3. ČÍSLO – POHLED SÉMANTICKÝ I STRUKTURÁLNÍ

3.1. Sémantické představy žáka o čísle

Číslo je ve vědomí dítěte a žáka uloženo ve dvou základních prolínajících se schématech. Do prvního schématu, které zkoumáme v této kapitole, se ukládají sémantické představy o čísle. To jsou ty, v nichž je číslo propojeno na životní zkušenosti jedince. Z učiva do této oblasti náleží především slovní úlohy. Do druhého schématu se ukládají strukturální představy o čísle tedy ty, v nichž se čísla objevují pouze ve vzájemné vazbě, bez propojení na životní zkušenost jedince.

Sémantické představy žáka o čísle hrají rozhodující roli při řešení slovních úloh. U nich někdy žák ztroskotá proto, že nedokáže úlohu uchopit, nedokáže si představit slovně popsanou situaci. Sem náleží zejména dynamické úlohy (úlohy o věku, o setkávání se cyklisty s chodcem, o plnění bazénu několika přítoky apod.), úlohy obsahující nadbytečná čísla (ta, co do procesu řešení nevstupují), úlohy pracující pouze s operátory a úlohy s antisignálem.

Strukturální představy žáka o čísle jsou v mnoha případech na prvním stupni velice chatrné. Žák pátého ročníku například umí paměťově i písemně sčítat, odčítat, násobit i dělit, ale nerozumí číselným situacím, postupům a vazbám. Nedovede vysvětlit, proč se násobí tak, jak se násobí apod. Řekne „tak jsme se to učili“. Bezradně hledí na úlohy, které neleží v jeho úzkém průzoru nacvičených algoritmů. Nedokáže například vynásobit XIX · XVII pouze pomocí římských čísel, neumí řešit algebrogramy typu AB · B = CAB, nedovede vysvětlit, proč je rozdíl trojmístných čísel ABC a CBA vždy dělitelný číslem 99.

Když pak na 2. stupni přijdou zlomky, procenta, geometrické konstrukce,…, tedy učivo, které již nelze zvládnout pouze pamětí, začíná se žák, který byl na 1. stupni v matematice třeba i výborný, ztrácet. Viníkem je zde edukační strategie většiny učitelů na 1. stupni, která je úzce zaměřená na hbité a spolehlivé počítání a která zanedbává hlubší porozumění struktuře čísel.

Nežádoucí situaci lze změnit změnou způsobu výuky. Upozadit instruktivní nácvikové metody a upřednostnit metody konstruktivní, jak o tom bylo pojednáno v první ppřednášce. Učitel, ale i rodiče se musí zbavit předsudků o tom, že kvalitu matematických znalostí a schopností žáka lze měřit rychlostí a bezchybností počítání. Je potřebná osvěta odhalující skutečnost:

kvalitu matematické zdatnosti člověka určuje jeho schopnost uvidět a uchopit problém, umět jej zkoumat, umět experimentovat a evidovat pozorované jevy, umět z jevů vyvozovat zákonitosti a tyto zdůvodňovat, umět o problému diskutovat a pomocí diskuse jej i řešit.

Budoucí učitelé prvního stupně jsou hlavními aktéry této osvěty a zároveň i realizátory nového způsobu vyučování aritmetice zaměřeného na hlubokém porozumění číslům a jejich struktuře. Nástrojem práce učitele jsou didaktická číselná prostředí jako: Algebrogramy (86/12), Barevné trojice (83/13), Biland (65/2), Hadi (22/11), Myslím si číslo (22/14), Násobilkové obdélníky (nebo čtverce) (13/26), Neposedové (14/33), Pavučiny (39/20), Řada, která se láme (15/40), Sousedé (18/52), Součtové trojúhelníky (8/1, 9/7), Střelba na cíl (52/4), Šipkové grafy (22/15,16), Tabulka 100 (18/51), Zlomky (35/18,19).

V závorce jsou ilustrace úloh (strana/cvičení) z učebnice Hejný a kol. pro 4. ročník.

3.2. Sémantické podoby čísla a jeho sémantické ukotvení

Výraz „tři hoši" vyvolá v mé mysli jistou představu. Ta bude bohatší, když se dovím, že „ve třídě byli tři hoši". Jiná bude představa, když se dovím, že „ze třídy odešli tři hoši", nebo „na dvoře bylo mnoho žáků, ale pouze tři z nich byli hoši".

Když mluvíme pouze o nápisech ležících vně představ, použijeme termín *sémantická podoba čísla*. Když mluvíme o představách, které se v mysli člověka vytvoří u těchto sdělení, použijeme termín *sémantické ukotvení čísla*. Toto odlišení je důležité, protože jeden nápis (jedna podoba) může ve vědomí různých žáků (i dospělých) vyvolat různé představy, různá ukotvení čísla.

V následujícím seznamu 18 úloh je přítomno 42 čísel. Čísla stejné sémantické podoby jsou podbarvena stejnou barvou.

Ú3.1. V pravé ruce mám 3 kuličky a v levé 2 kuličky. Kolik kuliček mám dohromady?

Ú3.2. V akváriu bylo 28 litrů vody. Karel z ní odebral 3 litry. Kolik vody je v akváriu teď?

Ú3.3. Měl jsem 3 kuličky a vyhrál jsem 2 kuličky. Kolik mám teď kuliček?

Ú3.4. Zdeňce je 6 let a Gitě je o 3 roky více. Kolik je Gitě?

Ú3.5. Zdeňce je 6 let a Gitě je 9 let. O kolik let je Gita starší?

Ú3.6. Gitě je 9 let. Je o 3 roky starší než Zdeňka. Kolik je Zdeňce?

Ú3.7. Na narozeniny mi do prasátka přidal můj bratr 3 Kč a sestra 2 Kč. O kolik korun mám teď v prasátku více?

Ú3.8. V lednu byla Lenka o 3 cm vyšší než stůl. Do listopadu povyrostla o 2 cm. O kolik cm je dnes Lenka vyšší než stůl?

Ú3.9. Bydlím ve 3.podlaží a můj kamarád bydlí o dvě podlaží výše. Ve kterém podlaží bydlí?

Ú3.10. Prohrál jsem dvě kuličky. Zůstaly mi tři kuličky. Kolik kuliček jsem měl původně?

Ú3.11. Tátova kancelář je ve dveřích číslo 3. O dvoje dveře dále je kancelář strejdy. Jaké číslo je na kanceláři strejdy?

Ú3.12. Linka autobusu číslo 57 má 18 zastávek a linka autobusu číslo 61 jich má 17. Která linka má více zastávek? O kolik?

Ú3.13. Pole o výměře 20ha je čtyřikrát větší než rozloha sadu. Jaká je rozloha sadu?

Ú3.14. V roce 1990 jsme za úklid města platili 65 000 Kč. V průběhu následujících 15 let tato částka vzrostla trojnásobně. Kolik jsme za úklid platili v roce 2005?

Ú3.15. Malá ručička hodin ukazuje na číslo 11 a velká je těsně před číslem 12. Kolik je hodin?

Ú3.16. V loterii bylo prodáno 135000 losů. Každý desátý vyhrál. Kolik losů vyhrálo?

Ú3.17. Anna má svátek 26.7. a Milada o 8 dní později. Kdy má svátek Milada?

Ú3.18. (J. Kittler, F. Kuřina: Učebnice M2, Matematický ústav AV ČR, 1994, s. 65) Autobus odjel přesně v 10 hodin. Jezdí každých 6 minut. Kolikrát odjede v době od 10 do 11 hodin?

Ú3.19 a Ú3.20 REZERVA.

Podoby i ukotvení čísla dělíme do tří základních tříd na

- *kvantity*,
- *identifikátory* a
- *symboly*.

Ve školské matematice potkáváme nejčastěji čísla jako kvantity, méně často jako identifikátory a jen ojediněle jako symboly. V horním souboru ani jedno z 42 čísel není symbolem. Symbolem je například číslo 13 ve větě „pátek 13. je nešťastný den".

$\boxed{\text{Výzva 3.1.}}$ Vezměte některou učebnici matematiky pro 1. stupeň. Vyberte z ní několik slovních úloh a pokuste se určit sémantickou podobu všech čísel, které v úlohách jsou.

3.3. Číslo jako kvantita

Když se na číslo jako kvantitu podíváme lépe, uvidíme, že se nejedná o jeden druh čísla, ale přinejmenším o sedm různých druhů. Uvádíme je přehledně v tabulce:

KVANTITA		**Ilustrace**	**Otázka**
Stav (S)	**Počet (Pč)**	Mám 7 kuliček. Beethoven složil 9 symfonií.	Kolik?
	Veličina (V)	Kniha stojí 20 Kč. Auto jelo stovkou. 5 kg masa.	
Operátor (O)	**změny (OZ)**	Vyhrál 3 kuličky. Zboží bylo zlevněno o 20%.	o kolik? kolik?
	porovnání (OP)	Skočil o 3 cm dále. Lenka je 7 kg lehčí než Mirek.	
Skalár (s)	**změny (sZ)**	Kriminalita se zdvojnásobila. Vody trojnásobně ubylo.	kolika-násobně?
	porovnání (sP)	Anglie má 5násobek rozlohy SR.	
	Frekvence (F)	V tuto dobu metro jede každé 4 minuty. Každý sedmý den je neděle.	Jak často? Jak hustě?

