KLASIFIKACE JAKO KOGNITIVNÍ FUNKCE[1]

Milan Hejný, Jana Kratochvílová
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Viz „polaritní bifurkace"

Abstrakt. Informace o probíhajícím výzkumu je rozložena do tří částí. V první jsou prezentovány pojmy: vnější klasifikace, klasifikační kritérium, klasifikační proces, klasifikace jako kognitivní funkce. Ilustrativní materiál projektuje tyto pojmy do prostředí školy. Druhá část studie předkládá hlavní experimentální zjištění, kterým jsou deformované představy některých učitelů o pojmu klasifikace. Je naznačena možnost didaktické prezentace jevu klasifikace a podrobněji je diskutována důležitá a choulostivá otázka ostrosti tříd, resp. ostrosti univerza při klasifikačních procesech. Třetí a poslední část studie je věnována typologii klasifikací. Jsou identifikovány dva základní parametry pro tuto typologii: kardinalita tříd klasifikace a vzájemné vazby mezi třídami klasifikace. Podrobněji jsou zkoumány bifurkace (univerzum je rozděleno do dvou tříd) a trifurkace (univerzum je rozděleno do tří tříd). Ilustrativní materiál dokumentuje širokou didaktickou aplikabilitu klasifikačních jevů. V didaktických úvahách je zdůrazňován konstruktivistický přístup k prezentaci matematiky.

Terminologická poznámka. Slovo *klasifikace* je užíváno ve třech různých významech. Klasifikací rozumíme 1) jistou organizaci souboru objektů nebo jevů, 2) myšlenkový proces, který takovou organizaci tvoří nebo realizuje, 3) kognitivní funkci, kterou člověk při tomto procesu používá. Bude-li hrozit nedorozumění, budeme tyto významy upřesňovat takto: 1) vnější klasifikace, 2) klasifikační proces, 3) klasifikace jako kognitivní funkce.

1. ÚVOD

Studie je volným pokračováním článků Hejný 2001, 2002 a 2003 popisujících naše výsledky zkoumání procesu strukturace životních, ale zejména matematických vědomostí člověka, především dítěte a žáka. Současná orientace zkoumání struktury je ovlivněna aktuální potřebou bruselského projektu COSIMA[2], na němž spolupracují oba autoři tohoto článku. Část výsledků výzkumu funkce klasifikace byla ve zkrácené formě uvedena v článku Hejný, Kratochvílová 2004. Tato studie je rozvedením a prohloubením některých tam prezentovaných myšlenek, obohacená o nová experimentální zjištění a nové analýzy.

Východiskem studie jsou experimenty. Prvním zdrojem jsou pedagogické deníky M. Hejného z experimentálního vyučování na ZŠ v letech 1976-1989. Druhým jsou protokoly experimentů, které v letech 1994-1997 uskutečnila J. Kratochvílová. Třetím jsou experimenty uskutečněné oběma autory v posledních dvou letech. Subjekty těchto experimentů jsou zejména učitelé a pracovali jsme zde s klasifikacemi, které nejsou součástí učiva školní matematiky, protože cílem našeho šetření je poznávat, jak jsou žáci a učitelé schopni pracovat s klasifikací, nikoli jak znají konkrétní klasifikace. Klasifikace známé ze školy jsme používali pouze jako pomocný ilustrativní materiál.

Naše úvahy začneme upřesněním pojmů: vnější klasifikace, klasifikační proces, klasifikace jako kognitivní funkce. První z těchto pojmů později na základě ilustrativního materiálu rozvedeme podrobněji.

[1] Studie byla vypracována s podporou grantu GAČR 406/02/0829.

[2] Jedná se o bruselský projekt Socrates-Comenius 2.1. (s názvem Communicating „own strategies" in primary school mathematics: Insights for pre-service teachers). Koordinátorem projektu je B. Wollring (Univerzita v Kasselu v Německu), partnery jsou A. Peter-Koop (Univerzita v Oldenburgu v Německu), A. Cockburn (Univerzita v Norwichi v Anglii) a autoři tohoto článku.

Vymezení 1. Nechť M je množina. Konečný disjunktní rozklad množiny M na podmnožiny T_i, $i = 1, \ldots, n$ nazveme *vnější klasifikací*. Symbolicky můžeme tuto vnější klasifikaci zapsat: $M = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$. Součástí vnější klasifikace je i pravidlo, návod nebo podmínka, která jasně vymezuje každou z tříd rozkladu. Jinak řečeno tato podmínka o každém prvku z M jednoznačně rozhodne, do které třídy patří. Uvedenou podmínku (často je to soubor podmínek nebo předpis nebo několik předpisů) budeme nazývat *klasifikační kritérium*.

Vymezení 2. *Klasifikačním procesem* nazýváme mentální proces, který může být dvojího typu: vytvořující a realizující.
Mentální proces, kterého výsledkem je nějaká vnější klasifikace dané množiny M, nazveme *vytvořující klasifikační proces*. Do tohoto procesu vstupuje množina M a z něj vystupuje klasifikace $M = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$ množiny M, popřípadě i klasifikační kritérium.
Realizujícím klasifikačním procesem nazveme mentální proces, který všechny prvky dané podmnožiny H množiny M rozdělí do tříd podle jasně popsaného klasifikačního kritéria.

Vymezení 3. Kognitivní funkce, která uskutečňuje klasifikační proces, nazveme *klasifikace jako kognitivní funkce*.

Klasifikace patří k základním způsobům organizace souboru dat, pojmů, vztahů nebo situací. Ve školní matematice se vnější klasifikace předkládá žákům jako hotový způsob organizace poznatků a od žáků se žádá pouze realizace klasifikace již popsané. Podle našeho přesvědčení důležitější než vložit do hlav žáků klasifikační schémata je rozvíjet jejich schopnost vytvářet klasifikace a pracovat s klasifikací, tj. rozvíjet jejich kognitivní funkci klasifikace.

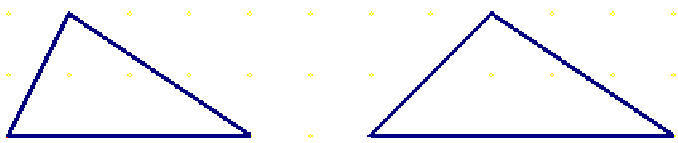
Rozvíjet kognitivní funkci žáka znamená motivovat jej k činnostem, v nichž se tato funkce projevuje. V našem případě tedy motivovat žáka ke klasifikačním procesům. Ty jsou, hrubě řečeno, dvou typů. Buď jde o to, aby si žáci srovnali (strukturovali) jistou oblast svého matematického poznání, nebo o to, aby přehledně organizovali sérii případů, na které se rozpadá řešení situace. Dodejme, že strukturace poznání často vede k tvorbě nových pojmů. V následujících dvou kapitolách budou oba typy klasifikačních procesů diskutovány.

2. KLASIFIKACE - NÁSTROJ STRUKTURACE POZNATKŮ A TVORBY POJMŮ

Následující epizody ukáží na některé didakticky důležité momenty spojené s klasifikací. První epizoda se odehrála v říjnu 1976 v pátém ročníku a druhá o dva roky později v sedmém ročníku. U obou epizod vystupuje dívka Alice, velice komunikativní děvče.

Epizoda 1. (1976, pátý ročník) Chtěl jsem zjistit, jak žáci znají klasifikaci trojúhelníků na pravoúhlý, ostroúhlý a tupoúhlý. Na tabuli jsem nakreslil několik trojúhelníků a zeptal jsem se, kdo dokáže najít mezi nimi všechny tupoúhlé. Alice ukázala na tři trojúhelníky. Dva byly tupoúhlé, ale třetí byl ostroúhlý. Alici zřejmě zmátlo to, že tento trojúhelník ležel vedle jiného tupoúhlého (viz obr. 1).

Obr. 1



Požádal jsem Alici, aby mi u levého trojúhelníku ukázala jeho tupý úhel. Dívka mi zřejmě nerozuměla. Ptal jsem se jí, jak tedy pozná tupoúhlý trojúhelník. Řekla „je taký rozpučený“. Zeptal jsem se jí, zda umí říct, co to je tupoúhlý trojúhelník. Alice řekla „trojuholník, ktorý má jeden vnútorný uhol tupý“. Nevěděla ale, jak definici použít v daném konkrétním případě.

Epizoda 2. (1978, sedmý ročník) Na nástěnku jsem vyvěsil následujících šest úloh o skládání rovinných útvarů. [Poznámka: rs = rovnostranný, rr = rovnoramenný, Δ = trojúhelník]

Úloha 1. Najděte obdélník, který lze složit ze dvou rs Δ a dvou rr Δ.
Úloha 2. Který pravoúhlý Δ lze složit z a) jednoho rs a jednoho rr Δ, b) dvou rr Δ, c) tří rr Δ.
Úloha 3. Lze čtverec složit ze a) dvou b) tří, c) čtyř, d) pěti e) sta rr Δ?
Úloha 4. Který rr Δ lze složit z jednoho rs a dvou rr Δ?
Úloha 5. Který rr Δ lze složit ze tří rr Δ?
Úloha 6. Který rr lichoběžník lze složit ze a) tří rs Δ, b) rr Δ a pravoúhlého Δ, c) dvou rr Δ?

Alice se zeptala „ktorý je to ten rovnoramenný a ktorý je rovnostranný?“ Aleš jí to nakreslil. Alice řekla, že rovnostranný trojúhelník je ten nejhezčí ze všech rovnoramenných. Aleš řekl, že to plete, neboť rovnostranný trojúhelník není rovnoramenný, u rovnoramenného základna musí být jiná než rameno. Anna dodala, že je to jako se čtvercem a obdélníkem. To se vybere ten nejhezčí tvar a dá se mu jiné jméno. Čtverec je nejhezčí ze všech obdélníků a rovnostranný trojúhelník je nejhezčí ze všech trojúhelníků.

