Pracovní materiál – Zpracoval M. Hejný 2015

Čtenář se seznámí s některým ať již tradičním, nebo novým didaktickým tématem hlouběji. Kostru výkladu tvoří příběhy a komentáře.

První volím jev struktury budovaný nástrojem *izomorfizmu*, neboť mohu vycházet z materiálů a zkušeností získaných na letní škole Pytagoras 2002.

IZOMORFIZMUS JAKO STRUKTUROTVORNÝ NÁSTROJ

1. FORMULACE PROBLÉMU

Řekne-li se v matematice slovo *struktura,* vybaví se nám v mysli nejspíš grupa, okruh, svaz, vektorový prostor, nebo jiná algebraická struktura. Nebo též struktura reálných čísel, struktura geometrie budované na pojmu souměrnosti, topologie jako název pro spojité struktury apod. Rozhodně je tento pojem v naší mysli vložen do oblasti vysokoškolské matematiky, té kterou jsme se učili v architektuře axiomy – definice – věty – důkazy.

Tato studie je věnována strukturám, které se objevují ve vědomí individua, zejména žáka základní školy, a dokonce ve vědomí dítěte předškolního věku, jako jistá *organizace* souboru blízkých pojmů (objektů, jevů, situací, procesů). Kostrou této organizace je množina *kauzálních vztahů*, jimiž jsou uvedené pojmy propojeny.

Příkladem struktur, s nimiž se žák setkává v běžném životě, jsou struktury popisující tok času (24 hodin dne, 7 dnů týdne, nebo 12 měsíců roku s jejich cyklickým uspořádáním), nebo soubor místností bytu ve kterém dítě žije s jejich geometrickým rozmístěním, nebo struktura školy (ředitel, zástupci, třídní učitel, učitel, žák třetí třídy, žák první třídy, …). Tyto struktury vznikají ve vědomí dítěte a žáka zcela spontánně a jejich růstu významně přispívají situace, kdy dochází ke srovnávání dvou myšlenkově blízkých struktur. Například rozložení místností v bytě si dítě uvědomí nejlépe tenkrát, když začne tuto situaci srovnávat s bytem, ve kterém bydlí babička, nebo kamarád, a konstatuje, že „u nás má dětský pokoj jen jedny dveře“.

Cílem našich úvah je další poznávání procesu zrodu, růstu a rozvoje jak matematických, tak i nematematických struktur a poznávání toho, jak k tomuto procesu přispívají zkušenosti získané porovnáváním dvou blízkých si struktur.

2. POROVNÁVÁNÍ DVOU BLÍZKÝCH STRUKTUR

Při porovnávání dvou objektů, situací, událostí, souborů, … naši pozornost upoutá hledání stejností a růzností. Poznání pak formulujeme soudy typu „hlas těch lidí je k nerozeznání stejný, ale chůze je hodně odlišná“. Upřesňujeme, čeho se stejnost/různost týká, někdy i míru této stejnosti/různosti.

Matematici přistupují ke stejnosti a různosti striktně. Například na odlišení toho, zda jsou dva trojúhelníky „zcela stejné“ nebo „mají stejný tvar ale jinou velikost“ používají matematici dvě různá slova: shodnost a podobnost. Chtějí-li matematici vyjádřit stejnost přirozených čísel ve smyslu „dávají při dělení číslem *7* stejný zbytek“, použijí termín „kongruentní modulo *7*“.

K porovnávání struktur užívá matematika slov: izomorfizmus, homomorfizmus. Oba tyto termíny volně přeneseme do jazyka didaktiky matematiky a přidáme k nim ještě termín další – spřízněnost. Při vymezování těchto termínů použijeme dvě charakteristiky porovnávání dvou struktur: vzájemné přiřazování prvků a vnitřní organizaci společnou oběma strukturám.

Dvě struktury, které mají stejnou organizaci nazýváme *izomorfní.* Přitom se mohou v mnoha ohledech lišit. Například struktura místností našeho bytu a plán našeho bytu jsou zcela různé skutečnosti, ale o organizaci místností bytu dávají naprosto stejnou informaci. Když si osm žáků 5A zorganizovalo pingpongový turnaj, rozhodli se po vzoru Wimbledonu použít vyřazovací způsob. Před turnajem si nakreslili postupového pavouka a pak losovali umístění jednotlivých žáků do nástupních příček. Stejný turnaj si zorganizovalo i osm žáků 5B. Ač byly oba turnaje, pokud jde o hráče, zcela různé, organizace turnaje byla stejná.

Každý izomorfizmus má dvě složky. Složka *strukturální* je dána tím, že všechny vztahy platné v jedné z těchto struktur jsou platné i ve struktuře druhé. Složka *přiřazovací* je dána 1-1 značnou korespondencí mezi prvky jedné a druhé struktury.

Izomorfizmus není jediná forma příbuznosti dvou struktur. Je to forma nejtěsnější, neboť popisuje *stejnost* dvou struktur. Slabší než izomorfizmus je *homomorfizmus* struktur, který v největší možné míře zachovává složku strukturální a složku přiřazovací z korespondence 1-1 značné oslabuje na *n*-1 značnou. Například dvě školy, z nichž jedna má v každém z ročníků 1 až 8 po jedné třídě, a druhá má v každém z těchto ročníků dvě nebo tři paralelní třídy, nejsou izomorfní, ale jsou homomorfní. Všechny třídy 4. ročníku druhé školy se zobrazí na jedinou 4. třídu první školy.

Ještě slabší je takové propojení dvou struktur, které postrádá složku přiřazovací a složku strukturální zachovává pouze v jistém stupni. Takto propojené struktury nazývat *spřízněné.* Příkladem může být dvojice institucí: velká základní škola s 24 třídami a čtyřleté gymnázium se 7 třídami. I když počet tříd, učitelů, žáků, učeben, kabinetů, ... mají obě školy různý, obě školy mají učebny, sborovnu, třídy a třídní učitele, školníka, ... Podobně spřízněné jsou třípokojový byt a pětipokojový byt, nebo euklidovská planimetrie a sférická geometrie ap. Stěhuje-li se člověk z vesnice na jinou vesnici, bude jeho aklimatizace snazší než při stěhování se do velkoměsta. Dvě vesnice jsou z hlediska vzájemné spřízněnosti navzájem bližší než vesnice a velkoměsto.

Uchopení spřízněnosti bývá někdy velice těžké, protože jednotlivé případy vzájemně spřízněných struktur se mohou výrazně odlišovat. Jejich společným rysem je skutečnost, že každý, kdo se seznámil s jednou z těchto struktur rychleji pochopí i strukturu druhou.

První složitější struktura se kterou dítě začíná poznávat již ve dvou letech, je struktura rodinných vztahů, kterou nazveme RODINA. Na ni zaměříme pozornost v následujících pěti kapitolách.

3. PŘÍBĚHY O BUDOVÁNÍ STRUKTURY „RODINA“

Objekty struktury RODINA jsou tvořeny pojmy

matka, otec, bratr, sestra, babička, dědeček, teta, strýc, bratranec, ap. (1)

Příběh 1

Skoro tříletá Terka se po dlouhé době opět vidí s babičkou. Když slyší, že její máma osloví babičku „maminko“, ostře řekne „ty nie si žiadna maminka, maminka je iba moja maminka!“

Příběh 2

Skoro tříletý Ivan se ptá své mámy: „Proč má Barborka (děvčátko od sousedů) dvě maminky?“ Matka je překvapena a odpoví, že každý má jen jednu maminku, že nikdo nemá dvě maminky, že Barborčina maminka je teta Lenka. Ivan ale trvá na svém. Slyšel totiž, jak teta Lenka řekla Barborčině babičce „maminko“. Ivanova maminka se zasmála a chtěla vysvětlit Ivanovi, že babička Barborky je maminka její maminky. Když matka viděla hochovy rozpaky, dodala: „I naše pelhřimovská babička je moje maminka a naše smíchovská babička je tatínkova maminka“. Ivan nic neříkal, ale bylo vidět, že se cítí zaskočen, zmaten.

Příběh 3

Příběh obsahuje dvě epizody. Obě se týkají tříleté Jany Rosákové a pana Kamila Perného, staršího, stříbrovlasého muže. Kamilův syn, Aleš a jeho manželka Dana, jsou bezdětní. Při jedné návštěvě rodiny Perných u rodiny Rosákových se Jana zeptala Kamila, zda má babičku. On odpověděl: „Kdepak, ty obě mi zemřely již dávno, dávno. Jedna dokonce dříve než jsem se narodil“. Odpověď zjevně Janu velice překvapila, ale více se již nevyptávala.

Po odchodu návštěvy Janina maminka v rozhovoru s manželem řekla „Pan Kamil je hodný otec“. Tato věta vyprovokovala Janu k rozhovoru s mámou. Řekla, že strejda Kamil není otec ale děda a ptala se též na babičky dědy Kamila. Janina máma, která nám celý příběh vyprávěla, rychle pochopila příčinu nedorozumění. Jana „babičkou strejdy Kamila“ rozuměla „manželku dědy Kamila“, nikoli na jeho babičku. Maminka s Janou nejdříve probrala otázku, zda může být strejda Aleš tatínek, když nemá ani syna ani dceru. Ani pak ale Jana nechtěla považovat Kamila za otce, jen za dědu. Asi po týdnu však sama tuto novou koncepci přijala a chápala, že babička je mámina máma i že Kamil je otec Aleše. Janina maminka nám nedokázala říct kdy a jak došlo ve vědomí Jany ke změně chápání slov (1). Řekla jen, že tato změna byla definitivní.

