11.10.2011

8. GEOMETRIE PROSTORU

Literatura: [DJ] Jirotková, D.: Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2010.

Společenství geometrických objektů je, na rozdíl od aritmetiky přirozených čísel, velice komplikované, nemá ostré hranice.

Geometrie nemá nástroj, kterým lze vytvořit všechny geometrické objekty. Neexistuje žádné univerzální pouto, kterým jsou kterékoli dva takové objekty navzájem propojeny a svět geometrie se jeví jako svět pozoruhodných individualit.

Sice některé z těchto individualit se shlukují do jasně vymezených a lépe organizovaných tříd (pravidelné mnohostěny, konvexní mnohoúhelníky, izometrie), ale taková organizovanost se nevztahuje k celému společenství geometrických objektů.

8.1. Rozdíl didaktických cílů 3D a 2D na 1. stupni a etapizace

Společné pro obě geometrie je poznávání osobností[1] a jejich jevů průvodních, konstrukce. Odlišné je vnímání vztahů: v 2D jde o objevování zákonitostí a argumentaci zákonitostí. Ve 3D jde o **budování prostorové představivosti a o vytvoření jazyků** (reprezentací), kterými lze o 3D objektech komunikovat.

Proces poznávání geometrických 2D a 3D objektů, vztahů, jevů je stejný, ale důrazy v jednotlivých etapách se posouvají:

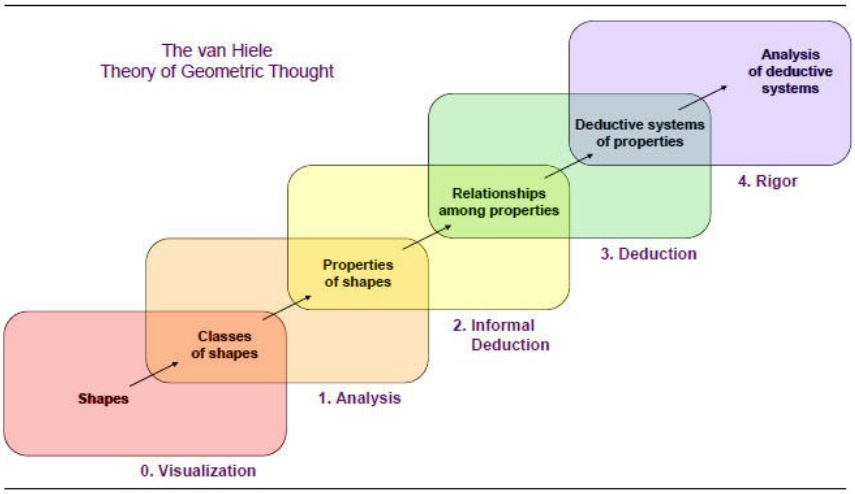
1. **Etapa synkretická** – soubor představ asociovaný se souborem slov, nebo slovem „proto-jazyka“.
   Zatím nedošlo k diferenciaci v představě, činnosti, slovníku. (Kululu)
   Činnosti: pozorování vizuální i haptické, imitativní manipulace, vnímání slov a idiomů.
2. **Etapa předmětných představ.** Pojem se postupně prodiferencovává, je přesněji uchopen jazykem, stává se osobností. *Kululu* se dělí na *míč* – objekt 3D a *kruh, kolečko, kroužek* – objekt 2D.
   Činnosti: vše, co dříve + konstrukce (činnost s cílem), používání kvazitermínů, ikonické zápisy, míry, klasifikace (věže z krychlí, podle výšky).
   Osobnosti: krychle (kostka), koule (míč), kvádr (cihla, krabice mléka,…), válec (kulatý sloup, jádro toaletního papíru, krabice na krémy,…), čtyřboký pravidelný jehlan (pyramida)
3. **Etapa intuitivně-abstraktních představ.** Pojem se stává prvkem rodících se idealizovaných a abstraktních představ. Předmětná manipulace se mění na manipulaci myšlenkovou. Objevují se formalizované jazyky a překlady mezi nimi.
4. **Etapa strukturální.** Pojem se stává prvkem uzavřené teorie.
5. **Etapa axiomatická.** Pojem se stává prvkem axiomatizované teorie.

Pro 1. stupeň je rozhodující etapa druhá a vstup do etapy třetí. Učitel musí znát celou třetí etapu, protože do ní směřuje vývoj jeho žáků.

---

[1] Osobností nějakého jevu je to, co z nějakého jevu činí samostatného jedince, co jej osamostatňuje a zároveň sjednocuje tím způsobem, že si ho přisvojuje – a již nic více. (Odvozeno od slov „osobný“ – osamělý, „osobiti si“ – přisvojiti si.) Nemůžeme se o osobnosti jevu přesvědčit, můžeme ji jevu pouze přiznat. (Vopěnka 1989, *Rozpravy s geometrií*. Praha : Vesmír, 1989, s. 19, 20.)

(Van Hiele, Utrecht – v knize *Structure and Insight* , 1986, rozpracoval 5 úrovní procesu poznávání geometrického objektu.. 0. Visualization; 1. Analysis; 2. Abstraction; 3. Deduction; 4. Rigor. Tyto etapy se viditelně realizují například při hře Sova.)



Nástroje geometrie, jimiž budujeme strukturu geometrických objektů, jsou dvou typů:

- ty, které jsou opřeny o manipulaci a percepci, ve 2D především vizuální percepci, ve 3D pak i haptickou. Vedou na tvorbu především izolovaných modelů.
- ty, které se pohybují v abstraktnější vrstvě představ. Ty vedou na tvorbu generických modelů a abstraktních poznatků.

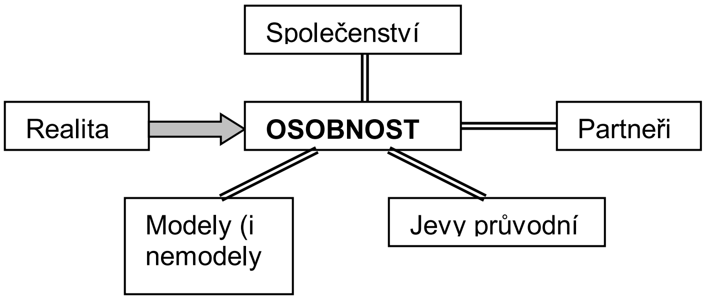
Příkladem nástroje prvního typu je například interní reprezentace manuální činnosti stavění věže z kostek, kutálení míče, překládání papíru i kinestetické aktivity jako orientované pohyby rukou, nohou i celého těla. Představy, které se ve vědomí dítěte v průběhu této činnosti budují, jsou důsledkem procesu **interiorizace** (zvnitřnění) jevu, který Vopěnka (1989, s. 26) nazývá **jev průvodní**. Například dítě staví z kostek věž. Ta někdy spadne, někdy se udrží. Opakovaná manuální zkušenost vytváří ve vědomí dítěte poznání, že „věž bude pevná, jestliže stěny dvou kostek ležících nad sebou dobře přiléhají“. Dítě toto poznání neumí formulovat a ani nezná pojmy, které by k formulaci byly potřebné. Jeho poznání je **poznáním v činnosti**, ale toto již obsahuje zárodek budoucího pojmu **stěna** jako **průvodního jevu osobnosti kostka**. Podobně vzniká ve vědomí dítěte představa jevu **oblosti** při kutálení míče, představa jevu **přímosti** nebo pojmu úhlopříčka při překládání papíru, propedeutika pojmu směrnice při stoupání do schodů nebo při sáňkování apod.

Vopěnkovy pojmy osobnost a její jevy průvodní jsou již několik let používány jako účinný nástroj didaktiky matematiky zejména při studiu tvorby geometrického světa dítěte na základě jeho každodenní zkušenosti. Průvodní jevy jsou využívány na charakteristiku objektu, který je osobností. Při studiu geometrických představ žáků pracujeme kromě vazby **osobnost a její jevy průvodní** i s inverzní vazbou **jev a třída osobností,** pro něž je **daný jev jevem průvodním**. Popsaný inverzní postup se může objevit i v žákově poznávání geometrického světa, kde výrazný průvodní jev jedné osobnosti generuje celou třídu dalších objektů, později i osobností. Například zkoumání osobnosti čtverec nás přivede k průvodnímu jevu **strana**. Tento pojem, který se jako jev průvodní objeví i u některých dalších osobností jako obdélník, rovnostranný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, …, může vést žáka k propojení tohoto pojmu na celou třídu objektů, která dostane jméno mnohoúhelníky. Jiný příklad, kdy se průvodní jev stává východiskem celé třídy objektů, je osová souměrnost. Tento jev vede k vytvoření obecného pojmu útvary osově souměrné.

