7. ROVINNÁ GEOMETRIE

(M. Hejný – pracovní materiál)

7.1. Specifikum geometrie vzhledem k aritmetice

Objekty, činnosti, vazby, struktura – podle stati s DJ (cca 5 minut)

7.2. Etapizace

1. Synkretická etapa - soubor představ asociovaný se souborem slov, nebo slovem „pra-jazyka“. Zatím nedošlo k diferenciaci v představě, činnosti, slovníku. (Kululu)
2. Etapa předmětných představ. Pojem se postupně prodiferencovává, je přesněji uchopen jazykem, stává se osobností. Stále zůstává vázán na předmětné představy. Důležitá je manipulace s předměty. (*Kululu* se dělí na *míč* – objekt 3Da *kruh, kolečko, kroužek* – objekt 2D; daleko později se diferencuje *kruh* a *kružnice*.)
3. Etapa intuitivně-abstraktních představ. Pojem se stává prvkem rodících se idealizovaných a abstraktních představ. Předmětná manipulace se mění na manipulaci myšlenkovou.
4. Etapa strukturální. Pojem se stává prvkem uzavřené teorie.
5. Etapa axiomatická. Pojem se stává prvkem axiomatizované teorie

Pro 1. stupeň je rozhodující etapa druhá. Učitel musí znát i etapu třetí, protože do ni směřuje vývoj jeho žáků

7.3. Osobnost jeho jevy průvodní; míra

Pojem zaveden P. Vopěnkou. Vztahuje se k druhému Popperově světu, tedy k tomu, co je uloženo ve vědomí člověka.

Zde je třeba udělat malý exkurz do percepční psychologie. Nejprve úloha. Přeložte do češtiny následující větu napsánu ve slovenštině ZO STRECHY VYSOKHO DOMU VISEL DLHÝ CECÚĽ. Náročné je zde pouze poslední slovo. Je to „rampouch“. Jenže toto slovo je napsáno chybně. Správně má být „cencúľ“. V uvedené větě je ještě jedna chyba: ve slově „vysokého“ vypadlo písmeno „é“. Nám právě jde o různé vnímání obou uvedených chyb. Chybu v slově „vysokého“ jsme schopni odhalit a slovo ihned dobře přečíst, protože toto slovo známe z češtiny a máme je uloženo ve své paměti. Naproti tomu v neznámém slově „cencúľ“ chybu odhalit neumíme, protože jej nemáme uloženo v paměti.

Ilustrace osvětluje důležitou vlastnost percepce. Percepce není jen projekcí viděného (slyšeného, čichaného, chutnaného, hmataného) do vědomí, ale i, ba zejména vybavení si údaje ve vědomí již existujícího; percepovaný objekt aktivuje paměťový záznam. Podobný jev pozorujeme, když sledujeme čínský film a máme problémy s identifikací obličejů. V naši paměti jsou uloženy tisíce tváří s nimiž přicházíme denně do styku; čínských tváří je tam málo. Proto je jejich identifikace pro nás náročnější.

Vraťme se k pojmu osobnosti. Může říci, že osobností pro daného člověka je takový tvar, který je v jeho vědomí uložen a může být pomocí slovního poukazu aktivován do představy člověka. Za chvíli uvidíme, jak lze tuto potenci člověka diagnostikovat.

Příklad. Děti na magnetické tabuli sestavují z barevných kostiček různých tvarů (kruhů, čtverců, obdélníků, kosočtverců, trojúhelníků,…) různé obrázky (panáčka, dům, žirafu,…). Některé kostičky jsou již na tabuli o jiné musí dítě žádat. Při pojmenování tvarů děti používají:

- ukazovací zájmena *Dejte mi takové* (ukazuje na kolečko) *ale větší*;
- slov běžného jazyka *Potřebuji hlavu pro panáčka*;
- předtermínů *Prosím si kroužek*;
- termínů *Mohu dostat velký červený kruh?*

Je pravděpodobné, že použití ukazovacího zájmena svědčí o tom, že daný tvar ještě dítě nezná jako osobnost, naopak použití předtermínu (nebo dokonce termínu, což je u dětí do 7 let ojedinělé) svědčí o tom, že dítě již daný tvar zná jako osobnost. Přesnější kritérium bude uvedeno níže.