Analýza příběhů

V prvním příběhu je Terka překvapena maminčiným oslovením babičky. Pro Terku slovo „máma“, použité v kontextu její rodiny, je vlastní podstatné jméno, tedy „Máma“. Toto egocentrické chápání bylo matčiným výrokem narušeno. Zde ale nešlo pouze o informační šum. Máma je pro dítě jeho životní jistota. A tato byla uvedeným oslovením zpochybněna. Odtud plyne agresivita Terky.

U druhého příběhu se Ivan dostává do podobné informační nejistoty, jenže tentokráte se nejedná o jeho mámu. Ivan je překvapivým použitím slova „maminka“ zaskočen, protože je přesvědčen, že v každé rodině je jediná maminka. Babičce nepřiznává roli matky.

Třetí příběh je v jistím smyslu inverzní k příběhu druhému. Ivan nebyl ochoten babičce přiznat roli matky a Jana prohlásí za dědečka muže, který nemá vnouče. Pro Janu je rodina vrstvena do tří generací: děti, rodiče, prarodiče. Aleš, byť bezdětný, je podle této klasifikace otcem a Kamil je dědeček, bez ohledu na to, že nemá vnoučata. Interpretace Jany není však až tak chybná, protože slovo „děda“ se běžně používá na označení starého muže.

Analýza nás vede k zobecnění konkrétních případů a k formulaci etapizace procesu.

4. ETAPIZACE PROCESU BUDOVÁNÍ STRUKTURY „RODINA“

Příběhy ilustrují počáteční stádium objevování struktury RODINA dítětem. V něm nacházíme dvě etapy a náběhy na etapu třetí. Etapy lze charakterizovat tím, jak dítě vnímá nejdůležitější termín této struktury, termín „máma“.

V první etapě je „máma“ = „moje máma“.

Ve druhé etapě je „máma“ jediná a ústřední osoba v rámci každé rodiny.

Ve třetí etapě je „máma (osoby X)“ relace a „máma“ je žena, která má aspoň jedno dítě. Tyto etapy podrobněji prozkoumáme a rozšíříme ještě o jednu další etapu.

První etapa poznávání struktury RODINA se omezuje na poznávání členů vlastní rodiny. Když se na roční dítě obrátíte s výzvou „Kde je maminka?“ otočí pohled k vlastní mámě. Podobně se dítě chová když se ptáme na tátu, babičku, ...Slova „máma“, „táta“, „babička“, „dědeček“ resp. „smíchovská babička“,… jsou jména konkrétních osob, jedinců. Měli bychom je psát „Máma“, „Táta“, … jako jména vlastní. Výjimku tvoří slova „bratr“ a „sestra“ v těch případech, kdy dítě má více sourozenců, protože tito jsou identifikováni křestními jmény. I když má dítě jen jednu sestru, rodiče ji oslovují jménem a tak slovo „sestra“ je jen náhradní označení pro jistou osobu[1]. Této první etapě můžeme dát jméno *individuální,* protože slova (1) označují individua.

Druhá etapa začíná poznáním, že i jiné děti mají mámu i tátu. Slova (1) používá Barborka

[1] Kolegyně M. Benešová mne upozornila na další možné výjimky. Například její vnuk ji oslovuje křestním jménem. Tyto případy nebudeme v naši úvaze diskutovat. Domníváme se však,.že jejich zkoumání může přinést další poznání do procesu tvorby struktury RODINA.

od sousedů k označení jiných lidí. Dítě poznává, že kromě „Mámy“ (rozuměj „moje máma“) existuje i „Barborčina máma“, „Radkova máma“, ap. Tak se přechodem do druhé etapy mění interpretace slov (1). Již to nejsou jména konkrétních osob, ale jména rodinných pozic. Slovo „máma“ v kontextu té-které rodiny označuje jedinou osobu, matku dětí této rodiny. V každé rodině existuje jediná máma a jediný táta, případně i babička/babičky, děda/dědové. Tato slova jsou rozložena do tří věkových kategorií, tří generací: děti, rodiče a prarodiče. Maminka patří do kategorie rodičů a dcera do kategorie dětí, proto maminka nemůže být dcerou. Podobně táta nemůže být synem a babička nemůže být maminkou – to by bylo proti referenčnímu rámci věkových kategorií dítěte.

Ivan z příběhu 2 je právě v této etapě vývoje. Ví, že teta Lenka je maminka Barborky, ale je překvapen tím, že babička Barborky je maminkou a zatím si neuvědomil, že i maminka může mít maminku. Ještě ostřeji kontrast mezi standardním a generačním chápáním termínů (1) vystupuje ve třetím příběhu, kde pro Janu je nepřijatelné označit staršího pána Kamila otcem a považuje jej za dědu i přes to, že tento muž nemá vnoučata. Tuto druhou etapu nazveme *generační,* protože slova (1) označují osoby určené generační klasifikací.

Jana se podle svědectví své maminky nakonec vyrovnala s tím, že i starý pán může být otec a nelpěla na generačním vnímání termínů (1). Posunula se do třetí etapy, v níž probíhá postupné odpoutávání se od referenčního rámce věkových kategorií a přijímání standardní interpretace rodinných termínů. Na konci této etapy již dítě ví, že slova (1) představují relace mezi dvěma členy rodiny. Proto nazveme tuto etapu etapou *relační.* Dítě, které se dobere k tomuto globálnímu poznání, dospívá v chápání struktury RODINA do „maturitního“ stádia.

Podle svědectví Janiny maminky proběhla u Jany relační etapa rychle, během jednoho týdne, možná dokonce jednoho dne. Jana již ví, že každý člověk má maminku i tatínka, ale ne každý má sourozence, nebo dceru nebo syna. Ví, že její tatínek je manželem maminky a tatínkova maminka je babička.

Poslední, čtvrtá etapa, kterou nazveme *strukturální*, je věnována rozvoji poznatků o této struktuře, obohacování struktury RODINA zejména o

- další pojmy (neteř, prastrýc, tchyně, synovec,...)
- uvědomování si různých obecně platných zákonitostí (každý člověk má dvě babičky, bratrova máma je i moje máma,...)
- poznávání rodin s nestandardními vazbami.

Rozklad poznávacího procesu struktury RODINA do čtyř etap je naším pokusem o poznání tohoto procesu. Čtvrtá etapa je asi příliš široká a další její zkoumání pravděpodobně povede k dalšímu jejímu rozkladu.

Je nesnadné experimentálně sledovat proces budování struktury RODINA ve vědomí daného dítěte. O technice takového sledování se zmíníme v dalším. Teď se ještě pokusíme doplnit naši analýzu o aplikace do didaktické oblasti.

Kolega I. Kupka nás upozornil na to, že ve francouzštině existují rodinné termíny, které v našich jazycích (čeština, slovenština) nenajdeme. Toto upozornění může být impulsem k dalšímu výzkumu: k jazykové komparativní analýze rodinných termínů v různých jazycích a k následnému experimentálnímu zkoumání, jak v jednotlivých jazykových prostředích děti utvářejí svoji strukturu RODINA.

Didaktické komentáře

A. Různá vyprávění dospělých lidí mohou působit jako podněty k budování struktury RODINA ve vědomí dítěte. Maminka může vyprávět například o tom, jak ji její maminka učila utírat nádobí (komentář dítěte: „to bylo tenkrát, jak babička byla maminkou“). U tohoto vyprávění se mohou objevit další důležité informace, které se týkají zákonitostí plynutí času, zejména poznání, že všichni lidi stárnou stejně rychle a věkový rozdíl dvou lidí je nezávislý na čase. Jestliže je dnes maminka od svého bratra, strejdy Ericha, starší o tři roky, bylo tomu tak i v době, když oba byli ještě dětmi.

B. Další činnost, vhodná pro rozvoj struktury RODINA ve vědomí dítěte je kladení otázek typu „Má tvůj bratr mámu? Kdo to je?“ nebo „Kolik dětí má tvůj táta? Kdo to jsou?“ nebo „Jak se bude jmenovat tvůj syn, když se provdáš za Matěje Bouzu?“ nebo „Za kolik let budeš stejně starý jako tvoje sestra Alenka?“

C. Když si povídáme s dítětem o rodinných vztazích, rozvíjíme nejen jeho představy o struktuře RODINA, ale i jeho relační myšlení. Edukačně účinné jsou hry v nichž se z panenek, plyšových medvídků, pejsků,… utvoří rodina ve které se postupně mohou objevit i vztahy jako teta, bratranec, strýc, synovec, apod. Zde dítě nejprve modeluje vztahy vlastní rodiny, až později zapojí fantazii a začne tento model obohacovat o pomyslné osoby, nejčastěji o své vlastní sourozence. Jednou jsme pozorovali, jak si skoro čtyřletá holčička, která k Vánocům dostala velikou panenku, s babičkou hrála na RODINU. Nová panenka byla maminkou této rodiny a další hračky dostaly funkci tatínka, dětí, babiček, dědečků, … Tato hra trvala několik dní a jak panenkovská rodina narůstala, začala si babička jednotlivé pozice plést a musel si to psát. Dívenka si ale všechno skvěle pamatovala, včetně jmen devíti dětí, které se v rodině postupně „narodily“.

D. Je jasné, že dítě, které najde zálibu v rodokmenech panovnických rodů, nebo tvoří rodokmen své vlastní rodiny, získá hluboký vhled do struktury RODINA.

E. Uvedený čtyř-etapový popis pronikání do struktury RODINA může být inspirací pro hledání etapizace jiných struktur, zejména struktur časových a topografických. Určitě zajímavá je struktura slovních rovnic uložená ve vědomí učitelů.