Následující den přinesli někteří žáci řešení některých úloh z nástěnky. Úlohu 2b) vyřešili Aleš, Alice a Anton. První dva tvrdili, že každý pravoúhlý trojúhelník lze rozdělit na dva rovnoramenné trojúhelníky. Anton řekl, že to není pravda, protože trojúhelník s úhly 30°, 60° a 90° se tak rozložit nedá; u něj jeden z rozkladových trojúhelníků je rovnostranný. Aleše Antonova poznámka viditelně překvapila a rozladila. Byl si jist, že řešení má dobře. Nicméně nic proti Antonovi nenamítal, jen se mne zeptal, jak se jmenuje rovnoramenný i rovnostranný trojúhelník jedním jménem. Dodal, že obdélník i čtverec mají společné jméno pravoúhelník. Odpověděl jsem, že takové slovo já neznám, ale jestli jej Aleš potřebuje, může si nějaké vymyslit. Alice navrhla „rovník“ a třída se zasmála. Adam řekl „to je predsa súmerný trojuholník“. Zeptal jsem se třídy, zda má Adam pravdu. Alice řekla „teda osovo súmerný“. Aleš pak potěšeně řekl, že on vlastně vyřešil úlohu pro osově souměrné trojúhelníky a ne pro rovnoramenné trojúhelníky.

Po několika dnech jsme se k terminologické debatě vrátili. Adrián totiž ve svých řešeních použil termín „obecný trojúhelník“ ve smyslu „trojúhelník, jehož strany jsou vesměs různé“. Nejprve většina žáků třídy s termínem souhlasila. Pak ale zaznělo několik námitek a dvě z nich našly odezvu u dalších žáků: 1) Proč rovnoramenný trojúhelník není také obecný? 2) Trojúhelník se stranami 3, 4, 5 má strany vesměs různé a měl by tedy být „obecný“. Jenže je to velice speciální trojúhelník, proto nemůže být obecný. Adrián diskusi uzavřel „místo „obecný trojúhelník“ budu raději používat „různostranník“, jak dříve navrhla Andrea“.

Komentář 1.

A. V epizodě 1. jde o rozklad této množiny na třídu OU (ostroúhlých), PU (pravoúhlých) a TU (tupoúhlých trojúhelníků). Ve epizodě 2. jde o rozklad množiny T na třídu RS (rovnostranných), třídu RR (rovnoramenných) a třídu OT („ostatních“ trojúhelníků). Ve znakovém jazyce: $T = OU \cup PU \cup TU$, resp. $T = RS \cup RR \cup OT$.

B. Když hledíme pouze na tvar trojúhelníků a ne na jejich velikost, pak každý trojúhelník je jednoznačně dán dvojicí úhlů α, β (úhel γ je pak již jednoznačně určen).Tedy množina T je 2-parametrická. Třídy OU, TU a OT jsou 2-parametrické, třídy PU a RR jsou 1-parametrické (je dána parametrem $\alpha = \beta \neq 60°$) a třída RS je 0-parametrická, obsahuje jediný objekt popsaný vztahem $\alpha = \beta = 60°$.

C. V obou epizodách Alice projevila jistou neznalost. V epizodě 1. to byla neznalost zásadní: nedostatečná znalost pojmu tupoúhlý trojúhelník. I když kritérium uměla odříkat, nepoužila jej v konkrétním případě. Rozhodovala na základě vágní intuice. Později jsem zjistil, proč Alice nerozuměla definici. Dívka věděla, co je úhel trojúhelníka, ale mátlo ji slůvko „vnitřní“. Myslela, že se tento úhel musí nejdříve nějak sestrojit a nevěděla jak. Z toho plyne poučení, že snaha učitele nebo učebnice o přesnost vyjadřování může být kontraproduktivní, jestliže používá slovník, který je pro žáka příliš náročný.

D. Neznalost, kterou Alice projevila v epizodě 2., je nepodstatná. Pojmy, o které šlo, znala (to dokumentovala řešením úloh z nástěnky). Dokonce i znala příslušné termíny rovnostranný a rovnoramenný. Nepamatovala si přiřazení termínů příslušným pojmům. Nevěděla též, že třídy RS a RR chápeme jako disjunktní. Alice tedy neznala konvenci, kterou u této klasifikace zavedli matematici[3]. Dodejme, že způsob, jimž Aleš Alici přiřazení připomněl, byl velice efektivní: pomocí galerie obrázků. V tomto případě stačí zřejmě nakreslit obrázky dva, nebo dokonce jen jeden.

E. Předchozí myšlenku zobecníme, protože se týká didakticky závažného jevu. Nezřídka se totiž stává, že učitel při komunikaci se žákem nebo při posuzování jeho práce nerozlišuje mezi pojmem a termínem. Žák může mít velice dobrou představu pojmu kruh a kružnice a používat pro ně kvazi-termíny „kolečko“ a „plné kolečko“. Může mít i představu zcela vágní a používat přesné termíny kruh a kružnice. Proto v dalším důsledně rozlišujeme mezi pojmem, nebo přesněji představou pojmu, a termínem.

F. Chyby, kterých se dopustila Alice, patří k frekventovaným chybám, jichž se žáci dopouští při práci s klasifikacemi: a) intuitivní chápání jednotlivých tříd (pojmů), b) formální znalost definice pojmů, c) terminologická záměna tříd, které jsou si blízké, d) nejasnost ve vztazích mezi třídami – zda jsou disjunktní, nebo jedna obsahuje druhou.

G. Alice i Aleš se při řešení úlohy 2b) dopustili stejné chyby: zapomněli ze všech řešení vyloučit singulární případ rovnostranného trojúhelníka. To je stejná chyba, jako když se v algebře napíše p/q a zapomene se vyloučit případ $q = 0$. Je to frekventovaná chyba, která se dá popsat takto: žák při práci s n-parametrickou množinou objektů zapomene vyloučit m-parametrickou podmnožinu ($m < n$), která dané situaci nevyhovuje.

H. Terminologie pro klasifikaci „ostro-/pravo-/tupo-úhlý trojúhelník“ je dobře srozumitelná pro žáka, který zná příslušnou klasifikaci úhlů. Terminologie pro rovno-stranný/ramenný trojúhelník je náročnější. Vyžaduje pamatovat si oba termíny, nezaměňovat je.

I. Didakticky závažná byla diskuse o společném názvu pro rovnostranný i rovnoramenný trojúhelník, tedy pro třídu RS $\cup$ RR. Diskusi vyvolal Aleš, jako reakci na kritiku Antona. Potřeba nového termínu přichází od žáka. Aleš potřebuje dát jméno pojmu, který (omylem) nazýval rovnoramenným trojúhelníkem. Adamův návrh „souměrný trojúhelník“ je skvělý a svědčí o tom, že představa souměrnosti (osové a snad i středové) je ve vědomí Adama rychle aktivována a žák má s tímto jevem mnoho zkušeností. Dodejme, že stručný Adamův návrh „souměrný trojúhelník“ je dobře hájitelný proti námitce, že zde schází slovo „osově“. Totiž u trojúhelníka středová souměrnost vůbec nepřichází v úvahu, a proto slovo „osově“ lze jako nadbytečné vypustit.

J. Dodejme, že termín „obecný trojúhelník“ je zavádějící, protože navozuje představu všech trojúhelníků, které nejsou specifické. Není ale jasné, o jaký kontext specifičnosti, resp. obecnosti se jedná. Žáci velice dobře termín kritizovali a samostatně se dopracovali k termínu logickému.

K. Situace popsaná v bodě I nám nabízí diagnostický nástroj při mapování vhledu žáků nebo studentů do klasifikace trojúhelníků. Nástrojem je následující úloha, kterou předložíme žákům, kteří již pojmy rovnoramenný trojúhelník a rovnostranný trojúhelník dobře znají.

---

[3] Nejistota pojmenování u párových pojmů (pravý & levý, sudý & lichý, konvexní & konkávní, čitatel & jmenovatel, dělenec & dělitel, souřadnicová osa x-ová & souřadnicová osa y-ová, …) je běžná. Vzniká jako důsledek způsobu seznamování se s těmito pojmy. Jestliže oba pojmy i oba termíny přichází do vědomí najednou, pak je dosti pravděpodobné, že dochází ke vzájemné asociaci celé čtveřice, ve které pak má žák problémy se správným přiřazením pojmu a termínu. Podle našeho soudu tato neznalost má zcela podružný charakter, jestliže si jí je žák vědom.

Úloha 7. Navrhněte termín pro společné označení všech rovnoramenných i rovnostranných trojúhelníků.

L. Zajímavé je porovnat práci učitele v obou epizodách. V epizodě 1. (to jsem měl jen šestitýdenní zkušenosti s vyučováním na základní škole) jsem postupoval více-méně tradičně. Vedl jsem rozmluvu s jedním žákem, abych prověřil jeho vědomosti. Ve druhé epizodě byla již moje učitelská práce v duchu konstruktivistických edukačních přístupů. Termíny jsem nedemonstroval, ani nezkoušel. Pouze jsem žákům dal úlohy, k řešení kterých bylo třeba termíny znát. Žáci sami vyvolali diskusi a sami byli aktéry zkoumání pojmů. Smyslem debaty nebylo procvičit názvosloví, ale správně porozumět textu úloh z nástěnky.

3. KLASIFIKACE - NÁSTROJ ŘEŠENÍ ÚLOH

První z následujících dvou epizod se odehrála se dvěma dívkami (7. ročník) v lednu 1996, druhá s týmiž dívkami (8. ročník) v prosinci 1996. Epizody ukazují, jak klasifikace může pomoci řešit úlohu s nepřehledným počtem dat. Jedná se o známý - ABRAKADABRA problém[4] (Polya, 1966, s. 68), viz obr. 2.

