a pravděpodobnost. Žák musí u každého ze čtyř znaků zjistit pravděpodobnost, se kterou uhodne znak na rubu karty.

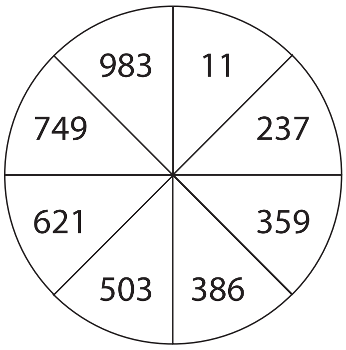
d) K vyřešení úlohy je potřebný vhled do celé situace. Proto tuto úlohu může učitel použít jako diagnostickou.

3. K řešení úlohy, která výrazně přesahuje do tématu objemy a povrchy těles, většina žáků potřebuje modely nebo alespoň obrázky (viz také soubor úloh 13 Krychlová tělesa). Po několika výpočtech žáci objeví, že v krychli s hranou n cm je n^3 krychliček a z nich je $(n-2)^3$ neobarvených. Tedy pravděpodobnost, že Honza bude mýt nádobí, je $\mathrm{H}(n) = \frac{(n-2)^3}{n^3}$ a pravděpodobnost, že je bude mýt Vojta, je $\mathrm{V}(n) = 1 - \frac{(n-2)^3}{n^3}$. S rostoucím n číslo $\mathrm{H}(n)$ roste a číslo $\mathrm{V}(n)$ klesá. Některé žáky může proces poklesu čísla $\mathrm{V}(n)$ motivovat k hlubšímu zkoumání. Žáci například zjistí, že $\mathrm{V}(20) = 0{,}271$ a $\mathrm{V}(100) = 0{,}058808$, a možná vysloví hypotézu, že to spěje k nule. To je pravda. Takové šetření dá žákům výborné zkušenosti s předpojmem limity posloupnosti.

VÝSTUPNÍ ÚLOHA : **KOLO ŠTĚSTÍ**

V jednom z obchodních domů umístili dnes u vchodu kolo štěstí a každý druhý zákazník si může kolo roztočit. Pokud si na něm „vytočí“ číslo dělitelné 3, získá od obchodního domu dárek.

Kolo štěstí:



a) Ondra dnes jde do obchodního domu nakupovat. Jaká je pravděpodobnost, že získá dárek? Vyber odpověď:

A. Je to nemožné, pravděpodobnost je nulová.

B. Pravděpodobnost je velká, určitě více než 50 %.

C. Pravděpodobnost je malá, o mnoho menší než 50 %.

D. Dárek určitě získá, je to jisté.

b) Vyjádři číselně, s jak velkou pravděpodobností Ondra získá dárek od obchodního domu.

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

a) Správná je odpověď C. „Každý druhý“ znamená 50% pravděpodobnost, že si Ondra bude moci roztočit kolo štěstí. I v příznivém případě má opět pouze určitou naději na „vytočení“ dárku, to znamená, že celková pravděpodobnost musí být menší než 50 %.

b) Pravděpodobnost možnosti si roztočit kolo štěstí je 0,5, pravděpodobnost toho, že na kole štěstí padne číslo dělitelné 3 je 2 : 8 = 1 : 4 = 0,25. Pravděpodobnost, že nastanou oba náhodné jevy najednou, je $0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}125$, tedy 12,5 % (tj. 1/8).

21 STATISTIKA, ARITMETICKÝ PRŮMĚR

VSTUPNÍ ÚLOHA: **TEST Z DĚJEPISU**

Markéta zítra píše závěrečný test z dějepisu. Za pololetí se píše dohromady 5 takových testů, za každý lze získat maximálně 100 bodů. Konečná známka se počítá podle průměrného počtu bodů připadajícího na jeden test. Z předchozích čtyř testů získala Markéta dohromady 320 bodů. Markéta by chtěla z dějepisu jedničku, na tu ale potřebuje v průměru aspoň 85 bodů na jeden test. Je vůbec možné, aby jedničku získala? Odpověď zdůvodni výpočtem.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

Markéta jedničku v tomto pololetí nezíská. Zdůvodnění: Když napíše poslední test na 100 bodů, její průměrný výsledek bude (320 + 100) bodů : 5 = 84 bodů. Jiné zdůvodnění: Nyní má Markéta průměrný výsledek 80 bodů. Potřebuje alespoň (85 + 4 · 5) bodů = 105 bodů, aby celkový průměr byl 85 bodů. To je ale nemožné, neboť maximální počet bodů je 100.

DALŠÍ ÚLOHY

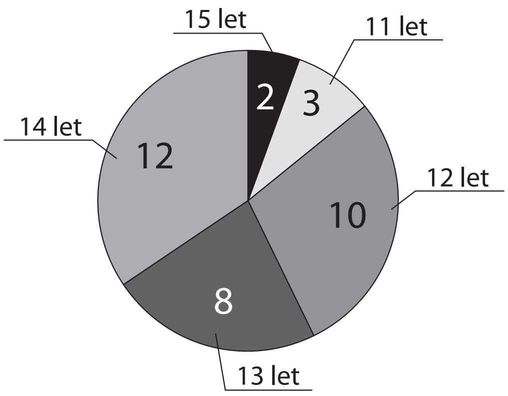
1. Urči taková dvě čísla, aby byl jejich průměr 18 a rozdíl mezi nimi **a)** 4; **b)** 6; **c)** 13.

2. Vyjádři daný součet čtyř nebo pěti čísel jako součet čtyř nebo pěti stejných čísel. [Příklad: Součet čtyř čísel 5 + 3 + 9 + 7 = 24 vyjádříme jako součet čtyř čísel 6, 6 + 6 + 6 + 6 = 24.]

a) 3 + 3 + 4 + 5 + 5; **b)** 1 + 2 + 8 + 9; **c)** 3 + 4 + 6 + 9; **d)** 1 + 2 + 3 + 4 + 6.

3. Děti v pěveckém souboru zjišťovaly, kolik je jim let. Helenka s Honzou zjištěné údaje zapsali do datového souboru a vytiskli tento diagram:

Rozdělení dětí podle věku



Z diagramu vidíme, že nejstarší jsou dva 15letí a nejmladší jsou tři 11letí.

Děti se ptaly pana sbormistra, kolik je mu let. Odpověděl, že kdyby se do průměrného věku všech členů sboru započítal i jeho věk, zvýšil by se tento průměrný věk přesně o půl roku.

a) Honza ukázal dětem diagram a řekl: „To je zajímavé, náš průměrný věk je přesně 13 let.“ Má Honza pravdu? Odpověď zdůvodni.

b) Renáta řekla: „Kdybych ze souboru odešla, průměrný věk souboru by se nezměnil. Kolik let je Renátě?

c) Jak starý je sbormistr?

d) Jak se změní věkový průměr vaší třídy, zahrnete-li do něj věk svého učitele matematiky? Dohodněte se, jak budete věk posuzovat, zda na poloviny roku, nebo na měsíce.

4. Když tři kamarádi dali do společné kasy vše, co měli u sebe, leželo na stole 180 Kč. Petr řekl, že průměrná částka jeho a Martinova příspěvku, je o 12 Kč menší než příspěvek Jirky. Martin dodal, že on přispěl o 2 Kč méně než Petr. Kolik do společné kasy přispěl Petr, kolik Martin a kolik Jirka?

5. Aritmetický průměr tří přirozených čísel je 10 a rozdíl mezi nejmenším a největším z nich je

a) 7,

b) 12.

Najdi všechna tři čísla. Hledej co nejvíce řešení.

6. Urči **a)** tři, **b)** čtyři, **c)** pět přirozených čísel tak, aby jejich aritmetický průměr byl 18 a rozdíl mezi nejmenším a největším z nich byl 6.

✂ -- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -- ✂

VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

1. a) 16 a 20; **b)** 15 a 21; **c)** 11,5 a 24,5.

2. a) 4; **b)** 5; **c)** 5,5; **d)** 3,2.

3. a) Honza má pravdu. Kdyby každému bylo 13 let, dohromady by měli stejně, jako právě doopravdy mají (tj. 35 · 13 let = 3 · 11 let + 10 · 12 let + 8 · 13 let + 12 · 14 let + 2 · 15 let = 455 let).

b) Renátě je 13 let.

c) Řešení úvahou: Tím, že započítáme do souboru i sbormistra, stoupne průměrný věk všech o 0,5 roku. Věk zpěváků by vzrostl o 0,5 · 35 = 17,5 roku. O tolik let musí mít sbormistr nad 13,5 roku. Sbormistrovi je tedy 31 let.

Řešení rovnicí: Označme věk sbormistra x (let). Všem i se sbormistrem je 455 + x a jejich průměrný věk je (455 + x) / 36 let. Tedy (455 + x) / 36 = 13,5. Odtud x = 31.

d) Procvičujeme počítání průměrů. Je možné použít úvahu: Zvýšení věkového průměru je způsobeno vyšším věkem učitele. To, o kolik převyšuje věk učitele průměrný věk žáků třídy, je rovnoměrně rozděleno mezi všechny započítané osoby (počet žáků + 1) a připočteno k průměrnému věku žáků. Zvýšení průměrného věku třídy tedy dostaneme, když rozdíl mezi věkem učitele a věkovým průměrem žáků třídy vydělíme počtem žáků zvětšeným o jedna.

4. Řešení metodou pokus–omyl: Předpokládejme, že Martin přispěl 50 Kč. Příspěvek Petra pak bude 52 Kč a průměrný příspěvek obou chlapců 51 Kč. Jirka tak přispěje 63 Kč a celková částka bude 50 + 52 + 63 = 165 Kč. To je o 15 Kč méně než požadovaných 180 Kč. Když příspěvek Petra zvýšíme o 1 Kč, zvýší se stejně i příspěvek Martina i příspěvek Jirky. Celková částka tak vzroste o 3 Kč. My ale potřebujeme zvýšení o 15 Kč, tedy pětkrát vyšší. Na každého hocha tak připadá zvýšení o 5 Kč. Výsledek: Martin přispěl 55 Kč, Petr 57 Kč a Jirka 68 Kč.