Ukončili jsme přípravné úvahy, jejichž cílem bylo ukázat na příkladě struktury RODINA, jak se struktura ve vědomí dítěte rodí, jak narůstá a jak se postupně konstituuje. Bylo by asi zajímavé sledovat tento proces u dalších struktur. Některé aritmetické struktury budou z tohoto pohledu zkoumány v dalším.

5. PŘÍBĚH O IZOMORFIZMU DVOU STRUKTUR TYPU „RODINA“

Našim dalším cílem je zkoumání procesu zrodu, narůstání a konstituování představ o izomorfizmu dvou struktur typu RODINA. Opět začneme příběhem.

Příběh 4

Pan Pokorný často rozmlouvá se svým osmiletým synem Emilem o různých věcech. Jednu takovou rozmluvu zahájil syn otázkou

Emil 1: Tati, a víš že Novákovic rodina je stejná jako naše?
Otec 1: Jak to myslíš Emile, stejná?
E2: No i voni mají starší holku a mladšího kluka, i my máme starší Radku. Já mám dvě babičky ale jen jednoho dědu i Jenda to má taky tak.
O2: No jo, ale oni bydlí na přízemí a my ve třetím patře.
E3: To se nepočítá. Jenom jako kdo tam bydlí. Rozumíš?
O3: No jo, to je zajímavé. (Otec uvažuje, jak k debatě vhodně přispět.) Ale oni mají Veronu (psa) a my jen kanára.
E4: (Po chvilce) No jo. Nejsme úplně stejní. Ale skoro stejní.
O4: Kdybychom to vzali bez zvířat, tak jsme stejní.

Analýza příběhu 4

Emil objevuje (možná svůj první) izolovaný model *izomorfizmu.* Jistě si již dříve všimnul stejnosti nebo různosti rozmístění nábytku v naši jídelně a jídelně u tety, stejnosti/různosti řazení aut na různých parkovištích, rozmístění lavic v různých třídách, stejnosti/různosti seskupení několika budov na sídlišti apod. V žádném z uvedených případů ale množina vazeb nebyla tak hustě vzájemně propletená jako je množina rodinných vztahů. Struktura RODINA je z hlediska hustoty sítě vazeb nejsložitější, neboť umožňuje skládání základních vazeb do složitých vazeb typu „syn otcova strýce“ apod.

Hoch si všimnul, že on i Jenda mají jedinou (starší) sestru, žádného bratra, jednu mámu, jednoho otce, jednoho dědečka a dvě babičky. Jiní jeho kamarádi to mají jinak. Tato shodnost se mu jeví zajímavá. Lze očekávat, že krátký rozhovor s otcem bude v budoucnu orientovat Emila k zvýšené citlivosti na stejnost/různost rodin a obohacování jeho zkušeností se separovanými modely izomorfizmu struktur RODINA.

Emil ví, že jak rodina Nováků (**N**), tak rodina Pokorných (**P**) má sedm členů a ti jsou si vzájemně přiřazeni: („N“ čteme „z rodiny Nováků“, „P“ čteme „z rodiny Pokorných“)

první babička N $\leftrightarrow$ první babička P, druhá babička N $\leftrightarrow$ druhá babička P,
dědeček N $\leftrightarrow$ dědeček P, otec N $\leftrightarrow$ P otec, máma N $\leftrightarrow$ máma P, (2)
dcera N $\leftrightarrow$ dcera P, syn N $\leftrightarrow$ syn P

První babičkou rozumíme matku matky, druhou babičkou matku otce.

Úvaha o špatném přiřazení pes N $\leftrightarrow$ kanár P vedla k vyloučení zvířat z množiny prvků rodiny. Emil mohl též obě zvířata vzít a vytvořit přiřazení zvíře N $\leftrightarrow$ zvíře P. Tím by se v každé rodině objevil prvek, který se žádným jiným prvkem není nijak vázán. To neudělal.

Emilem objevená stejnost rodin **N** a **P** není ještě izomorfizmem. Hoch vnímá stejnost rodin přes prizma generace dětí, která v jeho pohledu hraje významnější roli než obě generace další: a) u generace dětí uvažuje i o věkovém rozdílu hocha a dívky a u generací rodičů a prarodičů o věku vůbec nemluví, b) u generace rodičů a prarodičů nebere v potaz jejich vzájemné vazby; nevšímá si, zda jeho dědeček a Jendův dědeček jsou dědečkové ze stejné strany. (Jestliže totiž například dědeček P je otcem otce P a dědeček N je otcem matky N, pak rodiny **N** a **P** nejsou izomorfní ve výše popsaném smyslu.)

6. PROCES UVĚDOMOVÁNÍ SI IZOMORFIZMU DVOU STRUKTUR

Podívejme se nejprve na obě složky izomorfizmu, který objevil Emil.

Složka *přiřazovací* je popsána vztahy (2), které byly Emilovi zcela jasné.

Složka *strukturální* se týká organizace porovnávaných rodin a je dána vztahy typu „dědeček má manželku“, „jedna babička nemá manžela“, „maminka má dvě děti“, „tátova maminka má dvě vnoučata“, „otcova dcera má bratra“ atd.

Jakmile si dítě uvědomí složku přiřazovací i složku strukturální, má vytvořenu představu izomorfizmu. Tuto představu můžeme formulovat matematickým jazykem:

Mezi strukturami **N** a **P** je dáno vzájemně jednoznačné zobrazení. Přitom pro libovolné dvě dvojice vzájemně přiřazených prvků $N_1 \leftrightarrow P_1$ a $N_2 \leftrightarrow P_2$ platí, že vazba mezi prvky N_1 a N_2 je stejná jako vazba mezi prvky P_1 a P_2.

Představa o izomorfizmu struktur se ve vědomí dítěte tvoří po kouscích. Nejprve se objeví jen její část – některé prvky a některé vazby. Viděli jsme, že stejnost rodin, o které mluví Emil, se tedy netýká celých struktur, ale pouze těch rodinných vztahů, v nichž vystupují on a Jenda. Tuto stejnost můžeme nazvat *částečný izomorfizmus.* Právě taková příbuznost je první etapou budování pojmu izomorfizmu ve vědomí člověka.

Typickým rysem částečného izomorfizmu je rozostřenost hranic porovnávaných struktur. Dítě vnímá jisté prvky a jisté vazby zcela jasně, některé další evidentně nevnímá a některé vnímá jen povrchně, náznakově. Tak Emil jasně vnímá vše, o čem mluví: 7 členů každé z rodin i rodinné vazby těchto členů k sobě a Jendovi. Jasně ví, že patro bytu, ve kterém rodina bydlí do izomorfizmu nevstupuje (jeho reakce byla okamžitá), ale ve věci zvířat již jistotu nemá. I když o tom Emil nemluví, domníváme se, že si uvědomuje i některé další rodinné vazby, v nichž on nebo Jenda nevystupují. Například to že oba rodiče v obou rodinách jsou manželé. Je ale zřejmé, že si neuvědomuje vazby mezi rodiči a prarodiči.

Další etapa budování představy izomorfizmu spočívá v upřesňování představy částečného izomorfizmu. Dítě si postupně ujasňuje, které prvky do porovnávaných struktur patří a které nepatří a objevuje nové vazby mezi prvkami struktur. Někdy tento proces vede k zásadnější restrukturalizaci celé představy. Tedy budování izomorfizmu jde souběžně s budováním struktury, a to je jev, který dal název celé naší úvaze.

Úvahy o příbuznosti struktur jsou provázeny úvahami o různosti struktur. V příběhu 4 se o tom nemluví, ale z jiných našich experimentů můžeme soudit, že strukturální stejnost rodin **P** a **N** si Emil uvědomil až když uvažoval o dalších rodinách jejichž struktura byla odlišná od jeho rodiny. Hoch znal několik rodin a věděl, že každá má jisté uspořádání. Najednou uviděl, že rodiny **P** a **N** jsou uspořádány stejně.

Na závěr uvedeme ještě jednu rozšiřující myšlenku. Když se omezíme na evidenci počtu členů rodiny v generaci dětí (to číslo označme d), v generaci rodičů (označme r) a v generaci prarodičů (označme p), bude pro obě uvažované rodiny platit: $d = 2, r = 2, p = 3$. Stejnou číselnou charakteristiku má i rodina ve které jsou obě děti hoši, nebo dívky, nebo kde jsou dva dědečkové a jen jedna babička. Takové zobrazení rodiny na trojici čísel (d, r, p) má charakter homomorfizmu. Toto téma v našich úvahách dále nerozvíjíme, nabízíme je čtenáři.

Relace (1) lze různorodě vzájemně propojovat množinovými operacemi a skládáním. Například relace dítě je sjednocením relací dcera a syn (moje dítě to je moje dcera, nebo můj syn) a relace vnuk je složením relací dítě a syn (můj vnuk to je syn mého dítěte). Tato skutečnost dává bohaté možnosti pro využití struktury RODINA k tvorbě zajímavých úloh. Uvidíme to v následující kapitole.

7. DIDAKTICKÉ APLIKACE

Uvádíme komentovaný soubor úloh o rodinné struktuře. Jde o úlohy úspěšně použité při experimentálním vyučování na prvním stupni a v experimentech s těmi žáky mateřských škol, kteří již měli rozvinuté generační a částečně i relační chápání struktury RODINA.

Hned v úvodu považujeme za důležité upozornit na to, že diskuse o struktuře RODINA se žáky ve třídě může být věcí hodně choulostivou. Pro děti z neúplných nebo rozvrácených rodin může být toto téma traumatizující. Chceme-li ve třídě diskutovat rodinné vztahy, pak je k tomu účelu vhodné připravit genealogický strom některého panovníka, nebo známé osobnosti, nebo pouze smyšlené rodiny.