Tabulka 3.1

Stav říká, co je a jak je. Veličinou nazýváme to, co měříme pomocí jisté jednotky (metr, litr, gram, hodina, Kč, hektar, 1°, km/hod, …). Jednotkou pro počet je „jeden kus".

Operátor / skalár popisuje vztah dvou stavů. Když se jedná o stavy dvou různých objektů, jde o *porovnání,* když se jedná o dva stavy jednoho objektu v různých časech, mluvíme o *změně*.

Někdy mluvíce o operátoru máme na mysli i skalár. Operátor totiž může být aditivní nebo multiplikativní. *Aditivní* se vztahuje k operacím sčítání a odčítání. *Multiplikativní* se vztahuje k operacím násobení a dělení. Multiplikativní operátor nazýváme *skalárem*.

Konečně *frekvence* vypovídá o tom, jak často se jistý objekt, stav, nebo proces v daném souboru vyskytne. Běžně se jedná o rytmus. V Ú3.16 se ale jedná pouze o „hustotu" výskytu, bez rytmu. Dodejme, že v našich předchozích úvahách o typologii sémantických podob čísla (ani v [DŠM]) se o frekvenci nemluví. K odhalení této kategorie došlo až na konci února 2011.

Příklady z tabulky 3.1 jsou jasné. Existují příklady méně jasné, až zamotané. Ty jsou didakticky důležité, protože bývají příčinou komunikačního šumu. Například výraz „6 let" (Ú3.4) může někdo chápat jako počet, jiný jako veličinu a další dokonce jako adresu (viz příběh 3.1). Závisí to na individuálních zkušenostech daného člověka a na momentální situaci.

Nejednoznačnost ukotvení daného čísla může ve třídě vést ke sporům mezi žáky. Nás zajímá, jak se má zachovat učitel. Tuto důležitou otázku, která ale nespadá do základního toku našich úvah, diskutujeme v příloze 3.4.

Výzva 3.2. Ukažte, že výraz a) „šest lžiček", b) „čtyři koruny" může nabývat významu počtu i míry. Hledejte i jiné výrazy, které mají popsanou vlastnost.

Výzva 3.3. Ukažte, že hranice mezi číslem jako stavem, číslem jako operátorem změny a číslem jako operátorem porovnání jsou neostré. Zkoumejte příklad „v novém zaměstnání mám o 2000 Kč vyšší plat". Vytvořte další příklady.

3.4. Číslo jako identifikátor

Ve výpovědi „Milan sedí na tribuně na sedadle 318. Jeho bratr, brankář Eda, má dres s číslem 7." jsou dvě čísla, dva identifikátory. Jejich sémantické ukotvení má ale odlišný charakter. Čísla sedadel na tribuně tvoří strukturu. Z ní víme, že divák na sedadle 317 sedí vedle Milana. Ale z informace „Eda má dres s číslem 7" neumíme říct nic o hráči s číslem 8. Nevíme, zda je to stoper nebo útočník. Nevíme ani to, zda hráč s číslem 8 je vůbec na hřišti. Čísla dresů netvoří strukturu.

Identifikátor je tedy buď *adresa* nebo *jméno*. Adresa určuje lokalitu (místo), čas, objekt, nebo událost. Adresy tvoří strukturu, jména ji netvoří. Z hlediska matematiky jsou zajímavé jen adresy. Ty jsou buď *lineární*, pokud směřují stále dopředu, nebo *cyklické*, pokud se zacyklí a chodí dokola.

Přehledně situaci popisuje tabulka 3.2.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">IDENTIFI-
KÁTOR</th><th colspan="2">Ilustrace</th><th>Otázka</th></tr>
<tr><td>času</td><td>Místo/objekt</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Adresa</td><td>Lineární (AL)</td><td>G. Bruno byl upálen roku 1600. Rokem 2001 začalo 3. tisíciletí.</td><td>Bydlíme v pokoji číslo 514.
Jsem na 8. kilometru dálnice.</td><td rowspan="2">Kdy?
Kde?</td></tr>
<tr><td>Cyklická (AC)</td><td>Pepa se narodil v 11.30 hodin.</td><td>Na Sněžku nás vyvezla kabinka číslo 7.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Jméno</td><td colspan="2">Tramvaj číslo 3. Telefonní číslo sekretářky je 233 154</td><td></td></tr>
</table>

Tabulka 3.2

Již u čísla jako kvantity jsme viděli, že jedno číslo mohou různí lidé interpretovat různě. Stejné je to i s identifikátory. Dokonce ani hranice mezi identifikátory a kvantitami není ostrá. Ukážeme si to na výrazu „6 let“. Následující příběh ukáže, že toto číslo lze chápat i jako adresa místa.

Příběh 3.1. Na procházce se ptám pětiletého vnuka Iva, za jak dlouho bude starší než jeho sedmiletý bratr Pavel. Ivo neví. Nakreslím hůlkou na zemi číselnou osu a čárkami na ní označím čísla 1, 2, …, 9. Ivo umí počítat do 10, ale číslice nezná. Postavím Pavla k číslu 7 a řeknu „Pavlovi je sedm, tak ho postavíme na číslo sedm. Tobě, Ivo, je pět a tak tě postavíme …“ Ivo mi skočí do řeči: „na pět“, a již se sám na příslušnou značku staví. Pokračuji: „Teď jako že uplyne jeden rok a vy oba dva zestárnete o jeden rok, jo? Jak to bude tedy v příštím roce?“ Oba hochy posunu o jeden rok kupředu. Ivo hned křičí: „Nikdy. On bude pořád o dva roky napřed.“

Komentář. Ivo dosud vnímal svůj věk jako počet/veličinu, neboť již od tří let na otázku, „kolik ti je?“ ukazuje věk na prstech. Jednotkou je jeden rok (což je veličina) reprezentovaný prstem (což je počet). Teď poprvé Ivo vidí interpretaci věku pomocí *časové osy*. Věk je zde adresa místa. Proces plynutí času, pro Iva dříve těžko uchopitelný, se mění na pohyb po číselné ose a ten Ivo chápe ihned. Skutečnosti „uplynul jeden rok“ odpovídá „udělej krok dopředu“.

Výzva 3.4. Ve třetím ročníku budete řešit úlohu: *Evě jsou 3. Až jí bude tolik, co je dnes Danovi, bude Danovi 19. Kolik je dnes Danovi?* Popište, jak navedete žáky k řešení pomocí hry na boha Chrona. Svůj scénář se pokuste ověřit aspoň pomocí skupinky tří-čtyř dětí.

Výzva 3.5. Vyřešte obě zde uvedené úlohy a pak svůj řešitelský postup porovnejte s postupem jiných osob, nebo žáků.

Ú3.21. „Kdy parník připluje?” zeptala se Lucie. „Za 30 hodin”, odvětil Jan. Lucie se podívala na hodinky a řekla: „To bude krátce před osmou, Slunce bude právě zapadat.” V kolik hodin se tento rozhovor odehrál?

Ú3.22. Jak zjistíte počet schodů na jedoucích pohyblivých očíslovaných schodech v metru?

Ú3.23. REZERVA

3.5. Číselná osa a stupnice

Standardním modelem **lineárního adresování** je *číselná osa*. Na ní má každé místo přesně určenu souřadnici a každé reálné číslo je souřadnicí jednoho místa. Číselná osa je tlumočníkem mezi aritmetikou a geometrií. Tato hluboká myšlenka stála u zrodu analytické geometrie.[1]

V reálném světě nacházíme modely číselné osy ve formě (*lineární*) *stupnice*. Například krejčovský metr, váha, teploměr, tlakoměr, výškoměr, tachometr, fonoměr, index inflace, ...

Lineární stupnice, na rozdíl od číselné osy,

- je vázána na svět věcí, tj. je sémanticky ukotvena
- je z obou stran omezena a
- má jistou rozlišovací schopnost.

Tak například běžný lékařský teploměr měří teplotu v rozmezí od 34,1°C do 42°C s rozlišovací schopností 0,1°C. Řídící panel výtahu má 9 tlačítek s čísly od -1 do 7. Kalendář je stupnice času, pro každý rok jiná. Dny v něm mají více adres: dnes je „15.3.2007”, tj. „74. den roku 2007”, tj. „čvtrek 11. týdne roku 2007”. Žádné z těchto čísel neoznačuje časový bod, ale časový interval 24 hodin. Podobně adresa „20. století” označuje 100 let trvající interval od 1.1.1901 až do 31.12. 2000. Adresa 3. podlaží označuje prostor mezi podlahou třetího a podlahou čtvrtého podlaží.