Úloha 8. Kolika různými způsoby lze přečíst slovo „abrakadabra“, když vycházíme od písmene A_z (začátek naší cesty) a pokračujeme libovolně klikatou cestou ve směru vpravo a nahoru do písmene A_k (konec naší cesty).

Epizoda 3. V prostředí klidného kabinetu jsem Báře a Bětce zadala úlohu 8. Řešily ji společně. K dispozici měly barevné pastelky. Bára hned řekla „takhle, a-bra-ka-d-a-b-ra“

A	D	A	B	R	A_k
K	A	D	A	B	R
A	K	A	D	A	B
R	A	K	A	D	A
B	R	A	K	A	D
A_z	B	R	A	K	A

Obr. 2

a prstem na obrázku šla po dolním řádku vpravo a po pravém sloupci nahoru. Vzápětí na to stejně objevila cestu po levém sloupci nahoru a prvním řádku vpravo. Chvíli bylo ticho, pak Bětka řekla „No jo, ale můžeš jít i takhle abra-kadab-ra“ a prstem ukazovala cestu po spodním řádku od A do třetího A, pak nahoru až do prvního řádku k písmenu B a nakonec doprava. Po chvíli se dívky shodly na tom, že těch cest „je fůra“. Několik cest identifikovaly tak, že je procházely prstem. Opakovaně k naznačené cestě ukázaly i cestu osově souměrnou. Bětka navrhla, aby počítaly jen cesty, které z výchozího A jdou doprava. Bára dodala „no jo, nahoru to bude stejný“. Dívky začaly vyznačovat jednotlivé cesty barevně. Pochvíli ztratily přehled, obrázek překreslily ve zvětšené podobě a pokračovaly. V jejich záznamech bylo možné sledovat jisté lokální systémy, ale rozhodně to nebylo systematické. Když se po dvaceti minutách dobraly počtu 42, tak Bětka trochu otráveně řekla „No, určitě jich je víc než 42, ale vlastně víc než 84“. Po pauze dodala „najít všechny by byla velká práce“. Tím řešení skončilo.

Epizoda 4. Za necelý rok jsem dívkám předložila stejnou úlohu. Dívky si pamatovaly, že úloha je náročná, že našly hodně možností, že výsledek nezjistily, ale pamatovaly si i to, že stačilo hledat pouze možnosti od A doprava. Po této rekapitulaci Bětka řekla, že asi ani dnes to nevyřeší. Viděla jsem, že dívky nejsou příliš ochotny úlohu řešit, tak jsem jim řekla, že dostanou úlohu trochu jednodušší. Nebude třeba vyznačit všechny cesty, ale jen ty, které prochází tímto písmenem A (a zakroužkovala jsem A ve druhém sloupci zleva a druhém řádku shora). Bára se zeptala, zda mají vyznačit všechny cesty, nebo zda stačí vyznačit ty, co začínají od A_z směrem vpravo. Řekla jsem že všechny. Bára se chopila pastelek a začala vyznačovat některé cesty. Bětka ji sledovala a po chvíli řekla, že by si měly nejprve udělat cesty od A_z do zakroužkovaného A a pak od tohoto A do A_k. Asi po pěti minutách dívky věděly, že cest z A_z do zakroužkovaného A je 5 a těch druhých též 5. Po chvíli dohadování se

[4] V experimentech byla použita jiná modifikace úlohy. Nešlo o čtení slova, ale procházení plánem města složeného ze stejných čtvercových bloků domů (cesty na čtverečkovaném papíře). Zde necháváme původní Polyovo zadání pro snadnější popis epizod a příslušným způsobem modifikujeme výpovědi žáků.

dohodly, že všech cest bude ne 10, ale 25. Pochválila jsem obě dívky a zeptala jsem se, kolik by asi těch cest bylo, kdybychom procházeli písmenem A ve třetím sloupci a třetím řádku shora. Dívky ihned odpověděly že též 25, ale pak se Bára zarazila a řekla, že to raději spočítají. Tabulku si překreslily a poměrně rychle našly výsledek: Cest je nyní 10 x 10 = 100.

A_1	D	A	B	R	A_k
K	A_2	D	A	B	R
A	K	A_3	D	A	B
R	A	K	A_4	D	A
B	R	A	K	A_5	D
A_z	B	R	A	K	A_6

Obr. 3

A pak přišel objev. Bětka řekla, že „když to zjistíme i přes toto A a toto A a toto A, budeme vědět všechny“ (ukazovala písmena A na diagonále). Velice jsem Bětku pochválila a poradila ji, ať si ta písmena A očísluje. Tak vznikla situace zobrazená na obrázku 3. Dívky byly úspěchem motivovány a poměrně rychle se dobraly k výsledku 252 cest. V průběhu počítání ještě Bára na chvíli zapochybovala o správnosti postupu, protože si myslela, že na některé cesty při tomto počítání zapomenou. Pak se ale dívky ujistily, že cesty budou všechny. Pochybnost o tom, zda některá nebude počítána dvakrát, se neobjevila. Je zajímavé, že tentokráte symetrii ihned neviděly. Cesty přes písmeno A_4 počítaly stejně jako předtím cesty přes písmeno A_3. Až po chvíli jim došlo, že je jich stejně jako těch přes A_3. Když byl výsledek na stole a dívky byly zřejmě se svojí prací spokojeny, zeptala jsem se jich, čím to je, že dnes jim to šlo výrazně lépe než minule. Bětka mínila, že je to proto, že jsem jim dala na začátek lehčí úlohu a Bára dodala, že navíc jsem je dobře navedla na to, jak to všechno podělit na menší kousky, aby se to dalo spočítat.

Komentář 2.

A. Epizoda 3. je typickým příkladem prvního pokusu žáka o řešení tohoto kombinatorického problému. Jako první objeví obě „mantinelové“ cesty (přes A_1 a A_6); ty jsou navzájem osově souměrné, což řešitele dovede k objevu souměrnosti souboru všech řešení, často i k myšlence, že stačí prozkoumat jen polovinu cest. Poměrně velká množina cest (je jich 252) se však ani redukcí na polovinu nestane manuálně dostupnou. Je potřebná další idea klasifikace. Bára a Bětka při prvním setkání s danou množinou se dále nedostaly, ale nabyly zkušenost o velkém rozsahu množiny a potřebě hledat sofistikovanější způsob organizace jejich prvků.

B. V epizodě 4. experimentátorka původně doufala, že dívky celý postup objeví samostatně. Když ale viděla jejich nechuť, rozhodla se usnadnit jim objevování řešení pomocí přípravných úloh. Tento záměr vyšel a ilustrace ukazuje, jak lze dovést žáky k vyřešení náročné úlohy pomocí úloh návodných.

C. Dívky si uvědomily, že podstatou úspěšné řešitelské strategie bylo rozložení nepřehledné množiny cest do přehledných podmnožin, tedy klasifikace. Do jaké míry si dívky tento metakognitivní poznatek ovlastnily, nelze říct. Lze ale předpokládat, že případné další setkání dívek s úlohou, jejíž řešení bude získáno rozkladem možností do tříd, bude již pro dívky známější.

D. Několik dalších úloh, jejichž řešení vyžaduje klasifikaci, inspiruje čtenáře k vlastní řešitelské činnosti. U každé z těchto úloh napište, jakou klasifikaci jste v řešení použili.

Úloha 9. Řešte parametrickou rovnici: $(p-1)x^2 + 2px + 5 = 0$.
Úloha 10. Pro jaké n lze najít rovinu, která řeže krychli v n-úhelníku.
Úloha 11. Které trojúhelníky lze rozložit na tři osově souměrné trojúhelníky?
Úloha 12. Kolik mřížových čtverců je určeno mřížovými body mřížového čtverce nxn? Bod se nazývá mřížový, právě když jeho souřadnice jsou celá čísla. Čtverec se nazývá mřížový, když všechny jeho vrcholy jsou mřížové body.

Závěr. V kapitolách 2. a 3. jsme viděli, že kognitivní funkce klasifikace hraje důležitou roli jak při strukturaci poznatků, tak v pojmotvorném procesu i při řešení některých málo přehledných situací. Tím jsme poukázali na potřebu studia této mentální funkce. V následující kapitole ukážeme jeden z nástrojů takového studia.

Nástrojem výzkumu jsou úlohy týkající se *klasifikačních situací*. Tento termín zavedeme.

4. KLASIFIKAČNÍ SITUACE

Vymezení 4. Klasifikační situaci tvoří:

1. Konečná množina G, kterou budeme nazývat *galerie*; její prvky nazýváme *objekty*.
2. *Klasifikační kritérium* κ - předpis, který udává disjunktní rozklad galerie G na vzájemně disjunktní podmnožiny $G = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$, které nazýváme *třídy rozkladu*.
3. *Univerzum* U objektů, z něhož jsou objekty galerie vybrány.

Zavedené termíny blíže osvětlíme pomocí tří ilustrací a jedné epizody.

Ilustrace 1. Úloha 8 prezentuje kombinatorickou situaci, kterou v epizodách 3. a 4. řeší Bětka a Bára pomocí klasifikace. Je to jedna z běžných řešitelských strategií kombinatorických úloh, v nichž je textem dáno pouze univerzum, které je tak početné, že metoda identifikace všech jeho prvků je neschůdná. Ve snaze nabýt do univerza vhled řešitel identifikuje několik prvků univerza (dívky načrtly přes 40 cest); tato množina pak hraje roli galerie dané situace. Klíčem k řešení je objev organizačního principu, který celé univerzum zpřehlední. Nejčastěji tímto principem je klasifikační kritérium. Jeho objevením je cesta k vyřešení úlohy otevřená. Když žák nedovede najít kritérium, může mu učitel poradit tím, že úlohu zjednoduší – místo univerza dá žákovi najít všechny prvky jedné z rozkladových tříd.