Ve společenství geometrických objektů tak vznikají různé podskupiny, které pak studujeme jako geometrické komunity. Každou z nich můžeme obvykle zkoumat různými myšlenkovými postupy. Například pojem pravidelný mnohoúhelník, který je vlastně názvem pro celou komunitu objektů, z nichž některé mohou být pro žáka osobnostmi, můžeme vnímat jako sérii shodných rovnoramenných trojúhelníků vhodně k sobě přiložených, jako na kousky nakrájený kruhový dort, nebo jako skupinu bodů pravidelně rozložených na kružnici, nebo také jako konvexní mnohoúhelník, jehož každým vrcholem prochází jeho osa souměrnosti apod.

Geometrie ovšem není pouze o poznávání tvarů, osobností a jejich průvodních jevů. **Podstatu geometrie tvoří vztahy mezi těmito objekty.** Například poznání, že v každém trojúhelníku je součet všech jeho vnitřních úhlů úhlem přímým nebo že trojúhelník ABC, jehož vrchol C leží na kružnici sestrojené nad úsečkou AB jako průměrem, je pravoúhlý, jsou hluboké poznatky geometrického světa. Právě **odhalování** těchto poznatků, jejich **zdůvodňování, vzájemné provazování a využívání (např. u geometrických konstrukcí) tvoří první podstatu školní geometrie**.

Druhou podstatu této geometrie tvoří jevy míry, které provazují svět geometrie se světem aritmetiky. Nejedná se zde samozřejmě o měření jednotlivostí, jak je tomu třeba v zeměměřičství, ale o hledání měřičských procedur univerzálně platných pro celou třídu geometrických jevů.



8.2. Krychlové stavby a krychlová tělesa

Ústředním objektem této kapitoly je **krychlová stavba** – objekt, s nímž má mnohé zkušenosti již dítě předškolního věku. Právě tyto intuitivní zkušenosti je možné ve škole postupně měnit na poznání, a to propojením tří aktivit:

- řešením manipulativních úloh,
- slovním popisem uskutečňované činnosti, a
- zavedením znakového jazyka, který jednoduše a srozumitelně popíše i složitější krychlové stavby.

Kostru textu tvoří úlohy. Jsme přesvědčeni, že matematiku nelze naučit jiného člověka tím, že mu vlastní poznatky odevzdáme v hotové, dobře promyšlené formě. Víme, že základem skutečného poznání (nejen matematického) je lidská zkušenost, a ta je nepřenosná. Učitel může svému žákovi pouze ukázat cestu, která jej dovede k nabytí zkušeností, k jejich upřesňování a organizaci. Právě o to se v textech snažíme. Hlavním nedostatkem textu budou ta místa, kde dochází v náročnosti úloh ke skokům a kde tedy bude třeba doplnit další úlohy a skoky vyplnit přiměřeným zvládnutelným stoupáním.
Úlohy jsou částečně řešeny, některé podrobněji, jiné v náznacích, některé vůbec ne. Očekáváme zde spolupráci čtenáře, jeho kritické připomínky k rozsahu vyřešených úloh i jeho náměty na další úlohy.
Hošík, který si z kostek staví věže a jiné stavby, dívenka, která obléká panenku, dítě, které na pískovišti staví hrady nebo „peče bábovičky“, získává cenné zkušenosti o prostorových objektech. Předlohy pro svoje stavby nachází dítě v okolním světě, obrázkových knížkách, televizi, ale též ve vlastní fantazii. Tyto zkušenosti budou východiskem pro otevírání 3D světa žákům prvního stupně ZŠ.

Přirozeným vstupem do 3D světa pro žáka první třídy je oblast, ve které má nejvíce zkušeností – to jsou zřejmě kostky. Proto prvními před-pojmy tělesa, s nímž se žák ve škole setkává, jsou „krychle (kostka)“, „věž“, „věžák“ „vláček“ „zeď“, „cimbuří“, „schody“,… Později to bude před-termín krychlového tělesa, „stavba“, nebo přesněji „krychlová stavba“. Pojem „krychlová stavba“ se opírá o pojmy „svislý“ a „vodorovný“, které do čisté geometrie nepatří, ale jsou hluboce vkořeněny v naší prostorové zkušenosti. Potlačením těchto pojmů a snahou vnímat objekt 3D bez jeho polohy k okolí se začíná budovat čistě geometrický pojem „krychlové těleso“.

8.3. Krychlové stavby – popis

Připomeneme základní pojmy, které byly zavedeny a nimiž se pracovalo v USMA I.

Krychlovou stavbou rozumíme prostorový objekt postavený podle jistých pravidel z konečného počtu shodných krychlí. Pravidla pro stavbu krychlové stavby jsou jednoduchá:
1) začínáme položením jedné krychle na „podlahu“;
2) k ní přiložíme druhou krychli přesně stěnou na stěnu krychle druhé;
3) tak pokračujeme přikládáním další a další krychle, vždy na jednu nebo více krychlí již rozestavěné stavby, až vyčerpáme všechny připravené krychle.

K tomuto procesnímu popisu stavby dejme i vymezení statické.

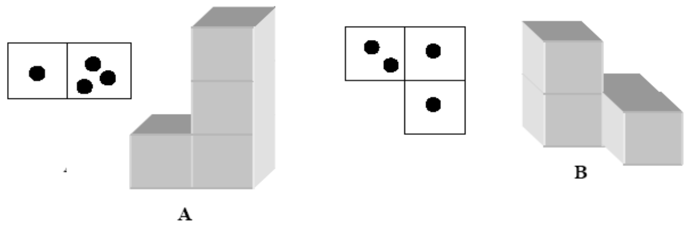
<u>Vymezení 8.3.1</u>. Prostorový útvar vytvořený z konečného počtu shodných krychlí nazveme krychlovou stavbou jestliže:
1) každé dvě krychle mají společnou buď jednu stěnu, nebo jednu hranu, nebo jeden vrchol, nebo nemají nic společného;
2) žádná krychle „nevisí ve vzduchu“;
3) stavba je z „jednoho kusu“ tj. středy libovolných dvou krychlí stavby lze spojit čárou, která celá leží uvnitř stavby.

Krychlové stavby mají základní jevy průvodní: *vrchol, hrana, stěna*. S hranou i stěnou jsou potíže. Těleso B na obrázku 1.1 má jednu obdélníkovou stěnu, která je *kombinatorický pětiúhelník*.

Stavbu můžeme reprezentovat mnoha různými způsoby. Zde uvedeme pět z nich:
1. Fyzický model. Stavba postavená z kostek.

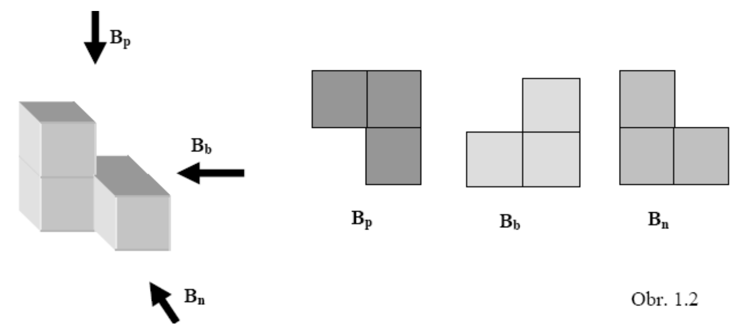
2. Portrét. Buď je kreslený rukou, nebo počítačem, nebo je to fotografie fyzického modelu. Na obrázku 1.1 jsou dvě krychlové stavby **A** a **B**. Každá je složena ze 4 krychlí.

3. Plán. Do půdorysu stavby, který se skládá z jednoho nebo více čtverců, napíšeme tečky: Počet teček ve čtverci ukazuje, jak vysoká „krychlová věž“ na tomto čtverci stojí – obr. 1.1. Místo teček budeme používat i čísla. V první třídě je asi lepší používat tečky. To nám umožní pracovat s plánem již před nácvikem psaní číslic.



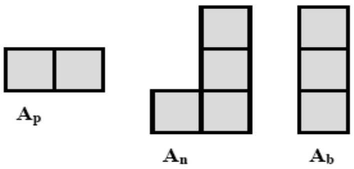
Obr. 1.1

4. Tři průměty. Krychlovou stavbu **B** zachytíme ze tří navzájem kolmých pohledů (obr. 1.2). Když se podíváme na stavbu **B** shora, vidíme trimino **Bp**, které je *půdorysem* stavby **B**; podíváme-li se zepředu, vidíme trimino **Bn** (termíny *trimino* a *tetramino* jsou vysvětleny dále), které je *nárysem* stavby, a podíváme-li se z boku, vidíme trimino **Bb**, které je *bokorysem* stavby **B**.



Obr. 1.2

Obdobně $\mathbf{A}_p$, $\mathbf{A}_n$ a $\mathbf{A}_b$ na obrázku 1.3 jsou *půdorys, nárys* a *bokorys* stavby **A**.