Modely osobnosti

S předmětnými modely základních prostorových a rovinných tvarů (krychle, hranol, koule, jehlan, kruh, kružnice, čtverec, obdélník,…) se dítě setkává od narození. Tyto zkušenosti jsou východiskem pro nahlížení do světa geometrie.

Nestačí ovšem tvar vidět, je třeba jej identifikovat slovem. Slovo poukáže na to, co je nutno evidovat. Identifikace slovem nejen že upozorní na jistý jev, ale otevře jednu z nejdůležitějších poznávacích aktivitdítěte – izomorfii. Dítě vidí několik málo živých koček a několik obrázků koček a najednou ví, co je a co není kočka. Ve vědomí dítěte se pod slyšeným slovem „kočka“ soustředila série konkrétních představ a z ní se vytvořila univerzální představa kočky.

Podobně je to s tvary. Banán a rohlík jsou stejně zahnuté, mají stejný tvar, ale pro tento tvar nemáme žádné speciální geometrické jméno. Obraz, okno i deska stolu mají též stejný tvar a pro tento tvar máme i geometrické pojmenování „obdélník“. Přitom nesejde, zda tvar je ve vodorovné, nebo svislé poloze. Pokaždé je to obdélník. Přitom slovo obdélník vnímá dítě jako tvar. Nerozlišuje mezi plným útvarem (deska stolu) a jeho hranicí (rám okna). Obojí je obdélník.

Výzva 1. Najděte aspoň 4 různé modely pojmu čtverec a popište situaci, jak se dítě s daným tvarem setká a jak jej vnímá.

Tři základní typy kontaktu:
evidence – dítě objekt vidí, nebo percepuje hmatem; například na dětském hřišti máme dvě pískoviště, jedno kruhové a druhé čtvercové (tvar je použit jako adjektivum).
manipulace – dítě s daným objektem pracuje; například a) při stavabě věže z kostek klade dítě přesně stěnu na stěnu (čtverec na čtverec), b) vedeno otcen za ruku obchází čtvercové pískoviště po kládách, které pískoviště obhraničují; přitom otec řekne například větu „první dvě strany čtverce jsi zvládla skvěle, ještě nám zbývají dvě“.
kreace – dítě čtverec samo tvoří, například a) vyrábí na písku pomocí formiček na nichž je čtvercový tvar, b) modeluje čtverec ze sirek, c) získává jej překládáním papíru, d) modeluje jej z obrázkové „cik-cak“ knížky,…

Dítě, které umí samo čtverec vytvořit, aniž by se na některý dívalo, má jistě již tento tvar na úrovni osobnosti.

Hranice pojmu
Předložili jsme individuálně několika žákům třetího a šestého ročníku obrázek, na kterém bylo 12 různých tvarů. Byly tam kruhy, čtverce, obdélníky,…Žádali jsme žáky, aby jednotlivé objekty pojmenovali. V odpovědích se objevily zajímavé jevy:

- kruh s poloměrem 2 cm byl většinou označován za kruh nebo kružnici, ale kruh s poloměrem 2 mm byl nazýván často tečkou;
- čtverec, jehož strany byly ve vertikálně – horizontálním směru byl nazýván čtvercem (ale též okénkem, domečkem) a čtverec jehož úhlopříčky byly ve vertikálně – horizontálním směru byl často žáky šestého ročníku nazýván kosočtvercem;
- dlouhý obdélník s rozměry 90 mm x 5 mm položen „na šikmo“ byl nazýván páskem, stuhou a jen velice zřídka obdélníkem.

Výzva 2. Analyzujte popsané jevy pozorované u experimentů a vyslovte názor o pojmotvorném procesu základních rovinných tvarů.

Každý pojem má mnoho reprezentantů (leží vně psychiky) a modelů (leží ve vědomí). Dítě je postupně ajděte aspoň 4 různé modely pojmu čtverec a popište situaci, jak se dítě s daným tvarem setká a jak jej vnímá.

