MŘMÚ – Metody řešení matematických úloh

7. téma. Pravděpodobnost v prostředích Schody, Polymina, … Evidence, sběr a zpracování statistických dat.

Obsah

A. Náhoda v prostředí Schody. Evidence dat. Každý posluchač má hrací kostku. Vytvoří si rámeček pro příkaz ke krokování po schodech. Příkaz má dvě okna pro čísla.

0			

Pak posluchač hodí kostkou a do prvního okna zapíše tolik šipek →, kolik na kostce padlo ok. Totéž zopakuje a šipky píše do druhého okna. Například, když v prvním hodu padlo 4 a ve druhém 1, zapíše student do rámečku 0 | →→→→ | → | __ . Do posledního šedivého okna zapíše student číslo výsledného schodu. V uvedeném případě to bude 5, neboť 0 + 4 + 1 = 5.

Toto udělá každý posluchač a pak se zeptám, komu vyšlo na konci číslo 2, komu 5, komu 8, komu 11?

B. Předpověď náhody. Sběr dat. Pravděpodobnost. Pokus budeme opakovat, ale každý posluchač typuje tři čísla, které očekává že mu nakonec vyjdou. Svůj typ si zapíše.
Po pokusu udělám rychlé zjištění, kdo uhodnul a kdo neuhodnul. Pak všechny výsledky sesbíráme na tabuli. Skrutátory i zapisovatele dělají studenti. Na tabuli bude tabulka:

číslo		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet													

Do té zapisovatel uvede, kolikrát se objevila 1, kolikrát 2, … kolikrát 12.
Diskutujeme o tabulce a dám další výzvu: každý si spočítá, čísla ve svých typovaných polích. Například když někdo typoval pole 4, 6 a 7 a v nich jsou teď čísla 3, 2 a 4, pak jeho zisk je 3+2+4 = 9 bodů.
Která pole jsou nejúspěšnější? Proč, je to náhoda, nebo je v tom nějaká zákonitost? Je pravděpodobnější že výsledek bude 7 než 2? Proč?

C. Pravděpodobnost. Jak ji měřit? Posluchači v diskusi odpovídají na otázky:
1) Když házím mincí, co je pravděpodobnější, že padne orel, nebo panna?
   To, co posluchači objeví, zapíšeme P(orel) = P(panna) = 1/2
2) Když házím hrací kostkou, co je pravděpodobnější, že padne 2 nebo 5?
   To, co posluchači objeví, zapíšeme P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6
3) Tahám jednu kuličku z osudí, v němž jsou dvě modré a jedna červená kulička. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnu červenou a jaká, že vytáhnu modrou?
   To co posluchači objeví, zapíši P(č) = 1/3, P(m) = 2/3.

Vymezení. Pravděpodobnost nějakého jevu je číslo *m/n*, kde *n* je počet všech možností a *m* počet příznivých možností.

Házím jednou kostkou a ptám se na pp jistého jevu

4) P(sudé) = ? jedná se o jev: padne číslo sudé.
5) P(>4) = ? jedná se o jev: padne číslo větší než 4.
6) P(1v3) = ? jedná se o jev: padne 1 nebo 3 (Písmeno „v“ značí „nebo“; z latinského „val“)

Házím dvěma kostkami a ptám se na pp jistých jevů
7) P(2;3) = ? jedná se o jev: na první kostce padne 2, na druhé padne 3.
8) P(6;sudé) = ? jedná se o jev: na první kostce padne 6, na druhé padne sudé.
9) P(>4;<4) = ? jedná se o jev: na první kostce padne 5 nebo 6, na druhé 1, 2, nebo 3.
10) P(s=3) = ? jedná se o jev: součet čísel na obou kostkách je 3.
11) P(s=1) = ? jedná se o jev: součet čísel na obou kostkách je 1.
12) P(s>1) = ? jedná se o jev: součet čísel na obou kostkách je více než 1.

Pravděpodobnost nemožného jevu je 0, pravděpodobnost jistého jevu je 1.
Očekávám, že již v průběhu řešení předešlých úloh studenti odhalí tabulku 6x6. Tu použijeme na hlavní úlohu této sekce:

Úloha 1. Najděte čísla
P(s=2), P(s=3), P(s=4), P(s=5), P(s=6), P(s=7), P(s=8), P(s=9), P(s=10), P(s=11), P(s=12),

		Na první kostce padne					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Na druhé kostce padne	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

V tabulce je uvedeno, že součet s = 2 padne pouze jednou, součet s = 3 padne dvakrát ,…součet s =7 padne sedmkrát, součet s = 12 padne jednou.

Protože je,

P(s=6) = 5/36, , P(s=7) = 6/36, P(s=8) = 5/36,

Je pp toho, že padne některé z čísel 6,7,8 rovna součtu těchto pravděpodobností, tedy 5/36 + 6/36 + 7/36 = 18/36 = ½. Tedy P(s=6v7v8) = ½.

Když uděláme 1000 pokusů, bude počet těch, co končí v číslech 6, 7, nebo 8 blízko číslu 500.

D. Pravděpodobnost v prostředí polymin. Náhodně slepujeme k sobě čtverce tak, aby vzniklo polymino. Počítáme, jaká je pp, že vytvoříme právě 3A nebo 3B, pak 4A, 4B, 4C, 4D, nebo 4E.