5. Popis konstrukce. Postup tvorby stavby zapisujeme krok po kroku. Například stavbu **A** konstruujeme v sedmi krocích:

	Akce	Zápis konstrukce	Zápis plánem
1.	polož krychli	□	1
2.	udělej krok na východ	□ →	
3.	polož krychli	□ → □	1 1
4.	vystup o 1 podlaží nahoru	□ → □ ≡	
5.	polož krychli	□ → □ ≡ □	1 2
6.	vystup o 1 podlaží nahoru	□ → □ ≡ □ ≡	
7.	polož krychli	□ → □ ≡ □ ≡ □	1 3

Tabulka 3.1

Stavba **A** je tedy zapsána takto: □ → □ ≡ □ ≡ □ .
Stavba **B** je zapsána takto: □ ↑ □ ← □ ≡ □ .

Popis konstrukce používá šesti ikonických znaků:
□ - polož krychli ← - jdi na západ → - jdi na východ
≡ - jdi o 1 podlaží nahoru ↑ - jdi na sever ↓ - jdi na jih.

Když zavedeme pojem krychlového tělesa, přibude ještě další jazyk a to *plán tělesa*.

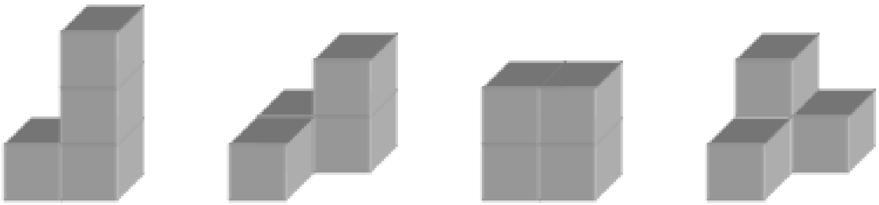
8.4. Krychlové stavby - jazyky

V odstavci 8.3. bylo představeno pět jazyků (reprezentací) krychlové stavby. Nyní si uvedeme sérii úloh tak, aby bylo zřejmé, že jazyk je nejen nástroj komunikace, ale také a vlastně především, nástroj rozvoje myšlení. Intuitivní vymezení krychlové stavby nám umožní formulovat úlohy tak, že jim žák 1. st. ZŠ porozumí a může tak získat první zkušenosti s daným pojmem v činnostech. Z potřeby jasně formulovat řešení náročnějších úloh vyplyne potřeba ekonomického a efektivního jazykového uchopení. Nový jazyk bude přesnější a stane se nástrojem, ve kterém i žák může vyjadřovat své odpovědi, nové „objevy“, a ve kterém může řešit další složitější úlohy. Jazyk se tak stane nástrojem rozvoje myšlení. Současně s prohlubováním a rozšiřováním geometrických znalostí narůstá i účinnost odpovídajících jazyků a celý proces probíhá cyklicky v posloupnosti:

Intuitivní jazyk → úloha → potřeba artikulovat výsledek → přesnější jazyk → komunikačně náročnější úloha → potřeba artikulovat výsledek → …

V tomto cyklickém procesu nejde v mnoha případech jen o potřebu vyjádřit výsledek, ale i o potřebu o dané situaci komunikovat. Když je komunikace podepřena fyzickými modely a možností přímé manipulace, je výrazně jednodušší, a naopak když se odehrává „po telefonu“,[2] je značně náročná. V takovém případě je efektivní jazyk nezbytný.

To, co vidíme na obrázku 3, můžeme nazvat krychlovými stavbami a čtenář nám určitě bude rozumět. Alespoň na chvíli nyní zvolíme preciznější vyjadřování. Řekneme, že na obrázku 3 jsou **portréty krychlových staveb** A, B, C, D.
Jestliže čtenář skutečně podle těchto portrétů postaví z krychlí stavby, budou před ním **fyzické modely** těchto staveb. Dítě, které si rádo hraje s kostkami, také bude schopno podle obrázku 3 všechny čtyři stavby postavit. Když jej však požádáme, aby postavilo svoji vlastní stavbu, soudě podle našich zkušeností, pravděpodobně postaví něco, co my za krychlovou stavbou nepovažujeme. Jedna naše zkušenost je popsána v ilustraci 8.1.



A B C D

Obr. 3

Ilustrace - Diferenciace pojmu krychlová stavba

V rámci výběrového semináře z matematiky ve 4. ročníku studia učitelství pro první stupeň ZŠ studenti pravidelně pracují se žáky. V roce 2006/2007 studenti vedli matematický kroužek ve 2. ročníku. Při otevření nového tématu krychlové stavby byly děti požádány, aby postavily krychlovou stavbu, aniž by se tento pojem nějak vysvětloval. Děti stavěly různé pyramidy, zeď s průzorem i takové objekty, v nichž byly krychle natočené, stály na hraně apod. Jejich intuitivní představu o pojmu krychlová stavba jsme pak upřesňovali diferenciací, která vycházela z vnitřní potřeby dítěte. Dítě mělo za úkol svou stavbu přenést z místa na místo. Stavby však byly velmi komplikované a bylo nutno zvolit vhodný postup. Přenášení se nakonec uskutečnilo tak, že se stavba přenášela po jednotlivých sloupečcích. Rozkladu stavby do sloupečků se pak říkalo **sloupečkování**. Pokud bylo možné realizovat sloupečkování, příslušná stavba se nazvala **sloupečková**. Ostatní stavby byly nesloupečkové. Tato terminologie se díky frekvenci pojmů později změnila a to, co bylo sloupečková stavba, se stalo později pouze **stavbou** a nesloupečkové stavby přestaly vstupovat do hry.

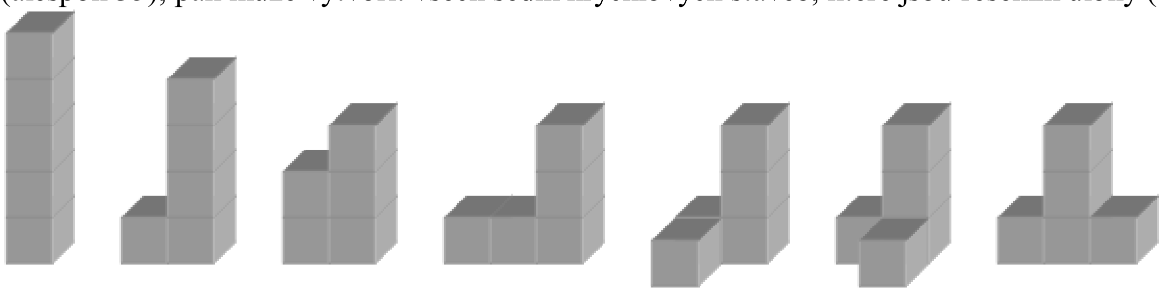
Vytvořením pojmu sloupečková stavba došlo ve vědomí žáků k tvorbě generického modelu pojmu krychlová stavba, který byl ukotven v množství jejich vlastních staveb, tj. v sérii izolovaných modelů a také ne-modelů (viz odst. 1.2). Takto pojatý pojem má již jistou úroveň teoretické přesnosti a žák je již připraven k tomu, aby porozuměl jak konceptuálnímu, tak procesuálnímu intuitivnímu vymezení pojmu.

[2] Komunikace „po telefonu“ vyjadřuje ten typ komunikace, kdy na sebe dva komunikanti nevidí, kdy nedostávají zpětnou vazbu o tom, co jejich komunikační partner dělá.

Do této chvíle pracovali naši (hypotetičtí) žáci se třemi různými jazyky. Základním jazykem byly **fyzické modely**, s nimiž žáci manipulovali. Jazykem, který tuto činnost provázel, někdy usměrňoval a upřesňoval, byl **hovorový jazyk** doplněný o geometrické termíny jako krychle, stěna, hrana, vrchol, objem (počet krychlí, z nichž je stavby složena), a polotermíny jako „podlaha“, „viset ve vzduchu“ a „výška stavby“ (počet krychlí v nejvyšším sloupečku stavby). Konečně třetí použitý jazyk byl **portrét** těles, podle něhož žáci stavěli fyzické modely staveb. Úroveň geometrického myšlení našich žáků i stupeň jejich zkušeností s krychlovými stavbami nyní umožňují řešit následující úlohu.

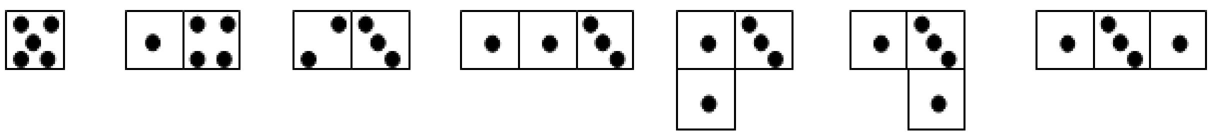
Úloha 1
Najdi všechny stavby složené z pěti krychlí, ve kterých jsou alespoň tři krychle nad sebou (stavby, jejichž objem je 5 a výška je aspoň 3).