Řešení rovnicí: Označme příspěvek Martina x Kč. Pak příspěvek Petra je (x + 2) Kč. Průměr obou je (x + 1) Kč. Tedy příspěvek Jirky je (x + 13) Kč. Součet příspěvků je $x + (x + 2) + (x + 13) = 3x + 15$. Z rovnice $3x + 15 = 180$ máme $x = 55$.

5. a) Existují 2 řešení: (6, 11, 13) a (7, 9, 14); **b)** existuje 5 řešení: (2, 14, 14), (3, 12, 15), (4, 10, 16), (5, 8, 17), (6, 6, 18).

6. a) Existují 3 řešení: (14, 20, 20), (15, 18, 21) a (16, 16, 22);

b) existuje 8 řešení: (14, 18, 20, 20), (14, 19, 19, 20), (15, 15, 21, 21), (15, 16, 20, 21), (15, 17, 19, 21), (15, 18, 18, 21), (16, 16, 18, 22) a (16, 17, 17, 22);

c) existuje 16 řešení: (14, 16, 20, 20, 20), (14, 17, 19, 20, 20), (14, 18, 19, 19, 20), (14, 18, 18, 20, 20), (15, 15, 18, 21, 21), (15, 15, 19, 20, 21), (15, 16, 17, 21, 21), (15, 16, 18, 20, 21), (15, 16, 19, 19, 21), (15, 17, 17, 20, 21), (15, 17, 18, 19, 21), (15, 18, 18, 18, 21), (16, 16, 16, 20, 22), (16, 16, 17, 19, 22), (16, 16, 18, 18, 22) a (16, 17, 17, 18, 22).

Komentář

1. Úloha pomáhá upevnit představu, že aritmetický průměr dvou čísel je hodnota ležící uprostřed mezi nimi. Zároveň žák vidí, že obě čísla jsou od průměru stejně vzdálená, a to o polovinu jejich vzájemné vzdálenosti. To žáci využijí k řešení. Někteří mohou hledat řešení graficky na číselné ose, někteří početně. Je dobré, aby ve třídě zazněly oba přístupy.

2. Úlohy a) a b) se dobře modelují s konkrétními číselnými modely, například počty žetonů. Doporučujeme tyto vyzkoušet a vést práci k objevu, že aritmetický průměr je číslo, které reprezentuje situaci, ve které mají všechny jednotky souboru stejnou hodnotu, aniž by se změnil jejich součet (reprezentuje soubor jedinou hodnotou). Jednou ze strategií (zvláště u úlohy 2a) je strategie tzv. dorovnávání (tj. ubírání z větších hromádek a přidávání na menší). Pokud se mezi žáky objeví, doporučujeme ji prodiskutovat s celou třídou a navázat na ni u dalších úloh. Strategie se ukáže neefektivní u úloh c) a d), ale její podstata stále poskytuje přiměřený odhad (bude to více než 5, méně než 6 atd.).

3. Tato úloha nechává žáky pracovat s aritmetickým průměrem a jeho změnou po přidání dalšího prvku do souboru pozorovaných dat. V a) je vhodné zaměřit pozornost dětí na graf a vhodně volit otázky (Kolika dětem je 15 let? Kolik je dětí ve sboru?). Aritmetický výpočet průměrného věku je vhodné porovnat se strategií dorovnávání (když je 10 žáků dvanáctiletých, stačí 10 čtrnáctiletých dorovnat věk dvanáctiletých na průměr 13 let a ještě zbudou 2 čtrnáctiletí, kteří mohou být vyvážení jedním jedenáctiletým atd.). Tím upevňujeme koncept průměrné hodnoty ne jako formálně vypočítaného čísla, ale jako hodnoty s reálným smyslem a navodíme řešení b) a c). K řešení d) je vhodné připravit soubor dat narození žáků třídy a diskutovat, s jakým vyjádřením věku budeme pracovat, zda s přesností na poloviny roku, nebo na měsíce.

4. Situace je složitá různorodostí podmínek. Výše uvedené řešení vychází z odhadu vkladu Martina. Stejně by bylo možné začínat s odhadem vkladu Petra. Začínat s odhadem vkladu Jirky by vedlo k složitější, ale z hlediska didaktického účinku plodné úvaze. Jiný a snad i nápaditější přístup než začínat s vkladem některého z hochů je začínat u průměru 60 Kč a předpokladu, že Petr i Martin přispěli stejně. Když každý z nich přispěje (60 – p) Kč, tak Jirka musí přispět (60 + 2p) Kč. Protože rozdíl mezi 2p a –p je 12 (to je rozumné vizualizovat na číselné ose), je p = 4. Když úlohu přeneseme z kontextu peněz do kontextu věku, stává se pro žáky přístupnější: Manželům Novákovým a jejich příteli Jirkovi je dohromady 180 let. Jirka je o 12 let starší, než je věkový průměr manželů. Paní Nováková je o 2 roky mladší než pan Novák. Kolik je kterému let?

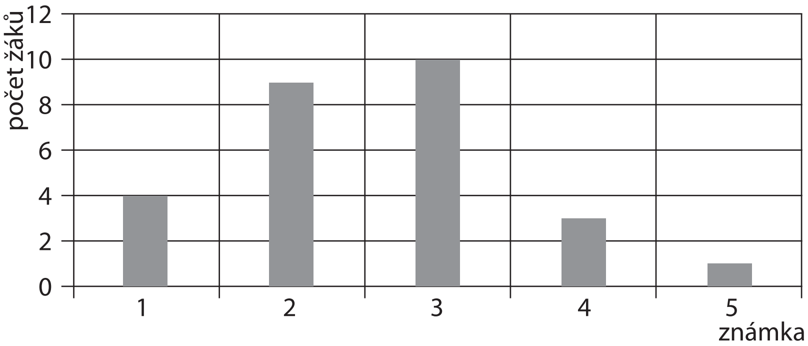
5. Poslední dvě úlohy pracují pouze s čísly bez sémantického kontextu. Zde žáci získávají zkušenosti s variabilitou trojice čísel s pevně daným průměrem. U úlohy a) jsou pouze dvě možnosti, ale u úlohy b) je těch možností již 5 a mají svůj rytmus. Když začneme s trojicí (2, 14, 14), budeme po dvou snižovat prostřední číslo a po jedné zvyšovat obě krajní čísla. Toto poznání mohou žáci využít při řešení následující úlohy.

6. Úloha vhodná na několikadenní řešení. Vstup do řešení a případně několik dílčích řešení se najde na hodině a pak vyučující na nástěnce zřídí okno, do kterého budou žáci postupně dopisovat další a další řešení, pokaždé se svým jménem nebo alespoň iniciálami. Občas se na nástěnce udělá „úklid" a nakonec se zde objeví úplné řešení.

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **MATĚJOVA ZNÁMKA**

Třídy 8.A a 8.B soutěží o nejlepší průměrnou známku z matematiky. Na konci pololetí zaznamenávali žáci 8.A známky do grafu. Nezjistili však známku Matěje, který jediný chyběl, proto v grafu jeho známka chybí.

Známky z matematiky v 8.A



Ve třídě 8.B je průměrná známka z matematiky 2,60.

Jakou nejhorší známku může mít Matěj, aby třída 8.A dosáhla v matematice na lepší průměrnou známku než třída 8.B? Zdůvodni svou odpověď.

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

Matěj může mít nejhůře trojku. Ze zadání vyplývá, že průměry zaokrouhlujeme na setiny. V současné situaci popsané grafem má třída 8.A průměrnou známku 69 : 27 = 2,555…, po zaokrouhlení 2,56. Jestliže Matěj získal jedničku nebo dvojku, průměr se ještě zlepší. Pokud získá trojku, průměr třídy bude 72 : 28 = 2,57. S Matějovou čtyřkou by třída měla průměr 2,61 a prohrála by. Ještě hůře by dopadla, kdyby Matěj dostal pětku.

Komentář

Poměrně náročná úloha navazuje na předchozí a přidává nárok na schopnost interpretace dat z grafu. Doporučujeme navést žáky otázkami na správné uchopení údajů v obrázku, například pomocí otázek: Kolik bylo jedniček? Kolik má 8.A žáků? (Graf zobrazuje 27 žáků.) Jak určíme průměrnou známku třídy? Také je vhodná diskuse na téma zaokrouhlování průměrné známky (zde na dvě desetinná místa).