Ilustrace 2. V epizodě 1. jsou deklarativně dány všechny tři položky klasifikační situace. Soubor trojúhelníků, který je nakreslen na tabuli, představuje galerii. Jev „velikost největšího úhlů v trojúhelníku“ je klasifikačním kritériem, které dělí trojúhelníky na tři třídy: ostro-/pravo-/tupo-úhlé. Univerzem je množina všech trojúhelníků. Zdá se, že žák, který rozumí předponám ostro-, pravo-, tupo-, rozumí celé situaci. V komentáři uvidíme, že tomu tak být nemusí.

Ilustrace 3. V pracovním sešitě pro třetí třídu je následující úloha, ve které galerii představuje jedenáct čísel v horním řádku a čtyři třídy rozkladu jsou reprezentovány krabicemi ve spodní části obr 4. Kritériem je počet číslic daného čísla.

Úloha 13. Šipkou naznačte, které číslo patří do které krabice.

51 700 5432 91 0 1122 9 80 663 436 6

Jednomístná čísla	Dvoumístná čísla	Trojmístná čísla	Čtyřmístná čísla

Obr. 4

V úloze vystupují pouze čtyřmístná čísla. Situaci lze přirozeně rozšířit i na čísla pětimístná, šestimístná, … *n*-místná pro libovolné *n*. Nic podobného jsme u klasifikace trojúhelníků neviděli. Možnost přirozeného rozšiřování univerza je specifikem této ilustrace.

Ilustrace 4. Univerzum U je množina všech dvojic různých přímek v prostoru. Klasifikační kritérium je „vzájemná poloha různých přímek“. U je rozloženo do tří tříd T_1, T_2, T_3, které nesou název 1) rovnoběžky, 2) různoběžky, 3) mimoběžky.

Epizoda 5. V jednom experimentu žáci osmého ročníku zkoumali význačné úsečky na krychli (12 hran, 12 stěnových a 4 tělesové úhlopříčky): poměry jejich délek; jejich vzájemné polohy; úhly, které svírají; trojúhelníky, které tvoří. Během dvou týdnů bylo problematice věnováno na pěti hodinách celkem asi 60-70 minut. Asi měsíc po tomto zkoumání byli žáci vyzváni, aby navrhli kritérium, pomocí kterého lze všech 28 významných úseček krychle rozdělit do tří skupin. Byli jsme přesvědčeni, že skupiny budou: hrany, stěnové úhlopříčky a tělesové úhlopříčky. Zajímalo nás, kolik žáků jako klasifikační kritérium uvede jména těchto tříd a kolik (a zda vůbec někdo) uvede délky těchto úseček (tedy a, a√2, a√3). Žádné jiné kritérium jsme nečekali. Velice nás překvapilo, že asi čtvrtina žáků dělila tyto úsečky na vodorovné, svislé a šikmé.

Komentář 3.

A. Hledání klasifikačního kritéria je pouze jedno z možných řešitelských strategií úlohy 8. Jiná účinná strategie je založená na simplifikaci – místo dlouhého slova ABRACADABRA řeší žák nejprve stejnou úlohu pro kratší slovo (např. PES), pak pro delší (např. KOČKA) atd. Jiná strategie je založena na postupném určování počtu cest, které vedou z písmene A_z do sousedních písmen B, pak do k nim sousedních písmen R, pak do k nim sousedních písmen A atd. Tato strategie vede k objevu Pascalova trojúhelníka. Další, již hodně vyspělá strategie je založená na transformaci úlohy: každou cestu zapíši jako deseti-písmenné slovo složené z písmen *p* a *n* . Například slovo *pppppnnnnn* označuje cestu, ve které jdu nejprve pět kroků vpravo (*p*) a pak pět kroků nahoru (*n*).

B. Průběh řešitelského procesu kombinatorické úlohy popsaný v epizodách 3. a 4. je typický pro ty řešitele, kteří se snaží porozumět popsané kombinatorické situaci. Mnozí řešitelé se o nabytí vhledu do situace ani nepokouší a snaží se uhodnout, který ze čtyř známých vzorců mají použít.

C. Z ilustrace 1. vidíme, že úloha 8 může sloužit jako diagnostický nástroj. Klasifikuje žáky (kteří již kombinatoriku probrali) do tří úrovní z hlediska jejich vhledu do kombinatoriky. Nejníže lze hodnotit žáky, kteří se ani nepokusí o nabytí vhledu do situace a pídí se pouze po vzorci, který mají použít. Do prostřední vrstvy náleží ti žáci, kteří o nabytí vhledu usilují, tj. kteří si vytvoří galerii, ale nedovedou najít klasifikační kritérium – zde potřebují pomoc. Konečně nejvýše lze hodnotit úspěšné objevitele klasifikačního kritéria.

D. Ilustrace 2., potažmo epizoda 1. ukazuje jednu z nejstandardnějších školních klasifikačních situací. Je-li zde něco náročnějšího, pak je to zapamatování si odlišnosti předpon ostro a tupo. Leč i takto standardní situace může být pozoruhodně pozměněna, jestliže se projektuje do situace problematické. Tak v jedné diskusi o ortocentru trojúhelníka žáci sedmého ročníku argumentovali pomocí sférického trojúhelníka (dovolávali se Bermudského trojúhelníka) a mnozí byli ochotni tento objekt připustit do univerza trojúhelníků.

E. Zdá se, že kritérium použité v ilustraci 3. je zcela jasné. To je pravda, pokud se omezíme na standardní úlohy, jakou je např. úloha 13. Pohled se však značně zkomplikuje, když s daným kritériem pracují tvořiví žáci snažící se objevit překvapivé případy. Tak na otázku, jaké je nejmenší trojciferné číslo, jeden hoch odpověděl že 1/99. V našich archivech máme zaznamenánu i diskusi tří učitelů, kteří se nedovedli dohodnout, zda číslo 4,50 je jednomístné, dvojmístné, nebo trojmístné. Mimochodem jak byste posoudili výroky: a) číslo 4,0 je jednomístné; b) číslo 3 *x* 4 je dvoumístné.

F. Ilustrace 3. upozorňuje, že při klasifikacích, a to i na základní škole, se nelze omezit na klasifikace s konečným počtem tříd. I když v každém konkrétním případě pracujeme jen s konečným počtem tříd, potenciálně musíme připustit libovolné rozšiřování tohoto počtu. Toto poznání vede ke korekci vymezení 1., které pracovalo s pouze konečným počtem tříd.

G. Pro matematika je rozšíření uvažovaného univerza nejvýše čtyřmístných čísel na univerzum všech přirozených čísel věcí samozřejmou. Klasifikačním kritériem „počet číslic daného čísla“ je množina všech přirozených čísel (univerzum U) rozložena do spočetně mnoha tříd T_1, T_2, T_3, … Do třídy T_n patří všechna *n*-místná čísla, tedy čísla x, pro která je $10^{n-1} \le x < 10^n$, kde *n* probíhá všechna přirozená čísla. Podobně je to u pojmu *n*-úhelník.

H. Klasifikace obsahující nekonečně mnoho tříd je didakticky někdy velice náročná. Naše mysl často není schopna obsáhnout univerzum v tom rozsahu, jak o něm mluvíme. Například u tříd T_n mluvíme o libovolném přirozeném *n*, ale osvětlená část tohoto univerza se skládá pouze z několika málo prvních tříd (z tisíce nebo milionu). Podobně u n dimenzionálních prostorů pracujeme s libovolným n, ale naše lidská zkušenost je omezena číslem $n = 3$.

I. V ilustraci 4. vidíme, že geometrická situace „vzájemná poloha dvou útvarů" je v podstatě též klasifikací. Připomeňme, že vzájemná poloha kružnice a přímky je klasifikací objektů (přímka, kružnice) a že tři třídy této klasifikace jsou úzce propojeny na algebraickou klasifikaci objektů $\sqrt{D}$, kde $D > 0$ odpovídá třídě „sečna", $D = 0$ odpovídá třídě „tečna", $D < 0$ odpovídá třídě „vnější přímka kružnice". Všimněme si, že poslední třída již svým názvem ukazuje, že je didakticky nejméně zajímavá.

J. V epizodě 5. si všimneme dvou věcí. Především to, že v daném univerzu může existovat více kritérií, která vedou na stejný rozklad univerza do tříd. Druhou zajímavost nabízí chování žáků. Přes značné úsilí učitele „naučit" žáky klasifikovat jistou nepříliš početnou množinu úseček byla školní klasifikace u nemalého počtu dětí vytěsněna spontánní klasifikací, která má původ v každodenní zkušenosti žáka. Lze říci, že i když tito žáci znají pojmenování tří tříd (hrana, stěnová ú., tělesová ú.), nevnímají tento soubor jako strukturu. Jestliže jim učitel tuto strukturu řekl, oni ji neinteriorizovali. Tento jev lze diagnosticky využít. Uvedená úloha velice dobře diagnostikuje žáky, kteří kombinatorickou strukturu významných úseček krychle vytvořenu nemají.

5. NÁSTROJ VÝZKUMU KOGNITIVNÍ FUNKCE „KLASIFIKACE"

Předchozí ilustrace se týkaly klasifikací (galérií, kritérií, univerz), které se vztahují k matematice základní a střední školy. Teď se podíváme na neškolní situace, které používáme jako nástroj výzkumu. Jak řečeno v úvodu u těchto situací školní znalosti neovlivňují výsledek experimentu.

<u>Ilustrace 5.</u> Zvolme šesti-prvkovou galerii G = {husa, hříbě, kotě, kůň, myš, pes}. Kritérium κ_1 „podle gramatického rodu" rozloží tuto galerii do tří tříd po dvou objektech: maskulina {kůň, pes}, feminina {husa, myš}a neutra {hříbě, kotě}. Kritérium κ_2 „podle počtu písmen" rozloží danou galerii do tří tříd: na slova tří-písmenná {kůň, myš, pes}, čtyř-písmenná {husa, kotě} a pěti-písmenná {hříbě}. Kritérium κ_3 „podle třídy obratlovců" rozloží danou galerii na savce {hříbě, kotě, kůň, myš, pes} a ptáky {husa}.