Úloha je formulována tak, aby řešitel nutně musel narazit na problém, jak všechny nalezené stavby evidovat a jak všechny požadované stavby nakonec popsat. Má-li žák dostatečný počet krychlí (alespoň 35), pak může vytvořit všech sedm krychlových staveb, které jsou řešením úlohy (obr.4).



Obr. 4

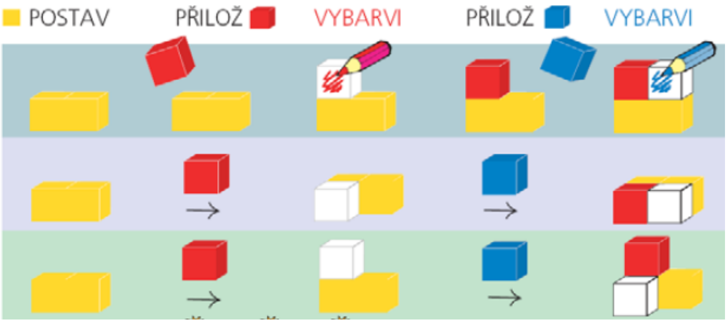
Když ale tyto krychle k dispozici nemá, je bezradný, protože kreslení portrétů je příliš náročné. Jeho zkušenosti se sloupečkováním mu však umožňují objevit nebo aspoň s porozuměním přijmout jazyk, který nazveme **plán** stavby. Řešení úlohy 1 je vyjádřeno v jazyku plánů na obrázku 5.



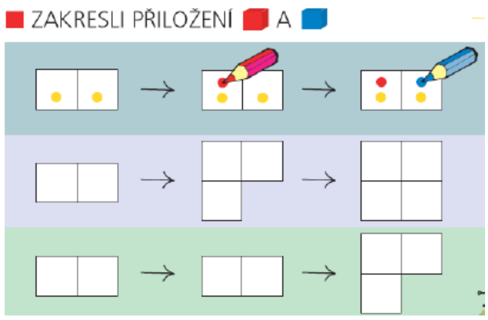
Obr. 5

Způsob tvorby plánu někteří žáci rychle chápou z ilustrací a jsou schopni to spolužákům vysvětlit. Plánem zde popisujeme krychlovou stavbu jako hotový objekt, jako koncept. Nový jazyk je efektivnější a lze pomocí něj řešit úlohy zaměřené nejen na reprezentaci jisté stavby, ale také na evidenci procesu konstrukce jisté stavby. Žák, který umí pracovat s jazykem plánů, dokáže zapsat fyzickou stavbu plánem i ji podle plánu vytvořit. Jazyk plánů se však stane těžkopádným, když přejdeme od statické geometrie ke geometrii dynamické, tj. od konceptu k procesu. Hledání nového jazyka zahájíme úlohou na konstrukci stavby, která je vzata z učebnice matematiky pro 1. ročník ZŠ (Hejný, Jirotková, Slezáková, Matematika pro 1. roč., s. 56–57).

Úloha 2



Obr. 6a



Obr. 6b

Úloha 2 je zadána v jazyku portrétu (obr. 6a). Její řešení probíhá ve dvou liniích.
První je samotný řešitelský proces, který se odehrává v jazyku modelů. Druhou linií je formulace výsledku, která je v jazyku plánů (obr.6b). Žáci řeší úlohu tak, že nejdříve interpretují portrét žluté stavby (první vlevo) a postaví dvě žluté krychle vedle sebe. Pak tuto fyzickou stavbu popíší v jazyku plánů, tj. na obrázku 6b nakreslí dvě žluté tečky do připraveného půdorysu (prvního bimina[3] vlevo). Dále zadání úlohy říká: „přilož červenou kostku“. Jednoduchá **portrétová animace** naznačuje pohyb přikládání červené krychle a portrét další stavby říká, kam se krychle má přiložit. (V dolních řádcích je pak místo animace použita šipka, jejíž význam je tou animací v horním řádku definován.) Žák realizuje přiložení červené krychle nad levou žlutou krychli a vybarvení příslušné krychle v portrétu tuto etapu řešení ukončí v jazyku portrétů. Totéž pak žák vyjádří plánem. Nejdříve interpretuje šipku: „vezmi červenou kostku a přejdi k dalšímu obrázku“, přejde ke druhému plánu a vyjádří své reálné řešení v jazyku plánu, tedy dokreslí do druhého bimina do levého čtverce červenou a žlutou tečku a do pravého čtverce pouze jednu žlutou. Tím je ukončena tato etapa i v jazyku plánů. Dále se proces zopakuje s modrou krychlí. Celý proces je složen ze tří etap: postavení výchozí stavby (žlutý hranol 1×1×2), přiložení červené krychle (meziprodukt je „růžek“ ze tří krychlí) a přiložení modré krychle (výsledný hranol 1×2×2).

To, co jsme nazvali **animací**, je ve své podstatě jazyk, který popisuje určitý konstrukční proces rozložený do kroků tak, že konstruovaný objekt je nakreslen ve všech fázích konstrukčního procesu. S takovouto metodou rozkladu na jednotlivé konstrukční kroky, metodou animace, máme životní zkušenosti například při sestavování nábytku z jednotlivých dílů podle přiloženého obrázkového návodu. U kreslených filmů je animace použita pro popis děje a rychlý sled obrázků vytváří ve vědomí diváka dojem pohybu.

Zaznamenaný proces je konstrukcí krychlové stavby přikládáním krychlí po jedné tak, že každou krychli přiložíme ke stěně nějaké krychle resp. ke stěnám dvou nebo tří krychlí již hotové částečné stavby. Reprezentace procesu konstrukce sérií portrétů je prostřednictvím postupné tvorby fyzické stavby přeložena do reprezentace konstrukce sérií plánů. Tím, že to žák sám takto dělá, dochází v jeho vědomí nejdříve k asociaci mezi statickou reprezentací (série portrétů) a dynamickou reprezentací (reálné stavění), ve druhé části pak k asociaci mezi dynamickou reprezentací (reálné stavění) a statickou reprezentací (série plánů). Propojením těchto dvou představ se rozvíjí schopnost žáka pracovat pouze s obrázky (portrét – plán), přičemž fyzický model zůstane pouze v žákově představě. Jestliže žák bude řešit úlohy bez modelování pouze na základě posloupnosti instrukcí či návodů, úlohy také „vyřeší“, ale nevytvoří se v jeho mysli představy, které mu umožní řešit složitější úlohy.

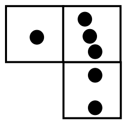
[3] V anglické literatuře bývá používán termín domino. Zde dáváme předost termínu bimino z důvodu odlišení od známé hry Domino.

Portrétová animace umožnila srozumitelně formulovat zadání úlohy. Její řešení bylo artikulováno novým jazykem – posloupností plánů. Posloupnost popisuje konstrukci stavby rozloženou do jednotlivých kroků. Tento jazyk budeme nazývat **animace plánů**.

Při popisu konstrukce složitější stavby, složené například ze šesti krychlí, se tento jazyk stává poněkud neobratný a zdlouhavý, neboť v každém kroku se musí zopakovat předchozí záznam a ten rozšířit o jednu novou tečku. ¨

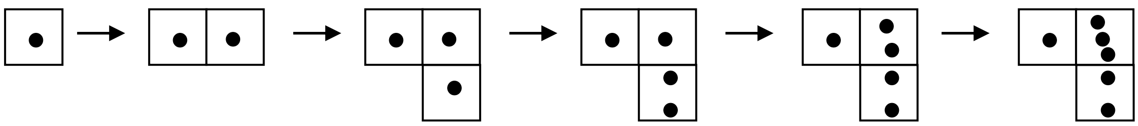
Úloha 3

Postav stavbu podle plánu na obrázku 7 a zaznamenej postup, jak jsi stavěl.



Obr. 7

Jeden z možných postupů, jak žáci úlohu řeší pomocí jazyka animace plánů, je na obrázku 8.



Obr.8

Jazyk animace plánů je dynamický a dynamika procesu konstrukce je vyjádřena šipkami v posloupnosti statických plánů jednotlivých meziproduktů. Šipku interpretujeme jako „vezmi další krychli“, ale to, jaký pohyb se s ní má udělat, kam se má přiložit, vyplývá vždy až z porovnání stávajícího a následujícího obrazu.

