

Cvičení - Entropie náhodných veličin, sdružená, podmíněná a vzájemná entropie

Michal Kupsa, Štěpán Holub

Zadání:

1. Mějme hod kostkou na které padá každé číslo stejně pravděpodobně a náhodnou veličinu X a Y , kde X nabývá hodnot S a L podle toho, zda padla sudá, nebo lichá, Y nabývá hodnot M nebo V podle toho, zda padla malá, nebo velká hodnota (1-3 vs 4-6).
 - Zapište tabulky pro $P_{X,Y}$, P_X , P_Y , $P_{X|Y}$, $P_{Y|X}$.
 - Spočítejte všechny možné entropie, t.j. entropii X a Y , sdruženou, vzájemnou a obě podmíněné. Pro výslednou prezentaci můžete volit Vennův diagram (výsledek zjednodušte na logaritmy prvočísel).
 - Spočítejte entropii $H(X|Y = M)$.
2. (Konkrétní Ω) V předchozím příkladu zvolte konkrétní $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ s pravděpodobností $\mathbb{P}$ definovanou předpisem $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{6}$, pro všechny podmnožiny $A \subseteq \Omega$. Definujte X a Y jako funkce na Ω a vynesete $\mathfrak{F}_X$, $\mathfrak{F}_{X|Y}$, $\mathfrak{F}_{X,Y}$ a $\mathfrak{F}_{X:Y}$ do grafu, kde Ω je nyní přirozenou součástí reálné osy x .
3. Dokažte $s(X) \subseteq s(f(X))$, $s(P_{X,Y}) \subseteq s(P_X) \times s(P_Y)$, $s(X, Y) \subseteq s(X) \cap s(Y)$.
4. Spočtete $H(X|X)$ a $I(X : X)$.
5. Spočtete $H(X|(X, Y))$ a $I((X, Y) : X)$.
6. Platí rovnost $H((X, Z) | (X, Y)) = H(Z | Y)$?
7. Platí rovnost $H((X, Z) | (X, Y)) = H(Z | (X, Y))$?
8. Platí nerovnost $I((X, Z) : (X, Y)) \geq H(X)$?
9. Pokud jsou Z a Y nezávislé, platí rovnost $I((X, Z) : (X, Y)) = H(X)$?
10. Pro obecné konečné náhodné veličiny s hodnotami v reálných číslech rozhodněte, zda platí:

- (a) $\mathcal{H}(X^2 | X) = 0$, kde X^2 značí veličinu $\omega \mapsto (X(\omega))^2$, nikoli tedy vektor (X, X) .
- (b) $\mathcal{H}(X | X^2) = 0$
- (c) $\mathcal{H}(X+Y | X) \geq \mathcal{H}(Y|X)$, zvažte platnost i opačné nerovnosti a rovnosti.
- (d) $\mathcal{H}(X + Y | Z + Y) \geq \mathcal{H}(X|Z)$, zvažte platnost i opačné nerovnosti a rovnosti.