<u>Komentář 4.</u>

Za univerzum u kritéria κ_1 můžeme vzít soubor všech podstatných jmen (v prvním pádě jednotného čísla) jazyka českého. Univerzum u kritéria κ_2 může být soubor všech slov jazyka českého obsahujících tři, čtyři nebo pět písmen. U kritéria κ_2 můžeme univerzum rozšířit na všechna slova jazyka českého, ale pak je nutné soubor zavedených tří tříd rozšířit o další třídy tak, aby zde byla třída pro každé slovo. Podobně u kritéria κ_3 můžeme univerzum rozšířit na všechny obratlovce a soubor dvou tříd rozšířit o další třídy tak, aby zde byla třída pro každého obratlovce. Vzhledem k velikému rozsahu živočišné říše a neúplnosti našich poznatků není univerzum v tomto případě, pro nás, množinou. Toto univerzum neleží celé, řečeno jazykem fenomenologie, před našim obzorem. Je možné, že pro biologa to množina je. Konečně podobná situace je i v matematice. Například v Eulerově době pojem funkce nebyl přesně vymezen a univerzum tímto termínem označované mělo rozostřené hranice.

<u>Ilustrace 6.</u> Zvolme dvanácti-prvkovou galerii křestních jmen českého jazyka:
G = {Anna, Erika, Jana, Arnošt, David, Aleš, Dita, Eduard, Judita, Dušan, Josef, Emílie}.
Tuto galerii použijeme jako výchozí informaci pro několik úloh, které lze použít jako nástroj výzkumu. Řešení těchto úloh najde čtenář na konci článku.

<u>Úloha 14[5].</u> Najděte kritérium, podle něhož lze galerii G rozdělit: a) do dvou tříd po šesti objektech, b) do čtyř tříd po třech objektech, c) do tří tříd po čtyřech objektech.

[5] Řešení úloh 14, 15 a 16 čtenář najde na konci článku.

Úloha 15. Najděte kritérium, podle něhož se galerie dělí do těchto tří tříd:
a) {Arnošt, David, Dušan, Josef}, {Anna, Dita, Jana, Aleš, Judita, Eduard}, {Erika, Emílie}
b) {David}, {Anna, Dita, Erika, Jana, Judita}, {Aleš, Arnošt, Dušan, Emílie, Josef}

Ilustrace 7. Úlohou (zejména pro učitele) může být výzva: vytvořte úlohu na klasifikaci, která bude mít takové a takové podmínky. Uvedeme příklady.

Úloha 16. Navrhněte galerii šesti objektů z oblasti zeměpisu tak, aby bylo možné objekty uspořádat do šesti okének tabulky 3 x 2 podle dvou kritérií: řádkového (tři objekty horního řádku tvoří jednu třídu a tři objekty dolního řádku tvoří druhou třídu) a sloupcového (každá dvojice objektů jednoho sloupce tvoří jednu třídu).

Úloha 17. Stejnou úlohu řešte pro oblast a) gramatiky, b) literatury, c) hudby, d) povolání, e) květin, f) zvířat, g) sportu h) vámi zvolené oblasti.

Uvedené nástroje (řešení klasifikačních úloh i tvorba těchto úloh) byly aplikovány v různých řešitelských modech:

1) individuální řešitel, který případně později svoje řešení diskutuje s jiným řešitelem,
2) skupinové řešení – skupina 2-5 řešitelů se snaží najít co možná nejvíce řešení,
3) individuální nebo skupinové hodnocení předloženého (většinou nepřesného) řešení,
4) učitel nebo skupina učitelů předpovídá, jak budou danou úlohu řešit žáci.

První tři mody byly aplikovány v únoru 2004 ve dvou dvoudenních seminářích pro učitele elementaristy. Semináře byly vedené formou dílny. V předstihu jednoho měsíce dostali účastníci semináře soubor úloh, které měli dát svým žákům a žákovská řešení pak přinést na seminář. Hlavní náplní dílny pak měla být

- tvorba úloh pro různé věkové kategorie (včetně motivačních příběhů a pohádek) a
- analýzy žákovských řešení, které účastníci přinesou.

V přípravné etapě dílny byli učitelé vyzváni k řešení několika náročnějších úloh, které účastníky dílny měly vpravit do problematiky.

6. NEJASNÉ PŘEDSTAVY NĚKTERÝCH UČITELŮ O POJMU KLASIFIKACE

Náročnější úlohy zadané účastníkům byly řešeny ve skupinách. Již řešení první úlohy, kterou byla úloha 14, i další úlohy, kterou byla úloha 17h), však ukázalo, že ne všichni učitelé jsou na tuto práci připraveni, protože sami mají problémy s rozlišením klasifikace od jiných organizačních principů, jako je distribuce, asociace nebo uspořádání. Problémy, které takto vznikly, jsou popsány níže v epizodách 6. a 7.

Nečekaná situace nás zaskočila a přinutila nás improvizovat. V připraveném scénáři nebylo možné pokračovat. Bylo nutné učitelům ujasnit pojem klasifikace. Uvědomili jsme si, že k tomu účelu jsme měli mít připravené úlohy, jimiž bychom účastníky dílny navedli na odhalení jejich chybných postupů. Žel úlohy jsme neměli, a proto jsme volili postup pro nás méně příjemný – vysvětlování. Toto je popsáno v kapitole 7.

Epizoda 6. Na první dílně se účastnilo asi 30 učitelů. Účastníkům byla předložena úloha 14. Učitelé, rozděleni do 6 skupin, byli vyzváni, aby u každého případu hledali co možná nejvíce řešení. Po vyřešení úlohy jsme chtěli jistý čas věnovat didaktické analýze získaných řešení.

U případu 14a) každá skupina uvedla kritérium „pohlaví“ a ještě aspoň jedno další kritérium. Nakonec bylo nalezeno přes tucet různých kritérií. Osm nejzajímavějších z nich vybíráme.

A) Ke jménu existuje párové Dušan - Dušana, Emílie - Emil, Erika - Erik, Jana - Jan, Josef - Josefína, Judita – Juda / ke jménu neexistuje párové Aleš, Anna, Arnošt, David, Dita, Eduard;
B) jméno začíná samohláskou/souhláskou;
C) jméno začíná na „A“ nebo „D“/ na „E“ nebo „J“;
D) jméno končí samohláskou/souhláskou;

E) jméno obsahuje/neobsahuje písmeno „l“ nebo „n“;
F) jméno obsahuje/neobsahuje písmeno „d“ nebo „š“;
G) jméno je/není v kalendáři v březnu nebo prosinci.

Některá řešení vyvolala diskusi mezi skupinami. Bylo jasné, že někteří účastníci dílny se na řešení úlohy 14 dívají jako na soutěž, která skupina najde více řešení. Tak vůči řešení A) bylo namítáno, že jména Dušana a Juda se v kalendáři neobjevují. O řešení E) se jedna kolegyně vyjádřila, že je vyumělkované. Závažnější kritiku vyvolalo jiné řešení, které uvedla třetí skupina. Řešení bylo následující:

H) uspořádáme jména podle abecedy a prvních šest jmen Aleš, Anna, Arnošt, David, Dita, Dušan dáme do první třídy a zbylých šest jmen Eduard, Emílie, Erika, Jana, Josef, Judita dáme do druhé třídy.

Někteří účastníci dílny namítali, že toto není klasifikace, ale nedokázali jasně formulovat, proč to není klasifikace. Většina účastníků dílny toto řešení považovala za korektní. Hodnověrnost tohoto řešení upevnila poznámka jedné kolegyně, která řekla, že klasifikace H) je stejná jako klasifikace C) a u klasifikace C) nebyly žádné námitky.

U případu 14b) každá skupina uvedla kritérium: začíná písmenem A/D/E/J a celkem bylo uvedeno 7 dalších dobrých řešení a jedno nekorektní. Tímto případem se dále nezabýváme.

U případu 14c) čtyři ze šesti skupin uvedly správné řešení:

I) počet písmen ve jméně je 4/5/6.

Našla se i další řešení, ale jedno řešení vyvolalo delší diskusi. Bylo popsáno takto:

J) „Mám tři třídy. Vezmu slova na „A“ a do každé třídy dám jedno takové slovo. Pak vezmu slova na „D“ a do každé třídy dám jedno. Totéž udělám se slovy na „E“ a na „J“. Tím jsou v každé třídě čtyři slova.“

Zde oponenti našli dobrý argument: Jak se ví, že například Anna bude patřit do první, druhé, nebo třetí třídy? Po této námitce autoři uvedené klasifikace svoji instrukci vylepšili tím, že slova nejprve uspořádali podle abecedy a až pak je začleňovali do tříd. Oponentům se ani toto vylepšení nejevilo jako dostačující, ale ani tentokráte nenašli proti němu přesvědčivé argumenty.

Epizoda 7. Účastníci dílny měli navrhnout galerii šesti objektů (např. obrázků, symbolů, slov), kterým by rozuměli žáci 1. nebo 2. ročníku základní školy. Bylo požadováno, aby tyto objekty byly uspořádány do šesti okének tabulky 3 x 2 podle jistého řádkového a sloupcového kritéria. Jedna ze šesti skupin uvedla tabulku 1. Řešitelé dodali, že úloha pro děti nebude používat slov, ale obrázků. Daný příklad asi polovina účastníků dílny považovala za dobrý nápad, druhá polovina se nevyjadřovala. Na vyzvání účastníků tvůrci galerie formulovali kritéria, podle kterých jsou objekty uspořádány do řádků a sloupců: „řádkové kritérium dělí objekty na živočichy a rostliny, sloupcové kritérium – to jsou ty dvojice objektů, co k sobě patří.“ Jedna účastnice řekla „to je takové bydliště toho zvířátka“, jiná účastnice se k ní přidala „to je takové hnízdo“.