Uvedený nedostatek jazyka animace plánů a jeho těžkopádnost přirozeně vyvolává potřebu dalšího efektivnějšího jazyka přesněji popisujícího průběh procesu konstrukce. V našich experimentech, které jsme realizovali v ČR i v Německu, žáci, případně i vysokoškolští studenti, vytvořili několik vhodných jazyků pro popis konstrukce krychlové stavby. Pokaždé se popis konstrukce odehrával v běžném jazyku. Tato skutečnost nám ukázala, že nový znakový jazyk je didakticky vhodné zavádět ve dvou etapách. První etapa bude probíhat v situaci hry vysílač – přijímač, kdy experimentátor nebo učitel staví stavbu krok za krokem, jeden žák, vysílač, slovy popisuje proces stavění a druhý žák, přijímač, podle této instrukce staví kopii této stavby. Pro sehranou dvojici žáků může popis konstrukce stavby z obrázku 7 vypadat takto:

„Polož krychli. Jdi jeden krok na východ a polož krychli. Jdi jeden krok na jih a polož krychli. Jdi jeden krok nahoru a polož krychli. Jdi jeden krok na sever a polož krychli. Jdi jeden krok nahoru a polož krychli.“

Jakmile je tento jazyk žáky osvojen, můžeme přikročit ke druhé etapě, ke znakovému zápisu slovní instrukce. Podle našeho názoru je z hlediska didaktiky nejvhodnější jazyk, ve kterém je konstrukce zapsána pomocí znaků vyjadřujících činnost, a sice lineárně zleva doprava tak, jak jsme zvyklí u čtení. V našich experimentech žáci navrhovali různé znaky pro různé akce. Jedna možná volba je uvedena výše jako popis konstrukce, nebo konstrukční zápis stavby.

Kolika různými způsoby je možné danou stavbu postavit? To je další otázka, která nás přivede spíše do kombinatoriky než do geometrie. Úloha nepřináší další zvýšení náročnosti v oblasti geometrických představ, ale v oblasti jazyka, kterým lze výsledek popsat. Úlohu zde řešit nebudeme, ale studenti ji řeší.

8.4. Krychlové stavby - míra

Již v prvním ročníku mluvíme o dvou číselných údajích staveb:
1) o *objemu* (termín nepoužíváme, mluvíme o počtu krychlí potřebných na stavbu) a
2) o *počtu podlaží*.
Ve druhém ročníku, když „šijeme oblek na krychli“ je propedeuticky zaveden
3) *povrch tělesa*.
Slovo „patro“, které žák slyší častěji než slovo „podlaží“, nepoužíváme, protože skutečnost, že přízemí je nulté patro, bývá pro žáky matoucí. Například vícepatrovou budovou někteří žáci rozumí budovu mající aspoň první patro, ale jiní budovu, která má více než jedno patro.
(Výrok žákyně třetí třídy: „Když řeknu, že zde je více jablek, tak to je více než jedno, no ne?“) Podobně matoucí je skutečnost, že věž postavená ze 4 kostek má pouze 3 patra. Proto budeme používat méně běžnou terminologii podlaží. Stavbu nazveme:
1-podlažní, když nemá žádnou krychli ve 2. podlaží,
2-podlažní, když má aspoň jednu krychli ve 2. podlaží a žádnou krychli ve 3. podlaží,
3-podlažní, když má aspoň jednu krychli ve 3. podlaží a žádnou krychli ve 4. podlaží atd.

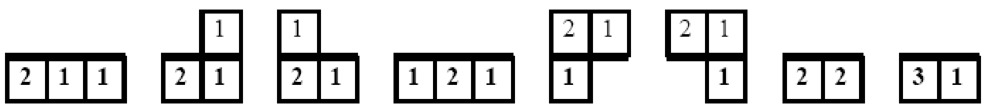
Dodejme, že i terminologie pomocí podlaží má své slabé místo. Když výtahem jedeme do sklepa, jedeme do nultého, nebo do méně prvního podlaží? Tyto situace při práci s krychlovými stavbami však nenastanou a nemusíme se jimi znepokojovat.

8.5. Chirurgie staveb

Když k existující stavbě „přilepíme“ další krychli, nebo dokonce jinou stavbu, nebo když z ní jednu, nebo více krychlí odebereme, případně pak tuto „amputovanou“ část „přilepíme“ na jiné místo stavby, děláme se stavbou chirurgickou operaci. Osvětlíme to ilustracemi.

Příklad 8.1. Dána je stavba **M** plánem: $\boxed{2}\boxed{1}$. Přidejte ke stavbě **M** jednu další krychli,vytvořte novou stavbu a popište ji plánem. Najděte všechny možnosti. Kolik jich je?

Řešení. Nejprve „lepíme“ novou krychli k dané stavbě v prvním podlaží. Zde máme celkem 6 možností; označíme je **M**$_1$ – **M**$_6$. Pak lepíme novou krychli ve druhém podlaží. Zde máme jedinou možnost, kterou označíme **M**$_7$. Konečně lepíme novou krychli ve třetím podlaží. I zde máme jedinou možnost, kterou označíme **M**$_8$. Viz obrázek 1.8.



M$_1$ **M**$_2$ **M**$_3$ **M**$_4$ **M**$_5$ **M**$_6$ **M**$_7$ **M**$_8$

Obr. 1.8

Vytvořili jsme tedy 8 staveb, ale jen 6 z nich je různých, neboť **M**$_2$ = **M**$_6$ a **M**$_3$ = **M**$_5$. Někdo může říct, že pro něj je **M**$_3$ ≠ **M**$_5$, protože když si k domu přistavím další pokoj na severní straně, je to jiné, než když jej přistavím na straně jižní. Jeho oponent bude argumentovat, že ve stavebnictví to tak může být, ale v geometrii se mezi shodnými útvary nerozlišuje.
Nakonec se objeví i názor třetí, že totiž stavby **M**$_3$ a **M**$_5$ jsou shodné, ale stavby **M**$_2$ a **M**$_6$ shodné nejsou, protože ani pravá a levá bota nejsou stejné. Oděv, který ušijeme na stavbu **M**$_2$, si stavba **M**$_6$ obléct nemůže. Na druhé straně ale, podívá-li se stavba **M**$_2$ do zrcadla, vidí stavbu **M**$_6$. Dodejme, že taková dvě tělesa, která sice nejsou zcela stejná, ale jedno je zrcadlový obraz druhého, nazýváme *nepřímo shodná*. Podobně nepřímo shodné jsou rovinné útvary, které jsou vzájemně osově

souměrné, ale které nelze přesunout jeden do druhého, aniž bychom ten útvar zvedli z roviny do prostoru. Například šlápoty pravé a levé boty jsou nepřímo shodné. Dodejme, že v diskusi popsané výše je jedna sporná myšlenka, ke které se vrátíme později.
Je možné, že diskuse o tom, zda je různých staveb 6, nebo 7, nebo 8 vznikne mezi žáky ve třídě spontánně. V tom případě učitel diskusi pouze moderuje a sám se k žádnému názoru nepřikloní. Diskusi ukončí konstatováním, že podle stavbařského názoru je hledaných staveb 8, podle geometrického názoru jich je 6 a podle přísně geometrického názoru jich je 7. Žákům ponechá možnost zvolit si to hledisko, které se komu nejvíce zamlouvá. Pak ale každý žák musí svoje hledisko důsledně uplatňovat i u dalších úloh. Různost názorů nebude mít dlouhého trvání, protože se brzy dopracujeme k pojmu tělesa a tam již stavbařské vidění zanikne.
Když taková diskuse mezi žáky ve třídě nevznikne, není nutné ji navozovat, protože se problém shodnosti a různosti těles brzy opět objeví.

Úloha 8.1. Řekneme, že dvě stavby jsou navzájem *příbuzné,* když můžeme přesunutím jediné krychle z jedné získat druhou. Najděte všechny dvojice navzájem příbuzných staveb mezi stavbami **A** až **E**. Každá ze staveb **A** až **E** je složena ze 4 krychlí. Zjistěte, zda je relace *příbuznosti* relací transitivní; tj. zjistěte, zda z toho, že stavby **X** a **Y** jsou navzájem příbuzné a též **Y** a **Z** jsou navzájem příbuzné, nutně vyplývá, že i stavby **X** a **Z** jsou navzájem příbuzné.

[Řešení Ú1.10. Stavba **D** není příbuzná se stavbami **A** a **C**. Každé dvě ze staveb **A**, **B**, **C** a **E** jsou navzájem příbuzné. Relace příbuznosti tranzitivní není, protože **C** a **B** jsou navzájem příbuzné i **B** a **D** jsou navzájem příbuzné, ale **C** a **D** nejsou navzájem příbuzné.]