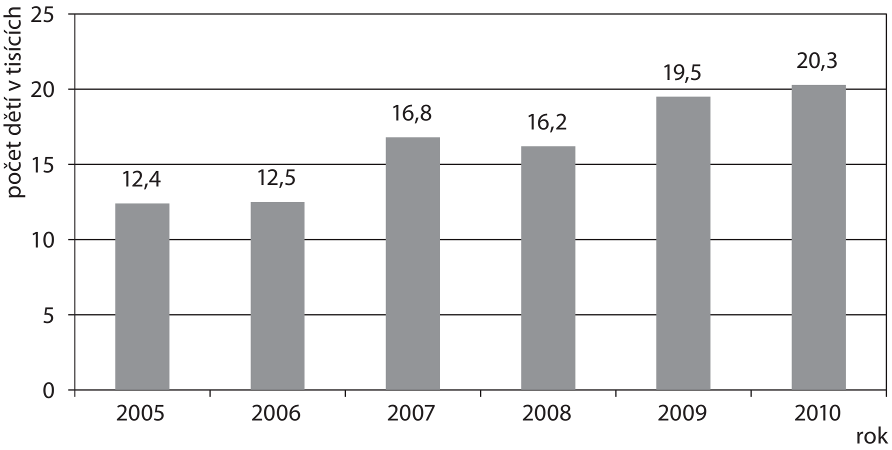
22 STATISTIKA, ČTENÍ DAT Z GRAFU A JEJICH ZPRACOVÁNÍ

VSTUPNÍ ÚLOHA: **DĚTI A SPORT**

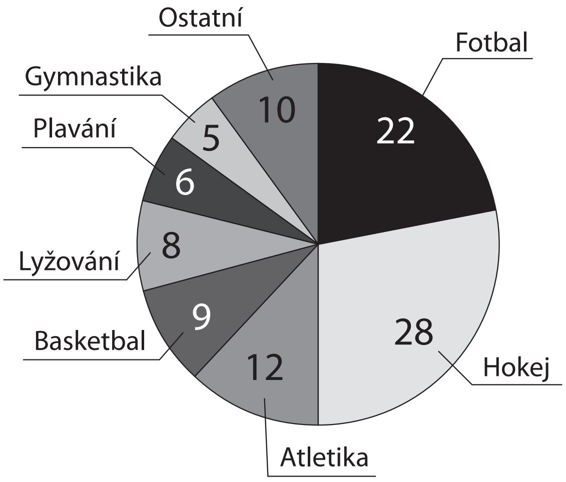
V hlavním městě Zedlandie pečují o zapojení dětí do sportovních oddílů.

Graf č. 1 ukazuje vývoj za šest let od roku 2005 do roku 2010 včetně a graf č. 2 rozdělení dětí podle druhů sportů v roce 2010.

Graf č. 1. Vývoj zapojení dětí do sportovních oddílů v hlavním městě Zedlandie



Graf č. 2. Rozdělení podle druhů sportů v roce 2010 v %



a) Kolik dětí bylo zapojeno ve sportovních oddílech v roce 2008?

b) Kolik dětí bylo v atletických oddílech v roce 2010?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

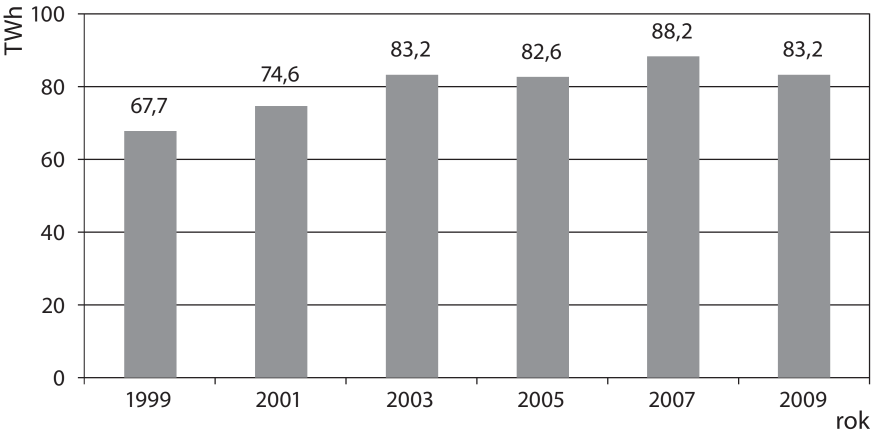
a) Podle údajů ve sloupcovém grafu bylo zapojeno 16 200 dětí (16,2 tisíce) dětí.

b) Celkový počet dětí ve sportovních oddílech v roce 2010 je 20 300. V atletických oddílech jich je zapojeno 12 %, což představuje (20 300 : 100) · 12 dětí = 2 436 dětí. Je to jen přibližný počet, neboť číslo 20 300 je zaokrouhleno na stovky. Skutečný počet dětí zapojených v roce 2010 je nejméně 20 250 a nejvíce 20 349. Tedy v atletických oddílech je zapojeno alespoň 2 430, ale ne více než 2 442 dětí.

DALŠÍ ÚLOHY

1. Graf č. 3 ukazuje množství elektrické energie vyrobené v ČR. (Zdroje: www.czso.cz, odkazy: Databáze, registry – Veřejná databáze – Průmysl, staveb., energ. – Energetika – Rok 2009 – Tabulka Výroba elektřiny a ostatních energetických zdrojů; www.spcr.cz/statistika, odkaz: Vývoj výroby a spotřeby elektrické energie – Grafy Výroba z neobnovitelných zdrojů elektřiny v TWh a Výroba elektřiny z obnovitelných zdrojů v TWh.)

Graf č. 3. Elektrická energie vyrobená v ČR v TWh



Zjisti z grafu:

a) Ve kterých letech překročila výroba elektrické energie hodnotu 80 TWh?

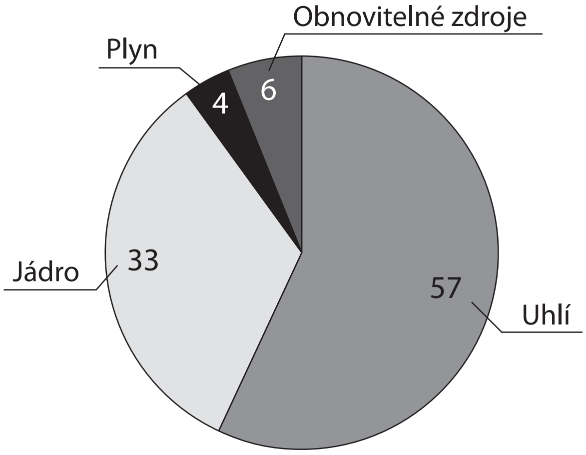
b) Kolik elektrické energie bylo vyrobeno v roce 2009?

2. Graf č. 4 ukazuje, jaký podíl měly různé zdroje energie při výrobě elektrické energie v ČR v roce 2009.

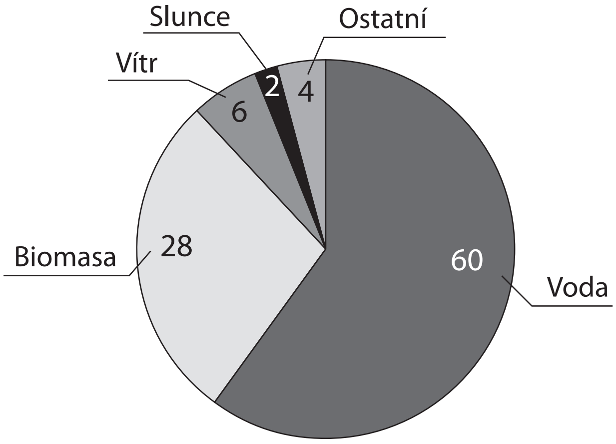
(Zdroj: www.spcr.cz, odkazy: Energie – Energetika – Článek Výroba elektřiny v ČR: Éra uhlí končí, nahradí jej jádro z 13. července 2010.)

Zjisti z grafu, kolik elektrické energie bylo v roce 2009 vyrobeno z obnovitelných zdrojů. Výsledek zaokrouhli na desetiny TWh.

Graf č. 4. Podíl zdrojů energie při výrobě el. energie v ČR v roce 2009 v %



Graf č. 5. Výroba elektřiny z obnovitelných zdrojů v roce 2009 v %



3. Graf č. 5 ukazuje podíl jednotlivých obnovitelných zdrojů na výrobě elektrické energie v ČR v roce 2009.

(Zdroj: www.spcr.cz, odkaz: Vývoj výroby a spotřeby elektrické energie – Graf Výroba elektřiny z obnovitelných zdrojů v TWh.) Zjisti:

a) Kolik elektrické energie bylo v roce 2009 vyrobeno ve větrných elektrárnách?

b) Ve kterém druhu elektráren bylo vyrobeno téměř 3 TWh elektrické energie?

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

VÝSLEDKY

1. a) Hodnota 80 TWh byla při výrobě elektrické energie v ČR překročena v letech 2003, 2005, 2007 a 2009.

b) V roce 2009 bylo vyrobeno 83,2 TWh elektrické energie.

2. V roce 2009 bylo z obnovitelných zdrojů vyrobeno 5,0 TWh elektrické energie.

3. a) Ve větrných elektrárnách bylo v roce 2009 vyrobeno 0,3 TWh elektrické energie.

b) Téměř 3 TWh elektrické energie bylo v roce 2009 vyrobeno ve vodních elektrárnách.

Komentář

1. Žáci získávají zkušenosti se čtením údajů z různých druhů grafických znázornění dat.

2. Přečtené údaje převádějí výpočtem z procent na hodnotu v daných jednotkách. S použitím výsledku z předchozí úlohy je hodnota 6 % z energie vyrobené v roce 2009 rovna (83,2 TWh : 100) · 6 = 4,992 TWh ≐ 5,0 TWh.

3. a) S použitím výsledku z předchozí úlohy je hodnota 6 % z energie vyrobené z obnovitelných zdrojů v roce 2009 rovna (5,0 TWh : 100) · 6 ≐ 0,3 TWh.