Motýl	Mravenec	Veverka
Květ	Tráva	Strom

Tab. 1

Komentář 5.

A. Řešení H) případu 14a) předpokládá, že prvky galerie se nejprve nějak uspořádají – v daném případě je to uspořádání abecední. Tato organizace objektů je vhodná třeba pro telefonní seznam, ale není to klasifikace. Je to *uspořádání.* Tím rozumíme pravidlo, které o každých dvou objektech univerza jednoznačně rozhodne, který předchází kterému. Navíc musí být tato relace tranzitivní, tj. musí splňovat podmínku: jestliže A předchází B a B předchází C, pak A předchází C. (Relace uspořádání patří k základním pojmům teorie množin). Příklady uspořádání: přirozená čísla podle velikosti, slova českého jazyka podle abecedy. Příklad toho, co uspořádání není: sedm dnů v týdnu (opakují se periodicky), všechny komodity v konkrétním obchodu s potravinami „uspořádané“ podle ceny (dvě různé komodity mají stejnou cenu).

B. Kontroverzní řešení J) případu 14c) bylo založeno na principu *distribuce*, rozdělování. Mám-li třem dětem rozdělit šest povidlových a devět tvarohových koláčů, pak každé dítě dostane dva povidlové a tři tvarohové koláče. Tak je to spravedlivé. Důležité na této organizaci je, že zde mezi dvěma tvarohovými koláči nerozlišuji a nedovedu tedy jasně říct, který koláč připadne kterému dítěti. Tudíž tato organizace množiny koláčů není klasifikace podle našeho vymezení.

C. V epizodě 7. se řešení učiteli vytvořené úlohy zakládá na *párování* prvků, které nějak sémanticky souvisejí. Mohl bych k dané galerii slov přidat ještě tři další slova a vytvořit galerii G_1 = {křídla, kusadla, květ, motýl, mravenec, ocas, strom, tráva, veverka} a děti by těchto devět slov uspořádaly asi do tabulky, která by vypadala jako Tab. 2.

	?	**?**	**?**
Živočich	Motýl	Mravenec	Veverka
Rostlina	Květ	Tráva	Strom
Část těla	Křídla	Kusadla	Ocas

Tab. 2

V tomto uspořádání každý řádek tvoří jistou třídu. Její jméno je v levém sloupci. Tři slova v každém sloupci ale stěží tvoří třídu. Jsou seskupena na základě jisté, v tomto případě sémantické, příbuznosti, tedy *asociace.*

Ze všech tří uvažovaných deformací pojmu klasifikace je asociace nejblíže ke klasifikaci. Zde je často možné najít dodatečně pro jednotlivá seskupení společné jméno, jak se to více-méně povedlo i autorům této úlohy.

7. UPŘESNĚNÍ POJMU (VNĚJŠÍ) KLASIFIKACE

Jak jsme uvedli v úvodu ke kapitole 6., situace, která vznikla na semináři, nás přinutila improvizovaně dovést všechny účastníky k jasnému chápání pojmu klasifikace.

Epizoda 8. Když ochabla argumentace ve sporu o korektnost klasifikace, která předpokládá předchozí abecední uspořádání prvků galerie, navrhli jsme (my, vedoucí dílny) prozkoumat z didaktického hlediska klasifikaci trojúhelníků na ostro-/pravo-/tupo-úhlé. Položili jsme otázku, jak osvětlit tuto klasifikaci žákům, kteří ji nechápou.

Učitelé správně zdůraznili, že je třeba, aby žák uměl poznat nebo nějak zjistit, zda daný úhel je větší/menší/rovný pravému úhlu. Vše ostatní je již snadné. Stačí na tabuli nakreslit několik trojúhelníků a nechat žáky, ať rozhodnou, který je jaký. My jsme se snažili celý klasifikační proces popsat ještě názorněji. Řekli jsme toto.

„Připravíme tři koše a na každý dáme dva nápisy. První uvede jméno těch trojúhelníků, které do koše dáme; druhý bude podmínka, která o daném trojúhelníku rozhodne, zda do koše patří nebo ne. Tedy

na prvním koši bude nápis OSTROÚHLÉ a podmínka MÁ VŠECHNY ÚHLY OSTRÉ;
na druhém koši bude název PRAVOÚHLÉ a podmínka MÁ JEDEN PRAVÝ ÚHEL;
na třetím koši bude název TUPOÚHLÉ a podmínka MÁ JEDEN ÚHEL TUPÝ.“

Ještě přesvědčivěji by se dala podmínka na prvním koši formulovat takto SEM PATŘÍ TEN A JEN TEN TROJÚHELNÍK, KTERÝ MÁ VŠECHNY ÚHLY OSTÉ. Podobně i podmínky na dalších dvou koších.

Důležité je, že každá z těchto podmínek se dá aplikovat na libovolný trojúhelník, tedy i na ty, které momentálně nejsou prvky galerie nakreslené na tabuli. Metaforicky řečeno, libovolný trojúhelník, který k trojici košů přijde, dovede zjistit, do kterého z košů náleží. Přečte si podmínku na prvním koši, změří si všechny svoje úhly a když zjistí, že jsou všechny ostré, vejde dovnitř. V opačném případě přejde ke druhému koši a opět si přečte podmínku. Když zjistí, že jeden z jeho úhlů je pravý, vstoupí do tohoto koše. Když ani zde neuspěje, přistoupí náš trojúhelník ke třetímu koši a přečte si podmínku. Zde již nutně zjistí, že do tohoto koše patří, protože jeden z jeho úhlů je tupý. Vstoupí tedy do třetího koše. To, ve kterém koši nakonec daný trojúhelník skončí, vůbec nezáleží na pořadí, v jakém koše navštěvuje. Uvedená klasifikace je dobrá, protože každý trojúhelník patří aspoň do jednoho koše a žádný nepatří do košů dvou. Stručně, každý trojúhelník patří do právě jednoho koše.

Většina účastníků toto metaforické vyprávění s personifikovaným trojúhelníkem přijala. Někteří jej vnímali jako zbytečné rozpitvávání jasné věci, ale dvě nebo tři kolegyně ihned pochopily, že právě tímto nástrojem lze argumentovat proti řešení J) případu 14c). Jedna z nich se obrátila na autory tohoto řešení a ostře položila otázku: „Řekněte, jakou podmínku napíšete na první koš, jakou na druhý koš a jakou na třetí koš?!" Tento argument byl přesvědčivý. Nikdo proti němu neprotestoval, i když nelze říci, že jej ihned všichni pochopili.

Komentář 6.

Výklad, kterým jsme na semináři upřesnili pojem klasifikace, byl asi didakticky vhodný. Asi vhodnější by bylo předložit účastníkům úlohu, která by oživila vyprahlou a neuzavřenou debatu o řešení J) případu 14c). Tento cíl může dobře splnit úloha, která ostře poukáže na pochybnost klasifikačního kritéria a dovede autory kritéria k poznání příčiny jeho neadekvátnosti. Příkladem takové úlohy je následující

Úloha 18. Aplikujte kritérium J) použité v případě 14c) na galerii
G_1 = {Alice, Arnošt, Aleš, Anna, David, Dita, Eduard}.
Určete, kolik prvků bude mít která třída v tomto případě.

8. TŘÍDA A OSTROST JEJÍ HRANICE

Pojmy, pomocí nichž vnímáme svět a rozumíme věcem i jevům kolem nás, lze chápat jako třídy, jako množiny objektů, vztahů, situací apod. Například slovu „pes" rozumí dítě na základě své zkušenosti s vnímáním různých reálných nebo zobrazených psů. V jeho vědomí je vytvořena představa pojmu „pes", která množinu konkrétních zkušeností dítěte se psem přesahuje. Na základě této zkušenosti může dítě jako psa označit objekt, který před tím nikdy nevidělo. Toto označení nemusí být vždy správné. Například, když v zoologické zahradě dítě slovem „pes" označí vlka. Rodiče poučí dítě, že toto zvíře není pes, ale vlk. Dítě zná slovo „vlk" z pohádek a teď je poznává ve zcela odlišné situaci. Ve vědomí dítěte se tím zahájí proces upřesňování pojmů „pes" a „vlk", zejména proces vyjasňování *hranice* mezi těmito pojmy. Podobným způsobem si žák tvoří a upřesňuje všechny základní pojmy matematiky: číslo, operace, funkce, výraz, mnohoúhelník, transformace,… .

Upřesňování pojmu můžeme chápat jako upřesňování hranice třídy jevů, které pod daný pojem spadají. Je to jedna ze základních činností, jimiž se dítě učí pomocí jazyka být ve světě, žít jako samostatná lidská bytost.

V běžném životě asi neexistuje žádný obecný pojem, který by byl vymezen tak ostře, abychom o každém jednotlivém jevu byli schopni jednoznačně rozhodnout, zda do třídy vymezené daným pojmem patří nebo nepatří. Tento nedostatek našeho uchopování světa slovy netkví v neschopnosti jazyka, ale nekonečné variabilitě světa. Přitom ostrost hranic jednotlivých pojmů – tříd vnímají různí lidé různě. Čím ostřejší je vnímání hranice, tím kvalitnější je poznání daného pojmu jedincem. Ve vědeckém světě se snažíme o maximální možnou ostrost pojmů. Zde je objevování nových, předtím nepoznaných jevů simultánně provázeno upřesňováním příslušných termínů.

Absolutní přesnost však je (jak se, možná mylně, domníváme) dopřána pouze těm vědeckým disciplinám, které nejsou závislé na reálném světe a snaží se vytvořit si svůj svět sami a konstituovat jej pomocí axiomatických systémů. Sem náleží především matematika. Více než dvoutisíciletá historie axiomatického budování matematiky ukazuje, že i zde docházelo k mnoha nejasnostem, chybám a omylům a že nezřídka se naprosto pevné přesvědčení matematiků o dokonalosti jisté konstrukce ukázalo jako nepřesné a vyžádalo si korekce. Dokonalost světa matematiky je tedy též proměnná. Slovenský čtenář může podněty ke hlubokému zamyšlení se nad tímto tématem najít v (Zlatoš, 1995).