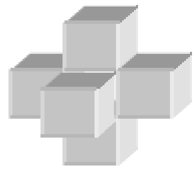
Úloha 8.2. Najděte všechny stavby, které lze získat ze stavby **A** tím, že jednu krychli ze stavby odebereme („amputujeme“) a přiložíme ji na jiné místo.

[Řešení Ú1.11. Odebrat můžeme pouze horní krychli, nebo dolní boční krychli. Odebereme-li dolní krychli, existuje jediné místo, kam ji můžeme přiložit, abychom vytvořili novou stavbu – nahoře. Tím vznikne 4-podlažní věž 4 . Odebereme-li horní krychli, vzniká situace vyřešená v příkladu 1.1.]

Výzva 1.3. Vytvořte pro žáky gradovanou sérii úloh podobných jako je Úloha 8.2. Zaznamenejte různé řešitelské strategie žáků. Například to, jak se žák přesvědčí, že opravdu našel všechny hledané stavby.

8.6. Krychlová tělesa

Krychlová stavba není geometrický, ale stavitelský pojem. Krychlovou stavbu vnímáme ve vztahu s pojmy *vodorovný* a *svislý*, které patří do stavebnictví, nikoli ale do geometrie. Když odhlédneme od těchto směrů, dostáváme objekt světa 3D, který nazveme *krychlové těleso*. Když 4-podlažní věž, kterou můžeme zapsat plánem $\boxed{4}$ položíme, dostaneme 1-podlažní stavbu $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$, která se od předešlé výrazně liší. Jako krychlová tělesa jsou tyto objekty stejné, přesněji shodné.
Každá stavba může být tělesem. Těleso se však stavbou stává, až když jej postavíme na „podlahu“ a žádná krychle nezůstane „viset“ ve vzduchu. Přitom ne každé těleso se tak postavit dá. Tedy ne každé krychlové těleso může být i stavbou.



Úloha 8.3. Najděte krychlové těleso, které nemůže být stavbou.

[Řešení Ú8.3. Viz například těleso o objemu 7 na obrázku Ř 1.6]

Úloha 8.4. Díváme-li se na 11 krychlových staveb **A**, **B**,… **I**, **K**, **L** (stavbu **J** zatím neuvažujeme) jako na krychlová tělesa, zjistíme, že je jich pouze 10. Proč?

Obr. Ř1.6

[Řešení Ú8.4. Stavby **H** a **L** představují stejné těleso v různých polohách.]

Úloha 8.5. Které z krychlových těles **A**, **B**, …, **I** popisuje tato konstrukce:

(a) □ ≡ □ ≡ □ → □ ;
(b) □ ← □ ≡ □ ↓ □ ↑≡ □ → □ ;
(c) □ ↑ □ → □ → □ ↓ □ ↓ □ ≡ □ ↑ ↑ □ ← □ ← □ ?

[Řešení Ú8.5. Je to krychlové těleso (a) **A**, (b) **F**, (c) **J**$_2$.]

Úloha 8.6. Když z popisu konstrukce (c) v předcházející úloze vypustíme jeden znak „□“, dostaneme popis konstrukce tělesa **J**$_1$. Který znak máme vypustit?

[Řešení Ú8.6. Je to osmý znak □, který leží mezi znakem ↑↑a znakem ←.]

Výzva 1.4. Vytvořte pro žáky gradovanou sérii úloh podobných jako je Úloha 8.6. Zaznamenejte různé řešitelské strategie žáků. Například to, jak se žák přesvědčí, že opravdu našel všechny hledané stavby.

V předešlé úloze jsme viděli, že krychlové těleso je možné zapsat popisem konstrukce. Jak ale takové těleso zapsat plánem? Nad touto otázkou se zamýšlí následující ilustrace.

Příklad 8.2. Na obrázku 1.9 jsou zapsány plány těles **B**, **D** a **F**. Vysvětlete, čím se plán tělesa liší od plánu stavby.

Řešení. Na plánu stavby do každého okna půdorysu píšeme, kolik zde stojí krychlí. Na plánu tělesa zapíšeme každou krychli tělesa číslem, které ukazuje, ve kterém podlaží je daná krychle umístěna.

Úloha 8.7. Najděte z těles **A** – **M** dvě taková (ne nutně různá), že jejich slepením vznikne další těleso z této skupiny.

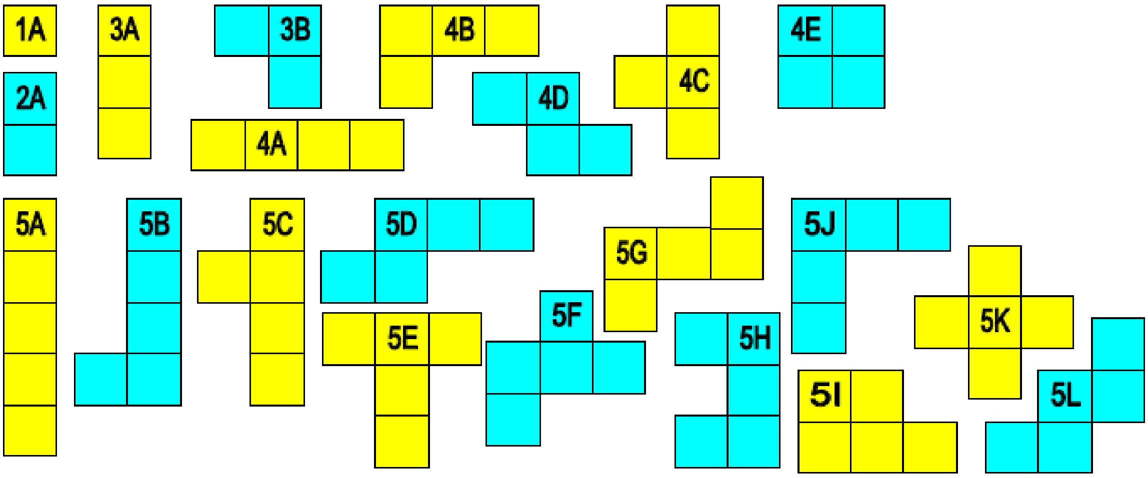
[Řešení Ú8.7. **M** ⊕ **M** = **K**, **M** ⊕ **D** = **L** = **H**, **A** ⊕ **M** = **G**]

Úloha 8.8. Které z těles **A** – **M** lze vytvořit slepením (a) dvou (b) tří shodných krychlových těles?

[Řešení Ú8.8 (a) V úvahu přicházejí pouze tělesa se sudým objemem, tedy tělesa s objemem 4 (**A**, **B**, **C**, **D, E**), s objemem 6 (**F**, **I**, **K**) a objemem 10 (**J**$_2$). Slepením dvou těles typu $\boxed{1}\boxed{1}$ lze vytvořit tělesa **A**, **B**, **C** i **D**. Slepením dvou těles typu **M** lze vytvořit těleso **K**. To je vše.
(b) V úvahu přicházejí pouze tělesa s objemem 6 (**F**, **I**, **K**). Z nich každé lze slepit ze tří těles typu $\boxed{1}\boxed{1}$.]

8.7. Sítě krychle

Hlavní didaktický cíl: Propojení prostoru a roviny.
Vymezení 1.2. *Polymino* je útvar, který je vytvořen slepováním shodných čtverců tak, že se slepují vždy celé strany k sobě a čtverce se nepřekrývají. Slepením *n* čtverců vytvoříme *n-mino*.
Budeme tedy mluvit o 3-minu neboli *triminu*, 4-minu neboli *tetraminu*, *pentaminu, hexaminu*, atd.
Seznam všech *n*-min pro *n* = 1-5 je uveden na obrázku 1.4.



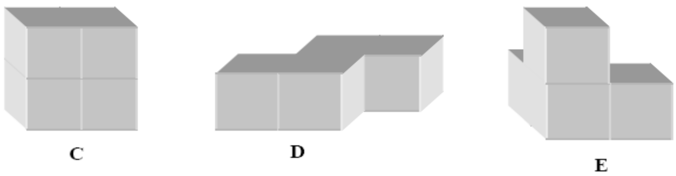
Několik úloh o sítích.

Úlohy 8.9 a 8.10 REZERVA

8.8. Úlohy

Úloha 8.11. Stavba **A** je nakreslena v pravém nadhledu. Nakreslete ji v levém nadhledu.. Stavba **B** je nakreslena v levém nadhledu. Nakreslete ji v pravém podhledu.

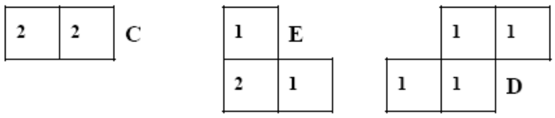
Úloha 8.12. Stavbu **C**, **D** i **E**, která je popsána portrétem (obr. 1.5), reprezentujte: fyzickým modelem, plánem, třemi průměty i popisem konstrukce.