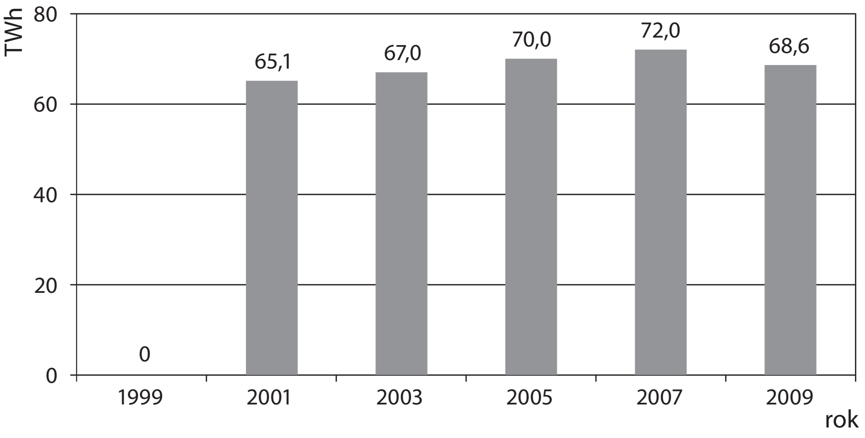
b) Vypočítáme, kolik procent z 5,0 TWh představuje hodnota 3 TWh. Výpočet: 5,0 TWh : 100 = 0,05 TWh je hodnota 1 % z energie vyrobené z obnovitelných zdrojů, (3 : 0,05) % = 60 %. V kruhovém grafu najdeme, že 60% podílu na výrobě elektřiny odpovídají vodní elektrárny.

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **SPOTŘEBA ELEKTRICKÉ ENERGIE V ČR**

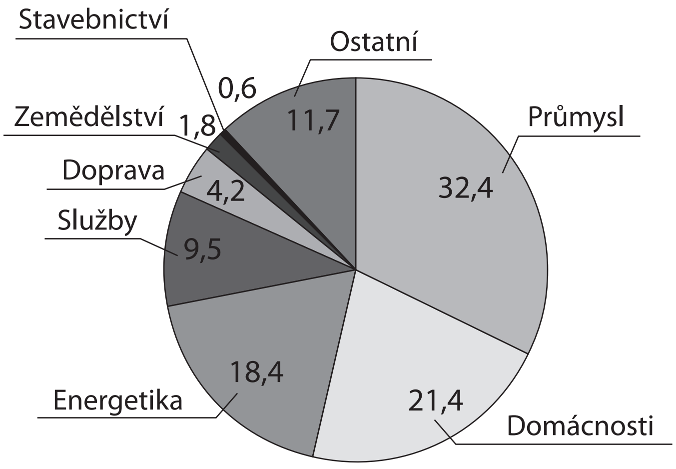
Graf č. 6 ukazuje vývoj spotřeby elektřiny v ČR v letech 1999–2009 a graf č. 7 zobrazuje v procentech strukturu spotřeby v roce 2009.

(Zdroje: www.cez.cz, odkaz: Pro média – Čísla a statistiky – Energetika v ČR; www.spcr.cz/statistika, odkaz: Vývoj výroby a spotřeby elektrické energie – Graf Struktura spotřeby elektřiny v roce 2009 v %.)

Graf č. 6. Spotřeba elektřiny (TWh)



Graf č. 7. Struktura spotřeby elektrické energie v ČR v roce 2009 v %



a) Ve kterých letech byla spotřeba elektrické energie nejméně 65 TWh a nejvýše 70 TWh?

b) Kolik elektrické energie se spotřebovalo v roce 2009 v domácnostech?

c) Ve kterém odvětví se v roce 2009 spotřebovalo přibližně 6,5 TWh elektrické energie?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) Podle sloupcového grafu zjistíme, že nejméně 65 a nejvýše 70 TWh elektrické energie se spotřebovalo v letech 2001, 2003, 2005 a 2009.

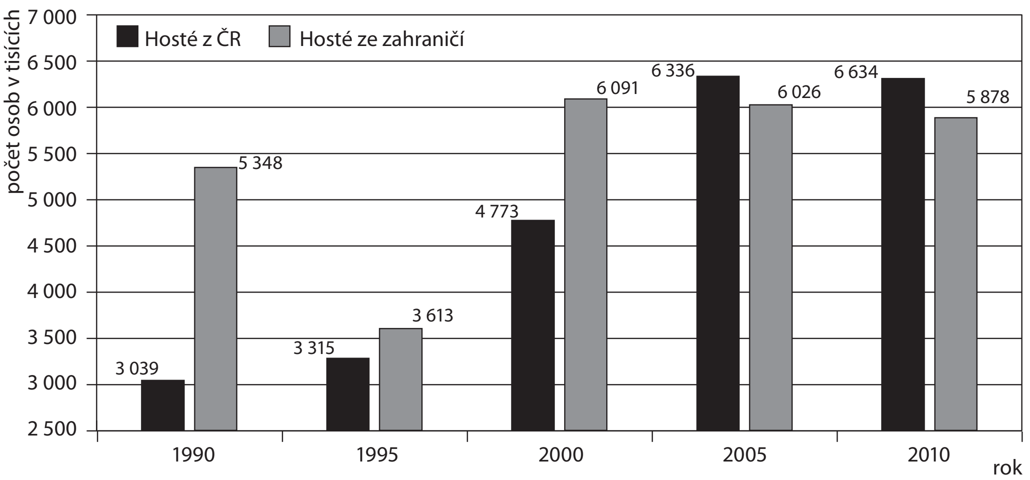
b) V roce 2009 se v domácnostech spotřebovalo přibližně 14,7 TWh elektrické energie.
Výpočet: (68,6 TWh : 100) · 21,4 ≐ 14,68 TWh.

c) Jedná se o odvětví, ve kterém se spotřebovala necelá desetina z celkové spotřeby, tedy jde o odvětví služeb. Výpočet: (6,5 : 68,6) · 100 % ≐ 9,48 % ≐ 9,5 %. Nebo vypočteme hodnotu jednoho procenta 68,6 TWh : 100 = 0,686 TWh a pak počet procent, který odpovídá části celkové spotřeby 6,5 TWh, (6,5 : 0,686) % ≐ 9,48 % ≐ 9,5 %.

✂ ✂

23 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ STATISTICKÝCH DAT (SLOUPCOVÉ GRAFY)

VSTUPNÍ ÚLOHA: **HOSTÉ V ČR**



Graf zachycuje změny v počtu hostů, kteří se ubytovali v hromadných ubytovacích zařízeních v České republice v letech 1990, 1995, 2000, 2005 a 2010.

(Zdroj: www.czso.cz, odkazy: Statistiky – Cestovní ruch – Data – ČR od roku 1989 v číslech – Cestovní ruch – Tabulka 10.01.)

a) S kterým z následujících tvrzení A, B souhlasíš? Svou odpověď zdůvodni.

A. V roce 1990 počet hostů z ČR několikanásobně převyšoval počet hostů ze zahraničí.

B. V roce 1990 nebyl počet hostů z ČR ani dvojnásobkem počtu hostů ze zahraničí.

b) V pořadu o vývoji v oblasti cestovního ruchu komentátor řekl: „Mezi lety 2005 a 2010 poklesl počet hostů v našich hotelích o 150 tisíc, což byla pro české hotely katastrofální situace.“ Je prohlášení komentátora přiměřené? Svou odpověď zdůvodni.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

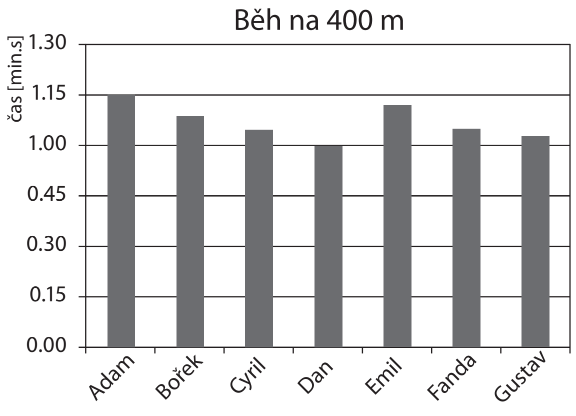
ŘEŠENÍ

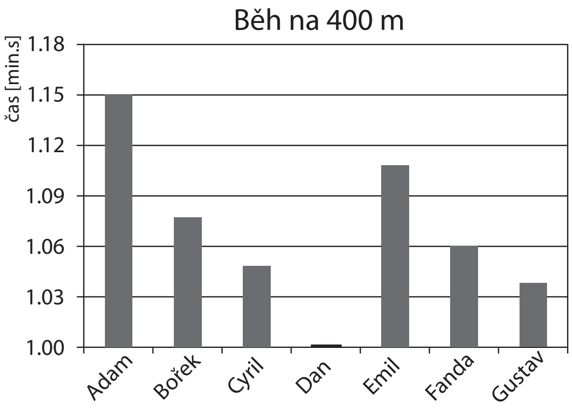
a) Souhlasím s tvrzením B. Možné zdůvodnění: Musíme porovnávat číselné údaje u sloupců, a ne výšky sloupců, protože z nich vidíme jen části.

b) Prohlášení komentátora je přehnané. Možné zdůvodnění: Celkový počet hostů v roce 2005 byl 12 362 tisíce. Pokles o 150 tisíc představuje relativní změnu (150 : 12 362) · 100 = 1,2 %. Jednalo se tedy o pokles jen o něco vyšší než jedno procento.

DALŠÍ ÚLOHY

1. Výsledky školního kola v běhu na 400 m jsou znázorněny dvěma různými grafy:





a) Z kterého grafu lépe vyčteš, jak velké jsou rozdíly mezi časy běžců? Svou odpověď zdůvodni.

b) Z kterého grafu lépe vyčteš, v jakém poměru jsou časy běžců? Svou odpověď zdůvodni.

c) Vyber vhodný graf a zjisti:

O kolik sekund je čas nejpomalejšího běžce větší než čas nejrychlejšího?

Kteří běžci mají rozdíl časů 4 s?

Kolikrát je čas nejpomalejšího běžce větší než čas nejrychlejšího?

2. Třídy prvního až třetího ročníku na podzim soutěží ve sbírání kaštanů a žaludů pro krmení lesní zvěře v zimě. Letošní výsledky jsou zaznamenány v tabulce:

Třída	1.A	1.B	2.A	2.B	3.A	3.B
Nasbíráno [kg]	81	90	79	85	91	88

Děti chtějí výsledky soutěže znázornit barevným grafem na chodbě školy.

a) Navrhni pro děti graf, ze kterého by byly dobře patrné rozdíly v nasbíraných kilogramech.

b) Navrhni pro děti graf, na kterém by bylo dobře vidět, kolikrát nejlepší třída nasbírala více než ostatní třídy.

