Didaktika matematiky s praxí II

11. přednáška

Míra

Darina Jirotková

Nejdříve připomenutí

Edukační principy

Jeden edukační princip při budování porozumění matematickým pojmům, vztahům, procesům a situacím, který je pro VOBS charakteristický, lze popsat jako radu učiteli:

- Když chceme žáka naučit nějaký geometrický pojem (například čtverec, lichoběžník, jehlan ale i obvod), musíme jej pomocí vhodných úloh vést postupně k tomu, aby

1) o objektu nejdříve nabyl dostatek zkušeností,

2) objekt poznal v činnosti,

3) o objektu diskutoval se spolužáky,

4) se sám pokusil pojem vymezit,

5) s pomocí učitele upřesňoval své vymezení až k formulaci dobré definice.

Jak zavedete pojem
střední příčka trojúhelníka, lichoběžníka, úhlopříčka obdélníka, …?

Jak prověříte, zda konkrétní žák 3. ročníku má pojem kosočtverec na úrovni osobnosti?

Které z následujících objektů jsou/nejsou **jevem průvodním** trojúhelníka a proč:

a) jeho ortocentrum,
b) jeho těžnice,
c) jeho kružnice vepsaná.

Příběh. Komentujte

3. ročník

Učitel: Zjistěte, kolikrát lze houbu na tabuli otlačit na tabuli tak, aby se otisky nepřekrývaly a pokryly celou tabuli.

Dívka - namočila houbu, od horního levého okraje tabule dělala mokré stopy jednu vedle druhé. Když došla na konec tabule, řekla 14 a pokračovala na dalším řádku.

Jiná dívka - vzala si houbu a šla s otisky po levém kraji tabule shora dolů. Zjistila, že zde je otisků 8 a půl. Pak řekla, že stačí vynásobit čísla 14 a 8,5 a máme výsledek. Pomocí kalkulačky zjistila, že je to 114 otisků.

První dívka však ještě nějakou dobu pokračovala dále a když došla do poloviny čtvrtého řádku, řekla: „A jo,“ a přestala dělat otisky.

Po hodině přišli dva žáci za učitelem s otázkou, proč stačilo vynásobit ta dvě čísla.

Co udělal učitel? Co popisuje příběh?

Vztahy mezi jevy průvodními umožňují definovat jednotlivé osobnosti a odhalovat geometrické zákonitosti.

Výzva

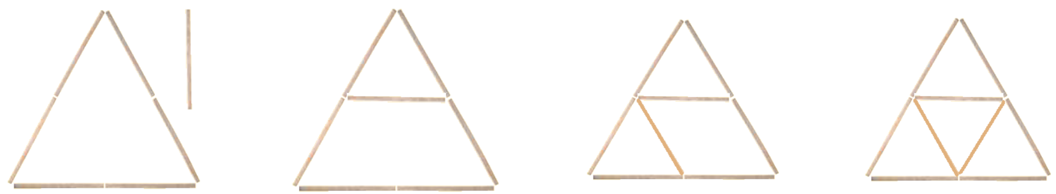
Předpokládáme, že pojmy trojúhelník a čtyřúhelník jsou již definovány.

Alespoň dvěma různými způsoby definujte pojem: pravoúhlý trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník tupoúhlý, čtverec, obdélník, kosočtverec, lichoběžník nerovnoramenný, deltoid.

U kterých definic jste použili jevy míry?

Úloha ze semináře

Vytvoř trojúhelník ze 6 dřívek. Přilož jedno dřívko tak, abys vytvořil další trojúhelník. Přilož dvě dřívka, abys vytvořil další dva trojúhelníky. Přilož tři dřívka a vytvoř další čtyři trojúhelníky.



Jaké jevy míry zde jsou přítomné?

Obvod, Trojúhelníková nerovnost - vazba, Střed strany –v činnosti, Délka střední příčky, Shodnost, podobnost trojúhelníků, obsah,

Nové pojmy – lichoběžník, kosočtverec

RVP

V tematickém okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* žáci

učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev.

Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.