U některých pojmů, jako čtverec nebo kruh je vlastně pouze jediný tvar. Kruhy se mohou lišit pouze velikostí, čtverce velikostí i uložením vzhledem k pozorovateli. Dosti často žáci kosočtvercen nazvou čtverec, jehož. Důležitým krokem pojmotvorného procesu pojmu „čtverec“ je poznání, že poloha čtverce je nepodstatná, důležitý je jen tvar.
Několik Například dítě vidí čtverec a řekne „okénko“. Zde ještě nelze mlzučtverec

7.4. Vztahy

potřeba, odhalení, použití, zdůvodnění

7.5. Konstrukce

co sestrojuji, jakými prostředky; eukleidovské konstrukce; zápis – jazyky.

- Tvořivost je bytostně vložena do lidského bytí a představuje hodnotu z nejvyšších. Směřuje vývoj společnosti i jedince, dává bytí člověka smysl, poskytuje mu radost, vnáší do jeho života řád. Tvořivost je protikladem ziskuchtivé dobyvačnosti, která uhnízděna ve vědomí jedinců jakými byli Džingischán, Napoleon, nebo Hitler je zdrojem ničení a zkázy.
- Tvoření povznáší i fascinuje. První kniha Starého zákona, Genesis, je popisem tvořivého aktu božího, popisem stvoření všeho kromě stvořitele sama.
- Tvoření dává vznikat jevům hmotným i nehmotným. Hradby kolem města Uruku i Epos o Gilgamešovi, ve kterém se nich píše - obojí je výsledkem tvořivé činnosti člověka. Stavebním

materiálem v prvním případě je kámen a hlína, ve druhém pak slovo.

- Tvořivost, která pracuje s přímkou, křivkou, plochou a tvarem je doménou geometrů, ale nejen těchto.
- Krejčí, který šije nové šaty, architekt, který projektuje novou budovu, fyzik, který hledá optimální tvar elektromagnetického pole, malíř, skladatel, který komponuje symfonii - ti všichni tvoří pomocí geometrie. Geometrické tvary jsou přítomny v jejich tvůrčích představách. Jejich chápání geometrie je však výrazně odlišné. Krejčí zachází s tvarem na úrovni řemesla. Objektem jeho představ je tvar přítomný ve hmotě, tvar konkrétních předmětů. Pro teoretického fyzika je často tvar ideou, abstrakcí.
- Posuny od konkrétního k abstraktnímu představují důležitý tok intelektuálního vývoje člověka. Geometrie, zejména pak geometrické konstrukce, k fylogenezi tohoto vývoje významně přispěly. Je pochopitelné, že geometrické konstrukce sehrávají důležitou roli i v ontogenezi. Pokusíme se naznačit jak.

Základní pojmy

geometrických konstrukcí jsou dány otázkami Co?, Kde? Čím? a Jak?

Co? *Objekt*, který chceme sestrojit. Například čtverec, krychli, střed dané úsečky, trojúhelník o stranách 3 cm, 4 cm, 5 cm, krychlové těleso, které má pět podlaží a v každém dvě krychle, portrét uvedeného tělesa, …

Kde? *Prostředí*, ve kterém bude objekt sestrojen. Například v prostoru v němž žijeme, na čistém papíru, na čtverečkovaném papíru, na pinboardu, na krychli, na ciferníku hodin, …

Čím? *Konstrukční nástroje*, kterými konstrukci uskutečňujeme a z nichž případně bude objekt vytvořen. Například sirky, z nichž bude vytvořen čtverec, papír, z něhož bude postupem origami složena krychle, pravítko a kružítko pomocí nichž bude na čistém papíře vytvořen pravidelný šestiúhelník,…

Jak? *Konstrukční návod,* neboli know-how popisující postup konstrukce, tedy to, jak danými nástroji v daném prostředí vytvořit požadovaný objekt. Právě nalezení tohoto postupu je nejčastější školskou úlohou na geometrickou konstrukci.