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

VÝSLEDKY

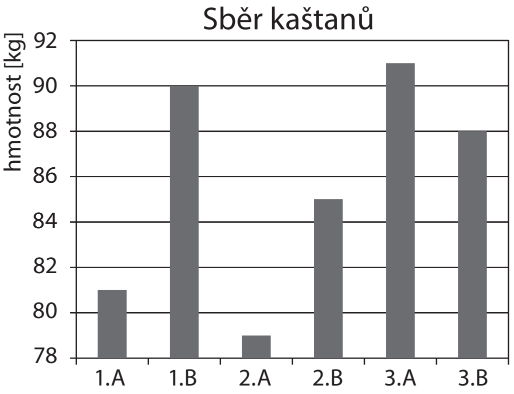
1. a) Rozdíly mezi časy v sekundách jsou lépe čitelné z druhého grafu. Zdůvodnění: Svislá osa grafu začíná až od hodnoty 1 minuta, proto může být měřítko na ose podrobnější. Zobrazeny jsou jen konce sloupců, tedy jen rozdíly mezi časy.

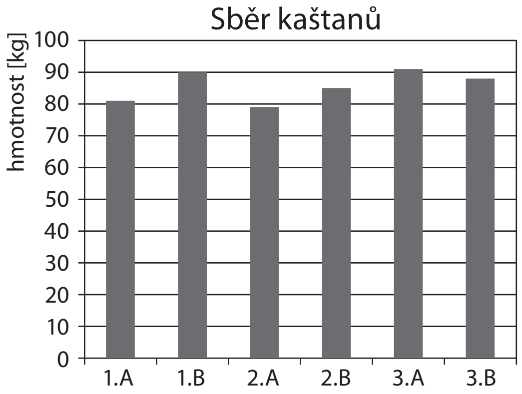
b) Poměr mezi časy je lépe patrný z prvního grafu. Zdůvodnění: Svislá osa grafu začíná nulou, proto výšky sloupců znázorňují celý čas a můžeme pomocí nich časy porovnávat poměrem.

c) Rozdíl mezi nejpomalejším a nejrychlejším běžcem je 1 min 15 s – 1 min 00 s = 15 s. Rozdíl časů 4 s mají Bořek a Gustav nebo Adam a Emil. Na prvním grafu je výška Adamova sloupce 5 dílků a výška Danova sloupce 4 dílky. Adamův čas (5 : 4 = 1,25) je 1,25krát větší než Danův.

2. a) Rozdíly v nasbíraných kilogramech budou dobře patrné, když bude svislá osa grafu začínat třeba hodnotou 78 kg.

b) Poměry nasbíraných kilogramů budou dobře patrné, když bude svislá osa grafu začínat v hodnotě nula.





Komentář

1. a) Úlohu je vhodné využít k zpřesňování představy o absolutním porovnávání dvou hodnot, které je vyjádřeno jejich rozdílem a udává se ve stejných jednotkách.

b) Úlohu je vhodné využít k zpřesnění představy o relativním porovnávání dvou hodnot jejich poměrem, který nemá jednotku, ale udává, kolikrát je jedna větší než druhá.

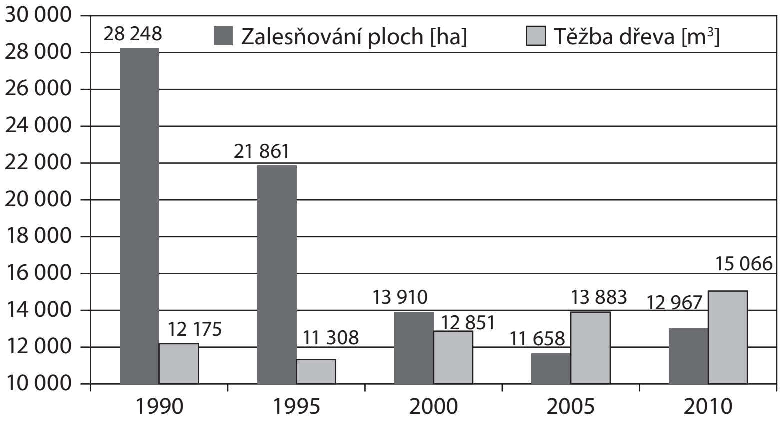
2. Druhá úloha navazuje na první a umožňuje samostatnou tvorbu grafů. Tato zkušenost usnadní neformální pochopení rozdílu mezi oběma způsoby znázornění údajů.

---------- ✂

VÝSTUPNÍ ÚLOHA (GRADOVANÁ): **JEHLIČNATÉ LESY**

Následující graf vyjadřuje údaje o hospodaření v jehličnatých lesích v České republice.

(Zdroj: www.czso.cz, odkazy: Statistiky – Lesnictví – Data – Časové řady – Zemědělství a lesnictví – Tabulky 09.03 a 09.04.)



a) U každého z následujících tvrzení rozhodni, zda správně vyjadřuje údaje z grafu. Svá rozhodnutí zdůvodni.

A. V roce 2000 byla plocha nově vysázených jehličnatých lesů téměř třikrát menší než v roce 1995.

B. V roce 2000 poklesla plocha nově vysázených jehličnatých lesů asi o jednu třetinu ve srovnání s rokem 1995.

C. Mezi lety 2000 a 2005 pokleslo zalesňování ploch na polovinu, zatímco těžba dřeva výrazně vzrostla.

D. Od roku 2000 roste těžba dřeva rovnoměrně, a to přibližně o 1 000 m^3 za každých 5 let.

b) Mezi kterými lety došlo k největšímu poklesu v zalesňování ploch? Mezi kterými lety došlo k největšímu nárůstu těžby dřeva? Porovnej pokles zalesňování a nárůst těžby relativní změnou. Která ze změn byla výraznější?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

a) Tvrzení A není správné. Výšky sloupců nevyjadřují celé číselné hodnoty (měřítko na svislé ose začíná až v hodnotě 10 000), proto poměr výšek sloupců nevyjadřuje poměr číselných údajů, které sloupce představují. Tvrzení B je správné. Číselný údaj u modrého sloupce v roce 2000 (13 910 ha) je asi o třetinu menší než číselný údaj u modrého sloupce v roce 1995 (21 861 ha). Tvrzení C není správné. Podobně jako v A nelze porovnávat mezi sebou výšky sloupců, protože nevyjadřují celé číselné hodnoty. Číselné údaje u tmavých sloupců ukazují, že zalesňování kleslo o 2 252 ha, což je asi šestina hodnoty z roku 2000. Číselné údaje u světlých sloupců v roce 2000 a 2005 ukazují, že těžba dřeva vzrostla ani ne o desetinu, což není výrazný nárůst. Tvrzení D je správné. Mezi lety 2000 a 2005 vzrostla těžba dřeva o 1 032 m^3, mezi lety 2005 a 2010 vzrostla těžba dřeva o 1 183 m^3, růst je přibližně rovnoměrný.

b) K největšímu poklesu zalesňování došlo mezi lety 1995 a 2000. K největšímu nárůstu těžby dřeva došlo také mezi lety 1995 a 2000. Pokles zalesňování byl (21 861 – 13 910) : 21 861 = 0,36 (36 %) hodnoty z roku 1995 a nárůst těžby byl (12 851 – 11 308) : 11 308 ≐ 0,14 (14 %) hodnoty z roku 1995. Pokles zalesňování byl výraznější než nárůst těžby dřeva.

✂

24 PRÁCE S DATY, KOMBINATORIKA

VSTUPNÍ ÚLOHA: **ŠACHOVÝ TURNAJ – ROZPIS ZÁPASŮ**

Pět žáků Adam, Boris, Cyril, David a Emil sehrálo šachový turnaj. Hrálo se systémem každý s každým jeden zápas.

V 1. kole byly odehrány partie Adam – Boris a Cyril – David.

Partie Adam – Cyril byla odehrána ve 2. kole a partie Boris – David ve 3. kole. Ve 3. kole Cyril nehrál. Boris nehrál ve 4. kole a Adam v 5. kole. Všechny uvedené údaje jsou zapsány v tabulce 1a. Doplň do tabulky všech osm scházejících údajů.

Tab. 1a

Kolo	Zápasy	Nehrál
1.	A–B C–D	
2.	A–C	
3.	B–D	C
4.		B
5.		A

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

Každý z hráčů má v jednom kole volno. V 1. kole je to Emil, protože zbylí čtyři v 1. kole hrají. Písmeno E tedy dopíšeme nahoru do posledního sloupce tabulky.

Nevíme, kdo má volno v 2. kole, ale víme, že to není žádný z hráčů E, C, B a A, neboť tito mají volno v 1., 3., 4. a 5. kole v uvedeném pořadí. Tedy v 2. kole má volno hráč D. Údaj dopíšeme do tabulky.

V 2. kole jsou již v tabulce zapsáni hráči A, C a D. Tedy scházející partie je B–E. Tu dopíšeme do tabulky. Podobně v 3. kole dopíšeme partii A–E. Ptáme se, s kým hrál hráč A ve 4. kole. Hráč A již dříve hrál s B, C i E. Proto ve 4. kole hraje s D. Druhá partie 4. kola je C–E. V 5. kole byly sehrány zbylé dva zápasy B–C a D–E.

Tab. 1b

Kolo	Zápasy	Nehrál
1.	A–B C–D	E
2.	A–C B–E	D
3.	B–D A–E	C
4.	A–D C–E	B
5.	B–C D–E	A

Komentář

Úloha je typický reprezentant tematického celku „Práce s daty“. Na základě známých vazeb se z několika známých dat doplňují další data. Podobně jako u hlavolamů Sudoku i zde musí řešitel hledat ten scházející údaj, ke kterému má nejvíce informací.