Cílové zaměření vzdělávací oblasti

Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:

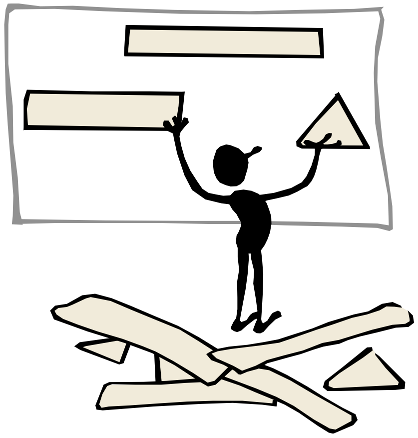
- využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace

Očekávané výstupy – 2. období

Žák

- *sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran*
- *určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu*

Poznávání tvarů, jejich vlastností a vztahů, to je jeden proud školské geometrie.



Druhým proudem školské geometrie je **oblast míry**.

Na 1. st. se žák setkává jmenovitě s:

- délka (**délka úsečky, obvod obrazce**, kostra mnohostěnu),
- **obsah (obrazce**, povrch tělesa),
- objem (tělesa)
- míra úhlu

Podle učitelů (výzkum GAČR) – koncepty obsah a obvod je **kritické místo** matematiky 1. st. ZŠ

Příčiny?

- Neodděluje se budování **konceptu** obsah a obvod od uvedení **vzorce** jako návodu na výpočet obsahu či obvodu.

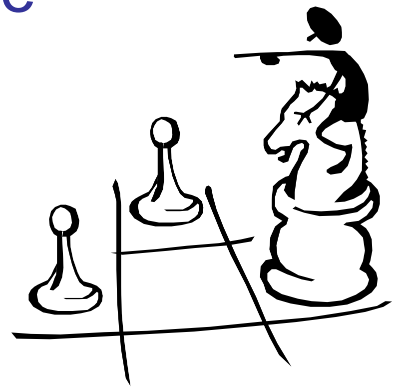
(viz například obvod trojúhelníku v učebnici Alter, 4. ročník, 2. díl, s. 46)

v učebnicích - mnoho rámečků s nápisem „Zapamatujte si“, „Připomeňte si“, vzorce vizuálně zdůrazňovány rámečky a **tučným písmem**

Znalost vzorce má vést k porozumění pojmu.

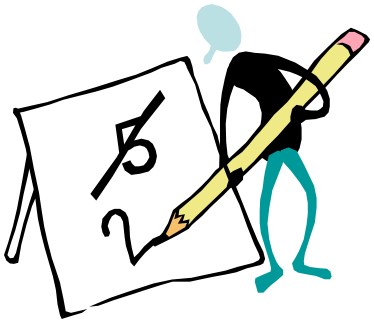
Jenže vzorec obvykle ani není potřeba - učebnice zásadně pracují s obrazci, u kterých jsou zadány délky všech stran - stačí porozumění pojmu obvod.

Lze najít pokyny: „Při výpočtu obvodu obrazce si napiš nejprve vzorec a do něj dosaď daná čísla.“ (Alter, 5. roč., 1. díl, s. 34)



K čemu to vede?

Další možná příčina problémů:



- je předložen vzorec, tj. algebraicky vyjádřená rovnost po jedné, dvou motivačních úlohách, a
- zcela chybí vyvolání **potřeby algebraického jazyka**, tj. potřeby popsat obecnou situaci, vyslovit tvrzení, např. ***Pro všechny*** *obdélníky platí …,*

ALE taková potřeba ani na této úrovni není.

Jak budete reagovat jako učitel 1. st. ZŠ?

„Žáci z 1. st. neumí geometrii," tvrdí učitelka 2. st.
A co neumí?
„Neumí ani vzoreček pro obsah obdélníka,"
A umí ten obsah určit jinak?
„To ano, ale vzorec neumí."

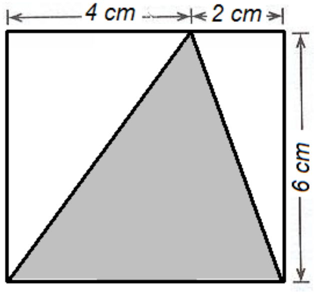
Další možná příčina problémů:

neporozumění písmenkům ve vzorci ⇒ projevuje zejména u složitějších vazeb později na 2. stupni, například u Pythagorovy věty či obsahu a objemu složitějších útvarů a těles.