V individuálních debatách se dětmi 5 – 7 letými (mateřská škola a první třída) jsme mluvili pouze s dětmi ze „standardních“ rodin: 2 rodiče, aspoň 3 žijící prarodiče a většinou aspoň jeden sourozenec. Naše otázky se vztahovaly pouze k žijícím lidem. Například o babičkách jsme mluvili jen s dítětem, jehož obě babičky žijí, a otázku „Kdo je synem tvého otce?“ jsme nedali dívce, které nemá bratra. Bylo by zajímavé pokračovat v těchto experimentech i s dětmi z neúplných rodin.

Jak experimenty ukázaly, pro děti byly srozumitelnější. otázky začínající slovem „Má“ než otázky začínající slovem „Kdo?“ Proto jsme se ze začátku ptali „Má tvůj otec syna?“ a po kladné odpovědi jsme se zeptali „Kdo to je?“ Většinou ale druhou otázku nebylo nutné klást, protože dítě určilo hledanou osobu již v odpovědi na první otázku.

Když již dítě dobře odpovídalo na otázky typu „Má?“ Začali jsme se ptát „Kdo?“ a tento přechod způsobil změnu odpovědí pouze u jednoho velice teoreticky orientovaného hocha (7 let). Ten místo rodinných jmen, začal osoby identifikovat jejich občanskými jmény. Dokonce na otázku „Kdo je synem tvého otce?“ jmenoval plnými jmény svého staršího bratra i sebe.

Uvádíme ilustrace otázek kladených v těchto experimentech.

Kdo je matkou tvého bratra / tvé sestry?
Kdo je babičkou tvého bratra / tvé sestry?
Kdo je dcerou / synem tvého otce?
Kdo je synem / dcerou tvého dědy?
Kdo je vnukem / vnučkou tvé babičky / tvého dědy?
Kdo je bratr / sestra tvého otce?
Kdo je matkou tvého otce?
Kdo je dcerou / synem tvé babičky?
Kdo je manželem tvojí babičky?

Další typ otázek měl tvar „Někdo z vaší rodiny řekl bla-bla-bla. Kdo to byl?“ Výpověď označená zde bla-bla-bla byla postavena nejprve adresně. Například bla-bla-bla =

Moje dcera se jmenuje Michaela.
Moje manželka se jmenuje Eva.
Mám tři vnuky. Z nich nejstarší se jmenuje David.
Můj bratr se jmenuje Tonda.
Mám jednoho staršího bratra.

Po správné odpovědi „moje babička“ následovala doplňující otázka: „Jak se jmenují její další dva vnuci?“

Mnohé otázky měly více řešení. Například výpověď „Moje dcera se jmenuje Michaela“ může říct otec Michaely i její maminka. Jestliže dítě uvedlo jen jedno řešení, ptali jsme se někdy i na druhé řešení. Pro některé děti byly tyto otázky značně náročné a vyčerpávající.

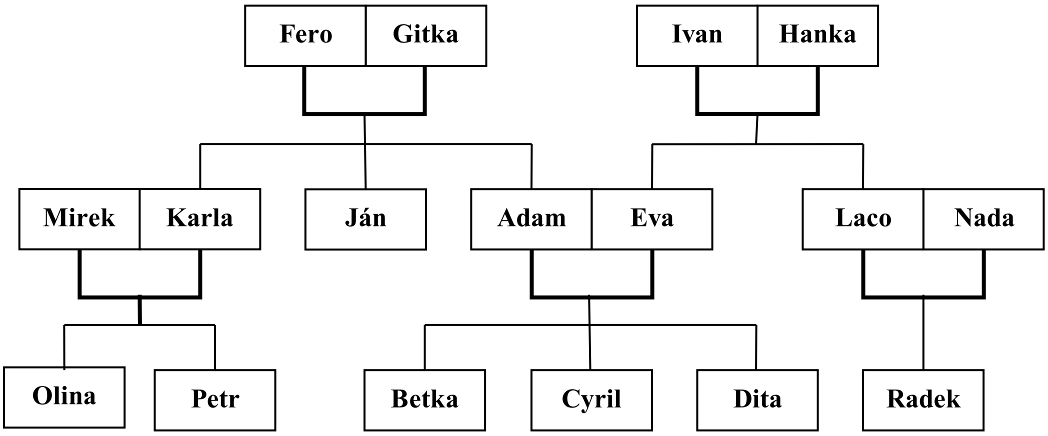
Starším žákům ve věku 8-10 let jsme dávali náročnější úlohy, které se nevztahovaly k žádné konkrétní rodině. Například hádanky typu:

- Dítě řeklo svému sourozenci „Mám více sester než ty.“ Lhalo, to dítě?
- Dítě řeklo svému otci „Ty máš syna, ale já nemám brata“. Lhalo, to dítě?
- Dítě řeklo své mámě „Já mám bratra, ale já nemáš syna“. Lhalo, to dítě?
- Lhala dospělá osoba, když řekla dívce „Ty jsi moje dcera, ale já nejsem tvoje máma?“

Hádanky se ukázaly jako náročné. Žáci je řešili pomocí modelů různých rodin a odpověď silně závisela od toho, jaký model byl zvolen. Například první úlohu vyřešil hoch (2. třída) z početné rodiny (měl 3 sestry a jednoho bratra, který byl ještě batole) velice rychle, ale jeho spolužačka, která měla jen jednu setru, po chvíli váhavě odpověděla „každá máme jen jednu sestru“. Výzva experimentátora, aby si zkusila představit jinou rodinu a jiné dítě ji uvedla do rozpaků.

Lepší porozumění těchto úloh jsme pozorovali až u žáků 3. ročníku a starších. Zde máme již i evidenci o reakci dětí z experimentálního vyučování. Ve 3. – 5. ročníku jsme někdy v průběhu 2 měsíců zveřejnili na nástěnce postupně asi 10 – 15 nových úloh o rodinných vazbách. Úspěšní řešitelé úloh pak svoje úvahy předvedli třídě. Pokaždé ale byl výklad žáka realizován na nějaké rodině, ať již existující, nebo smyšlené. V pátém ročníku již začali žáci uvažovat hlouběji: hledali všechna řešení a hledali též různé rodiny, aby přesně zjistili, jak odpověď na položenou otázku závisí od struktury rodiny.

Pro potřeby těchto úloh jsme si postupně vytvořili rozsáhlejší rodokmen (genealogický strom) tří rodin obsahující 17 osob. Rodina Dubových (A, B, C, D, E, F, G a J), rodina Lípových (I, H, L, N a R) a Bukových (K, M, O a P).



Jako ilustraci uvádíme několik úloh vztahujících se k uvedenému stromu.
Která osoba má nejvíce tetiček? (Teta = sestra rodiče.)

- Která osoba má dva bratrance/sestřenice? (Bratranec/sestřenice = osoba mužského/ženského pohlaví s níž mám společnou právě jednu babičku.)
- Babička vnuka osoby X je Hanka. Kdo je osoba X?
- Strýc bratrance osoby X je Laco. Kdo je osoba X? (Strýc = bratr rodiče)
- Bratr osoby X má 3 děti a sestra osoby X má 2 děti. Kdo je osoba X?
- Manžel setry osoby X má dva sourozence. Kdo je ten manžel?
- Osoba X řekla „mám dva syny a dceru Y“. Manžel osoby Y je nekuřák. Kdo je osoba X a kdo je osoba Y?
- Osoba X řekla osobě Y „ty máš dva strýce a jeden z nich je manželem mé tety“. Kdo je osoba X kdo je osoba Y? Kolik má úloha řešení?
- Existují na našem rodokmenu bratranci ve druhém kolenu? Jak máme pojem „můj bratranec ve druhém kolenu“rozumět? Je to „bratranec mého bratrance“, nebo muž s nímž mám společnou právě jednu prababičku“?

Zajímavou diskusi vyvolala jedna odpověď na otázku „Kolik členů našeho rodokmenu nese jméno Lípa nebo Lípová?“ Soňa (4. roč.) řekla, že teď jen 5, ale když se Olina vdá za Radka, bude jich 6. Proti této hypotéze se ozvaly dvě námitky. První se týkala toho, že jsou i jiné možnosti, například že se Lacovi a Nadi narodí další děti. To Soňa odmítla argumentem, který již dvakrát použil učitel: mluvíme o <u>našem rodokmenu</u> a nemůže jej doplňovat dalšími lidmi. Druhá námitka se týkala toho, že se lidi ze stejné rodiny nemohou vzájemně brát. Velice rušná debata na toto téma vedla k vyjasňování termínu „pokrevní příbuzní“.

S matematicky vyspělými žáky jsme prostředí struktury RODINA využili ke kultivování strukturálního a množinového myšlení. Výchozí situace byla následující: je dána konečná množina mužů **M** a konečná množina žen **Ž**. Na množině **R** = **M** ∪ **Ž** jsou definovány některé relace ze seznamu (1) případně doplněného o další termíny. Které další relace lze z těchto daných relací definovat? Přitom relace (1) odpovídají běžnému významu.

Formalizovaná situace v sobě skrývá pasti, které žáci postupně sami objevují a každý takový objev je krokem k hlubšímu chápání matematiky. Například objev, že zdánlivě evidentní pravda „vnuk = syn dítěte“ platí pouze v takové množině R, ve které je definován propojující prvek „rodič dítěte“ tj. „dítě prarodiče“. Kdybychom například z rodokmenu uvedeného výše vypustili osoby Adam a Eva, zůstal by Cyril vnukem Gitky, ale nebylo by jej možné definovat jako syna dítěte. Kolem této situace se v jedné třídě vedla dlouhá diskuse o tom, zda je taková „rodina“ vůbec reálně myslitelná. Zvítězil názor, že i zesnulí členové rodiny zůstávají nadále v genealogickém stromu rodiny.