Když má žák problémy s řešením úlohy, příčinou je nedostatek životních zkušeností se situací turnajových rozpisů.

Scházející zkušenosti žák získá řešením série lehčích úloh (1–4).

Žákovi lze též poradit manipulativní řešitelskou strategii. Žák si vytvoří soubor všech prvků tabulky, tedy 15 kartiček: $\boxed{\text{A–B}}$, $\boxed{\text{A–C}}$, $\boxed{\text{A–D}}$, $\boxed{\text{A–E}}$, $\boxed{\text{B–C}}$, $\boxed{\text{B–D}}$, $\boxed{\text{B–E}}$, $\boxed{\text{C–D}}$, $\boxed{\text{C–E}}$, $\boxed{\text{D–E}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$

Dále si vytvoří tabulku 1a, do které vloží 7 kartiček. Pak metodou pokus–omyl doplní do této tabulky i dalších 8 kartiček. Vytvořená pomůcka umožní žákovi tvořit vlastní tabulky. Když pak z takto vytvořené tabulky odstraní některé kartičky, získává úlohu, kterou může dát kamarádům. Tvorba úloh výrazně napomáhá hloubce porozumění prostředí tabulek.

✂ ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Gábina, Hanka a Iva spolu sehrály šachový turnaj. Každá s každou hrála po jedné partii. Každá dívka hrála jednou s bílými a jednou s černými figurkami. V 1. kole se hrála partie I–G a Iva hrála bílými, protože je uvedena jako první. Ve 2. kole se hrála partie H–I a bílými hrála Hanka. Jaká partie se hrála ve 3. kole?
2. V dalším šachovém turnaji dívek uvedených v úloze 1 byla jako první odehrána partie H–G a v druhé partii Gábina nehrála. Jaká partie byla odehrána jako druhá a jaká jako třetí?
3. Ke Gábině, Hance a Ivě přibyla ještě Jarka. Hrála se tři kola. V prvním byly sehrány partie H–J a I–G. V 2. kole byla sehrána partie H–G. Která druhá partie byla sehrána ve 2. kole a jaké partie byly sehrány ve 3. kole, když každá dívka hrála alespoň jednou bílými a alespoň jednou černými.
4. Po prvním turnaji se ukázalo, že Jarka je nejslabší, a tak se dívky dohodly, že ona bude mít výhodu v tom, že bude mít bílé figurky ve všech třech partiích. V dalším turnaji, který dívky odehrály, byla v 1. kole sehrána partie G–I a v třetím s Jarkou hrála Gábina. Napiš tabulku rozpisů všech zápasů turnaje.
5. Vrať se k tabulce ze vstupní úlohy. Podle ní by hráč A hrál čtyřikrát bílými a hráč E čtyřikrát černými. To by nebylo spravedlivé. Uprav tabulku tak, aby každý hráč hrál dvakrát bílými a dvakrát černými. Přitom zápis 1. a 2. kola měnit nebudeš.
6. Doplň tabulku 3a rozpisu zápasů turnaje pro hráče A, B, C, D a E. Víš, že každý hráč hrál dvakrát bílými a dvakrát černými kameny. Totéž platí pro tabulku 4a.
7. Totéž platí pro tabulku 5a, kterou lze doplnit dvěma různými způsoby. Najdi oba.

Tab. 3a

1.	A–B C–D	
2.		
3.	A–C	D
4.	D–A	B
5.	D–B	C

Tab. 4a

1.	D–C E–A	
2.	A–C	
3.	E–D	A
4.		C
5.		D

Tab. 5a

1.	A–C	B
2.		D
3.		C
4.	A–D	
5.	E–B	

Tab. 6a

1.	A–B E–F
2.	B–C
3.	A–C
4.	F–B
5.	D–B

8. Doplň tabulku 6a, která uvádí rozpis turnaje pro šest hráčů. Každý hráč hraje alespoň dvě partie bílými a alespoň dvě partie černými kameny. Hráč A hraje třikrát černými a hráč C třikrát bílými. V 3. kole hraje hráč D bílými.
9. Mezi vyřešenou tabulkou 3a a vyřešenou tabulkou 6a je jednoduchá souvislost. Najdi ji.
10. Rozpis zápasů turnaje můžeme udělat i pomocí tabulky jako 7a. Z ní vidíme, že v 1. kole byly sehrány partie A–B a C–D, v 3. kole partie A–C a v 5. kole partie A–E. Doplň scházející čísla do dvanácti prázdných okének tabulky 7a, když víme, že v 5. kole hráč C nehrál.
11. Z vyplněné tabulky 7a víme, které partie se v jednotlivých kolech hrály, ale nevíme, kdo hrál bílými a kdo černými. Navrhni, jak tabulku 7a vylepšit, aby i tato informace byla z ní jasná.
12. Ve tvaru tabulky 7a zapiš rozpis turnaje, který je dán tabulkou
    a) 3a;
    b) 4a;
    c) 5a.

Tab. 7a

	A	B	C	D	E
A		1	3		5
B	1				
C	3			1	
D			1		
E	5				

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY

1. V 3. kole se hrála partie G–H.
2. Jako druhá byla odehrána partie I–H a jako třetí G–I.
3. V 2. kole byla hrána partie J–I, v třetím G–J a I–H.
4. Viz tabulku 2.
5. Změníme pořadí písmen u zápisů A–E, A–D, C–E a B–C.

Tab. 2	
Kolo	Zápasy
1.	J–H G–I
2.	J–I H–G
3.	J–G I–H

6. Viz tabulky 3b, 4b.

7. Viz tabulku 5b. Druhé řešení tabulky 5a se od tabulky 5b liší pouze tím, že místo B–D je D–B, místo C–B je B–C a místo D–C je C–D.

Tab. 3b

1.	A–B C–D	E
2.	B–C E–D	A
3.	B–E A–C	D
4.	D–A C–E	B
5.	D–B E–A	C

Tab. 4b

1.	D–C E–A	B
2.	D–B A–C	E
3.	C–B E–D	A
4.	B–E A–D	C
5.	B–A C–E	D

Tab. 5b

1.	D–E A–C	B
2.	B–A C–E	D
3.	B–D E–A	C
4.	A–D C–B	E
5.	D–C E–B	A

Tab. 6a

1.	A–B C–D E–F
2.	B–C E–D F–A
3.	B–E A–C D–F
4.	D–A C–E F–B
5.	D–B E–A C–F

Tab. 6b

1.	A–B C–D E–F
2.	B–C X–A X–X
3.	A–C D–X X–X
4.	F–B X–A C–X
5.	D–B X–A C–X

Tab. 6c

1.	A–B C–D E–F
2.	B–C E–D F–A
3.	A–C B–E D–F
4.	F–B D–A C–E
5.	D–B E–A C–F

8. V 1. kole hráli spolu soupeři C a D. Bílými hrál C, protože víme, že on ve třech partiích hrál bílými a v 2. i 3. kole hrál černými. Proto hráč C hrál bílými ve 4. i v 5. kole. Stejně víme, že A hrál černými v 2., 4. i 5. kole a D hrál v 3. kole bílými. Když tyto údaje dopíšeme do tabulky 6a, získáme tabulku 6b, ve které znakem X označujeme zatím neznámá písmena.

Partie C–F nemohla být hrána v kolech 1., 2. a 3., neboť tam C hrál s jinými hráči, ani ve 4. kole, neboť tam F hrál s B. Byla tedy hrána v 5. kole. Zde byla pak hrána i partie E–A a ve 4. kole partie C–E. Zbytek se doplní lehce. Výsledkem je tabulka 6c.

Komentář

Náročná úloha je určena matematicky vyspělým žákům. Slabším žákům ji učitel zjednoduší tím, že prozradí některé partie. Například partii D–F, nebo dokonce i partii C–F.

9. V daném kole s hráčem F hraje ten, který má v tomto kole volno. Přitom hráč F bude mít střídavě bílé a černé kameny. Tak získáme tabulku 6a.

Komentář

Uvedená úprava tabulky rozpisu z 5 hráčů na 6 hráčů má obecnou platnost. Ukazuje, jak z každé tabulky pro $2n - 1$ hráčů ($n > 1$) lze vytvořit tabulku pro $2n$ hráčů.

10. Protože hráč C v 5. kole nehrál, byla v 5. kole hrána partie B–D. Partie C–E pak mohla být hrána jen ve 4. kole. Druhou partií 4. kola je pak nutně A–D. Zbytek je již jasný: partie B–E náleží do 3. kola a partie D–E do 2. kola. Výsledkem je tabulka 7b. Uvádí stejný rozpis zápasů turnaje jako tabulka 3b.

11. Každá partie je v tabulce 7b uvedena dvěma čísly. Jedno z nich zvýrazníme a naznačíme tím, že hráč A hraje bílými figurami v 1. a 3. kole, neboť v řádku A jsou podbarvena čísla 1 a 3. Hráč A hraje černými ve 4. a 5. kole, protože v řádku A čísla 4 a 5 nejsou podbarvena. Hráč B hraje s bílými figurami v 2. a 3. kole, neboť čísla 2 a 3 jsou v řádce B podbarvena. Hráč B v 1. a 5. kole hraje černými, protože čísla 1 a 5 nejsou v řádce podbarvena.

Tab. 7b

	A	B	C	D	E
A		1	3	4	5
B	1		2	5	3
C	3	2		1	4
D	4	5	1		2
E	5	3	4	2	

Tab. 8

	A	B	C	D	E
A		5	2	4	1
B	5		3	2	4
C	2	3		1	5
D	4	2	1		3
E	1	4	5	3	

Tab. 9

	A	B	C	D	E
A		2	1	4	3
B	2		4	3	5
C	1	4		5	2
D	4	3	5		1
E	3	5	2	1	

12. a) tabulka 7b

b) tabulka 8

c) tabulka 9

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **TABULKA TURNAJE**

Sedm žáků Adam, Boris, Cyril, David, Emil, Ferdinand a Gustav sehrálo šachový turnaj.