Úloha z TIMSS pro žáky 8. ročníků, tj. 14-15 let a jejíž úspěšnost řešení českých žáků 8. ročníků této úlohy byla silně podprůměrná jak ve srovnání s výsledky ostatních zemí, tak i v rámci ČR.

Na obrázku je uvnitř čtverce vybarvený trojúhelník.

Jaký je obsah vybarveného trojúhelníka?



$S = a \cdot b \cdot c$
$S = 6{,}3 \cdot 7{,}2 \cdot 6$
$S = 272{,}16\ cm^2$

$S = a + b + c$
$S = 6 + 6 + 6$
$S = 18 cm^2$

$S = a^2 \cdot b^2$
$S = 6^2 \cdot 2^2$
$S = 36 \cdot 4$
$S = 144$

$S = a \cdot v_a = 6 \cdot 6 = 36\ cm^2$

- Není zdůrazňováno, že vzorec vyjadřuje **vazbu** mezi několika parametry.

Např. $S_{\Delta ABC} = a \cdot v_a / 2$

Vzorec je vnímán **procesuálně**, jako návod …., ale ne jako **koncept -** popis vazby mezi jistými parametry nebo průvodními jevy obrazce.

Další překážkou pro porozumění pojmu obsah a obvod - **verbální jazyk**

- Zvuková podobnost nových slov
- Odlišný význam v hovorovém jazyce a jako geometrický termín. (například anglický termín „face“).

Obsah – hovorový jazyk: obsah lahve, obsah knihy, obsah motoru, obsah kapsy, …

Obsah zahrady v hovorovém jazyce ?

plocha, výměra.

Obvod – hovorový jazyk: obvod pasu, stromu, elektrický obvod, klopný obvod, rezonanční obvod,

také správní území – volební, soudní, městský, zdravotnický obvod (obvodní lékař)

Uveďte

další slova, jejichž význam jako geometrických termínů a jako slov v hovorovém jazyce se značně liší.

(vrchol, stěna, podstava)

Vazba mezi obsahem a obvodem

Představa, že pokud mají obrazce stejný obsah (obvod), musí mít i stejný obvod (obsah).

Jak tato představa vzniká? Pro jaké obrazce platí?

Vazbu žáci analogicky přenášejí i na obdélníky, trojúhelníky apod. a i dále na vazbu mezi povrchem a objemem ve 3D.

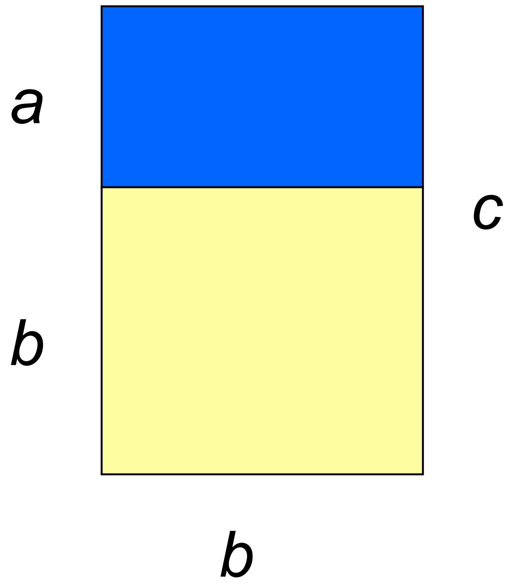
Jak ji nabourat?

Úlohy na provázání obsahu a obvodu

m - modrý obdélník, ž – žlutý čtverec,

c – velký obdélník

a, b, c, Om, Ož, Oc, Sm, Sž, Sc



Úlohy na provázání obsahu a obvodu

1. Najděte dva mnohoúhelníky se stejným obsahem a různým obvodem.
2. Najděte dva mnohoúhelníky se stejným obvodem a různým obsahem.
3. Jedním střihem rozstřihněte čtverec a z dílů sestavte (ne)rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, …..

Porovnejte obvody, obsahy.