Číslem 2 na číselné ose označujeme jeden bod. Někdy ale číslem 2 rozumíme první dva úseky osy, tedy úsečku od bodu 0 k bodu 2. Někdy číslem 2 rozumíme druhý úsek osy, tedy interval od čísla 2 k číslu 3. To nezřídka vede žáky k mylným představám.

<u>Příběh 3.2</u>. V první třídě stojí na krokovacím pásu Ema a dva kroky před ní Iva. Učitelka se ptá: „Jak jsou Ema a Iva vzdáleny od sebe? Žák Jan řekne: „Jednu značku“.

<u>Komentář</u>. Na nevhodnou otázku učitelky odpověděl Jan v podstatě správně. Učitelka ale chtěla odpověď „dva kroky“. Měla se ptát: „Kolik kroků má udělat Ema, aby stála vedle Ivy?“

Standardním modelem **cyklického adresování** je *kružnice*. Již od babylónských dob je dělena na 360 stejných dílů, *stupňů.* Stupeň je dělen na 60 *minut* a minuta na 60 *vteřin.* 1°= 60’, 1’ = 60”.

Žákův nástroj na měření úhlů je *úhloměr*. Tato stupnice měří velikosti úhlů od 0° do 180° s rozlišovací schopností 1°. Nejznámější cyklická stupnice je *ciferník* hodin. Je dělen na 12 dílů, *hodin*. Hodina se dělí na 60 *minut*, minuta na 60 *sekund*. 1 hod = 60 min, 1 min = 60 sec.

<u>Příběh 3.3</u>. Ve 4. ročníku žákyně Marcela útočí na učitelku: „Tady v učebnici je napsáno, že jeden stupeň je 60 minut (dívka ukazuje nápis 1°= 60‘). Jenže z 15 minut (ukazuje na hodinách) urazí velká ručička 90 stupňů. Tedy 6 stupňů za minutu (dívka píše 6°= 1‘).Tak jak to vlastně je?“

Výzva 3.6. Jak budete reagovat na útok Marcely z příběhu 3.3 v roli učitelky? Vyjasněte, co je příčinou domnělé matematické nesrovnalosti, na kterou Marcela poukázala. Vyjasněte vztahy mezi plynutím času a úhlem, který za danou dobu urazí velká resp. malá ručička hodin.

Mezi cyklickou a lineární stupnicí jsou tři základní rozdíly.

- Cyklická stupnice měří neomezeně. Ciferník hodin zobrazuje všechny hodiny minulé i budoucí. Lineární stupnice (například krejčovský metr) je omezena.
- Cyklické adresování je nejednoznačné. Témuž číslu stupnice odpovídá nekonečně mnoho úhlů, nebo časových okamžiků. (Dílku 40° odpovídají i úhly 400°, -320°,...)
- Cyklická stupnice má absolutní jednotku. Například 1°= 1/360 kružnice.

[1] K objevu nezávisle na sobě došli dva francouzští myslitelé, René Descartés (1596-1650) a Pierre Fermat (1601-1665)

V příloze 3.1. uvádíme příběhy 3.4 až 3.8, které se vztahují k číslu jako identifikátoru.

3.6. Od čísla k relaci a operaci

Zevrubně jsme diskutovali sémantické podoby a sémantická ukotvení přirozených čísel pomocí úloh 3.1 až 3.18 (z kap. 3.2). Tam byla naše pozornost zaměřena na sémantiku čísla a operace sčítání, odčítání, násobení i dělení i relace porovnávání i byly pouze okrajovou záležitostí. Teď letmo zaměříme pozornost na sémantiku relací a důkladněji budeme diskutovat sémantiku základních čtyř aritmetických operací.

Na 1. stupni základní školy se žák setkává se dvěma číselnými relacemi: *uspořádáním* a *dělitelností*. Frekventovaná je zejména relace uspořádání. Kostel je vyšší než radnice; do Plzně je dál než do Berouna; první přestávka je kratší než druhá a ta je kratší než třetí; atd. Relace dělitelnosti je na 1. stupni jen okrajová. Pouze jev sudosti a lichosti je zastoupen výrazněji.

Sémantika uspořádání je vázána na číselnou osu, která je položena nejčastěji vodorovně. Jazykově je propojena se stupňováním adjektiv, zejména na komparativ. Dělitelnost je propojena s rytmem.

Podstatně více pozornosti než relacím je na 1. stupni věnováno operacím. Jejich sémantická pestrost je dána pestrostí sémantických podob čísla. Například úloha Ú3.1. z kapitoly 3.2 vede na součet dvou stavů a její typ je tedy S + S = S(?). První stav je „3 kuličky v pravé ruce“, druhý stav je „2 kuličky v levé ruce“ a výsledný stav, na který se úloha ptá, je „5 kuliček dohromady“. Podobně typ úlohy Ú3.2 je S – OZ = S(?). Počáteční stav je „28 litrů vody v akváriu“, hledaný koncový stav je „25 litrů vody v akváriu“ a operátor změny je „odebral 3 litry vody“.

Výzva 3.7. Určete sémantický typ každé z úloh Ú3.3. až Ú3.9.

Úloha Ú3.10. je náročnější. V ní se vyskytují dva stavy. Počáteční S_p je počet kuliček před hrou a koncový stav S_k je „3 kuličky, které mi zůstaly“[1]. Problém je v tom, v jakém pořadí jsou oba stavy uvedeny na scénu. V úloze je nejdříve uveden operátor změny OZ „prohrál jsem dvě kuličky“, pak koncový stav S_k a nakonec v otázce počáteční stav S_p, který je „původně jsem měl 5 kuliček“. Kdyby úloha začínala větou „Měl jsem několik kuliček“, pak bychom typ úlohy psali $S_p(?) – OZ = S_k$. Jenže úloha začíná operátorem OZ, a tak ji zapíšeme $OZ + S_k = S_p(?)$. To odporuje skutečnosti, že OZ je vyjádřen slovem „prohrál“. Proto připustíme i zápis bez rovnítka: $[– OZ , S_k, S_p(?)]$[2]. Znaky OZ, S_k, S_p jsou uvedeny v tom pořadí, jak se v textu objevují; otazník je u znaku hledaného čísla. Mínus před operátorem říká, že ten je v textu vyjádřen slovem jako „prohrál“, „ztratil“, „ubylo“ apod. Neznamená to nutně, že v řešení úlohy se toto číslo odčítat.

Po technické úvaze se vraťme k podstatě slovních úloh. Z didaktického hlediska je potřebné, aby se značná sémantická různost úloh promítala do vyučování, protože

kvalitní vhled do ukotveného čísla získá žák tenkrát, když se bude dostatečně často setkávat s číslem jako počtem, veličinou, pořadím, operátorem změny, operátorem porovnání, adresou lineární (vztahující se k času, místu, objektu, události), adresou cyklickou v úlohách nejrůznějšího sémantického typu.

Výzva 3.8. (pro skupinu posluchačů) Vezměte některou sadu učebnic pro 1. až 5. ročník a udělejte přehled sémantických ukotvení čísel a sémantických typů ve všech slovních úlohách, které se v učebnicích vyskytují. Zamyslete se nad tím, o který sémantický typ úloh byste případně učebnice obohatili. Inspiraci k práci najdete v práci M. Strnadové (Příloha 3.2)

[1] Původně jsme různé stavy odlišovali pomocí dolního indexu: S_1 a S_2. Názornější odlišení navrhla Michaela Svobodová na semináři 12.3.09. Doporučila počáteční stav označit S_p a koncový stav označit S_k.

[2] Zápis navrhla Darina Šindelářová na přednášce dne 26. 2. 2011.

3.7. Slovní situace a tvorba úloh

Cílem kapitoly je naučit se tvořit slovní úlohy požadované náročnosti. Omezíme se na úlohy s jednou aditivní operací. Východiskem je *slovní situace s jednou aditivní operací*. Je to trojice výroků obsahující po řadě čísla X, Y a Z vázána vtahem X + Y = Z, nebo X – Y = Z.

Příkladem slovní situace s jednou operací je trojice výroků:

A. Měl jsem 3 kuličky. B. Vyhrál jsem 2 kuličky. C. Teď mám 5 kuliček. (*)

Čísla X = 3, Y = 2 a Z = 5 splňují vazbu X + Y = Z tj. 3 + 2 = 5. Číslo 3 z výroku A je počáteční stav S_p, číslo 2 z výroku B je operátor změny OZ a číslo 5 z výroku C je koncový stav S_k. Tato slovní situace je typu S_p + OZ = S_k, nebo typu [S_p, OZ, S_k], když použijeme zápis Šindelářové.