Úloha 2. Najděte pravděpodobnost P(3A) i P(3B) při náhodném slepení 3 čtverců.

Slepením 2 čtverců vznikne bimino 2A. Tedy P(2A) = 1. K němu pak přilepíme třetí čtverec na jednu ze šesti pozicí. Přilepením do pozice 3 nebo 6 vznikne trimino 3A, přilepením do pozice 1, 2, 4, nebo 5 vznikne trimino 3B. Tedy P(3A) = 2/6 = 1/3 a P(3B) = 4/6 = 2/3.

		1	2	
	6			3
		5	4	

Úloha 3. Najděte pravděpodobnost P(4B) při náhodném přilepení jednoho čtverce

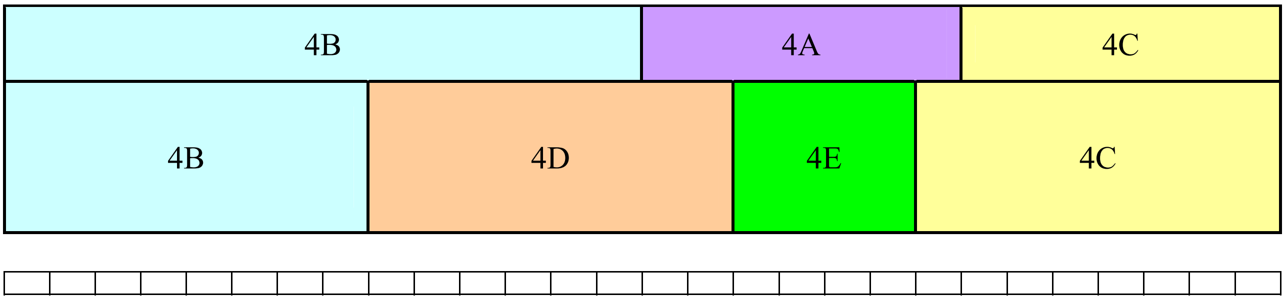
	1	2	3				1	2			4A	= 3A+4, 3A+8	2
8				4		7			3		4B	= 3A+1, 3A+3, 3A+5, 3A+7, 3B+3, 3B+5	6
	7	6	5			6		4			4C	= 3A+2, 3A+6, 3B+1, 3B+7	4
							5				4D	= 3B+2, 3B+6	2
											4E	= 3B + 4	1

k triminu a) 3A, b) 3B.
[a) P(4B) = 4/8 = ½; b) P(4B) = 2/7]

Výrazně náročnější je následující úloha, kterou necháváme i s řešením jen pro zájemce.

Úloha 4*. Najděte pravděpodobnost P(4B) při náhodném přilepení dvou čtverců k biminu.

[Proces lepení se skládá ze dvou kroků. V prvním vytvoříme trimino a ve druhém pak z něj tetramino 4B. Vše znázorníme graficky dělením obdélníku na části.
Prvním přilepením se z bimina stává buď trimino 3A s pravděpodobností 1/3, nebo trimino 3B s pravděpodobností 2/3.
Z trimina 3A (horní, menší část obdélníku) se stane buď tetramino 4B s pravděpodobností ½, nebo tetramino 4A s pp ¼, nebo tetramino 4C s pp. ¼.



měřítko

Z trimina 3B (dolní, větší část obdélníku) se stane buď tetramino 4B s pravděpodobností 2/7, nebo tetramino 4D s pp 2/7, nebo tetramino 4E s pp. 1/7, nebo tetramino 4C s pp 2/7. Obsah příslušné části obdélníka odpovídá pp tohoto tetramina. Tedy pp, že náhodným přilepení dvou čtverců k biminu vznikne tetramino 4A, je (1/3).(1/4) = 1/12. Podobně P(4D) = (2/3).(2/7) = 4/21, P(4E) = (2/3).(1/7) = 2/21. Teď tetramino 4B může vzniknout dvěma způsoby. Vznik z trimina 3A má pp (1/3).(1/2) = 1/6, vznik z trimina 3B má pp (2/3).(2/7) = 4/21.
Odtud P(4B) = 1/6 + 4/21 = 4/14. Podobně P(4C) = 1/12 + 4/21 = 25/84.

E. Pravděpodobnost jako nástroj hry SOVA. Hráč A si myslí na jedno ze slov čtyř-prvkové galerie {nos, oko, pes, les}. Hráč B klade otázky, na které hráč A odpoví pouze ANO, nebo NE. Za odpověď ANO platí hráč B hráčovi A 1 bod, za odpověď NE platí dva body. Hráč A zvažuje dvě strategie:
První strategie:

1. Otáz.	**1. Odp.**	**2. Otázka**	**2. Odp.**	**Otázka 3.**	**3. Odp.**	**slovo**	**placeno**
Je ve slově písmeno k?	ANO					oko	1
	NE	Je ve slově písmeno n?	ANO			nos	2+1
			NE	Je ve slově písmeno p?	ANO	pes	2+2+1
					NE	les	2+2+2

Druhá strategie:

1. Otázka	**1. Odpověď**	**2. Otázka**	**2. Odpověď**	**slovo**	**placeno**
Je ve slově písmeno o?	ANO	Je ve slově písmeno n?	ANO	nos	1+1
			NE	oko	1+2
	NE	Je ve slově písmeno p?	ANO	pes	2+1
			NE	les	2+2

Která je lepší?