Obr. 1.5

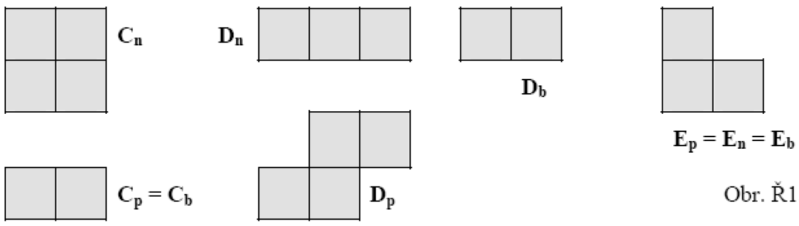
[Řešení Ú8.12. Všechny tři krychlové stavby jsou plánem znázorněny na obr. Ř 1.1a a třemi průměty na obrázku Ř 1.1b.

Jejich popis konstrukce je například



Obr. Ř1.1a

C: □ → □ ≡ □ ← □ ;
D: □ → □ ↑ □ → □ ;
E: □ ← □ ↑ □ ↓ ≡ □.]

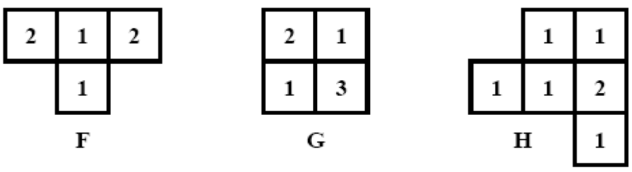


Obr. Ř1.1b

Komentář. Půdorys a bokorys stavby **C** je stejný. Všechny tři průměty stavby **E** jsou shodné. Popis konstrukcí není dán jednoznačně. Konstrukci například stavby **C** lze zapsat také takto: **C**: □ ← □ ≡ □ → □]

Výzva 1.1. Připravte a realizujte experiment s cílem dát náznak odpovědi na některou z otázek:
1+2+3) Jsou žáci v prvním/druhém ročníku schopni porozumět 1) plánu stavby, 2) zápisu stavby pomocí tří průmětů, 3) popisu konstrukce stavby?
4+5+6) Co je pro žáky snazší 4) postavit stavbu podle plánu, nebo k dané stavbě vytvořit plán? 5) postavit stavbu podle tří průmětů, nebo k dané stavbě vytvořit tři průměty? 6) postavit stavbu podle popisu konstrukce, nebo k dané stavbě vytvořit popis její konstrukce?

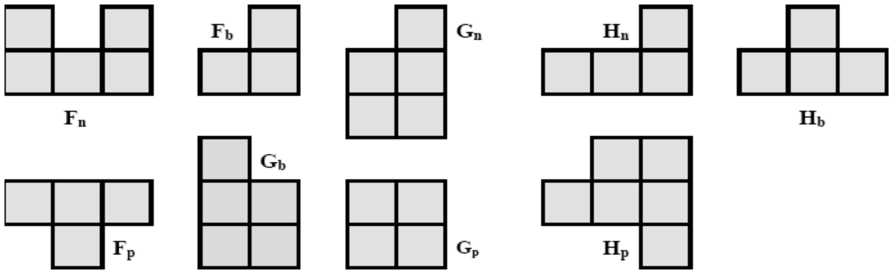
Základem takového experimentu je přesný scénář, ve kterém jsou jasně formulovány



úlohy, pomocí nichž budeme hledat odpovědi na naše otázky. Dříve než zahájíte experimenty, napište své očekávání o jeho výsledku.

Úloha 8.13. Každou ze staveb **F**, **G** i **H**, které jsou na obrázku 1.6 popsány plánem, reprezentujte: fyzickým modelem, portrétem, pomocí tří průmětů i popisem konstrukce.

Ob. 1.6



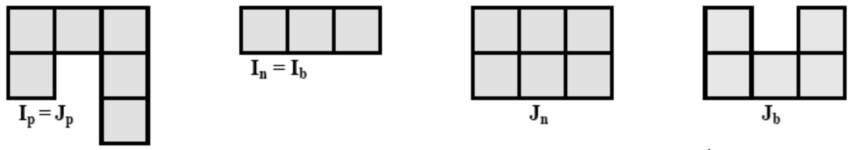
[Řešení Ú1.3. Na obrázku Ř 1.2 jsou stavby znázorněny třemi průměty.

Obr. Ř1.2

Jejich popis konstrukce je například

F: □ → □ ↓ □ ↑→□ ≡ □ ← ←□; **G**: □ → □ ↑ □ ← □ ↓ ≡ □ ↑→ □ ≡ □;
H: □ → □ ↑ □ → □ ↓ □ ↓ □ ↑≡ □.]

Úloha 8.14. Stavbu **I** i **J**, která je na obrázku 1.7 znázorněna třemi průměty, reprezentujte fyzickým modelem, portrétem, plánem i popisem konstrukce.



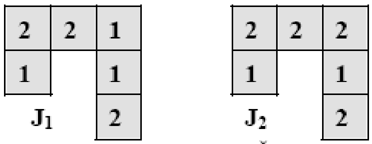
Obr. 1.7

Půdorys obou staveb je stejný, tedy $\mathbf{I_p} = \mathbf{J_p}$. Nárys a bokorys stavby **I** jsou stejné, tedy $\mathbf{I_n} = \mathbf{I_b}$.

Úloha 8.15. Jedna ze staveb F, G, H, I a J není popsána jednoznačně. Zjistěte která a najděte všechny stavby, které uvedenému popisu odpovídají. Pokuste se sami vytvořit nejednoznačný popis stavby některým z uvedených výše způsobů popisu.

[Řešení Ú1.5. Je to stavba **J**, přesněji stavby **J**. Jsou dvě. Označíme je $\mathbf{J_1}$ a $\mathbf{J_2}$. Stavby jsou popsány plánem na následujícím obrázku Ř1.3:

Objem stavby $\mathbf{J_1}$ je 9 (krychlí), objem stavby$\mathbf{J_2}$ je 10 (krychlí).]

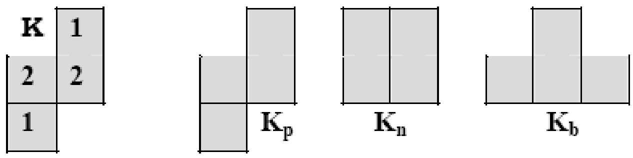


Obr. Ř1.3

Úloha 8.16. Stavbu K i L, která je dána popisem konstrukce, reprezentujte fyzickým modelem, portrétem, popište ji pomocí tří průmětů i plánem.

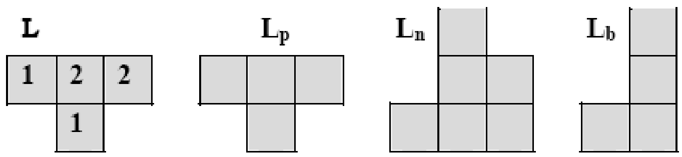
K: □ ↑ □ → □ ↑ □ ≡ ↓ □ ← □ **L**: □ ↑ □ → □ ←← □ → ≡ □.→ □ ≡← □

[Část řešení je na obrázcích Ř1.4 a Ř1.5.]



Obr. Ř1.4

Úloha 8.17. Vytvořte všechny 1-podlažní stavby s objemem 4 a každou zapište plánem, popisem konstrukce i třemi průměty.



Obr. Ř1.5

[Řešení Ú1.7. Jedná se o 5 staveb. Jejich půdorysy jsou tetramina 4A, 4B, 4C, 4D a 4E (viz obr. 1.4). Příslušné popisy konstrukcí mají následující tvar.

4A: □ → □ → □ → □ ; 4B: □ ↑ □ → □ → □ ; 4C: □ → □ ↑ □ ↓ → □ ;
4D: □ → □ ↓ □ → □ ; 4E: □ ↓ □ → □ ↑ □]

Úloha 8.18. Vytvořte všechny 2-podlažní stavby s objemem 4 a každou zapište plánem, popisem konstrukce i pomocí tří průmětů.

[Řešení Ú1.8. Uvažujeme pouze o stavbách s objemem 4. Jediná stavba, jejíž půdorys je monomino, má 4 podlaží, a tedy do našeho seznamu nepatří. Jediná stavba, jejíž půdorys je bimino a která má jen 2 podlaží, je stavba **C** (obr. 1.5). Existují právě dvě různé 2-podlažní stavby, jejichž půdorys je trimino 3A (obr. 1.4), a právě dvě různé 2-podlažní stavby, jejichž půdorys je trimino 3B (obr. 1.4). Popis konstrukce první dvojice staveb je: □ → □ → □ ≡ □ a □ → □ → □ ≡ ← □ ; druhou dvojicí jsou stavby **B** (obr. 1.1) a **E** (obr. 1.5). Popis konstrukce těchto staveb je: □ → □ ↑ □ ≡ □ a □ → □ ↑ □ ↓ ≡ □ .]