Z každé slovní situace, může vytvořit až 18 různých úloh. Začneme tím, že jedno z čísel situace utajíme. Tím získáme 3 základní úlohy.

Když v situaci (*) utajíme číslo 5, máme úlohu Ú3.3 typu S_p + OZ = S_k(?), tj. [S_p, OZ, S_k(?)].

Když v situaci (*) utajíme číslo 3, dostaneme úlohu typu S_p(?) + OZ = S_k, tj. [S_p(?), OZ, S_k]:

Ú3.3a. Měl jsem několik kuliček. Vyhrál jsem 2 kuličky. Teď mám 5 kuliček. Kolik kuliček jsem měl před hrou?

Když v situaci (*) utajíme číslo 2, dostaneme úlohu typu S_p + OZ(?) = S_k, tj. [S_p, OZ(?), S_k].

Ú3.3b. Měl jsem 3 kuličky. Několik kuliček jsem vyhrál. Teď mám 5 kuliček. Kolik kuliček jsem vyhrál?

Výzva 3.9. Uvedené tři úlohy mají různou náročnost. Ú3.3 je nejlehčí a Ú3.3b je nejnáročnější. Pokuste se najít faktory, které způsobují změnu náročnosti.

Z každé ze tří základních úloh můžeme vytvořit, teoreticky vzato, dalších 5 úloh tím, že změníme pořadí, jak čísla OZ, S_k, S_p vstoupí do úlohy. Například, když z textu úlohy Ú3.3a. první větu vypustíme, dostaneme zadání typu [OZ, S_k, S_p(?)]:

Ú3.3a‘.Vyhrál jsem 2 kuličky. Teď mám 5 kuliček. Kolik kuliček jsem měl před hrou?

Když informaci OZ dáme na konec textu, dostaneme typ [S_k, S_p(?), OZ]:

Ú3.3a“. Mám 5 kuliček. Kolik jsem jich měl před poslední hrou, ve které jsem vyhrál 2 kuličky?

Když z Ú3.3b druhou větu vypustíme, dostaneme úlohu typu [S_p, S_k, OZ(?)]. Když v této textaci prohodíme pořadí obou stavů, dostaneme úlohu typu S_k – S_p = OZ(?), tj. [S_k, S_p, OZ(?)]:

Ú3.3b‘. Mám 5 kuliček. Před hrou jsem měl 3 kuličky. Kolik kuliček jsem vyhrál?

Když dále přesuneme informaci OZ na první místo, máme typ [OZ(?), S_k, S_p]:

Ú3.3b“. Kolik kuliček jsem vyhrál, když jich teď mám 5 a před hrou jsem měl jen 3.

Výzva 3.10. Pokuste se naformulovat všech 18 slovních úloh vytvořených ze situace (*). Proč je formulace některých z těchto úloh nepěkná až násilná? Seřaďte vytvořené úlohy podle obtížnosti

Výzva 3.11. Výše uvedený rozklad vycházel z úlohy Ú3.3. Udělejte stejný rozklad, který bude vycházet z úlohy a) Ú3.10., b) Ú3.7., c) Ú3.9., d) Ú3.16., e) Ú3.8.

Naučili jsme se z jediné jednoduché slovní situace vytvořit mnoho různorodých úloh. V dalším se podíváme na dva didakticky závažné typy úloh: úlohy, v nichž se objevují pouze operátory, (jako Ú3.8). a úlohy s antisignálem (jako Ú3.10).

Čtyři typy slovních úloh jsou didakticky závažné, neboť dělají žákům potíže. Prvním jsou úlohy ve kterých se vyskytují nadbytečná čísla, jako Ú3.12, nebo Ú3.14. Druhým jsou dynamické úlohy, zejména úlohy o věku, které jsme zkoumali v MŘÚ. Třetím typem jsou úlohy pouze s operátory a čtvrtým typem úlohy s antisignálem. Poslední dva typy probereme podrobněji.

3.8. Didaktické řešení náročné situace ± O ± O = ±O

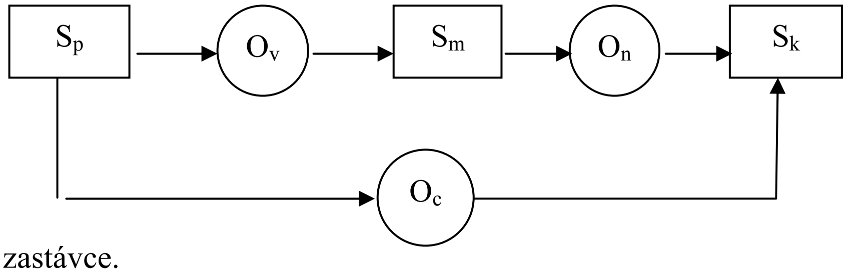
Číslo jako stav nebo adresa je soběstačné. Informace „Krychle má 6 stěn“, nebo „Jan Werich se narodil v roce 1905“ jsou jasné. Řeknu-li ale, že Ema je *o 2 cm vyšší* než Kim, pak jsou zde *virtuálně* přítomna další dvě čísla: výška Emy a výška Kima. Jsou to mrtvé parametry situace, ale žák je může vnímat jako potřebné. Žák může mít pocit, že vazbě *o 2 cm vyšší* nelze rozumět, pokud aspoň jedno z virtuálně přítomných čísel nezná. To mu znesnadňuje vhled do situace.

Operátor změny má oproti operátoru porovnání překážku navíc. Operátor porovnání je statický a dá se často uchopit obrázkem. Situaci *Ema je o 2 cm vyšší než Kim,* nakreslím docela snadno. Naproti tomu dynamickou a pomíjivou situaci *z autobusu vystoupili 3 lidé*, již tak snadno nakreslit nelze (zejména když je v úloze propojena na další operátory změny).

Podívejme se na jednu úlohu sémantického typu -O + O = O(?):

<u>Ú3.25.</u> Z autobusu na zastávce vystoupilo 8 lidí a pak do něj 10 lidí nastoupilo. Jak se změnil počet cestujících v autobuse?

Situaci popisuje graf. Hlavní jsou pouze tři operátory:



O_v = počet lidí kteří vystoupili
O_n = počet lidí kteří nastoupili
O_c = celková změna počtu cestujících v autobuse na této zastávce.

V situaci jsou virtuálně přítomny i tři stavy: S_p = počet cestujících při příjezdu na zastávku,
S_m = mezi-stav, tj.počet lidí v autobuse po vystupování a před nastupováním a
S_k = je počet lidí v autobusu při jeho odjezdu ze zastávky.

Jak naučit žáky řešit tyto úlohy? Když se jedná o OP, většinou stačí názorný obrázek. U OZ máme dobré zkušenosti s doplněním parametru a dramatizací. Poučný je přenos OZ → OP.

<u>Doplnění stavu jako parametru</u>. Žák řeší úlohu 3.25. Dožaduje se počátečného stavu. Učitel mu vyhoví. Například řekne, že S_p = 12. Žák najde S_m = 4, S_k = 14 a nakonec i O_c = 2. Učitel žáka pochválí a počáteční stav změní; například S_p = 16. Žák najde S_m = 8, S_k = 18 i O_c = 2. Učitel opět změní S_p a žák opět najde O_c = 2. Nakonec (někdy již u druhé úlohy, jindy až u páté) žák objeví, že pokaždé to bude O_c = 2. Ne vždy ale žák ví, proč je to tak. Ale již zná metodu, jak tyto úlohy řešit: stačí zvolit si několik různých vstupních stavů a když u všech bude odpověď stejná, pak hledaný operátor mám.

<u>Dramatizace</u>. Operátorovou sémantickou situaci zahrajeme, nebo namodelujeme v některém ze známých prostředí: Krokování, nebo Autobus. Přitom můžeme upravit i čísla úlohy. Kolegyně M. Ptáčková učí na malotřídní škole a má 5 prváků a 8 druháků. Sehrála se žáky divadlo o vystupování a nastupování s čísly do 6 a již po prvním představení jeden druhák přesně rozuměl jak úlohu řešit. Po dalších představeních to zvládly postupně i další děti (až na 2 prváky).

<u>Přenos OZ → OP</u>. Úlohu o změně přeneseme do situace o porovnání, co bývá náročné, ale pomáhá žákům hluboce proniknout do operátorových situací. Tak Ú3.25 změníme na úlohu

<u>Ú3.26.</u> Boris je o 8 cm nižší jako Adam a Cyril je o 10 cm vyšší než Boris. Porovnej výšku Adama a Cyrila.

V příloze 3.3 jsou v příběhu 3.9 uvedena dvě žákovská řešení úlohy Ú27 i s komentářem. Ukazují náročnost operátorových úloh. Zde jsou i výzvy 3.12 a 3.13.