Řemeslo versus teorie

Začínáme úlohou, kterou jsme řešili mnohokrát nejen v geometrii, ale i v běžném životě:

<u>Úloha 1.</u> Sestroj střed S dané úsečky AB.

Úlohu lze řešit mnoha způsoby. Posluchači řeknou několik postupů. Například:

a) Úsečku změřím, naměřenou délku vydělím 2 a tuto vzdálenost nanesu na úsečku od některého jejího koncového bodu - mám střed S. Nástroje: měřítko, tužka, aritmetická znalost.

b) Papír s úsečkou přehnu tak, aby se body A,B překryly; střed S je bod v místě přehybu. Nástroje: překládání papíru, na které je úsečka nakreslena.

c) Od obou konců kružítkem odpichovátkem (nebo jeho náhražkou) nanesu stejnou vzdálenost, přibližně rovnou polovině délky úsečky; tím úsečku výrazně zkrátím a novou malou úsečku rozpůlím odhadem. Nástroje: odpichovátko, tužka a odhad.

d) Sestrojím kružnice $k_1 = k(A, |AB|)$, $k_2 = k(B, |AB|)$; průsečíky těchto kružnic spojím přímkou p a její průsečík s úsečkou AB je hledaný bod S. Nástroje: kružítko, pravítko, tužka.

Komentáře obecné

A. Všechny čtyři uvažované konstrukce mají *řemeslný* charakter. Předpokládají, že úsečka AB je nějak fyzicky dána a to znemožňuje absolutní přesnost. I kdyby byla konstrukce realizována s přesností mikronu (=10^{-6} m), není to konstrukce přesná v geometrickém smyslu slova.

B. Navíc uvedené konstrukce lze realizovat pouze omezeně. Nelze je použít například na úsečku délky mnoha kilometrů.

C. Dokonalost, kterou nelze dosáhnout ve světě věcí, lze realizovat ve světě myšlenek. Naše ruce, oči a uši jsou nedokonalé, ale naše mysl dokáže uchopit objekty v jejich naprosté dokonalosti. Za tento objev vděčíme Řekům.

D. Byl to zejména génius Platonův (427 – 347 př.n.l.), který lidstvu otevřel svět idejí. Geometrie při tom sehrála významnou roli, protože právě ona poskytovala nejpřístupnější cestu do toho nového světa. Ve světě idejí žijí geometrické objekty své absolutní dokonalosti a jediná omezení, kterým jsou tyto podřízeny, jsou ty, které staví Logika a Pravda, nikoli však nedokonalost světa reálného.

E. Řecké slovo *idea* vzniklo ze slovesa *idein* = vidět, přičemž vidění je zde ve významu pochopení, porozumění, uzření podstaty. Latina převzala toto řecké slovo a Seneca jej ozřejmuje slovy *věčný vzor*. Angličan běžně řekne "I see" ve smyslu "rozumím" a my též užijeme výrazu "už to vidím" v okamžiku pochopení.

F. Vztah obrázku, který náleží do našeho nedokonalého světa věcí a geometrických idejí, obrázkem portrétovaných opisuje Petr Vopěnka

Geometr má před sebou list papíru pokreslený čarami rozmanitých tvarů, rovnými i křivkým, vzájemně propletenými a protínajícími se v různých bodech. Jeho zrak spočinul na obrázku, jeho pohled však pronikl skrze obrázek, ven z reálného světa, do světa geometrického.... Od okamžiku tohoto prohlédnutí je pro něj navždy úsečka úsečkou geometrickou, a ne čarou narýsovanou podle pravítka. (P. Vopěnka: Rozpravy s Geometrií, Panorama,1989, str16.)

G. Euklid (kolem 300 př.n.l.), tento dokonalý svět geometrických idejí nejen zmapoval, ale popsal jej jako velkolepou stavbu. Dílo, ve kterém to učinil, učebnice Základy, bylo po dvě tisíciletí vzorem pro všechny tvůrce velkých systémů. První vhled do tohoto světa dokonalých geometrických objektů najde čtenář v Příloze 1. na konci přednášky. .

Komentáře didaktické

A. Pochopit absolutní charakter objektů geometrického světa je nesnadné a vyžaduje to čas. Asi nejpřesvědčivější cesta k takovému chápání je snaha o co nejpřesnější konstrukce. Čím náročnější soubory tvarů a vztahů nutno portrétovat, tím více si člověk uvědomuje, že to, co kreslí, je pouze připomínkou geometrické skutečnosti. Ta existuje pouze v představě. To co je nakresleno na papíře, je pouze portrétem, imitací, podobenstvím této skutečnosti.

B. Na prvním stupni žáci ještě nerozlišují mezi ideou čtverce a čtvercem nakresleným na papíře, nebo vystřiženým z papíru, nebo vymodelovaným ze sirek. Ví ale, že někdy je takový model povedený, jindy nepovedený. Je to tedy spíše estetické hledisko, které vede žáky ke snaze narýsovat nebo vymodelovat daný objekt co nejpřesněji, nejdokonaleji.

C. Kritérium přesnosti může učitel využít k tomu, aby žáci začali tušit co to je idea geometrického tvaru, například čtverce. Učitel dá žákům úlohy na přesné rýsování a sám si absolutní přesnost zjistí výpočtem. Viz úlohy xxxx.

D. Moje zkušenost. V páté třídě mí žáci uměli měřit s přesností na 0,5 mm. V šesté třídě znali pojem *těžnice trojúhelníka* (= spojnice vrcholu se středem protilehlé strany). Za domácí úlohu dostali sestrojit trojúhelník jehož těžnice neprochází bodem. Několik žáků řešení přineslo, jiní tvrdili, že takový trojúhelník neexistuje. Rozvinula se debata nad obrázky těch žáků, kteří řešení našli. Silné hádání trvalo asi týden. Nakonec většina třídy došla k poznání, které brilantně formuloval Petr v hádce s kamarádem: „mňa nezaujíma čo si si namachlil na papier; mňa zaujíma, ako je to naozaj; a kebyže to nakreslíš tak presne, ako to nakresliť ani nevieme, tak sa ti tie tri ťažnice musia preťať; na to ber jed." Petr již ví, že geometrie není o tom, co vidíme na obrázku, ale o tom, co skrze obrázek vidíme ve světě geometrických idejí. Odtud didaktický návod na otevírání světa geometrie: nejprve mnohá přesná rýsování a pak problém, který přesným rýsováním vyřešit nelze.

E. Vše co bylo řečeno o geometrických objektech se vztahuje i na geometrické nástroje, pomocí kterých objekty sestrojujeme. Hmotné pravítko, kterým kreslím hmotný portrét přímky je pouze nedokonalou imitací absolutního pravítka, kterým v duchu rýsuji absolutní přímku. Podobně je to i s kružítkem.

F. Absolutní pravítko se od řemeslného hmotného liší i tím, že jej nelze užívat jinak, než přesně stanoveno. Hmotným pravítkem mohu například rozřezat papír, na hmotném pravítku mohu vyznačit vzdálenost dvou bodů, dvě strany hmotného pravítka mohu použít na narýsování dvou rovnoběžných přímek. Nic takového však s absolutním pravítkem udělat nelze. Na druhé straně však absolutním pravítkem umím spojit libovolně vzdálené body a umím ním narýsovat nekonečně dlouhou přímku.

G. Tužka, pravítko a kružítko jsou jediné absolutní geometrické nástroje. Přitom každý z těchto nástrojů lze použít pouze přesně popsaným způsobem a nijak jinak.

H. **Tužka** mi umožňuje z dané neprázdné množiny bodů zvolit jeden bod.
Pravítko mi umožňuje spojit dva různé body A a B přímkou.
Kružítko mi umožňuje sestrojit kružnici k(S, r), jeli dán bod S a úsečka délky r. (Dodejme, že toto použití kružítka je trochu bohatší než to, které připouštěl Euklid)
Eukleidovskou konstrukcí rozumíme konečnou posloupnost kroků z nichž každý je jedním použitím tužky, nebo pravítka, nebo kružítka.

I. Na prvním stupni navíc používáme i kolmítko a rovnoběžnítko.
Kolmítko mi umožňuje sestrojit kolmici z daného bodu k dané přímce a
Rovnoběžnítko mi umožňuje sestrojit přímku procházející daným bodem rovnoběžně s danou přímkou.

Eukleidovská konstrukce a její zápis

Vraťme se k úloze 1., ke konstrukci středu úsečky. Z uvedených výše čtyř konstrukcí, pouze poslední je Eukleidovská. Jen ona používá pouze tužku, pravítko a kružítko.

Jak takovou konstrukci zapsat? Uveďme čtyři způsoby zápisu:

a) Slovy. Tak jsou výše popsány konstrukce a) až c).

b) Slovy a konvenčními znaky. Tak je výše popsána konstrukce d). Konvenční znak, který je zde použit je rovnost $k_1 = \mathrm{k}(A, |AB|)$; ta říká: „ze středu A poloměrem, který je roven délce úsečky AB sestroj kružnici a označ ji k_1.

c) Tabulkovým zápisem, který vypadá takto:

	Co?	Konstr. krok	popis
1	O	$k_1 = \mathrm{k}(A, \lvert AB\rvert)$	Sestroj kružnici se středem v A a poloměrem $\lvert AB\rvert$ a označ ji k_1
2	O	$k_2 = \mathrm{k}(B, \lvert AB\rvert)$	Sestroj kružnici se středem v B a poloměrem $\lvert AB\rvert$ a označ ji k_2
3	••	$U,V = k_1 \cap k_2$	Sestroj dva průsečíky kružnic k_1 a k_2 a označ je U a V.
4	↔	$p = UV$	Sestroj přímku procházející body U a V a označ ji p
5	•	$S = p \cap AB$	Sestroj průsečík přímky p s úsečkou AB a označ jej S

d) Poslední způsob zápisu konstrukce spočívá v tom, že do již hotové konstrukce se ke každému objektu připíše jeho pořadové číslo, jak byl vytvořen. Tak ke kružnici k_1 připíší 1, ke kružnici k_2 připíší 2, k přímce *p* připíši 3 (protože její konstrukce je již z obrázku patrná).

Pro nás je nejdůležitější způsob c), kterému bude na semináři věnována zvýšená pozornost.

7.6. Čtverečkovaný papír

Epizoda z hodiny na Chlupové – žáci chybně považují 3/8 za 1/3.

Kaskáda úloh

Ukážeme, jak se k dané náročné úloze tvoří kaskáda návodných úloh. Výchozí úloha 2 je náročná i pro žáka á ročníku. Nicméně myšlenky, na kterém je její řešení založeno, můžeme odhalovat již ve třetí třídě. Všechny úlohy této části se odehrávají v prostředí čtverečkovaného papíru.

<u>Úloha 2</u>. Dána mřížová úsečka KL. Na úsečce KL sestrojte bod X tak, že $|KX|:|LX| = 1:n$, kde n je dané přirozené číslo.

Dříve než začneme tvořit návodní úlohy, musíme si ujasnit, jak bude vypadat řešení a které jeho myšlenky jsou náročné.

Vůdčí myšlenkou celého řešení je myšlenka tvorby linkovaného papíru (notové osnovy), která danou mřížovou úsečku protne v n bodech. Žáci tedy musí nabýt zkušenost s tímto jevem linkovaného papíru a musí se naučit, jak se takový linkovaný papír na čtverečkované síti vytvoří. Předpokládáme, že žáci již umí spojovat mřížové body čtverečkovaného papíru pravítkem, tedy tvořit mřížové přímky. Ovládají i zápis pomocí šipek.

<u>Úloha 3.</u> Najděte střed S úsečky KL dané předpisem K→→↑L.

<u>Komentář</u>. Vstupní úloha. Střed již vidíme. Leží na té mřížové přímce PQ, kde K→P↑Q. Když učitel ve třetím ročníku žádá zdůvodnění, nejčastěji žáci do mřížového obdélníku s úhlopříčkou KL dokreslí i druhou úhlopříčku, která též prochází sestrojeným bodem S.

<u>Úloha 4.</u> Na čtverečkovaném papíře je dána mřížová úsečka KL předpisem K→→→↑↑L. Úsečku KL rozdělte na a) dva, b) tři, c) čtyři stejné díly.

<u>Komentář</u>. Všimněte si, že jsme v textu úlohy 2 podmínku o poměru délek nahradili srozumitelnější podmínkou dělení úsečky na jistý počet stejných dílů. Dělící bod u úlohy a) leží na vodorovné přímce mříže, dělící body u úlohy b) leží na svislých přímkách mříže. Úloha c) je výrazně náročnější, neboť vyžaduje další konstrukci. Když ji žáci nevyřeší zůstane zatím nevyřešena.

<u>Úloha 5.</u> Dán je trojúhelník UVW předpisem a) U→V↑W, b) U→V↑↑W, c) U→→V↑W. Bodem V veďte přímku rovnoběžně s přímkou UW. Zvolte další tři mřížové body a každým veďte rovnoběžku s přímkou UW.

<u>Komentář</u>. Učíme se konstruovat na čtverečkovaném papíře linkování v šikmém směru. Jakmile tyto úlohy žáci vyřeší, je pravděpodobné, že některý z nich si vzpomene na nedořešenu úlohu 4 a případ c) dořeší.

<u>Úloha 6.</u> Dána mřížová úsečka KL předpisem K→→→↑↑L. Úsečku KL rozdělte na a) pět, b) šest, c) sedm stejných dílů.

<u>Komentář</u>. Žáci již princip dělení znají. Vědí, že musí vytvořit linkovaný papír, jehož krajní linky prochází body K a L a ve které kromě krajních přímek jsou ještě další rovnoběžky v počtu a) 4, b) 5, c) 6. Například poslední z těchto případů řeší následující konstrukcí:

1) sestrojí posloupnost sedmi bodů K takto: $K = K_0 \to K_1 \to K_2 \to K_3 \to K_4 \to K_5 \to K_6 \to K_7$ a sedmi bodů L takto: $L = L_7 \leftarrow L_6 \leftarrow L_5 \leftarrow L_4 \leftarrow L_3 \leftarrow L_2 \leftarrow L_1 \leftarrow L_0$

2) sestrojí osm přímek L_0K_0, L_1K_1, …, L_7K_7. Tyto tvoří linkování, které úsečku KL rozdělí na 7 stejných dílů.

Popsaná konstrukce je generický model pro konstrukce, jimiž lze řešit úlohu 2.

Další úlohy k řešení a analýzám

Úloha 7. Narýsuj čtverec ABCD o straně 70 mm. Na jeho straně AD sestroj body U a V tak, aby bylo $|AU| = 12$ mm a $|BV| = 86$ mm. Zjisti délky $|AC|$, $|BU|$ a $|AV|$.

Komentář. Výpočtem pomocí Pythagorovy věty zjistíme, že $|AC| = 99{,}00$ mm, $|BU| = 71{,}02$ mm a $|AV| = 49.96$ mm s přesností na setinu milimetru.

Výzva 1. Vytvořte podobné úlohy v nichž měřenou délku určíte s přesností na setinu mm.

Úloha 8. Pomocí kružítka a pravítka sestrojte pravidelný 12úhelník a konstrukci popište. Dále pouze pravítkem sestrojte všechny a) čtverce, b) rovnostranné trojúhelníky, c) pravidelné 6úhelníky jejichž vrcholy jsou některé z vrcholů dříve sestrojeného 12úhelníka.

Výzva 2. Vytvořte úlohu pro žáky a) druhého, b) třetího, c) čtvrtého ročníku, která je inspirována úlohou 8. Využijte ciferník hodiny, který můžete dát žákům přesně nakreslený.

Výzva 3. Vytvořte úlohu pro žáky a) čtvrtého, b) pátého ročníku, která se týká pravidelných mnohoúhelníku na ciferníku hodin, přičemž se využívají i minutové dílky.

Úloha 9. Na čtverečkovaném papíře sestrojte trojúhelník ABC, $A \to \to \to B \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow C$. Sestrojte a) bod C‘ osově souměrný s bodem C podle přímky AB, b) bod A‘ osově souměrný s bodem A podle přímky BC, c) bod B‘ osově souměrný s bodem B podle přímky AC.

Výzva 3. Vytvořte komentovanou kaskádu úloh, které dovedou žáka druhého ročníku k řešení úlohy a), žáka třetího ročníku k řešení úlohy b) a žáka šestého ročníku k řešení úlohy c).

Seminář

ÚLOHY

Osobnosti

Diagnostikujeme spektrum (izolovaných/generických) modelů dané osobnosti. Stupně znalosti: 1) úlohu vyřeší žák pouze v představě a řešení popíše slovy,
2) potřebuje její portrét a řešení popíše slovy, 3) potřebuje její portrét a řešení nakreslí, 4) potřebuje více obrázků a řešení nakreslí.

Otázka: existuje útvar daných vlastností?

1. Trojúhelník

a) kterému nelze opsat kružnici; b) jehož obvod je větší než 10 cm a obsah menší než 1 cm^2; c) jehož obvod je větší než 6 a obsah menší než $\sqrt{3}$

2. Čtyřúhelník ABCD

a) který je konvexní a jeho strany AB a CD jsou na sebe kolmé; b) který je nekonvexní a jeho strany AB a CD jsou na sebe kolmé; c) který je osově souměrný a nelze mu opsat kružnici; d) který je osově souměrný a nelze mu vepsat kružnici;

3. Pětiúhelník

a) jehož jedna strana je částí jedné jeho úhlopříčky; b) jehož dvě různé strany jsou každá částí některé jeho úhlopříčky.

Výzva 1. Vytvořte podobné úlohy pro žáky z prostředí a) origami, b) dřívek.

Dvojice osobnosti

Otázka: najděte útvar A který lze předepsaným počtem úsečkových střihů převést na útvar B. (převést = z částí, které stříháním vzniknou slepit bez překrývání útvar B)

1. Jedním střihem převést čtverec na a) rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník; b) pravoúhlý nerovnoramnný trojúhelník; c) obdélník; d) pětiúhelník.

2. Jedním střihem převést rovnoběžník na a) obdélník; b) lichoběžník; c) rovnoběžník s větším obvodem; d) rovnoběžník s větším obsahem

Výzva 2. Vytvořte podobné úlohy pro žáky z prostředí a) origami, b) dřívek.

Eukleidovská konstrukce

Daný přeházený seznam konstrukčních kroků uspořádejte tak, aby vznikla smysluplná konstrukce. Uveďte, co bude výsledný tvar konstrukce.

—	AB		—	AB		—	AB
O	$k_1 = k(A, \lvert AC \rvert)$		O	$k_1 = k(A, \lvert AC \rvert)$		O	$k_1 = k(A, \lvert AC \rvert)$
—	AD		—	AD		—	AD
••	$U,V = k_1 \cap k_2$		••	$U,V = k_1 \cap k_2$		••	$U,V = k_1 \cap k_2$
••	$B,D = p \cap AB$		••	$B,D = p \cap AB$		••	$B,D = p \cap AB$
•	$S = p \cap AB$		•	$S = p \cap AB$		•	$S = p \cap AB$
—	AC zvol		—	AC zvol		—	AC zvol
O	$k_3 = k(S, \lvert AS \rvert)$		O	$k_3 = k(S, \lvert AS \rvert)$		O	$k_3 = k(S, \lvert AS \rvert)$
—	BC		—	BC		—	BC
O	$k_2 = k(C, \lvert AC \rvert)$		O	$k_2 = k(C, \lvert AC \rvert)$		O	$k_2 = k(C, \lvert AC \rvert)$
—	CD		—	CD		—	CD
↔	p = UV		↔	p = UV		↔	p = UV