Na představy o pojmu míra je vázáno i učivo o **jednotkách míry** a o převodech jednotek.

Jak zajistit porozumění předpon mili-, kilo-, centi-, …, ?

Jaké máte zkušenosti s převodem jednotek?

Historie – mnoho různých jednotek, vázaných na velmi konkrétní představy.

Jednotky délky (mm, cm, dm, m, km) - většině žáků problémy nedělají, protože se používají v životě.

Jednotka objemu litr také není problém

jednotky s mocninou, jako dm^3, bývají pro mnoho žáků záhadné.

Nejhorší je situace s jednotkou obsahu. Standardní jednotka cm^2 nebo m^2 je náročná - používá mocninu.

V učebnicích F volena jednotka „čtvereček“ (na čtverečkovaném papíře), „kachlík“ se znakem □.

Ohlasy učitelů na tuto jednotku jsou příznivé. Nedělá potíže, žáci jí rozumí.

Výzvy např. *narýsuj čtverec, změř jeho strany*

nezakládají dostačující žákovské zkušenosti s obvodem čtverce.

Jde o plnění instrukcí, chybí motivace, prostor pro spekulace a diskuse žáků.

Kritika „tradičního“ přístupu spočívá zejména v tom, že matematické pojmy jsou žákům předkládány bez předchozí propedeutiky, bez dlouhodobého budování žákovských zkušeností. Geometrické vztahy, vzorečky, jsou žákům nabídnuty po jedné, dvou ukázkách a žáci jsou vedeni k jejich zapamatování.

Vyučování by mělo

- od začátku vycházet z už existujících zkušeností žáka,
- zkušenosti dětí rozšiřovat, takže časem získávat zkušenosti již ve škole,

vždy trochu „nabourat“ tak, aby

- vyvolalo touhu a potřebu reorganizovat a restrukturalizovat staré a novou zkušenost, aby byly zase v souladu,
- dávat dětem silný motivační zážitek a radost z učení (mluvíme o zkušenostním, zážitkovém učení) .

Budování pojmů míry v duchu VOBS

S jakými prekoncepty žáci přichází do školy?

Používají děti jednotky míry?

Jaké a odkud je znají?

Jaké problémy můžou řešit bez jednotek a kdy je potřebují?

Ukázky

Ad 1) o objektu nejdříve nabyl dostatek zkušeností,

Žáci nejdříve přicházejí do styku s pojmem (objektem, vztahem, situací, procesem) - řeší úlohy v mnoha různých kontextech, v různých prostředích a pokud možno úlohy manipulativní.

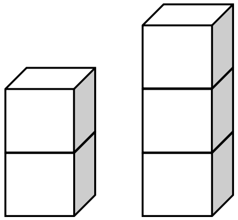
Žáci si tak budují si zásobu izolovaných modelů daného pojmu, tj. zásobu různých konkrétních zkušeností, budují a rozvíjí si tak své prekoncepty, své první představy o pojmech.

Ještě není na pojem zaměřena pozornost.

- **propedeutika pojmu** (vztahu, procesu, situace)

Krychlové stavby

Ú: Postav z kostek věže podle obrázku.

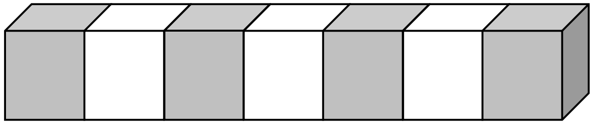


Ú přispívá do schématu:

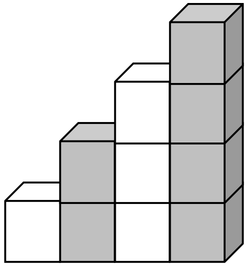
krychle, krychlová stavba, hranol, výška a objem

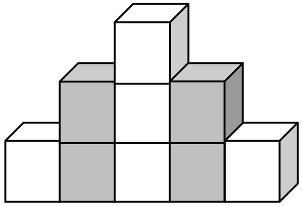
Další úlohy:

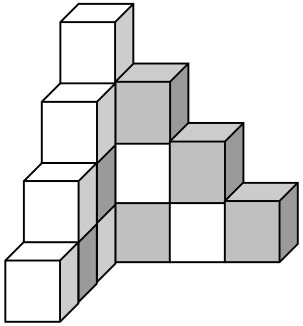
- Postav vláček (+rytmus, parita čísla)



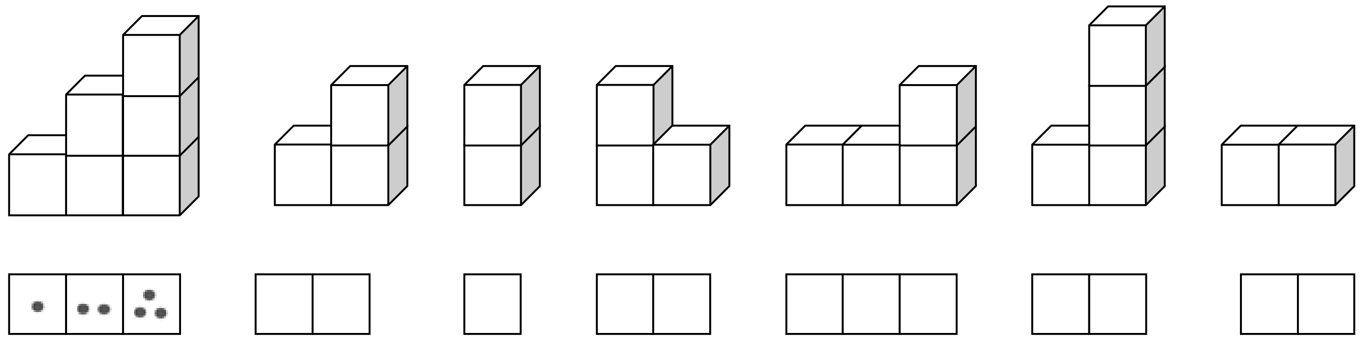
- Z kolika krychlí/kostek? Kolik podlaží?







Typy úloh: Nakresli plán stavby. Zapiš, kolik má stavba podlaží. Přiřaď k sobě plán a stavbu. Vytvoř stavbu podle plánu. Vytvoř stavbu ze 6 krychlí a zapiš její plán.

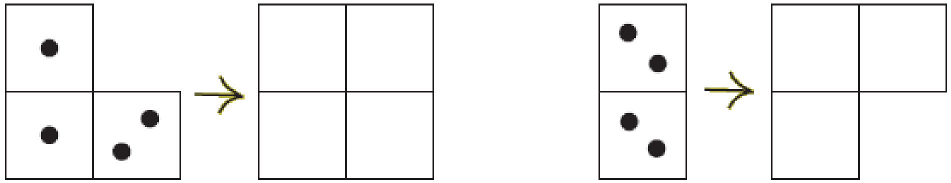


Počet krychlí stavby, počet teček v plánu = objem

počet podlaží, nejvyšší počet teček v jednom čtverci = výška stavby.

Zkušenost - dvě různá tělesa mohou mít stejný objem.

Ú. Vytvoř stavbu, přelož jednu krychli a doplň její plán.



- zkušenost s tím, že jestliže změníme tvar stavby tak, že přemístíme jednu nebo více krychlí, její objem se nezmění.

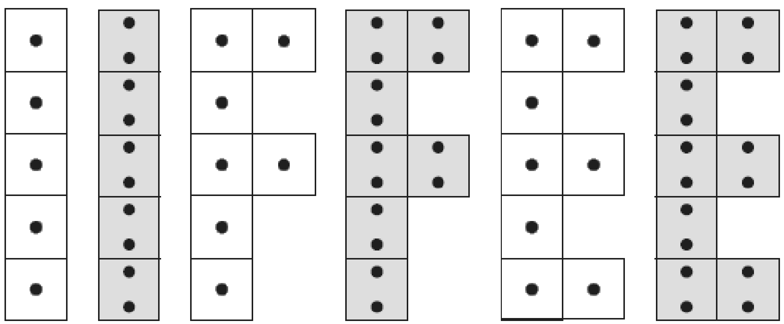
Tedy poznávají různé mnohostěny se stejným objemem.

Později k tomu přibude ještě sledování dalších dvou metrických vlastností mnohostěnu, a to **povrchu** a **kostry** (tj. součet délek všech hran).

Schéma **výška tělesa** je obohacováno o zkušenosti s měřením vlastní výšky, porovnáváním výšek několika žáků, zkoumáním, zda jsou vyšší hoši nebo dívky třídy.

Vše dosud uvedené se odehrává v 1. roč.

Ú. Vytvoř nejdříve bílou stavbu I. Zjisti, z kolika krychlí se skládá. Zapiš číslo do tabulky. U dalších staveb postupuj stejně.



	I	F	E
Počet krychlí ve stavbě	5		

- evidence tabulkou

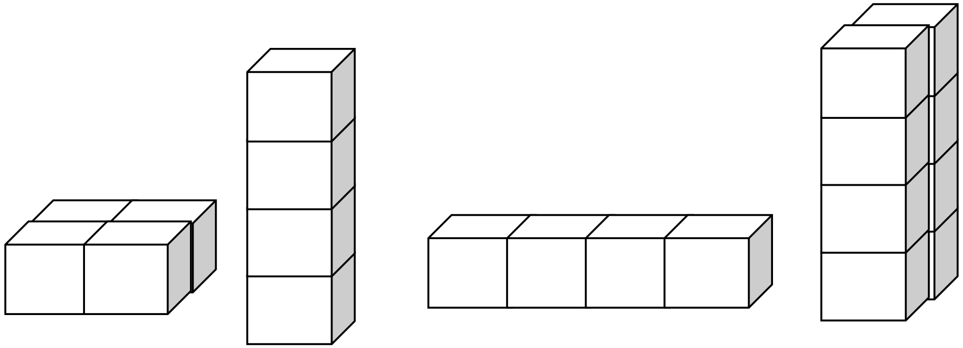
Ú. Nakresli plán jednopodlažní stavby ze 4 krychlí. Kolik takových plánů dokážeš nakreslit?

+ kombinatorika a shodná zobrazení ve 3D

Ú. Kolik různých trojpodlažních věží umíš postavit z jedné krychle bílé, jedné červené a jedné modré.

Ú. Sova

Jisté typy KS se pojmenují názvem geo. tělesa, **kvádr** a žáci zjišťují jejich rozměry. Kvádr jako krychlová stavba se pro žáky stává generickým modelem kvádru, počet podlaží výškou, počet krychlí, ze kterých je vytvořen, objemem.



Ú. Kolik různých kvádrů můžeš vytvořit ze 6, 7, 9, 12 krychlí.

Ú. Podstavou kvádru z krychlí je obdélník o rozměrech 3×2. Obsah jedné boční stěny je 10 □. Jaká je výška kvádru?

Ú. Jedna stěna kvádru má obsah 20 cm^2 a druhá stěna má obsah 15 cm^2. Jaký je obsah třetí stěny? Urči rozměry kvádru.

Ú. Podstavou hranolu je čtverec s obvodem 12 cm. Celková délka všech hran hranolu je 44 cm. Jaká je výška hranolu?