3.9. Antisignál jako diagnostický nástroj

Příběh 3.10. (Převzato z [DŠM], s. 129) Libor a Lenka (2. třída) písemně řeší následující úlohu

Ú3.28. Hoch prohrál 4 kuličky a zbylo mu 7 kuliček. Kolik kuliček měl před hrou?

Řešení Libora: 7 – 4 = 3. *Hoch měl před hrou* 3 *kuličky.*
Řešení Lenky: ~~*Kuliček měl*~~ *Hoch měl* 12 *kuliček. Před hrou.*

Nedlouho po napsaní testu experimentátor (Ex) hovořil s oběma dětmi. Po klimatickém úvodu následovala tato debata, u které každé dítě mělo před sebou svoje písemné řešení úlohy.

Ex 3: *Libore, hráváš kuličky? A ty, Lenko?*
Libor 2: *Jo, hrávám.*
Lenka 2: *Koukám když kluci hrají.*
Ex 4: *Dokážete mi vysvětlit, jak jste to počítali? Libore?*
Libor 3 (nejistě až bojácně): *Ten hoch prohrál. Bylo třeba odečíst.*
Lenka 3: *Nemněl hrát, nebyl by prohrál. Měl by o čtyři kuličky víc. Měl před hrou dvanáct* (děvče se na vteřinku zarazilo) *ne, jedenáct To jsem se spletla. Má být jedenáct.*
Ex 5 (k Liborovi): *Lenka říká jedenáct, ty říkáš tři. Tak jak to vlastně je?* (Hoch mlčel)

Oba žáci se dopustili chyby. Lenka v součtu 4 + 7 = 12, Libor ve volbě operace. Lenka řešila úlohu s porozuměním. Uměla modelovat situaci ve své představě. Dopustila se numerické chyby a tu odstranila při opakovaném výpočtu.

Liborova chyba je kvalitativně jiná a daleko vážnější. Týká se podstaty řešení. Libor si o situaci úlohy nevytvořil žádnou představu. Vzal čísla vystupující v textu úlohy a odečetl je, protože v textu úlohy je slovo „prohrál“, kterému odpovídá odčítání. Libor postupoval formálně.

Způsob, kterým Libor při řešení postupoval, je založen na asociaci

slovo, slovní spojení, znak ↔ řešitelský postup (*)

Řešitelskou strategii, která je založena na asociaci (*) nazveme *strategie signálu.* Slovo, které v úloze vystupuje v asociaci (*) nazveme *signál* resp. *antisignál*.

V běžném živote často používáme signály. Znak M v trojúhelníku říká „stanice metra“. Prstem na rtech žádám ticho. Zelená na semaforu říká „můžeš jet/jít“. Signály urychlují komunikaci. Používáme je i v matematice. Například řekneme „řešte rovnici“ a říkáme tím „najděte všechna čísla z daného oboru, která po dosazení do rovnice za neznámou dají pravdivý výrok.“

Signál však může být i nositelem nedorozumění a omylů. Strategie signálu je účinná, ale někdy vede k chybě. Takový příklad jsme viděli výše. V řešené úloze slovo „prohrál“ je antisignál a Libor si to neuvědomil. Reedukace je jednoduchá. Nic nebudu Liborovi vysvětlovat. Dám mu 3 kuličky (to byl jeho výsledek) a úlohu s ním odehraji. Hoch hned zjistí, že když má jen 3 kuličky, nemůže prohrát 4. Povzbudím jej, aby si tedy žádal kuliček více. Řekněme, že hoch požádá o 5 kuliček. Dostane je. „Prohraje“ 4 a zůstane mu jen 1 kulička. Tak to je opět málo. Libor si řekne o 10 kuliček. Má je mít. Teď mu ale po prohře zůstane 6 kuliček. Libor se zamyslí a řekne *No jó, chci jich sedm*. Libor pochopil, jak úlohu řešit.

Úlohy s antisignálem mají silnou diagnostickou hodnotu. Spolehlivě ukáží, zda žák slovní úloze rozumí, nebo ne. Proto se tyto úlohy stále častěji objevují v testech u přijímacích pohovorů. Učiteli, který chce aby jeho žáci uměli řešit úlohy s antisignálem dáme jednoduchou a účinnou radu: **používejte dramatizaci, kreslete obrázky a schémata, tvořte tabulky, modelujte.**

Výzva 3.14. Vytvořte úlohu s antisignálem pro situaci typu a) [S, S, S], b) [S, O, S], c) [A, -O, A], d) [O, -O, O].

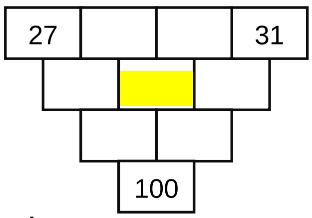
3.10. Číslo v aritmetické struktuře

Poslední kapitola je pouze oknem do problematiky didaktiky aritmetické struktury.

Když se svět aritmetiky dítěte začne osamostatňovat od sémantické opory začne dítě řešit úlohy jen pomocí čísel. Jestliže ještě před měsícem na moji otázku Kolik je tři a jedna? můj vnuk odpověděl, že tři prsty a jeden prst jsou 4 prsty, tak dnes již oporu prstů nepotřebuje. Tradiční edukační strategie se teď začne cíleně zaměřovat na nácvik spojů a žákům předkládá sloupečky úloh typu 3 + 6 = ? 11 – 3 = ?, atd. Pokud žáka baví tyto úlohy řešit, vše je v pořádku. Jenže záhy se projeví, že takový nácvik vítá pouze část žáků. Někteří se nacvičované spoje naučí rychle a stereotypní opakování známého je pro ně nudou až otravou. Povzbuzuje je pouze sociální úspěch, který zde zažívají, ale jejich matematický růst stagnuje. Na druhé straně pro některé žáky je nácvik frustrující. Vidí, že jejich spolužáci počítají rychle a bezchybně a jim to nejde. I oni by chtěli být úspěšní, ale ať se učí jak se učí, jsou pozadu. Dospělí vysvětlují tuto neschopnost žáka naučit se základním aditivním spojům jako nedostatek buněk na matematiku. To je trestuhodný předsudek.

Ani žák, který je za správnost a hbitost počítání chválen, ani žák, který je kárán, že to již dávno měl znát, není nácvikem veden k rozvíjení matematického myšlení. Učitel, který tuto edukační strategii praktikuje, postupuje v dobré víře, že dokonale zvládnuté spoje jsou základem pro další matematický rozvoj. To ale není pravda. Svědčí o tom případy slabých žáků, z nichž se stali později dobří matematici i případy žáků vynikajících, kteří již s nástupem zlomků a záporných čísel přestali v matematice vynikat, protože ji de facto nikdy nerozuměli.

Upozornili jsme na nedostatky tradiční edukační strategie zaměřené na nácvik pomocí „sloupečků“. Jeho hlavním nedostatkem je izolace nácviku od dalších myšlenkových pochodů. Když ale vytvoříme úlohy, jejichž řešení vyžaduje mnohé počítání, budou žáci hodně počítat, ale tato práce nebude pro ně ani nudná, ani frustrující, protože jejich cílem bude vyřešení nějakého problému a rychlost práce si budou určovat sami. Ilustrací je úloha určená žákům 4. ročníku:



Ú3.29. Součtový trojúhelník na obrázku má více řešení.
Najděte to řešení, u kterého je číslo v žlutém poli
a) největší; b) nejmenší.

Slabším žákům učitel poradí, aby vedle čísla 27 dali číslo 0, nebo 1.
Žáci řeší úlohu metodou pokus-omyl a najdou mnoho řešení. Ale
Číslo ve žlutém poli je ve všech řešeních stejné. Je to 14. To je překvapení,
Které vede špičkové žáky ke hledání příčin tak zajímavého jevu. Učitel těmto badatelům poradí,¨
aby řešili podobnou úlohu, ve které číslo 100 zmenší na 97, potom na 94, potom na 91, atd.

Výzva 3.15. Indický matematik D. R. Kaprekar (1905 – 1986)[1] vymyslel zajímavou hru s odčítáním. Prozkoumejte tuto hru z hlediska matematického i didaktického.

Kaprekarova posloupnost. Zvolme 4místné číslo, například 7316. Z něj vytvoříme další dvě čísla tak, že číslice tohoto čísla uspořádáme sestupně a pak vzestupně. Dostaneme čísla 7631 a 1367. Najdeme rozdíl těchto čísel. Je to číslo 6264. I s ním uděláme stejnou operaci. Uspořádáme jeho číslice sestupně a vzestupně, dostaneme čísla 6642 a 2466. Jejich rozdíl je číslo 4176. Opět proceduru zopakujme, bude 7641 – 1467 = 6174. Po dalším opakování opět dostaneme číslo 6174. Dále nemá smysl pokračovat, protože číslo 6174 se bude opakovat.