Uvedené poznání má pro učitele matematiky zásadní význam. Ukazuje, že žák je schopen vnímat dokonalost matematických pojmů pouze na té hladině přesnosti, ke které dospěl ve svém intelektuálním vývoji. Pedagogická zkušenost nás pak učí, že když učitel žádá od žáka znalost terminologie na úrovni, na kterou žák zatím nedozrál, vede to nutně k deformaci žákova matematického poznání, k paměťovému učení se definic, jimž žák nerozumí. Konečně i většina učitelů má osobní zkušenost s tím, že jejich omezené porozumění některým pojmům je důsledkem způsobu, kterým tyto pojmy byly prezentovány (ať již na základní, střední či vysoké škole).

V historii se matematici museli ke každé nové hladině přesnosti dopracovat sami. Často se vymezení některého pojmu hledalo ne desetiletí, ale staletí. Například pojem záporného, iracionálního nebo algebraického čísla, pojem funkce, pojem derivace a integrálu, pojem dimenze, pojem míry nebo pojem mnohostěnu, jehož postupné upřesňování je sugestivně popsáno ve skvělé knize Imre Lakatose (1976).

Historie nás inspiruje k edukační strategii zavádění matematických pojmů: výklad nového pojmu nezačínat definicí, ale rozmanitými úlohami, které upozorní žáky na úskalí, která jsou s daným pojmem spojena; k definici dospět postupně a pokud možno úsilím žáků s minimální možnou intervencí učitele; nesnažit se zavést daný pojem hned v jeho dokonalé finální podobě, ale spokojit se s částečnou znalostí, která nepředstavuje znalost nedostatečnou, ale vývojový stupeň příští znalosti dokonalé.

9. TYPOLOGIE KLASIFIKACÍ

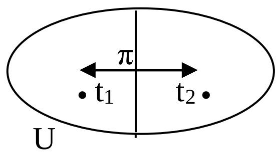
Závěrečná kapitola nastiňuje současný trend našeho bádání. Uvádí pouze několik myšlenek a základní typologii klasifikací v té podobě, jak ji vidíme v říjnu 2004, kdy je článek psán.

První charakteristikou každé klasifikace je mohutnost množiny T všech tříd. Je-li tato množina *n*-prvková mluvíme o *n-třídní klasifikaci.* Dvouprvkovou klasifikaci nazýváme *bifurkací* a tříprvkovou *trifurkací*. Podobně pak mluvíme o *spočetné* resp. *nespočetné* klasifikaci. Příklad spočetné klasifikace jsme viděli v bodech G) a H) komentáře 3. Příkladem klasifikace s nespočetným počtem tříd může být klasifikace všech trojúhelníků podle obsahu.

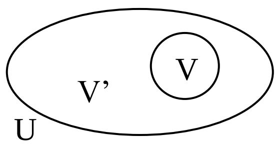
Druhá charakteristika klasifikace je dána vztahy mezi jejími třídami. Například zda některá třída hraje v souboru všech tříd dominantní roli, zda je některá ze tříd výjimečná, zda je mezi prvky některých tříd jistá korespondence apod. Další charakteristiky klasifikace jsou pak specifické pro jednotlivé typy klasifikací. Podívejme se blíže na bifurkace a trifurkace.

U *bifurkace* je univerzum U disjunktně rozloženo na dvě třídy t_1, t_2. Podle jejich vzájemného vztahu budeme rozlišovat tři typy bifurkací.

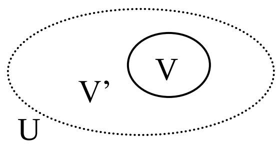
- *Polaritní* bifurkace je charakterizována přirozenou bijekcí π: U $\to$ U, která je involutorní (tj. pro každé $x \in$ U platí $\pi(\pi(x)) = x$) a pro kterou platí $\pi(T_1) = T_2$ (viz obr. 5a). Příkladem jsou dopravní značky, kde jedna přikazuje nebo zakazuje a druhá to ruší.



Obr. 5a



Obr. 5b



Obr. 5c

- *Vyčleňovací* bifurkace je charakterizována dominantní třídou významných objektů a méně významnou třídou, která je komplementem třídy dominantní. V tomto případě budeme vyčleněnou třídu značit V a vztah vyčlenění V◄U. Druhá třída této klasifikace je pak komplement V′ = U – V třídy V (viz obr. 5b).

- *Gradační* kvazi-klasifikace je charakterizována ostře vymezenou dominantní třídou a neostře vymezenou komplementární třídou, jejíž některé objekty se jeví jako rozmazané nebo jen tušené. Zde ovšem i univerzum U je vymezené neostře. Příkladem může být pojem mnohostěn v učebnicích gymnázia (viz obr. 5c).

U *trifurkace* je univerzum U disjunktně rozloženo na tři třídy t_l, t_2 a t_3. Například ilustrace 5. dává tři třídy, z nichž žádná nehraje dominantní roli a mezi žádnými dvěma třídami není významná korespondence prvků. Tento případ trifurkace není typický, protože ve většině případů školních trifurkací je jedna její třída významná a navíc často mezi zbylými dvěma třídami existuje přirozená korespondence. Podle toho určíme dva důležité typy trifurkace.

- *Kořenová* trifurkace je charakterizována dominantní *kořenovou* třídou významných objektů. V tomto případě třídy klasifikace označujeme t_l, t_2 a t_0; kořenovou třídu značíme t_0. Nezřídka je tato třída „menší" než kterákoli ze dvou dalších tříd.
- *Centrovaná* trifurkace je taková kořenová trifurkace $U = t_0 \cup t_l \cup t_2$, která se po zúžení univerza na redukované univerzum $U^* = t_l \cup t_2$ (tedy po vypuštění třídy t_0) stane polaritní bifurkací.

Těchto pět případů klasifikace teď prozkoumáme podrobněji.

9.1. Bifurkace polaritní

Na první pohled se zdá, že tato bifurkace patří k nejběžnějším typům klasifikace. Člověka ihned napadnou polarity jako pravý/levý, kladný/záporný, racionální/iracionální, stejný/různý, ostroúhlý/tupoúhlý, sčítání/odčítání apod. Podrobnější pohled ale ukáže, že tyto příklady mají tři choulostivá místa: někdy je těžké vymezit jejich univerzum U, někdy je složité ukázat stejnost obou tříd a někdy se k oběma uvedeným třídám přirozeně přidává i další „neutrální" třída a domnělá bifurkace se ukáže jako trifurkace.

Následující ilustrace uvádí tři typické příklady polaritní bifurkace.
Ilustrace 8. Univerzum je (a) množina N všech přirozených čísel bez nuly, (b) množina N_0 všech přirozených čísel včetně nuly. V obou případech se třída t_l skládá ze všech lichých čísel a třída t_2 ze všech sudých čísel. Přirozená involutorní bijekce π: $U \to U$ je popsána přiřazením (a) $2n \leftrightarrow 2n - 1$, tj. každé sudé číslo se zobrazí na předcházející přirozené číslo (které je liché) a každé liché číslo se zobrazí na následující přirozené číslo (které je sudé); (b) $2n \leftrightarrow 2n + 1$, tj. každé sudé číslo se zobrazí na následující přirozené číslo (které je liché) a každé liché číslo se zobrazí na předcházející přirozené číslo (které je sudé).

Ilustrace 9. Univerzum tvoří množina všech kvadratických funkcí $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Třídu t_l tvoří všechny konvexní kvadratické funkce f, (tj. ty, které mají minimum, tj. splňují podmínku $a > 0$). Třídu t_2 tvoří všechny konkávní kvadratické funkce f, (tj. ty, které mají maximum[6], tj splňují podmínku $a < 0$). Za přirozenou involuci lze zde volit více různých zobrazení π: $U \to U$. Například zobrazení, které funkci f: $x \to ax^2 + bx + c$ přiřadí funkci $\pi_1(f)$: $x \to -ax^2 - bx - c$, nebo funkci $\pi_2(f)$: $x \to -ax^2 + bx - c$, nebo funkci $\pi_3(f)$: $x \to -ax^2 - bx + c$, nebo funkci $\pi_4(f)$: $x \to -ax^2 + bx + c$. Každá z těchto involucí je v jistém smyslu „přirozená". Každá může být popsána i geometricky v jazyku grafů funkcí. Jestliže G je graf funkce $f \in U$, pak
graf G_1 funkce $\pi_1(f)$ je s grafem G osově souměrný podle x-ové osy $y = 0$,
graf G_2 funkce $\pi_2(f)$ je s grafem G středově souměrný podle počátku O(0;0),
graf G_3 funkce $\pi_3(f)$ je s grafem G osově souměrný podle přímky $y = c$,

[6] V diskusi na PME28 uvedl jeden učitel z Izraele pěkné metaforické rozlišení obou tříd, které v této zemi používají studenti: funkce první třídy nazývají „smějící se" a funkce druhé třídy nazývají „mračící se".

graf G_4 funkce $\pi_4(f)$ je s grafem G středově souměrný podle bodu C(0;c),
Pravděpodobně za nejpřirozenější z těchto involucí lze prohlásit bijekci π_1:f $\rightarrow$ - f .
Ilustrace ukázala, že adjektivum „přirozená“ neurčuje vždy danou bijekci jednoznačně.