Hrálo se systémem každý s každým jednu partii. Každý hráč hrál třikrát bílými a třikrát černými figurami. V tabulce 8a je zapsáno, že v 1. kole byly odehrány partie C–F a G–B, ve 2. kole a partie F–A, ve 3. kole partie A–D atd. Dále je v posledním sloupci tabulky uvedeno, že v 1. kole měl volno hráč A, ve 2. hráč G atd. Víme též, že hráč G v 6. kole hrál bílými. Doplň do tabulky 8a všech 28 scházejících čísel.

Tab. 8a

	A	B	C	D	E	F	G	volno
A				3	6	2	5	1
B						5	1	7
C						1		
D	3							5
E	6					4		
F	2	5	1		4			6
G	5	1						2

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

U hráče A víme, že obě zbylé partie A–B i A–C hrál bílými, protože černými již třikrát hrál (s hráči E, F a G). Víme, že tyto partie byly odehrány ve 4. a v 7. kole. Hráč B měl v 7. kole volno, proto partie A–B byla odehrána ve 4. a partie A–C pak v 7. kole.

Hráči C a E měli volno v 3. a 4. kole. Hráč E ve 4. kole hrál, proto měl volno ve 3. kole. Tedy ve 4. kole měl volno hráč C. Dále víme, že hráč B hrál černými třikrát. Proto zbývající 3 partie (proti A, D a E) hraje bílými. Po zapsání uvedených dat do tabulky 8a získáme tabulku 8b.

Tab. 8b

	A	B	C	D	E	F	G	volno
A		4	7	3	6	2	5	1
B	4		_	_	_	5	1	7
C	7	_				1		4
D	3	_						5
E	6	_				4		3
F	2	5	1		4			6
G	5	1						2

Tab. 8c

	A	B	C	D	E	F	G	volno
A		4	7	3	6	2	5	1
B	4		3	6	2	5	1	7
C	7	3		2	5	1	6	4
D	3	6	2		1	7	4	5
E	6	2	5	1		4	7	3
F	2	5	1	7	4		3	6
G	5	1	6	4	7	3		2

Ve kterém kole se hrála partie B–E? Nebylo to v kolech 1., 4., 5. a 7., neboť B nebyl volný. Nebylo to ani v kolech 3. a 6., neboť E nebyl volný. Partie B–E se hrála tedy v 2. kole. Podobně zjistíme, že partie B–D musela být hrána v 6. kole a partie B–C v 3. kole.

Víme, že v 6. kole hrál G s bílými. Proti komu? Lehce vyloučíme hráče D, E i F. Tedy v 6. kole byla hrána partie G–C. Zbylé údaje již doplníme lehce. Doplňujeme postupně: C–E byla hrána v 5. kole, C–D v 2. kole, E–G v 7. kole, D–F v 7. kole, F–G v 3. kole, D–E v 1. kole, E–G v 7. kole a D–G ve 4. kole.

Komentář. Výstupní úloha je oproti vstupní úloze náročnější nejen proto, že v turnaji hraje více hráčů, ale i proto, že je zde podmínka o barvě figur, že totiž každý hráč hraje třikrát bílými a třikrát černými. Podobně jako u předchozích úloh i zde může učitel slabším žákům poradit některé údaje tabulky. Čím více důležitých dat učitel žákovi poradí, tím nižší je stupeň gradace úlohy. Učitel může ale též vyzvat jednotlivé žáky, aby si oni řekli o informaci, kterou jim má říct. Podle žádosti žáka může učitel usuzovat na jeho vhled do problematiky.

	A	B	C	D	E	F	G	V
A	×			3	6	2	5	1
B		×				5	1	7
C			×			1		
D	3			×				5
E	6				×	4		
F	2	5	1		4	×		6
G	5	1					×	2
V	1	7		5		6	2	×

Existuje ještě další způsob relativně jednoduchého řešení. Každý hráč může hrát v každém kole nejvýše jednou. Jediné chybějící kolo je u každého hráče zapsáno v posledním sloupci, resp. v posledním řádku tabulky. Úlohu lze tedy převést na formální vyplnění tabulky tak, aby byla každá z číslic 1–7 uvedena v každém řádku i sloupci právě jednou.

Nejprve zjistíme, která čísla v řádku chybí, poté je umístíme do příslušných polí řádku tak, aby nekolidovala s čísly ve sloupci. Čísla pak ve stejném pořadí doplníme i v příslušném sloupci. Postup řešení je zapsán v následující tabulce.

Řádek	A		V		B			C			D			E	F
Chybějící čísla	4	7	3	4	2	3	6	2	5	6	1	4	7	7	3
Doplnění ve sloupci	B	C	E	C	E	C	D	D	E	G	E	G	F	G	G

Podobným způsobem je možné vyznačit partie, v nichž hráč hraje s bílými figurami. V tomto případě pracujeme pouze s řádky a sloupci A–F. V každém z nich musí být právě tři čísla v bílém poli a právě tři čísla v tmavém poli.

25 ARITMETICKÝ PRŮMĚR – PRÁCE S DATY

VSTUPNÍ ÚLOHA: ATLETICKÁ OLYMPIÁDA

Na krajské atletické olympiádě 6. května 2012 naši školu reprezentovalo 7 žáků. V běhu Jana, Karel a Leoš v kategorii 12letých. Ve skocích Iva v kategorii 11letých, Meda v kategorii 13letých a Olin v kategorii 14letých. Nejúspěšnější z nás byl Noro, který v hodu míčkem v kategorii 13letých získal zlatou medaili. V hodu soutěžila i Iva. V kategorii 12letých soutěžili žáci narození po 6. květnu 1999 a před 7. květnem 2000. I další věkové kategorie byly určeny podobně, podle dne soutěže.

Nejúspěšnějším závodníkem letošní olympiády byla Petra, která ve své kategorii získala zlato v běhu i ve skoku dalekém a v hodu míčkem byla třetí. Když nám Petra řekla, že se jejich rodina stěhuje do našeho městečka a ona bude na příští krajské olympiádě reprezentovat naši školu, měli jsme velikou radost.

a) Věkový průměr (počítaný na setiny) nás všech osmi, co jsme byli na olympiádě (7 žáků + učitel), je 16 let. Kolik let je našemu učiteli?

b) Kolik je Petře let, přesněji v jaké věkové kategorii soutěží Petra, když víme, že po jejím příchodu k nám se věkový průměr reprezentantů-běžců nezmění?

c) Jak se po příchodu Petry změní věkový průměr našich reprezentantů v hodu míčkem a jak věkový průměr skokanů?

d) Jak se po příchodu Petry změní věkový průměr dívčí části našeho týmu?

e) Jak se po příchodu Petry změní věkový průměr celého našeho týmu? Omládne, zestárne, nebo se jeho věkový průměr nezmění?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

K řešení této i všech dalších úloh žáci používají kalkulátory. Data úlohy eviduje tabulka:

Jméno	Iva	Jana	Karel	Leoš	Meda	Noro	Olin		Petra
Věk	11	12	12	12	13	13	14		12
Disciplíny	S, H	B	B	B	S	H	S		S, H, B

a) Součet let všech osmi účastníků olympiády je $87 + x$, kde x je věk učitele. Průměrný věk je $(87 + x) : 8$. Tedy $(87 + x) : 8 = 16$. Odtud $x = 41$. Učiteli je 41 let.

b) Všichni tři naši reprezentanti-běžci jsou 12letí. Tedy Petře je 12 let.

c) Věkový průměr závodníků v hodu míčkem je $(11 + 13) : 2 = 12$ let. Po příchodu Petry zůstane 12. Nezmění se. Věkový průměr skokanů je $(11 + 13 + 14) : 3 = 12{,}666\ldots$ Po příchodu Petry to bude $(11 + 13 + 14 + 12) : 4 = 50 : 4 = 12{,}5$. Věkový průměr se sníží o $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$

d) Věkový průměr je teď 12 a po příchodu Petry zůstane 12. Nezmění se.

e) Věkový průměr týmu je teď $87 : 7 \doteq 12{,}43$ (zaokrouhleno na 2 desetinná místa). Po příchodu Petry bude $99 : 8 = 12{,}375$. Náš tým omládne o $\frac{87}{7} - \frac{99}{8} = \frac{3}{56} \doteq 0{,}05$ roku.

✂ ✂

DALŠÍ ÚLOHY

1. Robin míní, že naše odpověď na poslední otázku, že totiž „tým omládne o 0,0536 roku“, je za vlasy přitažená. Podle Robina náš tým ve skutečnosti neomládne, dokonce může i maličko zestárnout. Má Robin pravdu?
2. Robin zpochybnil i odpověď na otázku c). Řekl, že vymyslí data narození Ivy, Medy, Olina a Petry tak, že příchodem Petry se věkový průměr skokanů, počítaný v měsících, dokonce zvýší. Vymysli taková data narození.
3. Učitel biologie psal za pololetí se žáky čtyři „bleskovky“ a dva testy. Známka z testu se počítala třikrát. Známku za pololetí určil průměrem všech 10 známek. Byl-li lepší než 1,51, žák získal jedničku. Byl-li horší než 1,51 a lepší než 2,51, žák získal dvojku. Uršula ze čtyř bleskovek měla průměr 2,25 a ze dvou testů měla průměr 1,00. Jaká známka jí vychází v pololetí?

4. Učitel zeměpisu psal v průběhu pololetí s žáky pět testů. Z každého testu mohl žák získat maximálně 12 bodů. Za zisk alespoň 11 bodů je jednička. Na dvojku je nutno získat alespoň 9 bodů, na trojku alespoň 6 bodů a na čtyřku alespoň 3 body. Na vysvědčení pak učitel dá průměrnou známku za známky z testů. Vilma v uplynulém pololetí získala za testy 12, 8, 12, 10 a 10 bodů. Walter získal bodů 9, 11, 11, 9, 11. Jaká známka vychází na pololetí Vilmě a jaká Waltrovi?

5. (Pokračování úlohy 4.) Před klasifikační poradou se píše ještě jeden souhrnný test ze zeměpisu. Ten povinně píšou ti, kteří některý test nepsali. Xaver psal jen 4 testy a získal za ně 4, 9, 8, 9 bodů. Na výsledku souhrnného testu závisí známka, kterou Xaver dostane. Na kolik bodů musí Xaver napsat test, aby dostal na pololetí **a)** dvojku, **b)** trojku, **c)** čtyřku?

6. (Pokračování úlohy 5.) Souhrnný test mohou psát i ti, kteří si chtějí výsledek jednoho testu opravit. Vilma se rozhodla, že se pokusí opravit si svůj neúspěšný druhý test, ze kterého získala jen 8 bodů. Na kolik bodů musí Vilma napsat souhrnný test, aby získala jako výslednou známku jedničku?

7. (Pokračování úlohy 6.) Vilma v souhrnném testu získala plný počet 12 bodů a v pololetí měla jedničku. Pak si ale přišla k učiteli stěžovat, že způsob hodnocení není spravedlivý. Z původních testů získala více bodů než Walter, ale vycházela jí horší známka. Posuď stížnost Vilmy.

8. Dominik počítal průměry známek naší třídy, ve které je 13 žáků. Vypočítal: čeština 2,38; matematika 2,36; dějepis 1,92; zeměpis 2,22; biologie 1,85. Erika se na tato čísla podívala a řekla, že z prvních dvou výsledků je jeden chybně. Jak to může Erika vědět, když známky nezná?

9. Zjisti v předchozí úloze součet známek všech žáků z každého předmětu.

10. Prvních sedm dní 10denního výletu jsme denně urazili průměrně 8,286 km. Poslední tři dny jsme denně urazili průměrně 18,667 km. Kolik kilometrů jsme průměrně urazili za celý výlet?

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

ŘEŠENÍ

1. Robin má pravdu.

Komentář: Cílem této i následující úlohy je vyvolat ve třídě diskusi o zacházení s čísly, která nejsou úplně přesná. Řekněme, že dnes je 1. září 2010. Do první třídy přichází Alfons (* 3. září 2003) i Apolena (* 27. srpna 2004). Z hlediska „školního věku“ je oběma dětem 6 let, neboť se narodily po 31. srpnu 2003 a před 1. zářím 2004. Ve skutečnosti je ale Alfons o rok starší než Apolena.

2. Stačí, když za jednotku času zvolíme jeden měsíc. Věk žáků v měsících volíme takto: Iva 133 (tj. 11 let + 1 měsíc), Petra 155 (tj. 12 let + 11 měsíců), Noro 157 (tj. 13 let + 1 měsíc) a Olin 169 (tj. 14 let + 1 měsíc). Průměr tří žáků bez Petry je 459 : 3 = 153 měsíců. Průměr všech čtyř je 614 : 4 = 153,5. Tedy za uvedených podmínek se příchodem Petry průměrný věk skokanů zvýší o půl měsíce.

3. Při uvedeném počítání získává žák 10 známek – 4 za bleskovky a 6 za testy. Uršula za testy získala šest jedniček a za bleskovky například 2, 2, 2, 3 (nebo 1, 2, 3, 3, anebo 1, 1, 3, 4, atd.). Součet známek byl 15, a tedy průměr byl 1,5, což dává jedničku.

4. Vilma získala známky: 1, 3, 1, 2, 2 a dosáhla na průměr 9 : 5 = 1,8. V pololetí dostane 2. Walter získal známky 2, 1, 1, 2, 1 a dosáhl na průměr 7 : 5 = 1,4. V pololetí dostane 1.

5. a) na 11 nebo 12 bodů; **b)** na 10 nebo méně bodů; **c)** není možné.

6. Na 11 nebo 12 bodů.

7. Stížnost Vilmy oprávněná není, protože učitel zveřejnil podmínky předem a pak je pouze dodržel.

Komentář. Diskutovat lze o tom, zda zvolené podmínky jsou spravedlivé. Podobné „nespravedlnosti“ se objevují všude tam, kde celkový výsledek je hodnocen ne podle základních dat, ale podle dat kumulativních. Například v tenise výsledek utkání hráčů A a B byl 7 : 6, 0 : 6, 7 : 6. I když hráč B vyhrál 18 her a hráč A jen 14, vítězem byl hráč A. Jiný příklad takového kumulativního průměrování jsou prezidentské volby v USA.

8. Erika si již dříve udělala tabulku průměrů pro všechny součty známek od 13 (to když všichni žáci mají jedničky) až po součet 39, kdy průměr vychází 3,00. Zde je kousek z této tabulky.

Součet	20	21	22	23	24	25	26
Průměr	1,54	1,62	1,69	1,77	1,85	1,92	2,00

Z ní je vidět, že rozdíl sousedních čísel druhé řádky je 0,07 nebo 0,08. To proto, že 1 : 13 = 0,076923… leží mezi 0,07 a 0,08. Proto není možné, aby jeden průměr byl 2,38 a druhý 2,36.

9. Když je průměrná známka 13 žáků z češtiny 2,38, tak součet všech 13 známek je 13 · 2,38 = 30,94, tedy 31. Kontrola 31 : 13 = 2,3846… ukáže, že číslo 2,38 je dobře. Průměrná známka z dějepisu je špatně, proto nedovedeme s jistotou říct, zda byl součet známek 31, 30, nebo jiné číslo. Dějepis: 13 · 1,92 = 24,94 ≐ 25; kontrola 25 : 13 ≐ 1,92. To je dobře. Součet známek v dějepisu byl 25. Zeměpis: 13 · 2,22 = 28,86 ≐ 29; kontrola 29 : 13 ≐ 2,23; i zde je Dominikův průměr chybně. Biologie: 13 · 1,85 = 24,05 ≐ 24; kontrola 24 : 13 ≐ 1,85. To je dobře. Součet známek v biologii byl 24.

10. Protože 7 · 8,286 = 58,002, je jasné, že za prvních 7 dní jsme urazili 58 km. Za poslední 3 dny to bylo 3 · 18,667 = 56,001, tj. 56 km. Za celý výlet to je 114 km, tedy denní průměr je 11,4 km.

VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **PRŮMĚRNÁ HMOTNOST**

Tab. 1

	I	II	III	IV
Anna	17,2	20,64	20,6	21,1
Bára	18,0			21,6
Cyril	20,1			23,9
Dan	17,6			21,1
Eva	15,7			18,5
Filip	16,9			20,8

Údaje z tabulky 1 se týkají hmotnosti šesti předškoláků. Ve sloupci I jsou hmotnosti dětí, když jim byly 4 roky. Ve sloupci II jsou čísla sloupce I vynásobená číslem 1,2. Jsou to předpovídané hmotnosti těchto dětí ve věku 5 let. V sloupci III jsou hodnoty ze sloupce II zaokrouhlené na desetiny. V sloupci IV jsou skutečně naměřené hmotnosti dětí v době, když jim bylo 5 let.

a) V tabulce 1 schází 10 čísel. Doplň je.

b) Zjisti průměrnou hmotnost dívek ve věku 4 let i ve věku 5 let.

c) Zjisti průměrnou předpovídanou hmotnost dívek (sloupce II a III).

d) Zjisti průměrnou hmotnost hochů ve věku 4 let i ve věku 5 let.

e) Zjisti průměrnou předpovídanou hmotnost hochů (sloupce II a III).

f) Zjisti průměrnou hmotnost všech dětí ve věku 4 let i ve věku 5 let.

g) Zjisti průměrnou předpovídanou hmotnost všech dětí (sloupce II a III).

h) Ukaž, jak je možné využít výsledky úloh b) a d) k řešení úlohy f).

i) Ukaž, jak je možné využít výsledky úloh c) a e) k řešení úlohy g).

↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓

ŘEŠENÍ

a) V tabulce 1 jsou u Anny vyplněna všechna čísla. Je to nápověda řešitelům, zda dobře porozuměli textu úlohy. Výsledek úlohy je v tabulce 1a.

b) až **g)** Viz tabulku 2. Ve sloupcích „průměr" zaokrouhlujeme na tisíciny, ve sloupci „zaokr." (= zaokrouhleno) zaokrouhlujeme na desetiny.

h) a **i)** Čísla poslední řádky jsou průměry čísel předešlých dvou řádek.

Tab. 2

	I		II		III		IV	
	průměr	zaokr.	průměr	zaokr.	průměr	zaokr.	průměr	zaokr.
dívky	16,967	17,0	20,367	20,4	20,333	20,4	20,400	20,4
hoši	18,200	18,2	21,840	21,8	21,833	21,8	21,933	21,9
6 dětí	17,584	17,6	21,100	21,1	21,083	21,1	21,167	21,2

Tab. 1a

	II	III
A	20,64	20,6
B	21,60	21,6
C	24,12	24,1
D	21,12	21,1
E	18,84	18,8
F	20,28	20,3

Úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti
Utváření kompetencí žáků na základě zjištění šetření PISA 2009

Milan Hejný, Darina Jirotková a kol.
První vydání

Vydala: Česká školní inspekce, Fráni Šrámka 37, 150 21 Praha 5, v roce 2012
Tisk: Comunica, a. s., Pod Kotlářkou 3, Praha 5