Jiný příklad: Volme a_1 = 5819. Pak a_2 = 8262 (9851 – 1589), a_3 = 6354 (8622 – 2268), a_4 = 3087 (6543 – 3456), a_5 = 8352 (8730 – 378), a_6 = 6174 (8532 – 2358), atd.

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Dattaraya_Ramchandra_Kaprekar
http://plus.maths.org/issue38/features/nishiyama/index.html

Příloha 3.1. Příběhy vztahující se k identifikátoru

Příběh 3.4. Vracím se do svého hotelového pokoje číslo 511. Na chodbě je tma. Nouzové světlo mi dovolí přečíst jen čísla dvou krajních pokojů: 501 a 502. Hmatám podél zdi a počítám dveře, kolem kterých procházím: 503, 504,..., 511. Jsem u mého pokoje. Kdyby na tmavé chodbě, mezi pokojem 503 a 511 byly nečíslované dveře WC a já to nevěděl, dobýval bych se do pokoje 510.

Komentář. Příběh popisuje častou situaci, kdy vazba mezi soubory čísel a věcí je pouze přibližná. Výzva k žákům, aby hledali podobné narušení adresování, padne vždy na úrodnou půdu aspoň u několika žáků třídy. Nejčastěji žáci uvádí čísla domů na ulici.

Příběh 3.5. Petr jde navštívit Janu. Ta bydlí ve třetím patře. Petr se zastaví před domem a odpočítá si patra. Vidí, že na balkóně ve třetím patře se suší Janino tričko, která zná. Petr vstoupí do výtahu a zmáčkne knoflík u čísla 3.

Komentář. V popsané situaci nejprve Petr odpočítáním (tedy procesem) identifikuje balkon třetího patra jako pořadí. Pak ve výtahu již mačká knoflík (tedy koncept) u čísla 3, které je adresou patra. Tento rozdíl je pro odlišení pořadí a adresy příznačný: pořadí je vnímáno procesně, a adresa konceptuálně.

Příběh 3.6. Žáci ve 2. ročníku mají za úkol postavit z krychlí 5patrovou věž. Jan udělá věž z 5 krychlí a Tobiáš ze 6. Jan upozorňuje Tobiáše, že tam má o jednu krychli navíc. Tobiáš odpoví, že naopak Jan tam má o jednu krychli méně, protože zapomněl na přízemí.

Komentář. Popsané nedorozumění je zásadní. Je dáno zavádějícím slovem „patro“. Budeme proto používat slovo „podlaží“. Věž, která má 5 podlaží je sestavena z 5 krychlí. Tedy i příběh 3.5 měl používat slovo podlaží a ne slovo patro.

Příběh 3.7. V Motole se ptá pan Vesničan pana Pražáka jak se dostane na Výtoň? Pan Pražák ochotně radí: „Pojedete čtyřkou až na Palackého náměstí a tam přesednete na trojku a pojedete proti proudu Vltavy." Pan Vesničan říká pro sebe „Čtyřkou a pak trojkou? Proč tak? To já pojedu raději rovnou sedmičkou." Pan Vesničan si počkal na sedmičku a ta jej dovezla na Výtoň.

Komentář. Představa, že s čísly tramvajových linek lze smysluplně aritmeticky operovat, je úsměvná. Na podstatě označení linek by se nic nezměnilo, kdyby zde místo čísel byla písmena (jak je tomu u metra), nebo kdybychom tato čísla libovolně proházeli. Kdybychom vzájemně přejmenovali linky 3 a 7, pak by deformovaná úvaha pana Vesničana by kolabovala.

Příběh 3.8. Telefonní seznam podniku XYZ má osm položek abecedně seřazených: garáž 05, osobní 27, podatelna 16, ředitel 09, sekretářka 23, sklad 11, ústředna 14, vrátnice 13. Telefonní čísla vnitřních linek podniku jsou kódy jednotlivých oddělení. Mají funkci jmen. Číslo 23 je zde "telefonní jméno" sekretářky. Nápis SEKRETÁŘKA na dveřích její kanceláře je její funkční jméno. Chci-li mluvit telefonem se sekretářkou, vytočím 23. Toť vše. Nic dalšího se k číslu 23 nevztahuje. Ani poloha její kanceláře v budově, ani významnost postu. Když číslo zapomenu, musím jej opět vyhledat v seznamu.

Jestliže však zřizovatel linek měl svůj systém přiřazování čísel, jsou pro něj tato čísla adresami. Pro toho, kdo tuto souvislost nevidí, jsou to jména.

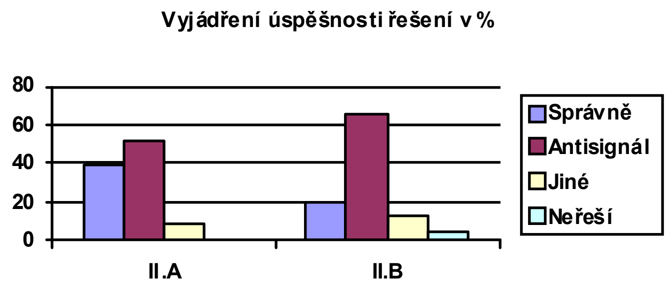
Příloha 3.2. Podrobnější pohled na antisignál

Následující text je převzat z diplomové práce Miluše Strnadové (2001) a mírně upraven.

V listopadu 2002 jsem ve dvou druhých třídách zadala následující úlohu:

<u>Úloha 2.3a</u>. Adam má nyní 16 známek. Z toho 6 mu jich dala Iva. Kolik měl původně známek?

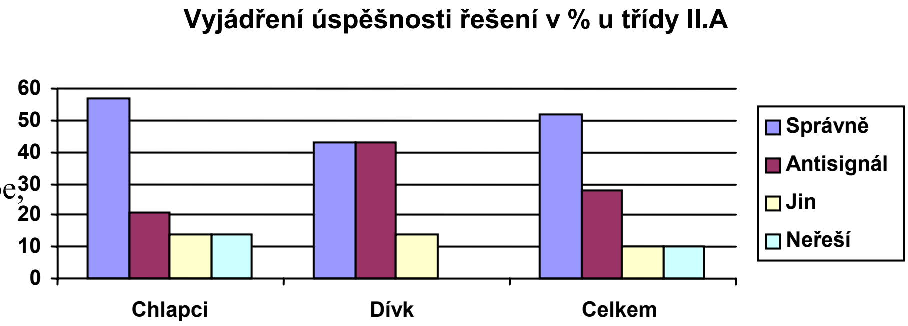
Výsledky experimentu jsou zobrazeny na grafu.
Třída II.A – 23 žáků.
Třída II.B – 26 žáků.



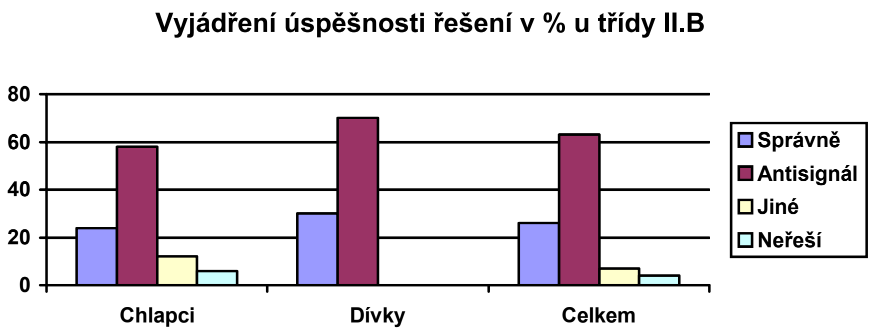
V každé třídě více než polovina žáků chybovala v důsledku použití strategie antisignálu.
Úlohu jsem znovu zadala v únoru 2003. Experimentu se zúčastnili žáci stejných tříd. Ve třídě II.A to bylo 21 žáků, ve třídě II.B 27 žáků.
Experiment jsem rozšířila o 2. třídu ZŠ ve Lhotě, kde psalo 11 žáků. Zvolila jsem úloha:

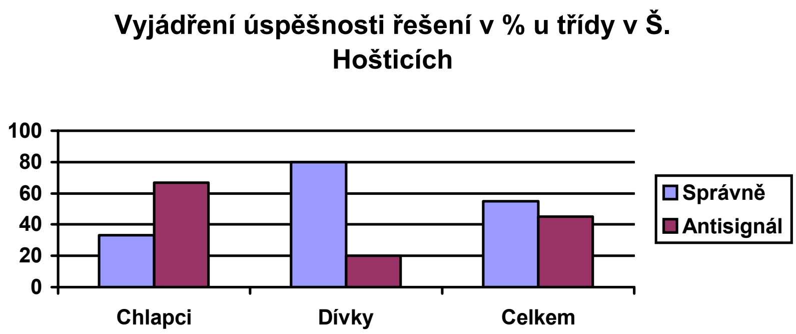
<u>Úloha 2.3b</u>. Adam má nyní 46 známek. Z toho 6 mu jich dala Iva. Kolik měl původně známek?

U třídy II.A, která v listopadu dopadla lépe, došlo k dalšímu růstu úspěšného řešení, zatímco

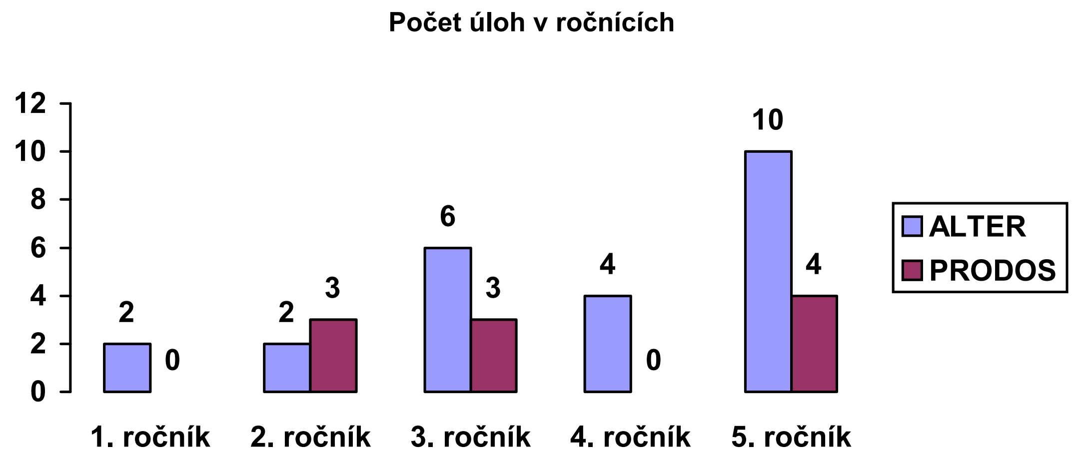


u třídy II.B stále převažuje význam antisignálu. Je zajímavé, že v obou třídách žádná dívka řešení nevzdala.





Kolegyně Strnadova
udělala kompletní rešerši sady učebnic matematiky pro 1. stupeň nakladatelství Alter a Prodos.
Její graficky zachycené zjištění nepotřebuje komentář.



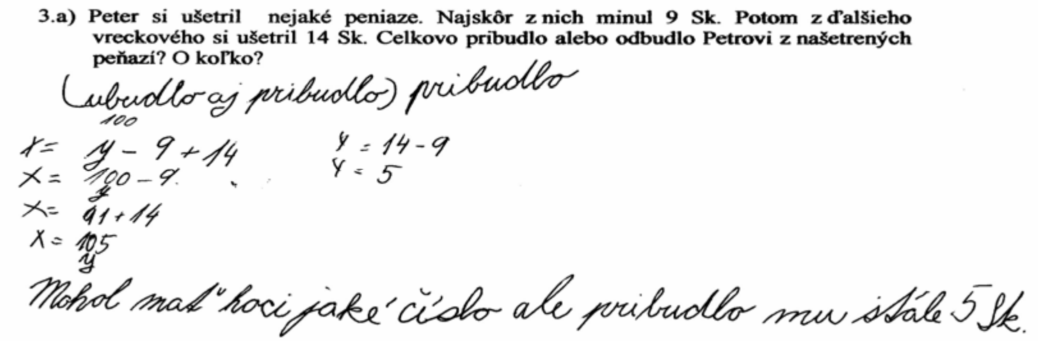
Následující text je převzat z diplomové práce Miluše Strnadové (2001) a mírně upraven.

V listopadu 2002 jsem ve dvou druhých třídách zadala následující úlohu:

Příloha 3.3. Více o operátorové situaci

Následující experimenty i některé úvahy jsou vzaty z doktorské práce kolegyně J. Ruppeldtové. Jedná se o dvě žákovská řešení stejné úlohy. Eva našla správné řešení. Klíčovou roli zde hrálo zjištění, že výchozí stav je mrtvý parametr. Druhý případ ukáže, jak Filip, který v podstatě řešení našel, nedokázal jej jasně formulovat. Žádné ze zcela zmatených řešení, z archivu J. Ruppeldtové neuvádíme, protože nám nejde o to poukázat na beznadějné případy, ale na situace, která naznačují, možná řešení didaktického problému.

Příběh 3.9. Dva žáci 4. ročníku, Eva a Filip řešili stejnou úlohu. Řešení Evy:



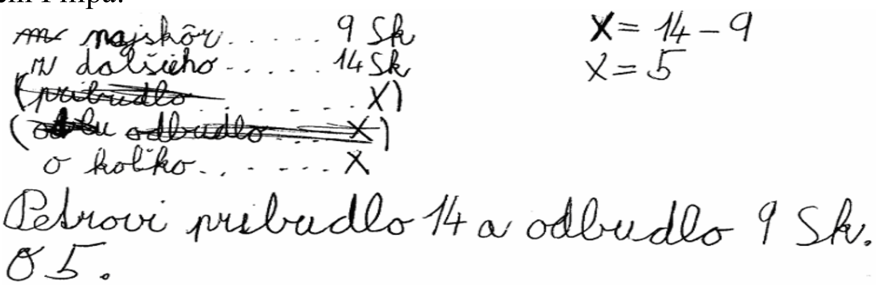
3.a) Peter si ušetril nejaké peniaze. Najskôr z nich minul 9 Sk. Potom z ďalšieho vreckového si ušetril 14 Sk. Celkovo pribudlo alebo odbudlo Petrovi z našetrených peňazí? O koľko?

(ubudlo aj pribudlo) pribudlo

x = y – 9 + 14   y = 14 – 9
x = 100 – 9   y = 5
x = 91 + 14
x = 105
Mohol mať hoci jaké číslo ale pribudlo mu stále 5 Sk.

Úvaha Evy. První řešení („ubudlo aj pribudlo“) zamítla, když pochopila, co od ní úloha žádá. Vztahem x = y – 9 + 14 dobře uchopila situaci: x = S_k je počet cestujících na konci a y = S_p je počet cestujících na začátku. Moudře se rozhodla za y zvolit pevné číslo. Zvolila y = 100. Pak celý děj krok za krokem počítala, přičemž znak x měnil svůj význam: v nápisu x = 100 – 9 je to stav S_m, v nápisu $x = 91 + 14$ i nápisu $x = 105$ je to stav S_k. Zřejmě teď došlo k AHA efektu: Eva poznala, že stavy jsou pouze mrtvé parametry. Proto písmenu x, které představuje „to co hledám“ dává jeho pravý význam: je to operátor O_c. Pak již rychle Eva najde výsledek $x = 14 – 9$, $x = 5$. Z poslední věty čiší radost i sebevědomí. Eva objevila, že na volbě vstupního stavu nezáleží.

Řešení Filipa:



najskôr . . . . . 9 Sk
ďalšieho . . . . 14 Sk
(~~pribudlo~~ . . . . X)
(~~odbudlo~~ X)
o koľko X

x = 14 – 9
x = 5

Petrovi pribudlo 14 a odbudlo 9 Sk.
o 5.

Úvaha Filipa. Pět nápisů v levém sloupci ukazuje, jak namáhavě se hoch propracovává k porozumění úloze. Nakonec zjistí, že to, co hledá je číslo x vyjadřující změnu (o koľko). Číslo x najde ($x = 14 – 9$, $x = 5$), ale nedokáže formulovat jasnou odpověď: „pribudlo 5“. Opíše kus zadání a zakončí výkřikem „o 5“. Zřejmě proto, že opakovaně slyší: „u porovnávání se píše *o*“.

Výzva 3.12. Popište tu sémantickou situaci typu [OP, OZ, OP] ze které byla vytvořena Ú3.8. Vytvořte z této situace úlohy [OP, OZ(?), OP] i [OP(?), OZ, OP]. Úlohy dejte řešit dětem, nebo známým a evidujte způsob řešení i potíže, které jste o řešitele pozoroval(a).

Výzva 3.13. Dána je operátorová úloha Ú3.26 typu [-OP, OP(?), OP]. Převeďte ji na úlohu typu [OZ, OZ(?), OZ].

Ú3.27. Jana bydlí 4 podlaží níže než Lenka. Zjistěte, zda bydlí výše Klára nebo Lenka a o kolik pater, když víte, že Klára bydlí 3 podlaží nad Janou.

Příloha 3.4 Reakce učitele na různost názorů žáků

Různé životní zkušenosti žáků vedou k jejich odlišným názorům na některé jevy. Skutečnost, že ve třídě zazní různé názory žáků je dobrým vysvědčením pro učitele. Ukazuje totiž, že jeho žáci nejsou pasivní konzumenti poznatků, ale jejich aktivní spolutvořitelé. Názory žáků nezřídka zaskočí i učitele. Jak má reagovat? Odpovíme, až se podíváme na několik příkladů.