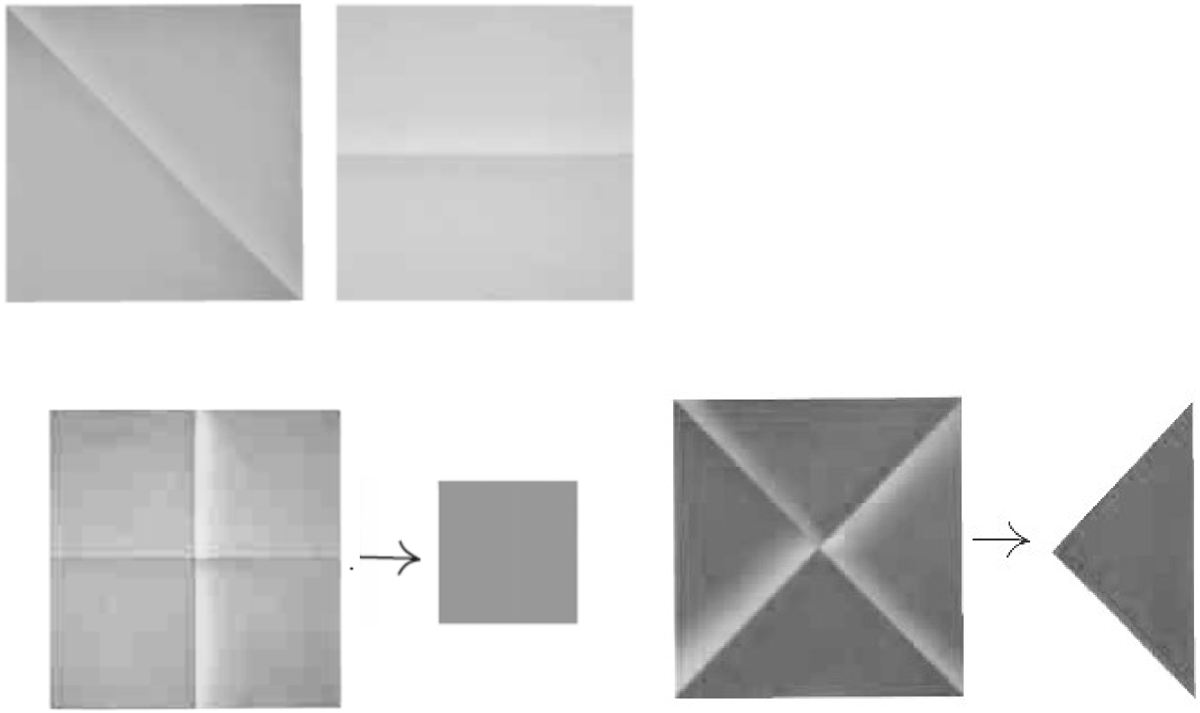
Ú. Řekni, co všechno musíme změřit na válci (krabička lentilek, puk, váleček na těsto), abychom uměli podle naměřených čísel vymodelovat stejný válec z plastelíny.

Ú. Jak bys změřil velikost koule?

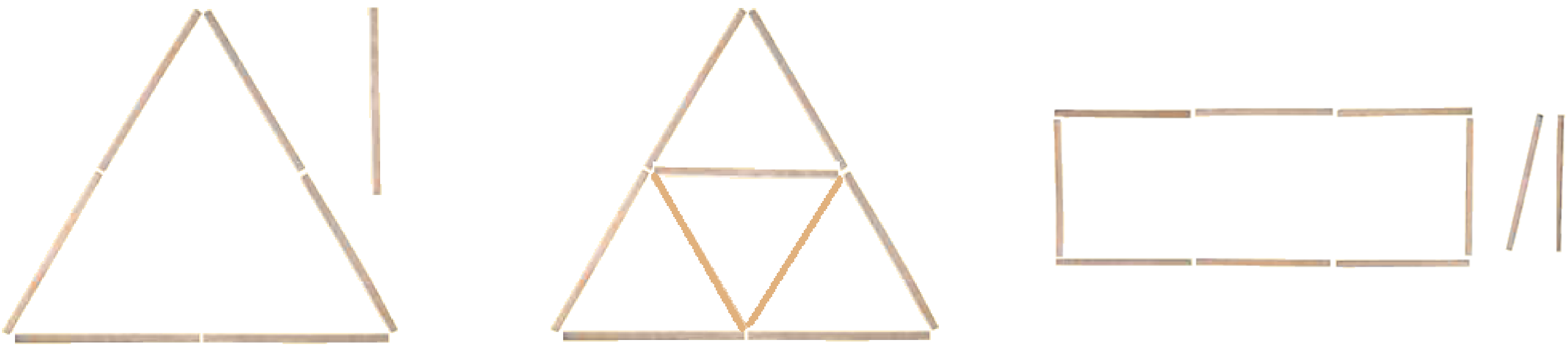
Ú. Co všechno musíš na jehlanu/kuželi změřit, abys mohl vyrobit podle naměřených hodnot stejný jehlan/kužel? Jak změříš výšku jehlanu/kužele?

V 5. ročníku se začne mluvit o *objemu a povrchu kvádru* a evidují se rozměry kvádru. Zavedou se jednotky míry a precizuje se pojem *kostra*. Objem se dává do souvislosti s rozměry kvádru.

Prostředí 2D geometrie: Origami, neboli překládání papíru

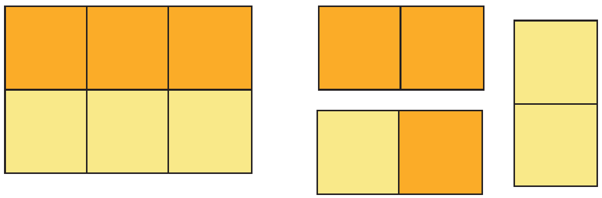


Dřívka



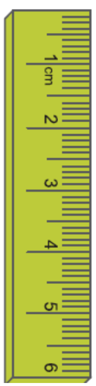
Jednotky míry jsou vázány na předmětné představy – v souladu s historií (ve starém Egyptě, loket, stopa, palec,…)

Parkety + další

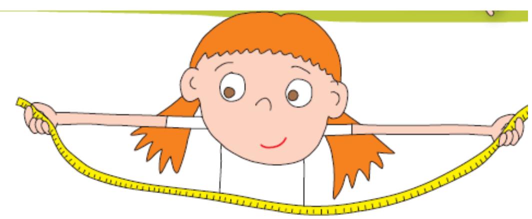


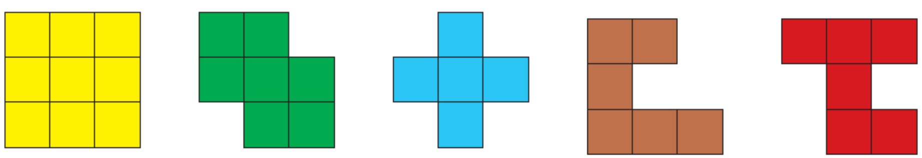
3 Nakresli podlahu o rozměrech 4 × 4 a pokryj ji parketami , , , , tak, že parketa a) , b) , c) sousedí s ostatními parketami.

3 Doplň tabulku.



obvod					
obsah					

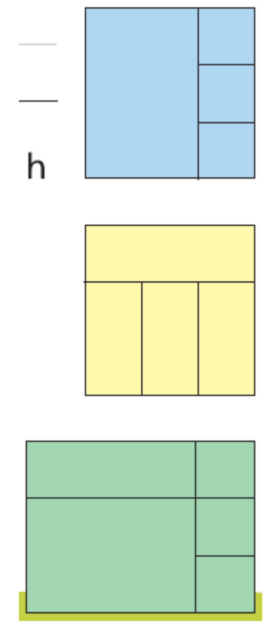




Kolik je v modrém obrázku obdélníků ze 2 kachlíků?
Kolik ze 3? Kolik ze 4? atd.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
MODRÁ											
ŽLUTÁ											
ZELENÁ											

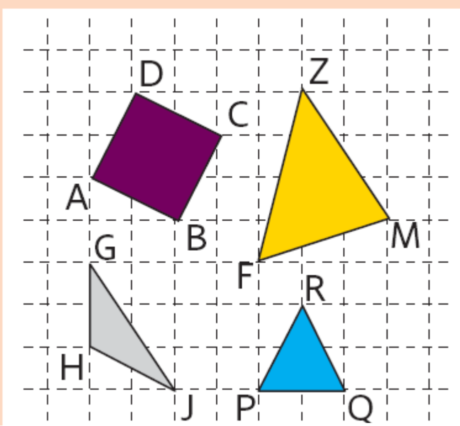
h



1 Doplň tabulku.

obvod						
obsah						

Čtverečkovaný papír



Zjisti, která z úseček je delší:

a) AB, nebo FM; b) FZ, nebo PQ; c) PR, nebo QR; d) HJ, nebo MZ; e) GJ, nebo FZ.

2 Čtverec ABCD s obsahem 4 □ je rozdělen na čtyři trojúhelníky – ABE, AEF, ECF a AFB:

a) Přerýsuj obrázek do čtvercové mříže.

b) Zjisti obsah každého trojúhelníku.

c) Změř v milimetrech obvod každého trojúhelníku.

d) Zapiš trojúhelníky pomocí šipek.