Některé žáky překvapivé jevy ve struktuře RODINA inspirovaly k hledání vyložených anomálií. Například myšlenka, že vyděděním některého člena rodiny, může dojít k snížení počtu sourozenců některého člověka nenašla ve třídě dostatečný počet příznivců. Vedla však žáky k potřebě zavést pojem „normální rodina“, ze které byly vyloučeny všechny nepřirozenosti. Například byl vyloučen incest. Ale nejednotnost byla kolem toho, zda je nebo není povolen sňatek dívky s bratrancem ve druhém kolenu, nebo sňatek dívky s bratrem, který byl rodiči adoptován a podobné případy. Později bylo ustanoveno, že každý má právo definovat termín „rodina“ jak se mu zlíbí, ale jeho definice musí být nesporná.

Závěr kapitoly je vzpomínkou na J. Gatiala, jehož přátelství mne obohacovalo po mnoho let.

V době politického tání domluvil kolega Gatial s redakcí mládežníckého časopisu Prúd, že zde společně povedeme matematickou soutěž pro čtenáře. Soutěž Hľadáme fiškusa jsme vedli v létech 1967 a 1968. Jedna z úloh se týkala struktury RODINA. Uvádíme plné znění úlohy uveřejněné v čísle 7 časopisu Prúd, z roku 1968.

„Do redakcie prišlo asi sedemročné dievčatko a predstavilo sa nám takto: Volám sa Zuzka a poviem vám básničku

Dcéra tety Jána Zicha
Volá sa dnes Eva Tichá.
Otec Jána Zicha veru
Nemá, ani nemal dcéru.
Švagor otca mojej matky
Deduškom je malej Katky.

Okrem toho, čo prezradila Zuzka, oznámime vám, že v básničke je priamo menovaných nie viac ako 7 osôb. Menovaní sú napríklad Ján Zich, teta Jána Zicha, Zuzkina matka, otec Zuzkinej matky. Kvôli jasnosti ešte uvedieme, že ‚teta‘ je ‚sestra niektorého z rodičov‘, ‚švagor‘ je ‚buď brat manželky, alebo manžel sestry‘ a ‚deduško‘ je ‚otec jedného z rodičov’. Vašou úlohou je

1. Uviesť plné mená Zuzky i Katky
2. Zdôvodniť riešenie.

Pri riešení úlohy predpokladáme splnené všetky bežné vzťahy v rodine. Tak napríklad manželka po svadbe berie priezvisko manželovo, ktoré neskoršie dostanú všetky ich deti. Do manželstva vstupujú dvaja ľudia predtým nijako pokrvne neviazaní.“

Tím jsme ukončili zkoumání struktury RODINA. Další ilustrace pojmu izomorfizmus budou již ze školního prostředí a budou vloženy do více-méně známých matematických kontextů.

8. NÁSOBENÍ JAKO IZOMORFIZMUS

Izomorfizmus abelových grup f_2: $(Z,+) \to (2Z,+)$, $x \to 2x$, ve kterém se každé celé číslo zobrazí na svůj dvojnásobek, je příklad izomorfizmu, který se objeví například, když se děti řadí do dvojstupu. Když se na procházce potkají a spojí dvě třídy seřazené do dvojstupů, vznikne delší útvar. Jestliže třídy měly jedna *5* a druhá *6* dvojstupů, bude celkový počet dětí *2(5+6)*, nebo *2.5 + 2.6*. V obou případech je výsledek *22*, protože $f_2(5+6) = f_2(5) + f_2(6)$. Tedy: *5 + 6* dvojic je totéž jako *5* dvojic + *6* dvojic.

Zobecněním izomorfizmu f_2 je izomorfizmus

$f_{n/k}$: $(kZ,+) \to (nZ,+)$, $kx \to nx$, kde k, n, x jsou celá, k, n navíc nenulová.

Je zřejmé, že inverzní k izomorfizmu $f_{n/k}$ je izomorfizmus $f_{n/k}^{-1} = f_{k/n}$ Dva speciální případy tohoto izomorfizmu používají žáci často: f_{10} a $f_{1/10}$. Použití prvního interpretují jako „připsání nuly“ a použití druhého jako „škrtnutí nuly“. Uveďme ilustraci.

Leo, žák druhého ročníku, měl najít součet *40 + 30*. Okamžitě řekl výsledek *70*. Když byl tázán, jak se mu to povedlo tak rychle zjistit, nejprve chvíli hledal slova a pak řekl „čtyři a tři je sedm a dám tam ještě nulu“. V jazyku matematiky můžeme postup popsat trojicí kroků.

1) úlohu *40 + 30* = ? transformuji izomorfizmem $f_{1/10}$ na úlohu *4+ 3* = ?
2) tu vyřeším, dostanu *7* a
3) toto číslo inverzním izomorfizmem f_{10} transformuji na *70* – výsledek původní úlohy.

Na první pohled se může zdá nepodstatné, že hoch svůj postup popsal. Důležité je, že úlohu rychle vyřešil. Navíc, na rozdíl od početního výkonu, který byl okamžitý a přesný, byl jeho popis vlastní činnosti málo přesvědčivý. Zapomněl říct, že čísla *4* a *3* získal z čísel *40* a *30* umazáním nuly.

Ve skutečnosti je Leův popis výpočtu důležitý. Důležitější než výpočet sám. Právě proto, že vznikal obtížně a nebyl zcela zdařilý. Výpočet byl pouze aplikací myšlenky, kterou Leo dobře znal. Nepřinášel hochovi nové poznání, měl pouze opakovací, nácvikový charakter. Slovní popis výpočtu byl hochův tvůrčí proces, který mu přinášel zvědomění si řešitelského procesu. Vztah mezi činností a zvědomováním si této činnosti rozvedeme.

V první etapě mnoha poznávacích procesů dochází k *poznání v činnosti* (knowledge in action). Žák to umí udělat, ale svoji činnost neumí popsat. Umí vyřešit rovnici, nebo sestrojit řez krychle rovinou, ale neumí svůj postup popsat. I my si třeba umíme zavázat tkaničku, ale asi bychom museli dlouho pracovat na popisu této činnosti. Umí-li žák svoji činnost popsat, dostává se k vyššímu stupni poznání, k *uvědomování si vlastní činnosti.* Žák pojmenovává objekty, s nimiž pracuje, rozkládá svoji činnost na jednotlivé kroky, poznává strategii činnosti, často objevuje, že při popisu činnosti nutno rozlišovat několik různých typů úloh. Tento vyšší typ poznání posouvá dané poznání v akci na abstraktnější úroveň a tím umožňuje její další rozvoj. Například Leovi se postupně vyjasní, že jeho výpočet spočívá ve třech krocích: umaž nulu, sečti, připiš nulu. Když si hoch později uvědomí, že umazat nulu znamená dělit 10, a připsat nulu znamená násobit 10, bude připraven k objevu, že stejný trik lze použít například při hledání součtu *111 + 222 + 333 + 444 + 555 + 666*.

Z uvedených důvodů se nám jeví důležité vést žáky k uvědomování si vlastních činností, zejména těch, které budou později zobecňovány. K zvědomování si vlastní činnosti může vést žáka výzva učitele, ale i potřeba vysvětlit spolužákovi „jak na to“. Právě v tomto jevu tkví jádro Senecova poučení *Docendo discimus* (Učíce jiné, sami se učíme).

Uvedené použití izomorfizmů f_{10} a $f_{1/10}$ nepřináší žákům zkušenost s izomorfizmem dosti intenzivně, nebo je záhy utlumeno myšlenkou v tomto kontextu daleko závažnější – přechodem přes desítku. Podstatně intenzivněji k zrodu a rozvoji myšlenky izomorfizmu přispívají například situace typu HAD nebo PYRAMIDA. Na ně se teď podíváme.

9. SITUACE „HAD“ JAKO PROSTŘEDÍ PRO IZOMORFIZMUS

Schéma

$$\boxed{} \xrightarrow{+2} \boxed{} \xrightarrow{+3} \boxed{} \xrightarrow{-4} \boxed{} \xrightarrow{+5} \boxed{} \xrightarrow{-1} \boxed{} \xrightarrow{-3} \boxed{}$$

tvořené 7 prázdnými okénky a 6 šipkami, z nichž tři označují operaci přičítání a tři operaci odčítání nazveme *had* [*+2*; *+3*; *-4*; *+5*; *-1*; *-3*]. Schéma čteme zleva doprava, takže je jasné co máme na mysli když napíšeme *druhé okno,* nebo *třetí šipka*. První okno hada nazveme *vstupem* a poslední okno nazveme *výstupem.* Když do každého okna uvedeného hada vložíme nějaké reálné číslo, získáme *vyplněného hada*:

$$\boxed{a} \xrightarrow{+2} \boxed{b} \xrightarrow{+3} \boxed{c} \xrightarrow{-4} \boxed{d} \xrightarrow{+5} \boxed{e} \xrightarrow{-1} \boxed{f} \xrightarrow{-3} \boxed{g}$$

Jestliže pro takto vyplněného hada platí šest rovností

$$a + 2 = b, \quad b + 3 = c, \quad c - 4 = d, \quad d + 5 = e, \quad e - 1 = f, \quad f - 3 = g,$$

pak řekneme, že had je *dobře vyplněn*, nebo *vyřešen*..