Příběh 3.11. Druhý ročník. Učitelka se ptá, kolika různými způsoby lze napsat číslo 4 jako součet několika čísel. Na tabuli jsou již zápisy: 2 + 2, 1 + 3, 3 + 1, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2 a 1 + 1 + 1 + 1. Kristýna řekla *To jsou všechny. Je jich sedm.* Aleš namítá, že 1 + 3 a 3 + 1 je totéž a že jsou tam vlastně pouze 4 doopravdy různé způsoby. Hugo přiběhne k tabuli a píše ještě další způsob 4 + 0. Vilma pak dopíše ještě 0 + 4 a 2 + 2 + 0. Některé děti to odmítají.

Příběh 3.12. Třetí ročník. Žáci probírají termíny součet a rozdíl. Vznikne spor o to, zda -2 + 7 je součet nebo rozdíl. Michal: *Když přičítám, je to součet.* Dan namítá: *Podle tebe je pak* -2 – 7 *rozdíl; ale jak to vypočteš? Sčítáš 2 a 7 a dáš před to mínus. Ta čísla sčítáš, takže je to součet.*

Příběh 3.13. Čtvrtý ročník. Jirka má o matematiku veliký zájem. Díky kalkulačce rozumí desetinným i záporný číslům. Jednou přišel za učitelkou s tím, že zjistili, že 4,1 = 4,2. Použil k tomu dělení se zbytkem, konkrétně vztahy 21:5 = 4(1) a 41:10 = 4(1). V obou případech je výsledek dělení se zbytkem 4, zbytek 1. Tedy 21:5 = 41:10. Odtud 4,2 = 21:5 = 41:10 = 4,1. Jak to vlastně je?

Příběh 3.14. Pátý ročník. Erika se od bratra dověděla, že prý 0,99999999… = 1 Teď se ptá učitelky, zda je to pravda. Většina žáků říká, že je to blbost. Erika ale dává argument svého bratra: kdyby bylo 0,99999…. < 1, pak bychom museli umět napsat číslo 1 – 0,9999999… Tak to číslo napiš!

Komentář. Příběh 3.11 je o konvenci. Je na nás domluvit se, jak budeme chápat termín „různé způsoby“. Každý z diskutérů má svoji interpretaci a žádná z nich není lepší nebo horší.

Příběh 3.12 odhaluje slabé místo terminologie, které (podle nás dosti zbytečně) věnujeme mnoho času. Výraz -2 + 7 je součet záporného čísla -2 a kladného čísla 7. Žák ale nápis vnímá jako výzvu k počítání a tam přece od 7 bude odčítat 2. Když učitel autoritativně řekne, že je to součet, vznikne v hlavě žáka chaos – „to je takový součet u kterého odčítám“.

Příběh 3.13 je rafinovaný. Vede žáky k náročnému objevu: U dělení se zbytkem neplatí, že to co je na straně levé je i na straně pravé. Existuje mnoho levých stran, které dají stejnou pravou stranu. Například 9:2, 13:3, 17:4, 21:5, … dávají stejný výsledek 4(1). Jirka po dvou letech přišel věci na kloub. Stalo se tak, když věc osvětloval mladšímu bratrovi Igorovi. Jirka řekl *Já jsem kluk i ty jsi kluk. Souhlasíš?* Bratr souhlasil a Jirka pokračoval: *Tak to napišme* a napsal Jirka = kluk, Igor = kluk. *Z toho ale plyne, že* Jirka = kluk = Igor. *Ty jsi já. To je blbost. Kde jsem udělal chybu? Když jsem prohodil* Igor = kluk *na* kluk = Igor. *Tak to máš i s tým dělením. Je pravda, že* 9:2 = 4(1), *ale když to prohodím na* 4(1) = 9:2, *tak to již pravda není.*

Příběh 3.14. Myšlenkově velice náročná situace, protože se v ní objevuje nekonečno. Matematik umí dokázat, že zde platí rovnost. Důkaz: označme x = 0,99999… Pak 10x = 9,99999…. Obě rovnosti odečtěme a dostaneme 9x = 9. Odtud x = 1. Takový důkaz není osvětlením. Nesnímá z čísla 0,99999…. mystérium nekonečna. Žák, který takový důkaz vidí může říct stejně jako kdysi Georg Cantor „vidím, ale nevěřím“. A to je nejlepší reakce žák. Předznamenává, jeho další úsilí pochopit jak to s tím nekonečnem je. Bude hledat další příklady: jak Achilles honí želvu, jak najít nejmenší kladné číslo, jak zjistit obsahu kruhu přes obsahy vepsaných n-úhelníků…

Závěr. Naše rada učiteli, jak reagovat. Učitel pochválí autora myšlenky a vyzve třídu k diskusi. Diskusi řídí, ale přispívá do ní minimálně. Diskuse může trvat dny, týdny, měsíce i roky. Žáky to obohacuje více než učení se imitací nebo reprodukcí, protože, jak jsme uvedli již v 3.1. kvalitu matematických znalostí žáka neurčuje objem převzatých vědomostí, ale narůstající porozumění schématům k nimž se žák dopracovává konfrontací různých názorů

Příloha 3.4. Vzorové úlohy pro test

T1. Ve třetím ročníku chcete žáky během týdne připravit na řešení úlohy *Evě jsou 3. Až jí bude tolik, co je dnes Danovi, bude Danovi 19. Kolik je dnes Danovi?* Žáci se ještě s prostředím Krokování , Schodů ani s hrou na boha Chrona nesetkali. Jak budete postupovat?
[Vhodnější by bylo seznámit žáky nejprve s krokováním a se schody, ale když není čas, hned je seznámím s hrou na boha Chrona. Na podlahu položím krokovací metr jako jeviště. Adama postavím na číslo 4 a řeknu. „Adamovi jsou 4 roky (co asi vyvolá smích). Blanko postav se na jeviště tak, že ti bude 6 let“. Blanka (případně s pomocí spolužáků) se postaví na číslo 6. Řeknu : „Jsem řecký bůh času, Chronos. Když řeknu ‘jeden rok uplynul, teď ’ Adam i Blanka zestárnou o jeden rok, tj. pokročí o jeden rok vpřed“. Tímto způsobem se žáci seznámí s hrou. Vyřešíme několik úloh. Například: 1) Kolik je Cyrilovi, když mu za 5 let bude 8? 2) Za kolik let bude Adamovi a Blance dohromady 20 let? 3) Kolik bude Blance, když Adam bude tak starý jako je Blanka dnes? Roli Chrona svěřím žákům. Ti budou tvořit i úlohy. Hru hrajeme denně, poprvé asi 20 minut, pak pokaždé asi 10 minut. Po 3-4 lekcích myslím, že žáci budou schopni zcela samostatně danou úlohu vyřešit.]

T2. Výzva 3.6.
[Pochválím Marcelu, že objevila zajímavý problém. Obrátím se na třídu, zda to někdo umí vysvětlit. Když se někdo najde sleduji vysvětlování a zasáhnu pouze, když se diskuse dostane do slepé uličky. Když nikdo ze třídy nebude umět Marcele poradit, zeptám se, co je jedna minuta. Diskuse odhalí dvojí význam termínu: jednotka času i jednotka úhlu. Pak dám žákům úlohu zjistit, jaký úhel urazí malá a jaký velká ručička za čas a) 1 hod, b) 30 min, c) 1 min, d) ½ min. Dále řeknu, že termín „vteřina“ se někdy chybně používá ve smyslu „sekunda“. Poučím žáky (jedná se nikoli o matematickou myšlenku, ale o informaci o označení) že vteřina je jednotka úhlu, je to 1/60 stupně. Nakonec dám několik úloh i o sekundách a vteřinách – převod času na úhle urazený velkou/malou ručičkou.]

T3. Situace je dána trojicí výroků
A. V akváriu bylo 31 l vody. B. Z akvária odebrali 3 l vody. C Teď je v akváriu 28 l vody. Vytvořte z této situace úlohy typ a) [S_p, OZ, S_k(?)], b) [S_k(?), S_p, OZ], c) [$S_{k,}$ S_p(?), OZ] Výzva

Příloha 3.5. Vzorové úlohy pro mini-test

Vzor (druhá úloha má dvě varianty)
1. Ve větě „Pátého výletu, jehož délka byla 8 km se účastnilo celkem 21 osob, z toho o 7 více dětí než rodičů.“ jsou čtyři čísla. Z nich aspoň jedno je a) skalár, b) operátor změny, c) adresa cyklická, d) frekvence.

2a. Cyklická stupnice i lineární stupnice a) měří neomezeně, b) má absolutní jednotku, c) má jistou rozlišovací schopnost, d) je z obou stran omezena.

2b. Jsou napsány tři sémantické typy aditivního vztahu: S – S = OP, A + A = S, A + S = A. Z nich lze realizovat a) všechny, b) právě 2, c) právě 1, d) žádný.