Ilustrace 10. Univerzem U je množina všech izometrií I (E_n) n-rozměrného eukleidovského prostoru E_n, $n \in N$. Třídu T_1 tvoří všechny přímé izometrie a třídu t_2 všechny nepřímé izometrie. Za přirozenou involuci lze volit nekonečně mnoho různých zobrazení π: U $\rightarrow$ U. Je-li g jedna pevně zvolená nepřímá involutorní izometrie (např. souměrnost podle některé nadroviny prostoru E_n), pak zobrazení π_g: U $\rightarrow$ U, f $\rightarrow$ f$\circ$g , kde „$\circ$“ je znak pro skládání zobrazení, je involuce, pro niž π_g:(t_1) = t_2.

Pro názornost podrobněji popíšeme případ n = 1. Přímku E_1 ztotožníme s číselnou osou R. Pak U = I(E_n) = $\{f_{a,b}$:R $\rightarrow$ R, $x \rightarrow ax + b$; $a = \pm 1$, $b \in$ R$\}$. Toto univerzum se dělí na třídu $t_1 = \{f_{+1,b}$;b $\in$ R$\}$ přímých izometrií ($f_{+1,b}$: $x \rightarrow x + b$ je posunutí o „vektor“ b $\in$ R) a třídu $t_2 = \{f_{-1,b}$;b $\in$ R$\}$ nepřímých izometrií ($f_{-1,b}$: $x \rightarrow -x + b$ je středová souměrnost podle „bodu“ b/2). Jestliže za pevně volenou nepřímou izometrii g zvolíme souměrnost podle počátku g = $f_{-1,0}$: R $\rightarrow$ R, $x \rightarrow -x$, pak zobrazení π_g: U $\rightarrow$ U, $f_{a,b} \rightarrow f_{a,b} \circ f_{-1,0} = f_{-a,b}$ je involuce, pro niž π_g:(t_1) = t_2.

9.2. Bifurkace vyčleňovací

Především musíme blíže osvětlit hranici mezi bifurkací polaritní a vyčleňovací. K tomu uvedeme následující dva příklady.

Ilustrace 11. Univerzem je množina Q všech racionálních čísel. Množina Z všech celých čísel tvoří významnou třídu v univerzu Q. Pro žáky základní i střední školy je množina Z jasnější než množina Q a za samozřejmé považují, že Z je menší než Q. Často navíc slovo „zlomek“ chápou žáci jako prvek množiny Z´= Q – Z.

Na druhé straně víme, že existuje důmyslně konstruovaná bijekce Z $\leftrightarrow$ Z´, a proto by rozklad Q = Z$\cup$Z´ mohl být uvažován jako bifurkace. Tuto možnost zavrhneme, protože uvedená bijekce rozhodně není přirozená, jak požaduje vymezení pojmu polaritní bifurkace. Proto zde jde o bifurkaci vyčleňovací, tedy Z◄Q.

Ilustrace 12. Univerzem je množina N všech přirozených čísel. Množina P všech prvočísel je třídou v tomto univerzu. Komplement P´ = N – P tvoří třídu všech složených čísel. Vztah N = P$\cup$P´ tvoří disjunkní rozklad univerza N. Protože obě třídy P i P´ jsou spočetné, existuje mezi nimi bijekce P $\leftrightarrow$ P´. Tato bijekce ale v žádném případě není přirozená, jak žádá naše vymezení pojmu polaritní bifurkace. Dokonce tuto bijekci neumíme efektivně popsat. Proto uvedenou bifurkaci nepovažujeme za polaritní, ale vyčleňovací. Z množiny N byla vyčleněna třída P; stručně P◄N. Žák základní školy považuje množinu P za menší a její komplement, množinu složených čísel, za větší.

Stručně zopakujeme oba uvedené příklady a stejným způsobem pak uvedeme další
(a) celá čísla ◄ racionální čísla,
(b) prvočísla ◄ přirozená čísla,
(c) pravidelné mnohoúhelníky ◄ mnohoúhelníky,
(d) osově souměrné mnohoúhelníky ◄ mnohoúhelníky,
(e) pravidelné mnohoúhelníky ◄ osově souměrné mnohoúhelníky,
(f) čtverce ◄čtyřúhelníky,
(g) rovnoběžníky ◄ čtyřúhelníky,
(h) přirozená čísla ◄ celá čísla,
(i) celá čísla ◄ reálná čísla,
(j) racionální čísla ◄ reálná čísla,
(k) lineární funkce ◄ spojité funkce.

Případy (c), (d) a (e) lze propojit a napsat jediným zápisem:

pravidelné mnohoúhelníky ◄ osově souměrné mnohoúhelníky ◄ mnohoúhelníky.
Podobně lze do řetězce vyčleňovacích relací zapsat vztahy (h)-(j):
přirozená čísla ◄ celá čísla ◄ racionální čísla ◄ reálná čísla.
V těchto případech se již jedná o jiný typ organizace, o hierarchické a ne klasifikační uspořádání tříd.

Komentář 7.

A. Přirozená bijekce mezi třídami polaritní bifurkace ještě nezaručuje jejich rovnováhu ve všech směrech. Tak sudá čísla jsou uzavřená vzhledem ke sčítání, ale lichá nikoli. Příčinou uvedené nerovnováhy je struktura přirozených čísel. Nebo přímé izomerie tvoří grupu a nepřímé netvoří. Navíc přímé izometrie jsou evidentně myšlenkově snazší než nepřímé. Příčinou první nerovnováhy je struktura grupy izometrií, příčinou druhé je vnímání těchto tříd člověkem. Přímé izomerie si lze představit jako výsledek pohybu, nepřímé nikoli. U většiny polaritních bifurkací vystupují obě příčiny nerovnováhy tříd.

B. Z didaktického hlediska je zajímavý proces, jimž se tvoří relace vyčleněné třídy a univerza. Někdy vyčleňování probíhá tak, že žák má již o univerzu jistou představu a vyčleněná třída je obohacením této představy. Například pojem prvočísla je obohacením univerza přirozených čísel. Jindy ale proces vyčleňování je spojen spíše s rozšířením univerza, které se pak stane v novém univerzu třídou. Například pojem konvexního čtyřúhelníka může být vyčleněn, až když se objeví nekonvexní čtyřúhelník, jehož existence bývá pro žáky překvapením. Podobně přirozená čísla jsou pro žáka třetího ročníku aritmetickým univerzem. Až později, když se žák seznámí se zápornými čísly, resp. s racionálními čísly, tedy až když dojde k rozšíření původního univerza, se toto stane vyčleňovanou třídou nového, bohatšího univerza.

C. Tedy vztah univerza a vyčleněné třídy vzniká dvojím způsobem: vyčleňováním nebo rozšiřováním univerza. V tradiční výuce se u obou případů žák o novém vztahu dovídá od učitele. V konstruktivisticky vedené výuce předloží učitel žákům úlohu, která je k danému vztahu přivede.

D. Uvedeme po jednom příkladě konstruktivisticky vedeného objevu vyčleňování. Např. pojem prvočísla mohou žáci objevit při řešení úloh 19 a 20.
Úloha 19. Jaký obvod může mít mřížový obdélník s obsahem a) 12, b) 15, c) 11 nakreslený na čtverečkovém papíře? Najděte všechna řešení. Kdy má úloha jediné řešení?
Úloha 20. Předchozí úloha má v případě a) tři řešení, v případě b) dvě řešení a v případě c) jen jedno řešení. Najděte další případy, kdy má úloha jen jedno řešení.
Nebo pojem nekonvexního čtyřúhelníka mohou žáci objevit při řešení úlohy 21.
Úloha 21. Nakreslete čtyřúhelník, jehož úhlopříčky se neprotínají. (Úhlopříčkou čtyřúhelníka ABCD rozumíme úsečku AC a úsečku BD.)

10. ZÁVĚR

Předložená studie je typickým příkladem reportu o probíhajícím výzkumu. Obsahuje jak části analýzy daného matematického materiálu, tak i informace o již uskutečněných experimentech a zajímavých zjištěních. V současnosti připravujeme mezinárodně koncipovaný experiment, který bude uskutečněn pomocí korespondenční hry „Hádej a plať". Doufáme, že získaný materiál nám nabídne další poznání o klasifikačních procesech žáků i učitelů (jak vytvořujících, tak realizujících). Zájemce o uvedený experiment budeme rádi informovat o současném stavu výzkumu, zejména uvítáme ochotu participovat na výzkumu.

Řešení.
Úloha 14. a) mužská/ženská jména; b) jméno začíná písmenem a/d/e/j; c) počet písmen ve slově je 4/5/6.
Úloha 15. a) počet souhlásek je větší/stejný/menší než počet samohlásek;
b) poslední písmeno je „d"/ „a"/ různé od „d" nebo „a".

Úloha 16. Řešení. Např. {Londýn, Moskva, Praha, Vltava, Volha, Temže}; kritérium sloupcové: leží ve stejné zemi (Anglie, Čechy, Rusko); kritérium řádkové, první: stejný zeměpisný objekt (město, řeka), kritérium řádkové, druhé: stejný počet písmen ve slově (pět, šest).

Literatura:

Hejný, M.(2001) Štrukturovanie matematických vedomostí. In eds. V. Burjan, M. Hejný, Š. Jány: *Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2001*. JSMF, EXAM, Bratislava, s.13-24.

Hejný, M. (2002). Izomorfizmus jako strukturotvorný nástroj. In eds. V. Burjan, M. Hejný, Š. Jány: *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2002*, JSMF, EXAM, Bratislava, s.16-32.

Hejný, M. (2003). Diagnostika aritmetické struktury. In eds. V. Burjan, M. Hejný, Š. Jány: *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2003*, JSMF, EXAM, Bratislava, s. 22-42.

Hejný, M., Kratochvílová, J. (2004). Diagnostikování strukturotvorné kognitivní schopnosti klasifikovat (v matematice). In: *Disputationes Scientificae*. IV, č. 4, Katolická univerzita, Ružomberok. V tisku.

Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. CUP, Cambridge.

Zlatoš, P (1995). Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou. IRIS, Bratislava.

e-mail: milan.hejny@pedf.cuni.cz, jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz