

Didaktika matematiky s praxí II

3D geometrie

Geometrie

byla vždy považována za disciplínu, která nabízí značný prostor pro kultivaci myšlení a tvořivost. V geometrii může dítě objevovat i nové objekty, s nimiž se zatím nesešlo.

G nabízí učitelům bohatou paletu úloh, které rozvíjejí žákovu schopnost experimentování, tvorby a prověřování hypotéz, spekulování, hledání a zdůvodňování a je i těžce vměstnatelná do instruktivního způsobu vyučování.

Geometrie

Společenství geometrických objektů, na rozdíl od aritmetiky přirozených čísel, nemá ostré hranice. Geometrie nemá nástroj, kterým lze vytvořit všechny geometrické objekty. Nenajdeme žádný univerzální princip, který by „občany“ tohoto společenství pevně propojil.

G je daleko různorodější než A v

- objektech
- činnostech
- vazbách i
- struktuře

A: Základní početní operace sčítání, odčítání, násobení i dělení mají algoritmický charakter. Když se je žák nacvičí, dovede je realizovat ve všech případech.

G: Značné množství různorodých úloh se žák nemůže nacvičit, jak je všechny řešit. Musí porozumět, např. při konstrukci trojúhelníka, vztahům mezi stranami, úhly, těžnicemi, výškami, ... a musí umět tyto vztahy vzájemně řetězit do procesu konstrukce.

Nestačí rutina. Proto je např. oblast geometrických konstrukcí mnoha učiteli považována za příliš náročnou.

Didaktické cíle 3D a 2D geometrie

- jsou společné pro obě geometrie:
poznávání geometrických objektů a jejich vlastností

Podstatu geometrie však tvoří **vztahy mezi těmito objekty** – odhalování, zdůvodňování, vzájemné provazování a využívání (např. u geometrických konstrukcí) tvoří **první podstatu školní geometrie**.

Druhou podstatu geometrie tvoří jevy **míry**, které provazují geometrii s aritmetikou.

Odlišné je vnímání vztahů:

- v 2D jde o objevování zákonitosti a argumentaci zákonitostí,
- v 3D o budování prostorové představivosti a evidenci, způsoby reprezentace.

Etapizace procesu poznávání geometrie je stejná, ale důrazy se posouvají.

Etapizace procesu poznávání geometrie

- 1. Synkretická etapa**
- 2. Etapa předmětných představ**
- 3. Etapa intuitivně-abstraktních představ**
- 4. Etapa strukturální**
- 5. Etapa axiomatická**

Pro 1. stupeň ZŠ je rozhodující etapa 2. a vstup do etapy 3. Učitel musí znát celou 3. etapu, protože do ní směřuje vývoj jeho žáků.

Etapizace procesu poznávání geometrie

1. Synkretická etapa

soubor představ asociovaný se souborem slov -
nedošlo k diferenciaci v představě, činnosti,
slovníku. (Kululu)

Činnosti: pozorování vizuální, haptické,
manipulace – imitativní, vnímání slov,
idiomů.

Etapizace procesu poznávání geometrie

2. Etapa předmětných představ

Pojem se postupně prodiferencovává, je přesněji uchopen jazykem, stává se **osobností**.

Činnosti: dtto + konstrukce, hovorový jazyk - používání slov běžného jazyka a kvazitermínů, ikonické zápisy, klasifikace

Osobnosti: krychle (kostka), koule (míč), kvádr (krabice), válec (sloup, toal. pap.)

Rozvoj porozumění geometrickým pojmům (i schopnost žáka zacházet s geom. pojmy v představách) je založen na

- **manipulativních aktivitách** – těmi se obohacují zkušenosti žáka
- **komunikaci** o nich
 - běžným jazykem
 - metaforickým jazykem a nakonec i
 - formalizovaným jazykem

Etapizace procesu poznávání geometrie

3. Etapa intuitivně-abstraktních představ

Pojem se stává prvkem rodících se idealizovaných a abstraktních představ.

Předmětná manipulace se mění na **manipulaci myšlenkovou.**

Objevují se formalizované jazyky a překlady mezi nimi.

Etapizace procesu poznávání geometrie

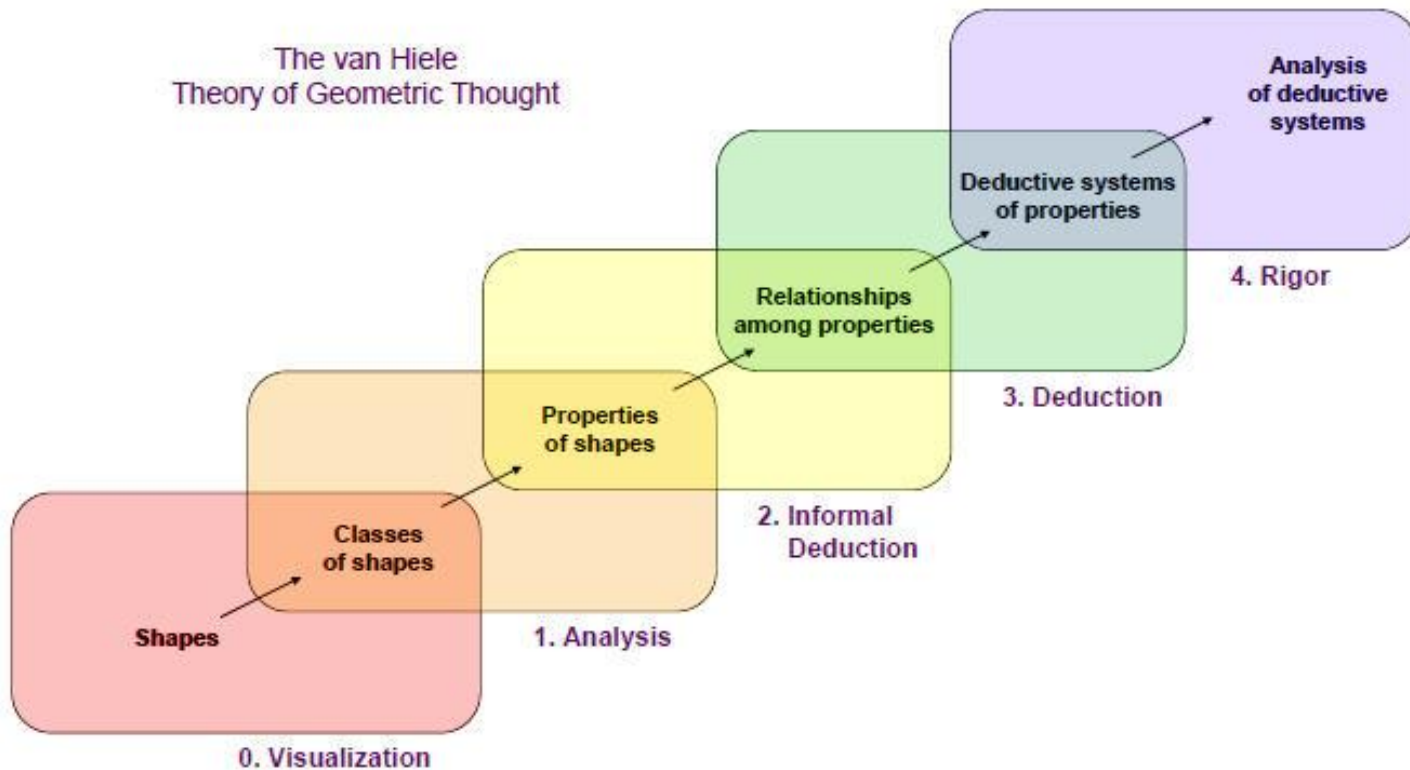
4. Etapa strukturální. Pojem se stává prvkem uzavřené teorie.

5. Etapa axiomatická. Pojem se stává prvkem axiomatizované teorie

Proces poznávání geometrického objektu

Van Hiele, Utrecht – v knize *Structure and Insight*, 1986, rozpracoval 5 úrovní: 0. Visualization; 1. Analysis; 2. Abstraction; 3. Deduction; 4. Rigor.

Tyto etapy se viditelně realizují například při hře Sova.



Nástroje geometrie

jimiž budujeme strukturu geometrických objektů jsou dvou typů:

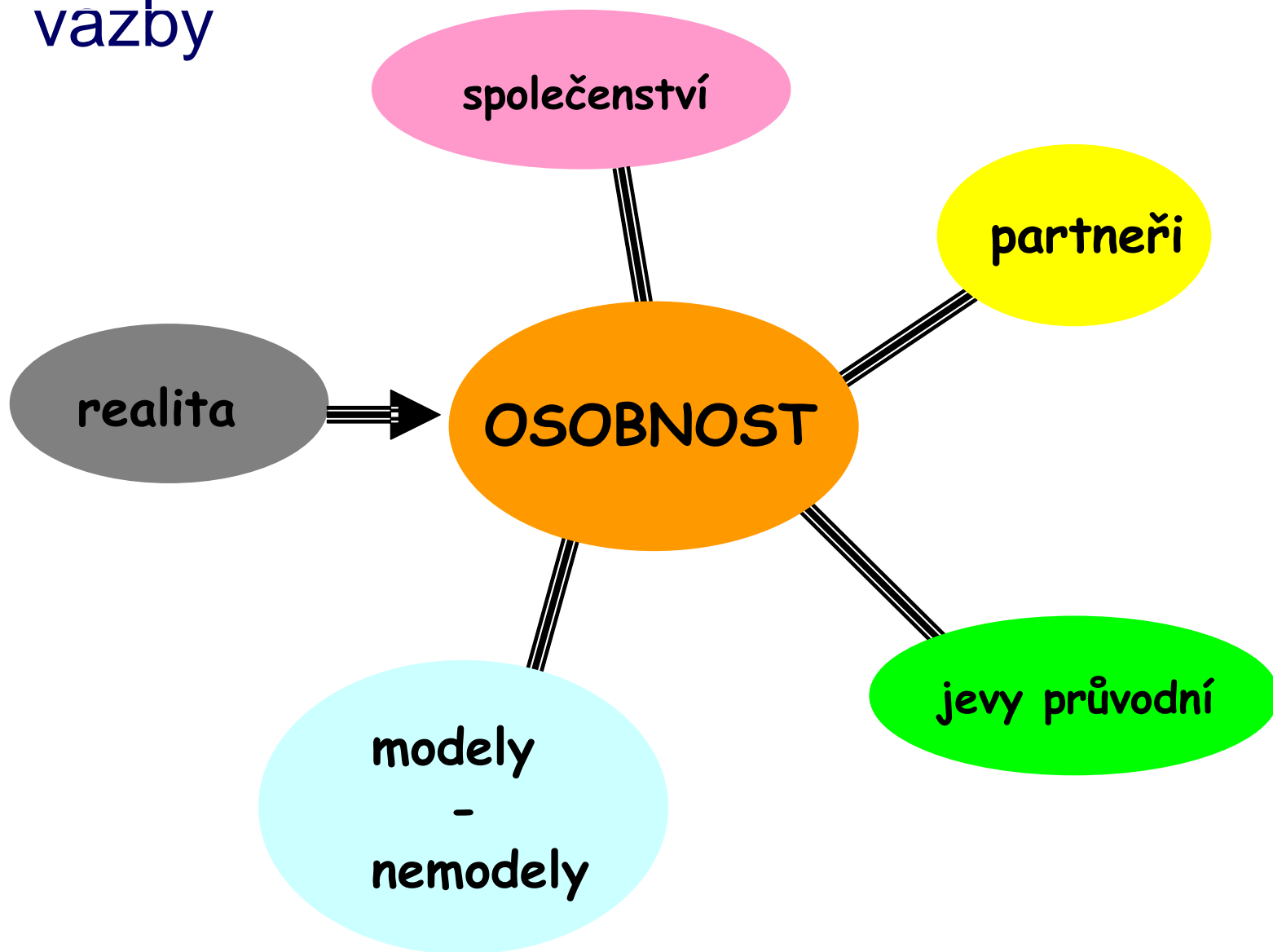
- ty, které jsou opřeny o **manipulaci a percepce**, ve 2D především vizuální percepce, ve 3D pak i haptickou – stavění, překládání papíru,....

Rodí se první představy – **interiorizace jevů průvodních, poznání v činnostech**

Vedou na tvorbu především **izolovaných modelů**.

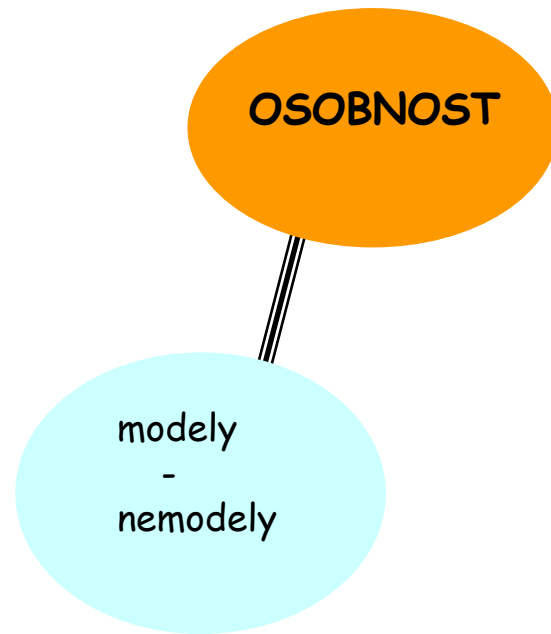
- ty, které se pohybují v **abstraktnější vrstvě představ**. Ty vedou na tvorbu **generických modelů a abstraktních poznatků**.

Žákovy geometrické představy opíráme o vazby



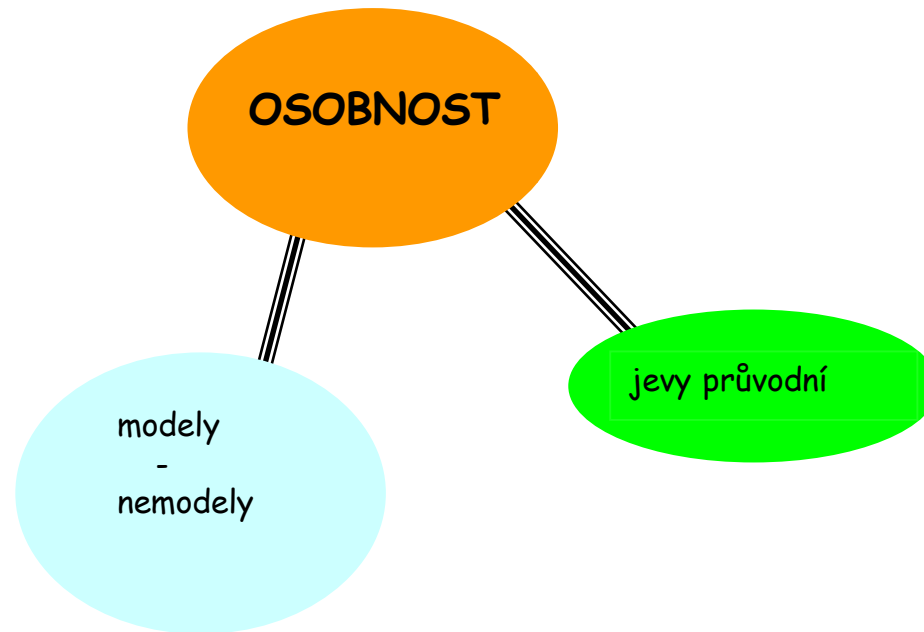
Vazba

- OSOBNOST – JEJÍ MODELY



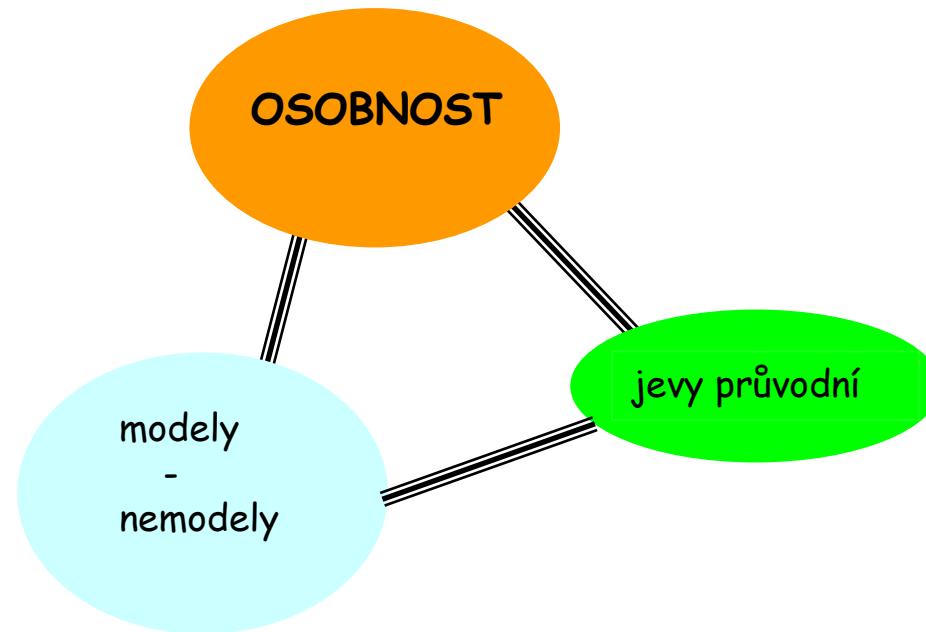
Vazba

- OSOBNOST – JEJÍ JEVY PRŮVODNÍ



Vazby

- OSOBNOST – JEJÍ MODELY
OSOBNOST – JEJÍ JEVY PRŮVODNÍ



Proč je vyučování geometrii tak odlišné od vyučování aritmetice

Experiment

Prostřednictvím telefonu (tedy bez vizuálního kontaktu) popište svému hypotetickému příteli nějaké těleso tak dobře, aby byl schopen těleso vymodelovat, nakreslit nebo identifikovat ve skupině těles.

Všimněte si, jak je to složité – jak je jazyk geometrie na jedné straně bohatý, ale na druhé straně zrádný, pokud se nepoužívá přesně.

Jaké mentální procesy jsou při uvedené činnosti aktivovány?

Navrhněte nějaký aritmetický objekt na úrovni základní školy, jehož popis by vám dal tolik práce jako naše těleso a který by vyžadoval tolik zkoumání daného objektu k tomu, aby jej bylo možné jednoznačně popsat.

Jazyk aritmetiky je mnohem střízlivější a jednoznačnější.

Jazyk

je nástroj **komunikace** i nástroj **myšlení**.

- umožňuje uchopit a strukturovat pojmy a vztahy, formulovat problémy i strategie jejich řešení, umožňuje tedy rozvoj myšlení obecně a v matematice pak zejména.

Z didaktického hlediska má zásadní význam –
různým úrovním myšlení vyhovují různé typy jazyků.

Nerovnováha, která by vznikla mezi typem myšlení a jazykem, by vedla ke zpomalení rozvoje myšlení a namnoze i demotivaci žáka.

Jazyk

Velká variabilita geometrických objektů i geometrických procesů přirozeně vyvolává potřebu velké variability pojmů a termínů i bohaté spektrum jazyků.

Žáci s různými životními zkušenostmi a kognitivně různí vnímají jednotlivé geometrické jevy různě, a proto účinnost výuky narůstá bohatstvím **různorodých reprezentací**.

Intuitivní jazyk → úloha → potřeba artikulovat výsledek, komunikovat o situaci → přesnější jazyk
→ komunikačně náročnější úloha → potřeba artikulovat výsledek → ...

Prostředí krychlových těles

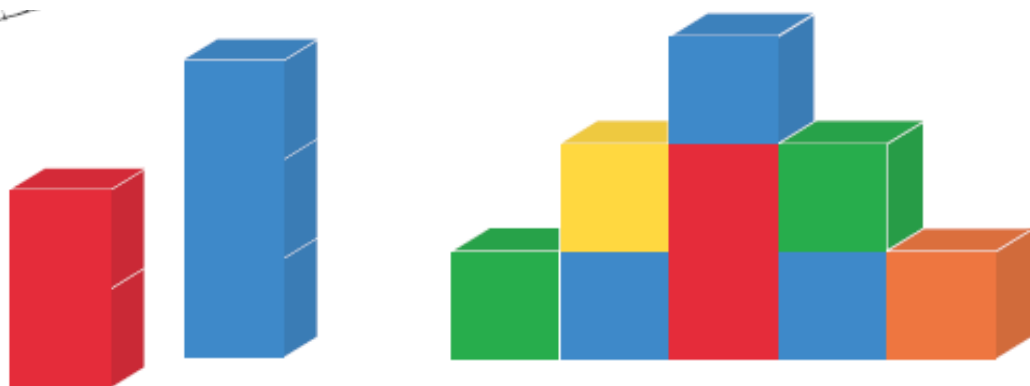
Zavést krychlové těleso (KT) je didakticky těžké. Proto začneme objektem, který je podepřen životní zkušeností žáka, a to je **krychlová stavba (KS)**.

Cesta, jak se žák seznamuje s KS ve třech etapách:

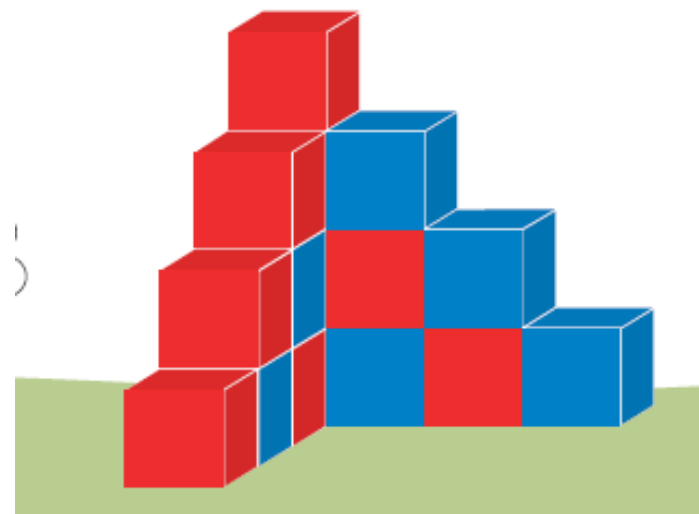
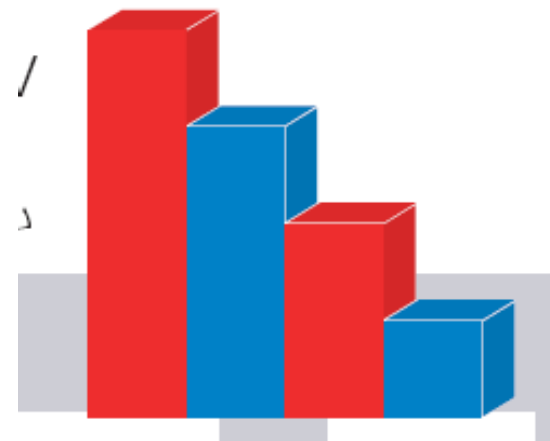
- I. STAVĚNÍ Z KOSTEK
- II. EVIDENCE STAVEB
- III. EVIDENCE PROCESU

I. STAVĚNÍ Z KOSTEK

manipulace - řešení úloh
ukázky z učebnic



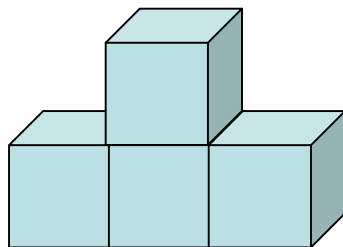
© STAVÍME Z KOSTEK

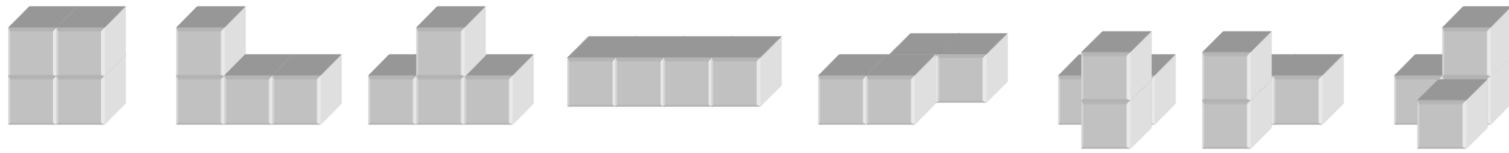


Nutnost tvorby nového jazyka

1. úloha

Na obrázku je jedno krychlové těleso vytvořené ze 4 krychlí. Najdi další, najdi všechna.





Co je na této úloze didakticky významné?

- manipulativní činnost, žák staví (pro kluky obvykle činnost samozřejmá, pro dívky obvykle nová důležitá zkušenost),
- jednotlivé stavby jsou objekty **geometrické**, ale celý soubor je objekt **kombinatorický** – vzájemně se propojují 2 oblasti matematiky.
- Jako objekt kombinatorický vyvolává 2 otázky:
Mám je všechny?
Nemám zde něco 2x?
Tato dvojice otázek se vrací do geometrie.

Navrhněte evidenci těles

- Slovní popis
- Portrét – volný rovnoběžný průmět
- Plán (prostý)


Již od 1. roč. - plán, počet teček = počtu krychlí nad sebou

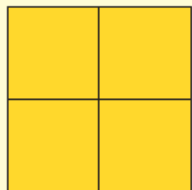
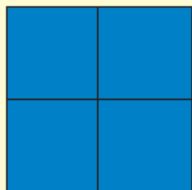
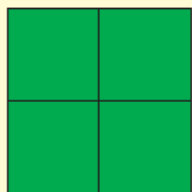
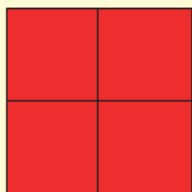
■ NAKRESLI PLÁN STAVBY


■ SPOJ

■ SPOJ

M1/2. díl

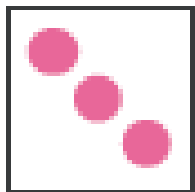
■ Vytvoř stavbu ze 6  a zapiš



■ Vytvoř stavbu ze 6  a zapiš



Jaké chyby žáci dělají?

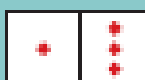


Záměna horizontální a
vertikální polohy



- Hra SOVA

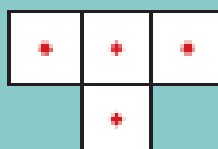
2 Vytvoř stavby a uhodni, na kterou stavbu myslí Aleš a na kterou Dana.



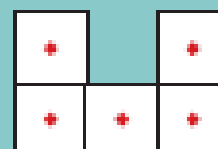
A



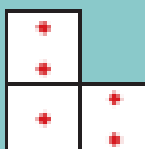
B



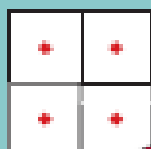
C



D



E



F



G



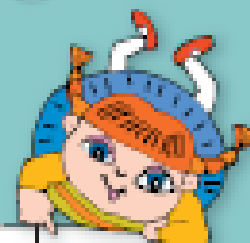
H

Aleš myslí na stavbu .



Má stavba 5 krychlí?	NE
Má jedno podlaží?	ANO
Má čtvercový půdorys?	NE

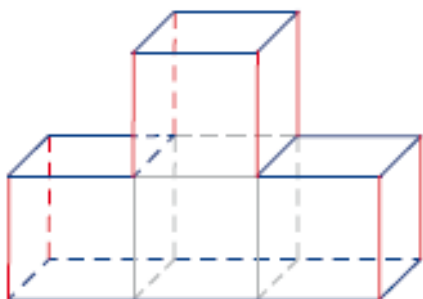
Dana myslí na stavbu .



Má stavba 5 krychlí?	ANO
Má ve 2. podlaží 2 krychle?	NE
Má ve 2. podlaží 1 krychli?	NE

Bude probíráno u míry ve 3D

Na obrázku je krychlové těleso sestavené ze čtyř krychlí o hraně délky 1 cm. Postav těleso z krychlí a urči jeho povrch (S), počet vrcholů (v), hran (h) i stěn (s).



Kostra tělesa na obrázku je 28 cm. Přemísti jednu krychli tak, aby vzniklo krychlové těleso, jehož kostra je **a)** stejná, **b)** větší, **c)** menší než kostra daného tělesa. Zznamenej plány tělesa.

U každého tělesa, které jsi vytvořil ve cvičení 16, zjisti povrch, počet vrcholů, hran i stěn.

Přemístěním jedné krychle tělesa ze cvičení 15 vytvoř další krychlové těleso, které má stejný počet vrcholů, hran i stěn.

Zjisti kostru a povrch obou těles a údaje porovnej.

Obě tělesa popiš konstrukčním zápisem.

Navrhněte evidenci těles

- Slovní popis
- Portrét – volný rovnoběžný průmět
- Plán prostý
- Plán patrový
- Pravoúhlé průměty

Procesuální

- Evidence změny
- Konstrukční zápis

1. typ úloh

Portrét ➡ plán a obráceně

Pro učitele je to úloha diagnostická.

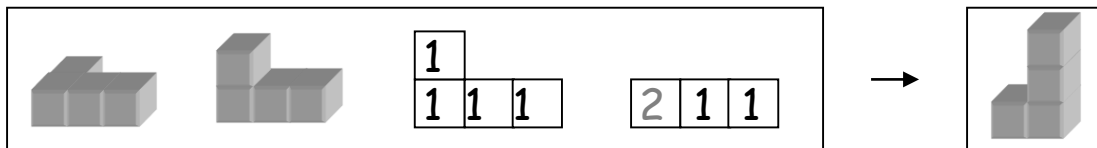
Někteří žáci vyžadují modelování vyžadují ➡ ???

Budování této psychické potence bude u nich dlouhodobější.

Případný tlak učitele, aby fyzický model nepoužívali ➡ ????

2. typ úloh

Stejné KT je prezentováno 2 různými stavbami, jednou portrétem, podruhé plánem. Soubor 4-5 takových dvojic je předložen žákovi a jeho úlohou je přiřadit odpovídající KT.



3. typ úloh

Je dán půdorys stavby, počet krychlí stavby, případně i předepsaná výška stavby. Úlohou žáka je vytvořit plány všech staveb takto popsaných.

Tento typ úloh umožňuje převádět do prostředí KS některé aritmetické úlohy. Například:

3. úloha

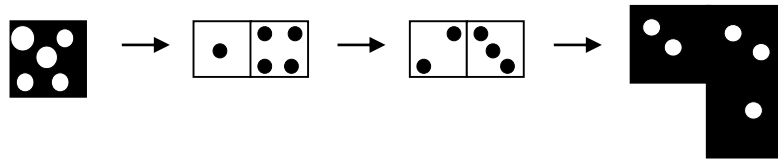
Do zápisu vlož čísla tak, aby platila rovnost a aby dvě čísla ze tří čísel pravé strany byly stejné

$$10 = 2 + \underline{\quad} + \underline{\quad}.$$

Když zde měníme číslo 2, úloha má buď 2, 1 (např. pro 6), nebo 0 řešení (např. pro 7).

4. typ úloh

Jsou dány 2 stavby vytvořené ze stejného počtu krychlí.
Úlohou žáka je postupným překládáním krychlí z jedné stavby vytvořit stavbu druhou a celý proces zapsat pomocí plánů.



III. EVIDENCE PROCESU

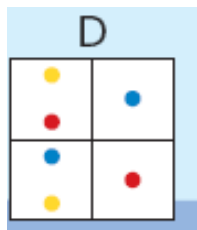
Do prostředí KS vstupuje **proces**. Dosud každá stavba jako statický objekt byla zapsána jedním plánem. Teď postupným měněním stavby vytváříme stavbu jinou a proces zapisujeme posloupností plánů.

Takováto **chirurgie** dává možnost vytvořit v souboru KS stejného objemu relaci příbuznosti:

Dvě stavby jsou k -příbuzné, jestliže z jedné lze druhou dostat nejméně k přesunutími krychle.

První a poslední stavby na obrázku jsou 3-příbuzné, potřebovali jsme 3 přesunutí.

- Z didaktického hlediska považujeme chirurgii za náročnou a důležitou. Proto je vhodné ji zařazovat již do 1. ročníku.

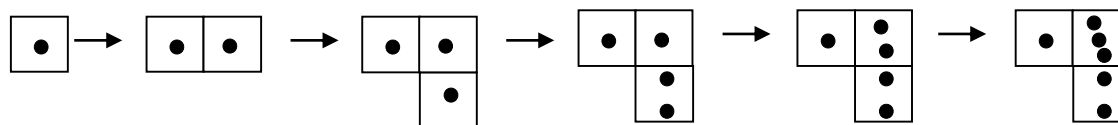


2 Postav stavby podle plánů D, E a F (str. 20), ale i stavby podle plánů H, I:



a) Vytvoř ze stavby D stavbu H postupným přemístěním tří krychlí.

- Myšlenka přestavby jedné stavby na jinou přirozeně vyvolává otázku zapsat proces stavby jednoduchým způsobem. Na obrázku vidíme **proces stavby** složené ze 6 krychlí.



■ POSTAV

PŘILOŽ ■

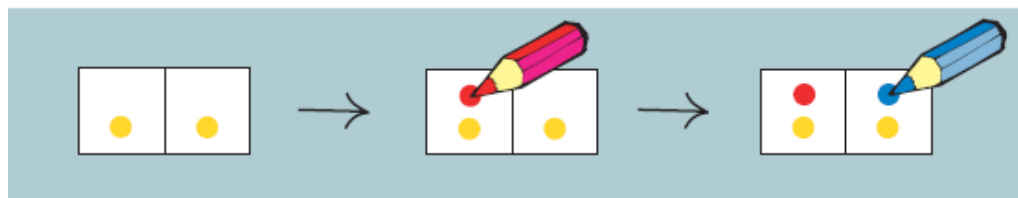
VYBARVI

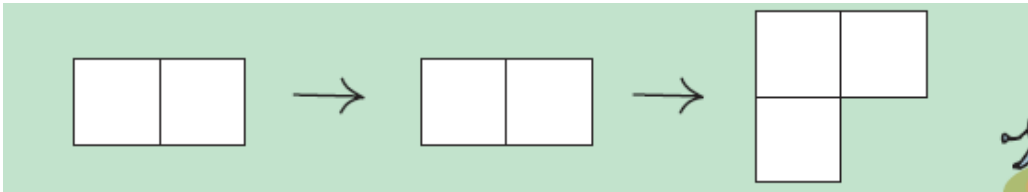
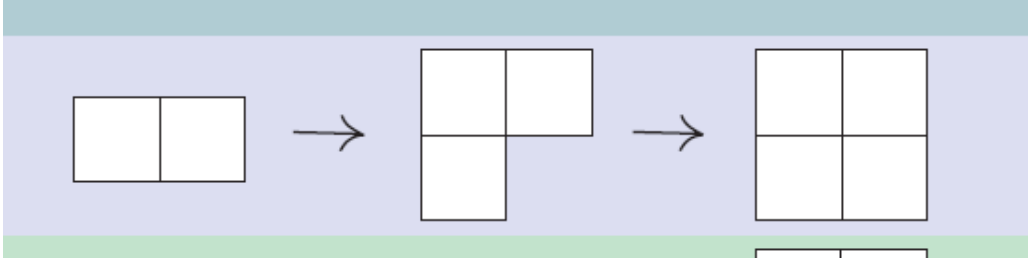
PŘILOŽ ■

VYBARVI

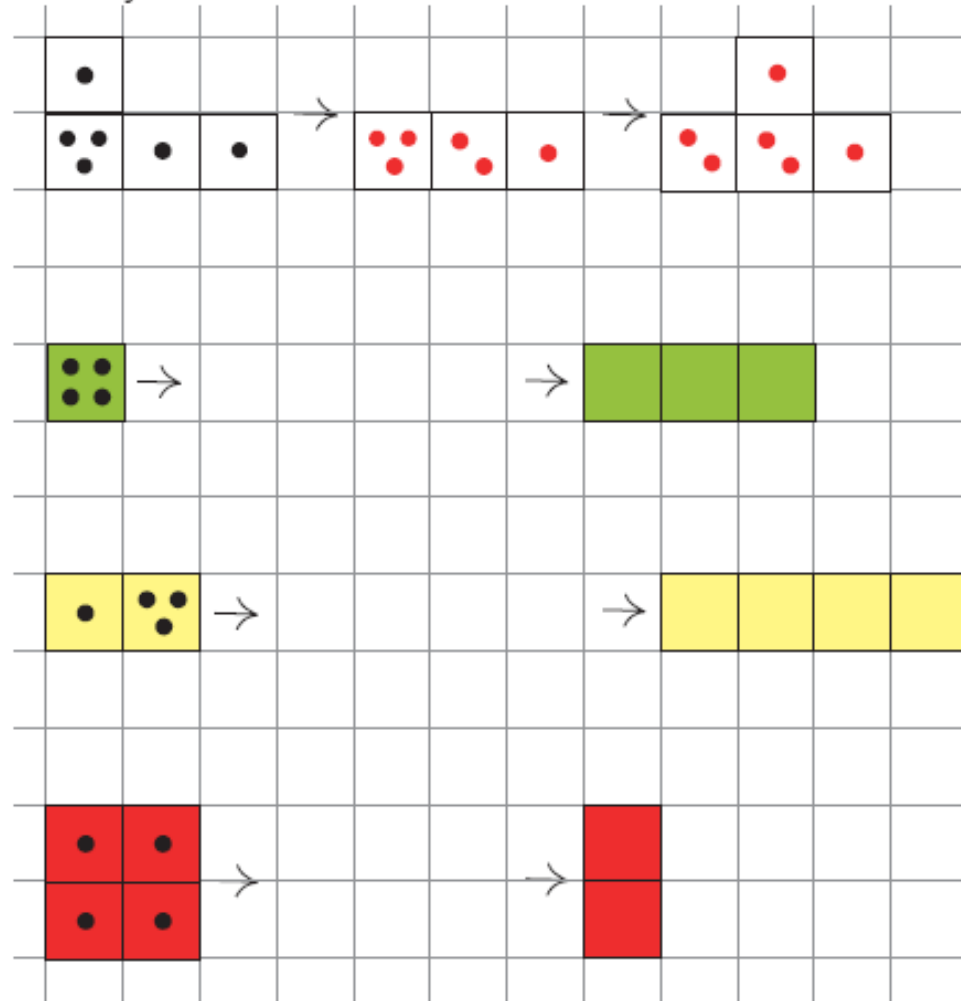


■ ZAKRESLI PŘILOŽENÍ ■ A ■

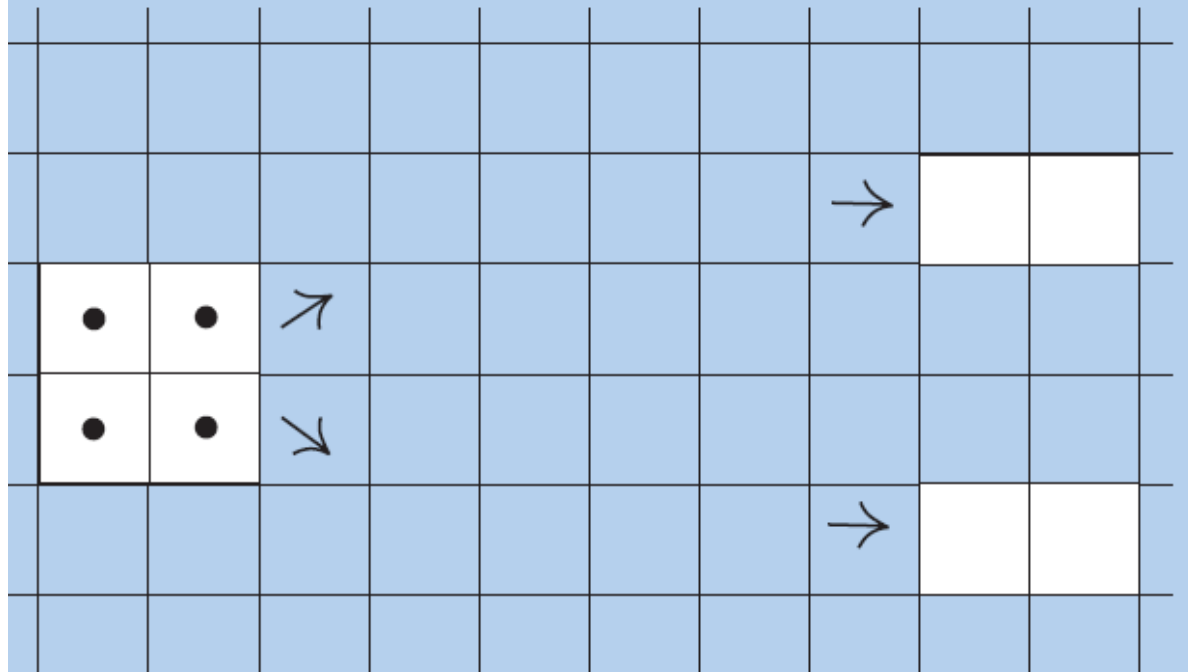




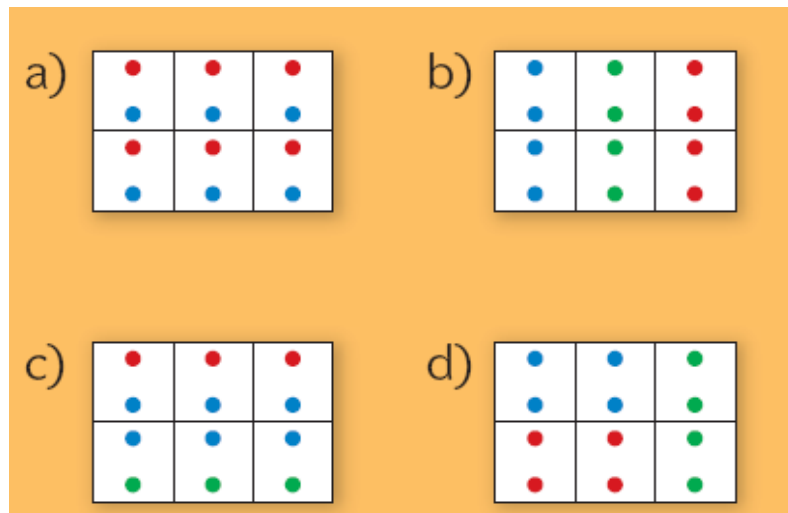
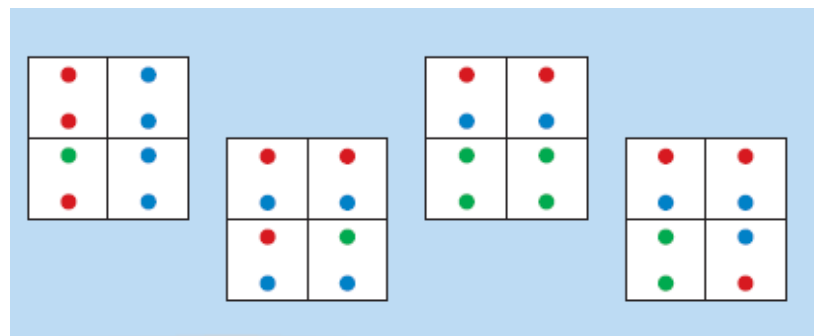
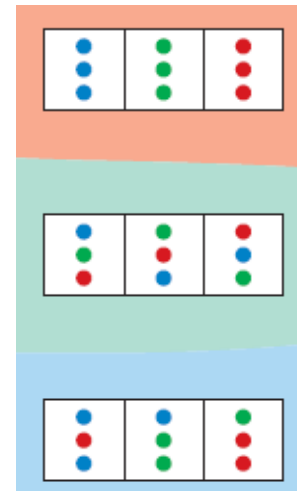
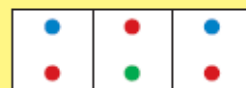
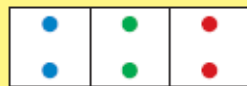
■ Vytvoř stavbu



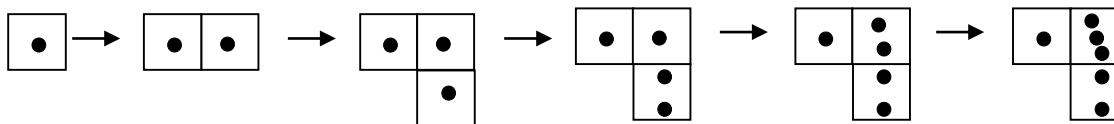
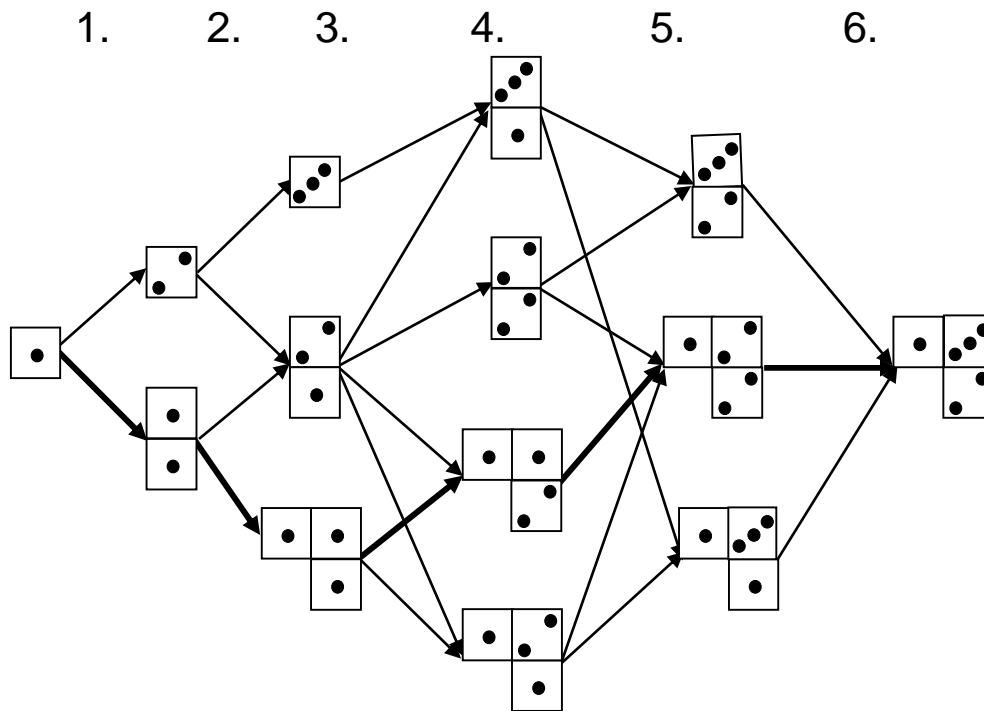
■ Vytvoř stavbu



3 Zvol si jeden ze čtyř barevných plánů a vytvoř podle něj stavbu. Tu překlop dopředu, dozadu, napravo, nalevo a pro každou z překlopných staveb nakresli plán.



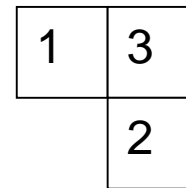
Je jasné, že skoro každou stavbu lze postavit větším počtem způsobů. Následujícím schématem jsou vyjádřeny všechny procesy stavění dané krychlové stavby. Těchto cest je 19.



Potřebu efektivnějšího jazyka zvýrazní učitel následující úlohou:

4. úloha

Tvůj kamarád nebyl ve škole. Leží doma nemocen a ty mu pomocí telefonu chceš vysvětlit, jak postavit třeba tuto stavbu:



Nalezení jazyka, jímž by bylo možné telefonát uskutečnit, vyžaduje 2 myšlenky:

- 1. myšlenka říká, že hlavní příkaz bude „postav kostku,“ a pomocný příkaz bude, kam se z dané pozice kostky máme pohnout.
- 2. myšlenka normuje směr pohybu - použijeme jazyka zeměpisu a použijeme S, Z, V, J a přechod nahoru bude znamenat přesun do vyššího podlaží.

Vytvořit tento jazyk není jednoduché. Učitel asi musí žákům něco napovědět.

Uvedený jazyk umožní řešit úlohu 5.

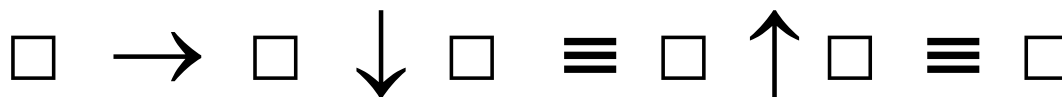
5. úloha

Realizuj následující slovní instrukci:

„Polož krychli. Jdi jeden krok na východ a polož krychli. Jdi jeden krok na jih a polož krychli. Jdi jeden krok nahoru a polož krychli. Jdi jeden krok na sever a polož krychli. Jdi jeden krok nahoru a polož krychli.“

Zápis jazyka slovních instrukcí graficky.

Pro žáky, kteří jazyk šipek znají z dalších prostředí, není takový objekt něco překvapivě náročného. Sami navrhnu šipky a hlavní povel polož krychli. Uvedená verbální instrukce má zápis.



1	3
	2

Přehled znaků jazyka konstrukce

Znak	Význam	Znak	Význam
□	polož krychli	←	jdi jeden krok na západ
≡	jdi o jedno podlaží nahoru	→	jdi jeden krok na východ
v	jdi o jedno podlaží dolů	↓	jdi jeden krok na jih
		↑	jdi jeden krok na sever

12 a) Jeden žák diktuje podle popisu konstrukce a druhý podle diktátu staví.

$\square \rightarrow \square \uparrow \square \equiv \square$

A

$\square \leftarrow \square \uparrow \square \equiv \square$

B

$\square \leftarrow \square \downarrow \square \equiv \uparrow \square$

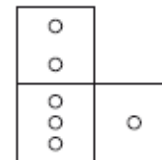
C

$\square \leftarrow \square \equiv \square \rightarrow \square \equiv \square \leftarrow \square$

D

b) Jeden žák si vybere některou ze staveb na straně 51 a pouze slovy popíše druhému, jak ji postavit. Druhý žák staví a pak oba kontrolují, jak se jim společné dílo zdařilo.

13 Ze tří modrých, dvou žlutých a jedné zelené krychle je vytvořena tato stavba. Přitom každé dvě krychle stejné barvy mají společnou pouze jednu hranu. Zjisti, jakou barvu má která krychle.



4 Stavbu, která je zapsána konstrukcí, zapiš plánem i pomocí průmětů.

a) $\square \uparrow \square \equiv \square$ [2+3]

b) $\square \rightarrow \square \uparrow \square \equiv \square \downarrow \square \equiv \square$ [4+5]

c) $\square \rightarrow \square \uparrow \square \uparrow \square \downarrow \equiv \square \downarrow \square \uparrow \equiv \square$ [6+7]

Přestavba



↖ ↗

Portrét

Plán

Pohled zepředu

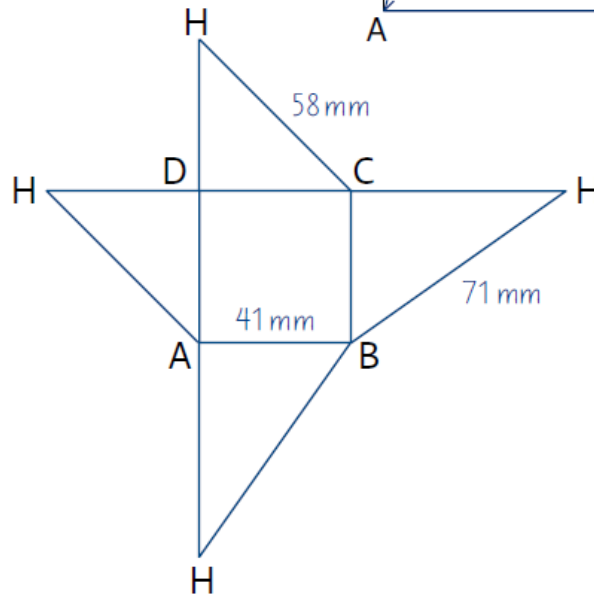
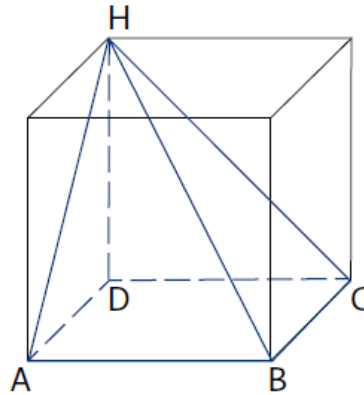
Jazyk

	mluvený	plán	podlažní plán	konstrukce
1.	polož krychli			
2.	udělej krok na Východ			
3.	polož krychli			
4.	vystup o 1 podlaží nahoru			
5.	polož krychli			
6.	vystup o 1 podlaží nahoru			
7.	polož krychli			

Úloha

- 18** Čtyřboký jehlan ABCDH je částí krychle ABCDEFGH o hraně 41 mm. Zmenšená síť jehlanu je na obrázku.

Sestroj model tohoto tělesa.



Úloha

Na obrázku je síť tělesa, které má pět stěn:
jeden čtverec, dva lichoběžníky a dva rovnostranné
trojúhelníky. Těleso má devět hran, z nichž jedna má
délku 50 mm a všechny ostatní 25 mm.
Sestroj toto těleso.

Ze dvou těles sestavených ve cvičení 30 slož tetraedr.