Analogicky lze zavést například pojem *had* [$+7$; $\times 3$; $:2$] – had má čtyři okna a tři šipky z nichž první označuje operaci přičítání a druhá operaci násobení a třetí operaci dělení, nebo *had* [$\times$ *1,35*] – má dvě okna a jedinou šipkou označující násobení. Je to jinak, pro nás asi složitěji, ale pro mnohé žáky jednodušeji, popsaná operace násobení číslem *1,35*.

Nejčastěji zní úloha o hadech takto: dán je had i jeho vstupní číslo, najděte číslo výstupní. Krátce takovou úlohu formulujeme slovy *řešte hada pro číslo p.*

Termínem *práce hada* rozumíme přiřazení vstup $\rightarrow$ výstup. Žádáme-li žáka, aby zjistil, jak daný had *pracuje*, chceme, aby našel pravidlo, které říká jak k číslu na vstupu lehce najít číslo na výstupu. Například práce hada [$+2$; $+3$; -4; $+5$; -1; -3] je dána pravidlem „přičti dvě“.

Problémová situace HAD je struktura, kterou lze využít na poznávání izomorfizmu Podívejme se na dvojici úloh, které takový izomorfizmus navozují. Dodejme, že texty úloh, které v dalším uvádíme, jsou zapsány v úsporné dikci určené učiteli. Pro žáky je potřeba tyto texty upravit. Ve většině případů pak uvedenou úlohu rozdělit do více úloh.

Úloha 1. a) Řešte hada [$+2$; $+3$; -4; $+5$; -1; -3] pro čísla

$$3, 4, 11, 27, 35 \text{ a } 86 \qquad (3)$$

b) pro stejná čísla řešte hada [$+20$; $+30$; -40; $+50$; -10; -30].

Úloha 2. Řešte hada [$+2n$; $+3n$; $-4n$; $+5n$; $-n$; $-3n$] pro čísla (3), když je a) $n = 2$, b) $n = 5$, c) $n = 4$, d) $n = 3$, e) $n = 8$, f) $n = 15$.

Cílem uvedené série úloh je dovést žáky k objevu: když všechna čísla v hadovi z úlohy 1a) vynásobíme číslem n (tj. když na tohoto hada aplikujeme izomorfizmus f_n) obdržíme hada, pro kterého platí *výstup = vstup + 2n.* Děti zde pro tvorbu úlohy izomorfní používají slovní popis „zvětšujeme celého hada“, nebo „hada násobíme“. Tím se zvětšování, nebo násobení stávají separované modely izomorfizmu.

Poznávání aritmetiky hadů není ukončeno, protože žáci ještě neznají hranice svých objevů. Zatím se nesetkali s úlohami, u kterých objevené návody na řešení neplatí. V příběhu 2 se u izomorfizmu typu RODINA takové upozornění na omezenou platnost izomorfizmu objevilo: zvířata chovaná v obou rodinách do struktur rodin zahrnovat nelze.

K poznání hranic uskutečněných objevů dovedou žáky další úlohy, ve kterých budou kromě operátorů přičítání a odčítání i operátory násobení, popřípadě dělení.

10. PROPEDEUTIKA IZOMORFIZMU f_{10} PŘÍBĚH 5

V jedné čtvrté třídě, kde žáci měli již s úlohami o hadech více zkušeností, řešili úlohu 1a). a Čísla (3) napsala učitelka na tabuli do rámečku. Po chvíli Radek a pak další žáci volali, že „stačí přičíst dvě“. Učitelka, podle zavedeného zvyku, napsala na tabuli objev i objevitele.

Radek: výstup = vstup + 2 (4)

To podnítilo další žáky, aby se pochlubili svými (někdy i nepravdivými) objevy:

Milena: Nejmenší číslo je ve čtvrtém okénku a největší pátém.

Vilma: První dvě čísla jsou sudá, obě (dvouvteřinová pauza), nebo obě lichá.

Láďa: Ve třetím okénku je součet prvního a druhého okna.

Milan: Číslo ve třetím okénku je stejné jako předposledním, šestém.

Svatka: Číslo ve druhém okénku je stejné jako v posledním.

Lukáš řekl, že tedy vlastně stačí najít číslo ve druhém okénku a úloha je vyřešena. Zbytek hada můžeme smazat. Pak vysoce ohodnotil objev Svatky slovy: „Tedy tomu já říkám objev“.

Pak učitelka předložila třídě úlohu 1b). Svislou čárou oddělila vše, co bylo dosud na tabuli napsáno, a na čistou pravou část tabule nakreslila schéma hada, zatím ještě bez čísel. Řekla: „Teď vám dám jiného, složitějšího hada. Opět jej řešíte pro tato čísla (ukázala na čísla (3)). Když se dobře podíváte, uvidíte, že oba hadi jsou si nějak podobní“. Pak nad šipky nakresleného již hada začala psát čísla + *20*, + *30*, - *40*, ... Jana ihned pochopila v čem spočívá podobnost obou hadů a poslední tři čísla + *50*, - *10*, - *30* učitelce diktovala. Někdo křičel, že „se tam připisují nuly“ a třída s tím souhlasila. Nikdo neřekl, že se násobí deseti.

Ivo, ještě dříve než byl druhý had dopsán, křičel: „první výsledek je padesát“. Po krátké chvíli Edo oznamoval křičel, že to bude *23*. Následovala hlučná debata, kterou nebylo možné evidovat, protože několik dětí mluvilo naraz. Následující záznam je tedy značně neúplný.

Učitelka 1: Tak padesát nebo dvacet tři?
Mirka: Edo má pravdu, je to dvacet tři. Mně to tak vyšlo.
Edo: Dycky se přidá dvacet. K těm třem přičtu dvacet.
Honza 1: Ivo to řekl, padesát, všude připíši nulu.
Táňa 1: Výstup je vstup plus dvacet. Jak to je tam podle Radka (ukazuje na nápis (4)).
U 2: Edo tobě vyšlo dvacet tři a Honzo a tobě vyšlo padesát?
Vilma: Já to mám jako Honza.
Táňa 2: Máš to blbě, blbě… (Věta se zaniká v sílícím hlasu třídy „je to určitě dvacet tři“.)
Honza 2 (s nelibostí): Ne to ne,... Je to dvacet tři. Já to,.. já tam (ukazuje na nápis $3 \to 5$ na levé tabuli) připsal nulu. To je blbě.
U 3: Tvůj výsledek, Honzo, i tvůj Vilmo a Ivane, je sice nepřesně, ale…(ve třídě je hlučno). Děcka, dopřejte mi hlasu. Říkám, že myšlenka Ivana, Honzy a Vilmy byla velice správná – poznali, že když je mezi hady jednoduchá souvislost, že i pravidla pro oba hady budou blízká. (Obrací se k Honzovi) Jen jste se ukvapili Napříště si první nápad raději prověřte.
Svatka: Ale to moje je stejně dobře. Ve druhém okénku je taky dvacet tři.
U 4: Svatka tvrdí, že tento její objev (ukazuje příslušný nápis na levé části tabule) platí i pro tohoto druhého hada. Má pravdu?
Lukáš: Určitě! To přesně vychází! K dvojce musíme připsat nulu.

Učitelka pohledem pochválila Svatku i Lukáše a na tabuli napsala

Svatka + Lukáš výstup = vstup + *20* (5)

Po hodině přišel Milan učitelce říct, že nejen Svatčino, ale i jeho pravidlo platí pro oba hady. Že to prověřil na dvou příkladech. Honza přišel učitelce vysvětlit svůj omyl: „Já věděl, že se tam má připsat nula, ale připsal jsem ji jinam. Měl jsem to připsat ke dvojce“. Učitelka oba hochy žádala, aby ji to napsali na lísteček, že se na to podívá a odpoví na lístečku.

11. ANALÝZA PŘÍBĚHU 5, KOMENTÁŘE

Předně nutno k příběhu říct to, co je pedagogicky podstatné, byť se to netýká bezprostředně izomorfizmu struktur: Vyučování má silně konstruktivistický charakter. Učitelka klade otázky, organizuje diskusi, eviduje vše co děti vymyslí někdy provokuje, ale hlavně žáky povzbuzuje pozitivním ohodnocením autonomního myšlení. Učitelka se nesnaží předávat dětem „moudra“, ale dává jim prostor pro jejich seberealizaci, pro přirozený rozvoj jejich osobností.

Z hlediska edukačního stylu učitelky jsou, kromě zmíněného již pozitivního hodnocení žáků pozoruhodné zejména tři momenty.

Diskuse se odehrává především mezi žáky, učitel ji jen moderuje případně komentuje. Jen když zazní vulgarizmus a odsuzování za názor, ujme se obhajoby osočovaných (vstup U 3).

Pozoruhodná je reakce Lukáše na objev Svatky. Na prvním stupni není vzájemná věcná matematická komunikace mezi žáky běžná. Na myšlenku spolužáka žák buď vůbec nereaguje, protože je zaujat vlastní myšlenkou, nebo reaguje souhlasem či nesouhlasem, když zjistí, že se jedná o myšlenku, která je právě i v jeho mysli. Jen ojediněle žák reaguje na „cizí“ myšlenku. K tomu dochází až po trpělivém a dlouhodobém vedení učitele, který žáky učí vzájemně poslouchat vlastní myšlenky. Tedy i reakce Lukáše svědčí o pedagogické kvalitě učitelky.

Honza hledal a našel příčinu své chyby. Schopnost zamyslet se nad příčinou vlastní chyby a tím z ní získat poučení do budoucna je hodnotný osobnostní rys člověka, daleko překračující hranice matematiky. Je pravděpodobné, že si tuto schopnost hoch rozvinul zejména v matematice. Tím matematika významně přispěla k formování hochovy osobnosti. To je další pochvala práce učitelky a další argument ve prospěch konstruktivistického přístupu k vyučování (nejen) matematiky.

Závěr hodiny ukazuje, jak učitelka řeší to, že některým žákům nemůže pro nedostatek času dát na hodině prostor na seberealizaci. Řeší to korespondenčně. Jistě že učitelka musí na to obětovat hodně volného času, ale efekt je značný: žáci netrpí pocitem odstrčení a vede je to ke kultivaci komunikačních schopností.

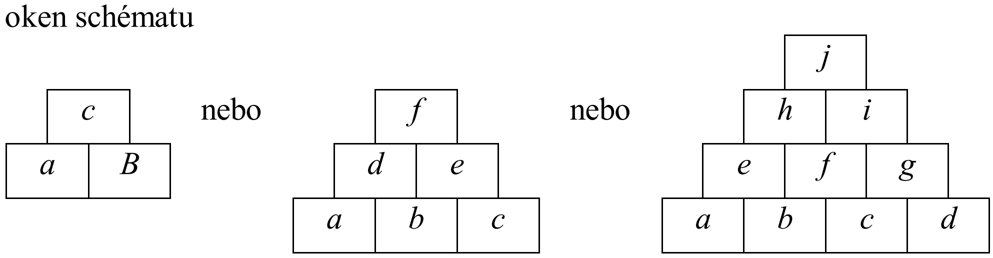
Teď se podívejme podrobněji jak se jev izomorfizmu projevuje v příběhu. Úloha 1a) aktivuje znalosti a zkušenosti žáků. Již dříve se při úlohách o hadech žáci neomezovali jen na jejich řešení, ale na výzvu učitelky hledali jejich obecné vlastnosti – ty, které nezávisí od vstupního čísla. Různost nápadů žáků ukazuje, kolik toho žáci znají: sudost/lichost čísel, největší/nejmenší číslo ve vyřešeném hadu, stejnost některých čísel,… .

Dobře viditelnou vazbu mezi zadáním úloh a) a b) odhalili děti okamžitě. Již ne tak evidentní je vztah mezi pravidly, které popisují práci obou hadů. Háček je v tom, že v celé situaci vystupují dva druhy čísel: pasivní, trpné objekty, které jsou napsány v okénkách hada a aktivní, činné operátory nadepsané nad šipkami. Operátory mění čísla v okénkách. Operace „připsání nuly“, které mění situaci úlohy 1a) na úlohu 1b) se vztahuje pouze na operátory, nikoli na čísla pasivní. Kdyby se bylo vztahovalo na všechny čísla, kdyby místo čísel (3) vstupovaly do druhého hada desetinásobky těchto čísel, měli by Ivan, Honza i Vilma pravdu.

Lukáš naznačil důležitou věc: pravidlo (4) lze chápat jako hada [+ *2*]. Jinak řečeno, had H = [*+2*; *+3*; *-4*; *+5*; *-1*; *-3*] pracuje stejně jako had H´ = [+ *2*]. Z tohoto hlediska je veliký had H izomorfní s elementárním hadem H´. Navíc, ke každému hadu, který obsahuje jen operátory přičítání nebo odčítání, existuje jediný takový, s ním izomorfní elementární had [+ *a*] nebo [- *a*]. Podobně ke každému hadu, obsahujícímu jen operátory přičítání, odčítání a násobení, existuje jediný s ním izomorfní had, typu [+ *a*; × *b*] nebo [- *a*; × *b*]. Zkoumání těchto situací vede na úlohu najít k danému hadu co nejjednoduššího hada s ním izomorfního. Postup, najít ve třídě navzájem izomorfních (v jistém smyslu) objektů ten nejvhodnější patří k obecným ideám matematiky. Pojem „zlomek v základním tvaru“ patří do této oblasti.

12. SITUACE „PYRAMIDA“ JAKO PROSTŘEDÍ PRO IZOMORFIZMUS

Pyramidou dimenze 2 nebo 3 nebo 4 rozumíme soubor 3 nebo 6 nebo 10 čísel vložených do stejného počtu oken schématu



Pyraminda dimenze 2 dimenze 3 dimenze 4

tak, že součet čísel v libovolných dvou sousedních oknech je roven číslu v oknu ležícím na těchto oknech. Například u pyramidy dimenze 3 je $a + b = d$, $b + c = e$, $d + e = f$.

Písmena, které jsou v oknech budou označovat jak čísla, tak i okna ve kterých se nachází. Tato dvojznačnost nepovede k nedorozumění.

Jestliže je známo několik čísel pyramidy **P** a další její čísla známa nejsou, pak výzva „řešte pyramidu **P**“ znamená úlohu: najděte všechny pyramidy s předepsanými danými čísly. Například, když jsou v pyramidě dimenze 4 známá čísla $a = 6$, $c = 2$, $g = 9$, $h = 10$, pak existuje jediné její řešení $a = 6$, $b = 1$, $c = 2$, $d = e = 7$, $f = 3$, $g = 9$, $h = 10$, $i = 12$, $j = 22$. Popsanou úlohu a její řešení budeme zde formulovat stručně takto:

Úloha 1. Řešte (v oboru N) pyramidu dimenze 4: **P**($a = 6$, $c = 2$, $g = 9$, $h = 10$).

Řešení **P**(*6, 1, 2, 7, 7, 3, 9, 10, 12, 22*) je jediné.

Z příkladu je jasný způsob zápisu úlohy i řešení. Uveďme ještě další ilustrace.

Úloha 2. Řešte pyramidu dimenze 4: **P**(a = 1, d = 2, f = 2) a to a) v oboru N, b) v oboru Z.

Řešení: a) **P**(*1, 2, 0, 2, 3, 2, 2, 5, 4, 9*), **P**(*1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 9*), **P**(*1, 0, 2, 2, 1, 2, 4, 3, 6, 9*) b) existuje nekonečně mnoho řešení **P**(*1, 1+n, 1-n, 2, 2+n, 2, 3-n, 4+n, 5-n, 9*), kde n je libovolné celé číslo.

Úloha 3. Řešte v oboru R pyramidu dimenze 4: **P**($a = 1$, $d = 2$, $f = 2$, $j = 10$)

Úloha nemá řešení. Jestliže například vložíme do okna *b* číslo x, pak bude $c = 2 – x$, $e = x + 1$, $g = 4 – x$, $h = x + 3$, $i = 6 – x$, $j = 9$. Tedy z předpokladů $a = 1$, $d = 2$, $f = 2$ plyne $j = 9$, co odporuje podmínce $j = 10$.

Když všechna čísla vyřešené pyramidy $\mathbf{P_1}$ vynásobíme reálným číslem x dostaneme správně vyplněnou pyramidu $\mathbf{P_2}$. Toto násobení je izomorfizmus f_x: $\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}$. Poslední dvě úlohy naznačují, jak lze k objevu izomorfizmu v prostředí pyramid vést žáky.

Úloha 4. Najděte horní číslo f ve sčítací pyramidě dimenze 3 jestliže je
a) **P**($a = 1$, $b = 2$, $c = 3$), b) **P**($a = 2$, $b = 4$, $c = 6$), c) **P**($a = 3$ $b = 6$, $c = 9$),
d) **P**($a = 5$, $b = 10$, $c = 15$), e) **P**($a = 8$, $b = 16$, $c = 24$), f) **P**($a = 11$, $b = 22$, $c = 33$).

Úloha 5. Řešte pyramidu řádu 4:
a) **P**($c = 3$, $e = 7$, $g = 5$, $j = 22$), b) **P**($c = 15$, $e = 35$, $g = 25$, $j = 110$),
c) **P**($c = 21$, $e = 49$, $g = 35$, $j = 154$), d) **P**($c = 30$, $e = 70$, $g = 50$, $j = 220$).

Složka přiřazení je u izomorfizmu f_x: $\mathbf{P_1} \rightarrow \mathbf{P_2}$ evidentní. Zajímavá je složka strukturální, která mívá mnoho vazeb. Například u vzájemně izomorfních pyramid z úlohy 4 je: $b = 2a$, $c = a + b$, $d = c$, $f = 4b$, $f = 8a$, … Poslední dva vztahy umožňují řešiteli najít číslo f rychle.

Úlohu 5a) nelze řešit přímo, protože pouze číslo d = g - c = 5 – 3 = 2 lze z daných čísel najít ihned. Čísla a, b, f, h, i nutno hledat. Podobně u dalších případů, které jsou s prvním izomorfní.

13. OBJEVOVÁNÍ IZOMORFIZMU PYRAMID - PŘÍBĚH 6

Dvě posluchačky primární pedagogiky Ped. Fak. UK řešily úlohu 5. Při úloze a) obě nejprve zjistily, že $d = 2$ a pak metodou pokus-omyl pyramidu vyřešily. Svá řešení si porovnaly

Katka se snažila uhodnout nejprve spodní řádek. Nejdříve položila $a = 1$, $b = 6$druhý pokus: $a = 2$, $b = 5$; teď se zamyslila, uvědomila si (tak komentovala svůj postup později), že číslo b je potřebné zmenšit a položila $a = 6$, $b = 1$; tuto pyramidu ani nedopočítala a položila $a = 5$, $b = 2$ a to vedlo na řešení.

Zuzka postupovala opačně: rozkladem čísla $j = 22$. Ani první pokus ($h = i = 11$), ani druhý pokus ($h = 10$, $i = 12$) nebyl úspěšný. Po druhém pokusu se dívka chvíli zamyslela, řekla „to jsem pitomá“ a zkusila pokus třetí ($h = 10$, $i = 12$), který byl úspěšný. Později svoji sebekritiku komentovala „Já věděla, že musím použít to, že sedm je víc než pět (ukazuje na čísla *e* a *f*, ale nějak mne napadlo, že v tomto řádku (ukazuje na okna *h* a *i*) to musí být naopak – kvůli spravedlnosti. To jsem pitomá“.