Úloha 8.19. (a) Vytvořte všechny 3-podlažní a 4-podlažní stavby s objemem 4 a každou zapište plánem, popisem konstrukce i pomocí tří průmětů. (b) Vytvořte všechny 9-podlažní a 10-podlažní stavby s objemem 10 a každou zapište plánem, popisem konstrukce i pomocí tří průmětů.

Výzva 1.2. Připravte a realizujte experiment, jehož cílem bude zjistit, co dělá žákům druhého/třetího ročníku nejvíce potíží, když mají stavbu zapsánu jedním jazykem, napsat pomocí jiného jazyka. Konkrétně:
1) stavbu, která je zapsána plánem, zapsat trojicí průmětů,
2) stavbu, která je zapsána plánem, zapsat popisem konstrukce,
3) stavbu, která je zapsána trojicí průmětů, zapsat plánem,
4) stavbu, která je zapsána trojicí průmětů, zapsat popisem konstrukce,
5) stavbu, která je zapsána popisem konstrukce, zapsat plánem,
6) stavbu, která je zapsána popisem konstrukce, zapsat trojicí průmětů.
Dříve než experiment spustíte, napište své očekávání o jeho výsledku.

Dále jsou vybrány úlohy o krychlových tělesech z textu k Úvodu do studia matematiky (Sestavil M. Hejný).

2. 21 Pyramida má v první vrstvě 16 krychlí, ve druhé vrstvě má 9 krychlí, ve třetí vrstvě má 4 krychle a ve čtvrté, poslední vrstvě má 1 krychli. a) Jaký je viditelný povrch této pyramidy? b) Kolik krychlí nutno mít na postavení takové pyramidy, jejíž první vrstva má 144 krychlí?

2. 22 Kolik existuje různých krychlových těles vytvořených ze tří krychlí? Všechna tato tělesa nakreslete a najděte jejich povrch, jestliže hrana krychle je 1 dm.

2. 23 Ze 4 krychlí o hraně 5 cm postavte dvoj-podlažní krychlové těleso, jehož povrch je 450 cm^2. Kolik takových těles existuje? Zapište všechna tato tělesa pomocí plánu.

2. 24 Ze 4 krychlí o hraně 5 cm postavte krychlové těleso, které má tuto vlastnost: těleso můžeme vložit do krychlové krabice ABCDEFGH o hraně 10 cm tak, že jeden vrchol tělesa padne do vrcholu A, a jeden do dipodálního vrcholu bodu G. Najděte všechna taková různá krychlová tělesa.

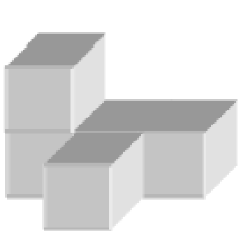
2.38.-2.40. Kolik různých kvádrů lze vytvořit z *n* jednotkových krychlí? Pro každý kvádr zjistěte jeho povrch. Tělesa nakreslete. (38) $n = 12$, (39) $n = 20$, (40) $n = 27$.

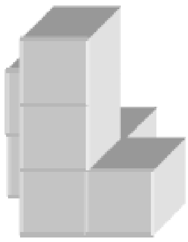
2.41. Ze 150 jednotkových krychlí je postavena věž o rozměrech 1x1x150 m^3. Její povrch je 602 m^2. Je možné ze všech těchto krychlí vytvořit kvádr, jehož povrch je menší než 200 m^2? Ze 150 jednotkových krychlí vytvoříme kvádr. Jaký je jeho nejmenší možný povrch?

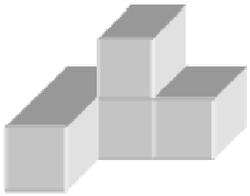
Vymezení. Dvě tělesa jsou přímo shodná, jestliže můžeme jedno přemístit do druhého. Dvě tělesa jsou nepřímo shodná, jestliže je můžeme dát do takové polohy, že jsou rovinově souměrná (jedno je zrcadlový obraz druhého). Dvě tělesa nazveme shodná, jsou-li ať již přímo, nebo nepřímo shodná.

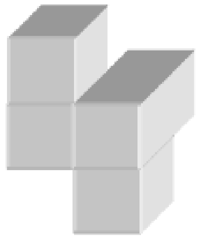
Poznámka. Například levá a pravá bota jsou nepřímo shodné. Dvě stejné levé boty jsou přímo shodné a dva stejné krychle jsou přímo i nepřímo shodné.

11.01-11.04. Na obr. 11.6 (A, B, C, D) jsou nakreslena čtyři KT. Na obr. 11.7 (a, b, c, d, e) jsou plány pěti KT.


Obr. 11.6 A


Obr. 11.6 B


Obr. 11.6 C


Obr. 11.6 D

	2		1	1-3		1.2	1			2	1-3		1	1,2	1
2,3	1,2			2			1-3	1			1		1		

Obr. 11.7 a Obr. 11.7 b Obr. 11.7 c Obr. 11.7 d Obr. 11.7 e

Vaším úkolem je k danému KT z obr, 11.6. přiřadit plán tohoto KT nakreslený na obr. 11.7
(01) KT z obr. 11.6 A, (02) KT z obr. 11.6 B, (03) KT z obr. 11.6 C, (04) KT z obr. 11.6 D.

11.05-11.10. K danému KT, které je popsáno plánem u obr. 11.7, přiřaďte obrázek tohoto KT nakreslený na obr. 11.7 (05) KT z obr. 11.6 a, (06) KT z obr. 11.6 b, (07) KT z obr. 11.6 c, (08) KT z obr. 11.6 d. (09) KT z obr. 11.6 e (10) Rezerva.

11.11-11.17. Nakreslete obrázek KT, které je popsáno ikonickým zápisem

(11) □↑□, (12) □←□, (13) □≡□, (14) □≡□≡□,

(15), □↑□↑□ (16) □←□↑□, (17) □→□≡□.

11.19 – 11.22. Které z KT z obr. 11.4 je popsáno daným ikonickým zápisem

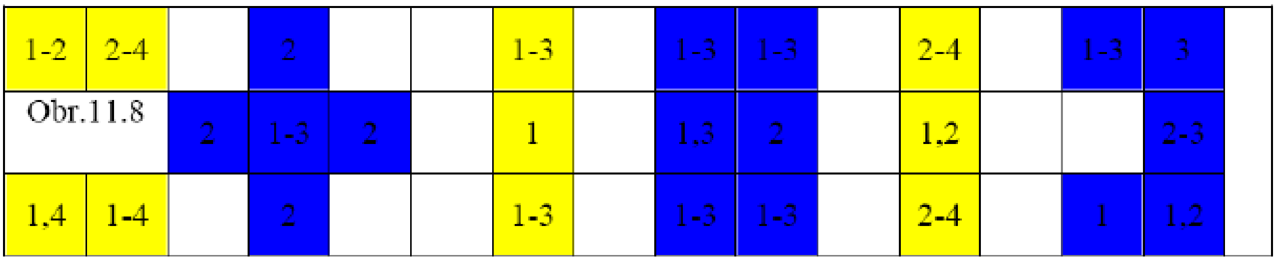
(19)* □↑□→□↑□↓≡□ , (20)* □↓□→□→□≡←□,

(21)* □↑□↑□→□≡←□←□↓□, (22)*. □←□↑□←↓□≡□.

11.25. Kótovaným průmětem zapište každé ze čtyř KT, nakreslených na obr. 11.6. Vysvětlete, proč jedno z těchto KT se tímto způsobem zapsat nedá.

11.26.* Když pro KT na obr. 11.5 uděláme půdorys, nárys a bokorys, zjistíme, že dostaneme tři stejné obrázky (jako je červený nárys na obr. 11.2). Je těmito třeni průměty KT popsáno jednoznačně? Víme jistě, že již žádné KT různé od KT z obr. 11.5 nemá stejné tři průměty?

11.31 – 11.40. Na obr. 11.8 – 11.14 jsou dány plány 7 různých KT. Nakreslete tři průměty KT daného plánem na (31) obr. 11.8, (32) obr. 11.9, (33) obr. 11.10, (34) obr. 11.11, (35) obr. 11.12, (36) obr. 11.13, (37) obr. 11.14.



Obr. 11.9 Obr.11.10 Obr.11.11 Obr.11.12 Obr.11.13 Obr.11.14

11.41 – 11.50. Ikonickým zápisem popište KT jehož plán je nakreslen na . (41)* obr. 11.8, (42)* obr. 11.9, (43)* obr. 11.10, (44)* obr. 11.11, (45)* obr. 11.12, (46)* obr. 11.13, (47)* obr. 11.14.