Dále dívky řešily úlohu b) a jejich postup byl již výrazně rychlejší. Katka opět rozkládala horní číslo *110* a již její první pokus byl úspěšný. Zuzka již nehádala první řádek, ale hned hledala číslo *f*. K nalezení řešení potřebovala dva pokusy. Při úloze c) Katka použila stejnou strategií a potřebovala tři pokusy. Zuzka hned do okna *f* přepsala z okna *g* číslo *35* a zbytek dopočítala. Tentokráte byla první a měla z toho radost.

Když si dívky svoje řešení vzájemně porovnávaly, řekla Zuzka „hned jsem tušila, že to bude jako u těch předchozích případů a sem jsem napsala též třicet pět (ukazuje okno *f*), ono to vyšlo“. Katka tomu rozuměla a řekla, že též to tak odhadovala, ale že se nechtěla ukvapit.

Před zadáním čtvrté a poslední úlohy této série experimentátor řekl, že není nutno vyplnit všechna okna tabulky, že stačí znát okno *a*. Pak dal dívkám úlohu d). Katka napsala do okna *f* číslo *50* a pak dopočítala čísla $b = 20$ a $a = 50$. Podívala se co dělá Zuzka a když viděla, že tato doplňuje všechna okna tabulky, udělala totéž. Zuzka ihned napsala do oken *a* a *f* čísla *50* a pak pro kontrolu dopočítala celou tabulku.

Obě dívky pak uvedly, že byly skoro jisté, že čísla v oknech *a, f, g* jsou stejná, ale protože již mají zkušenosti, že v minulosti je matematika nachytala, považovaly za nutné všechna čísla dopočítat a ujistit se o správnosti výsledku. Experimentátor se dívek zeptal, zda u každé pyramidy musí být čísla v oknech *a, f* a *g* stejná. Obě ihned řekly že ne. Že to je jenom u těchto, které jsem tak vymyslel. Experimentátor se zeptal dívek, zda si uvědomují, že pyramida v úloze d) „je desetinásobek“ pyramidy z úlohy a). Pro obě dívky to bylo překvapení.

Komentář a námět výzkumu

Náročnost úlohy 5 spočívá v tom, že čísla nelze počít přímo. Vypustíme-li spodní řádek dostaneme pyramidu dimenze 3. ve které známe pouze rohové čísla. Samozřejmě že úlohu lze řešit pomocí rovnic, ale posluchačkám primární pedagogiky je metoda pokus – omyl bližší.

Dívky objevily pouze strukturální složku izomorfizmu a složku přiřazovací si vůbec neuvědomovaly. Je to situace komplementární k té, kterou jsme viděli u hadů: tam bylo „připsání nuly“ evidentní pro všechny žáky velice rychle. U pyramid je tomu naopak.

Je pravděpodobné, že komplementarita reakcí řešitelů je dána součinností dvou, možná tří, faktorů: různost prostředí HAD a PYRAMIDA, způsob formulace úloh a asi též různost věku subjektů, s nimiž byl experiment realizován.

Uvedená komplementarita experimentů jeví jako zajímavá a slibná z hlediska případného dalšího výzkumu. Bylo by potřebné nejprve prověřit vliv uvedených tří faktorů a pak mapovat řešitelské strategie žáků resp. posluchačů, které se při řešení těchto úloh vyskytují. Dále udělat seznam fenoménů, které zde působí jako urychlující/zpomalující agenti daného objevu. Velice hodnotné by bylo mít písemné formulace řešitelů o způsoby řešení.

14. ZÁVĚR

V článku jsme podrobně zkoumali izomorfizmus v prostředí RODINA a již ne tak podrobně v aritmetických prostředích HAD a PYRAMIDA. Jev izomorfizmu je přítomen v mnoha dalších situacích. Na čtyři nich upozorníme náznakovými ilustracemi.

Slovní úlohy vedoucí na rovnice

Matematický model různých slovní úloh bývá často stejný. Různost je zde pouze v sémantice, nikoli matematice. Stejnost následující dvojice úloh plyne ze vztahu *1* den = *24* hodin.
<u>Úloha A.</u> Bazén nateče prvním přítokem za *2* dny a druhým za *3* dny. Za jak dlouho nateče bazén oběma přítoky?
<u>Úloha B.</u> Mistr udělá danou práci za *48* minut a tovaryš za *72* minut. Za jak dlouho bude práce hotova, když ji budou dělat oba?

Magické čtverce

Příbuznost obou čtverců je dána vztahem $n \to 2^n$. Je to návod jak z normální sčítacího magického čtverce

5	*0*	*7*
6	*4*	*2*

32	*1*	*128*
64	*16*	*4*

vyrobit magický čtverec násobilkový. Číslu *5* levého čtverce odpovídá číslo 2^5 v pravém čtverci.

1	*8*	*3*

2	*256*	*8*

<u>Úloha pro čtenáře</u>. Sestrojte násobilkový magický čtverec 3×3 v jehož jednom rohovém poli je číslo *4320*. Přípustná jsou jen přirozená čísla. Výroba násobilkových magických čtverců je propedeutikou izomorfizmu a dobrým cvičištěm pro práci s mocninami.

Algebrogramy

V seminární práci jedné posluchačky primární pedagogiky je uvedeno, že algebrogramy *AA + BB = CC* a *AB + BA = CC* mají stejnou množinu řešení. Posluchačka nedovedla vysvětlit, proč je tomu tak. To nás vede k námětu na výzkum řešitelských postupů při řešení izomorfních algebrogramů (jeden z druhého vzniká takovým přestavením číslic, které nemění hodnotu celkového výrazu) .

Z výzkumu lze očekávat poznatky jak v oblasti izomorfizmu, tak i v poznávání desítkové soustavy. Budeme-li experimentovat s algebrogramy v jiných číselných soustavách, získáme poznání o poziční soustavě vůbec.

Hry Nim a Přesouvaná

<u>Hra Nim</u>. Jsou dvě kupy kamenů. Na první je *8* kamenů, na druhé *6*. Dva hráči, střídavě berou buď z jedné kupy libovolný počet kamenů, nebo po jednom kamenu z každé kupy. Ten co bere poslední kámen, prohrál. Jak má hrát první hráč, aby vyhrál?

<u>Hra Přesouvaná</u>. V pravém horním poli čtverečkovaného obdélníku 9×7 je kámen. Dva hráči jej střídavě posouvají buď vlevo, nebo dolů o libovolný počet polí, nebo šikmo vlevo-dolů o 1 pole. Ten co posune kámen na levé dolní pole, prohrál. Jak má hrát první hráč?

6								×	
5						×			
4				×					
3					×				
2			×						
1	×								
0		×							
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*

Izomorfizmus obou her objevují žáci 12 – 14 letí několik měsíců. Strukturální složkou tohoto izomorfizmu je strategie hry, tedy návod na nejlepší způsob hry.

Složka přiřazení je dána čísly, které roubí tabulku: pozici: *kámen je na poli (8,4)* hry přesouvaná odpovídá pozice: *na první kupě je 9, na druhé 5 kamenů* hry Nim.

Najít strategii hry Přesouvaná je snazší než hry Nim: Vedle v tabulce jsou křížky vyznačena všechna kritická pole.

Více o těchto hrách v knížce Gatial, Hejný, Hecht (1982)

Literatura

Eisemnmann, P.: O experimentu se spojitostí funkce na střední škole. *Učitel matematiky*, č. 20, Praha, 1996, s. 213-219

Eisemnmann, P.: Propedeutika diferenciálního a integrálního počtu ve výuce matematiky na střední škole I – IV, *Matematika, Fyzika, Informatika*, č. 7 – 10, Praha, 1997

Gatiaľ, J., Hejný, M., Hecht, T.:Hry takmer matematické. *Mladá Fronta, Praha* 1982

Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika, *Praha,* Portál, 2001

Hejný, M.: Štrukturovanie matematických vedomostí, in: Burjan, V., Hejný, M. Jány, Š. (eds): *Zborník príspevkov z letnej školy Pytagoras,* JSMF, Exam, Bratislva 2001, s. 13-24

Hejný, M.: Creating mathematical structure, *CERME* 2, Charles University Prague, 2001, s. 14-24

Hiele van P., M.: Structure and Insight. *Orlando*, Academic Press, 1986.

Jirotková, D., Swoboda, E.: Kto kogo nie rozumie. *NiM Nauczyciele i Matematyka*, č. 36, 2001, 9 – 12

Kopáčková, A.: Nejen žákovské představy o funkcích. *Pokroky matematiky, fyziky astronomie*, roč. 47, č. 2, s. 149 – 161.

Kratochvílová, J.: The analysis of one undergraduate student's project, In Novotná, J., Hejný, M. (Eds.), *Proceedings of SEMT01*, 2001, s.101 – 104

Kratochvílová, J.: Budování konečné aritmetické struktury. in: Burjan, V., Hejný, M. Jány, Š. (eds): *Zborník príspevkov z letnej školy Pytagoras*, JSMF, Exam, Bratislva 2001, s.58-64

Schwarz, B., Hershkowitz, R., Dreyfus, T.: Emerging knowledge structures in and with algebra, *CERME* 2, Charles University Prague, 2001, s.81-90

Stehlíková, N., Jirotková, D.: Building a finite algebraic structure, *CERME* 2, Charles University Prague, 2001, s. 101-111

Tsamir, P.: Intuitive structures: The case of comparisons of infinite sets, *CERME* 2, Charles University Prague, 2001, s. 112-121